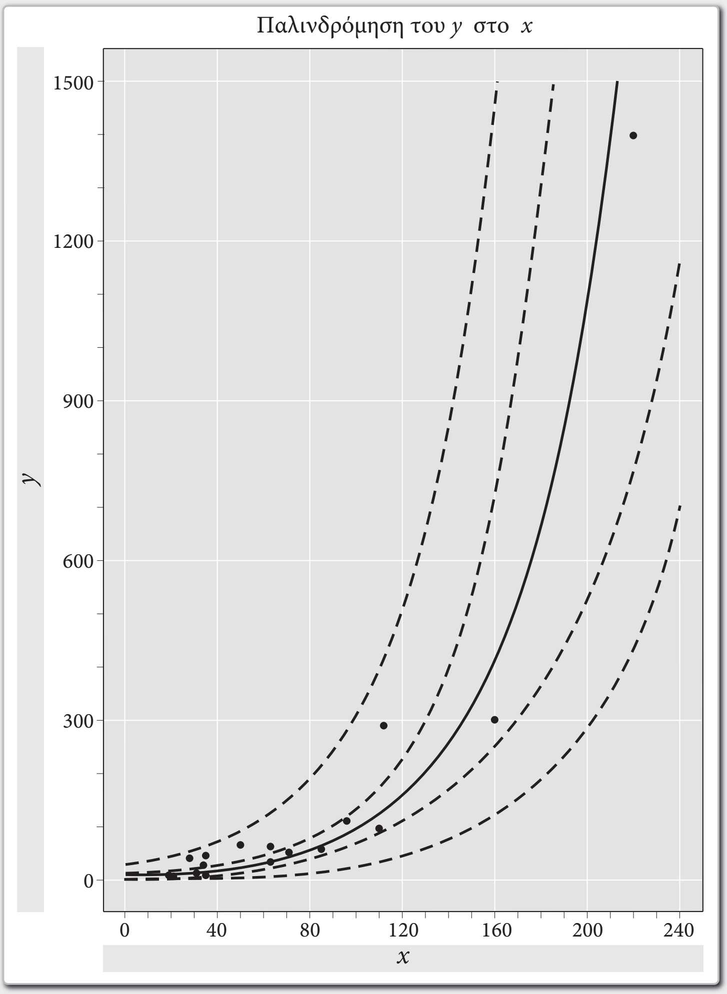
Φωτεινή Κολυβά - Μαχαίρα

Ευθυμία Μπόρα - Σέντα

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ

Επιμέλεια: **Φ. Κολυβά - Μαχαίρα**
Ε. Μπόρα - Σέντα

Επιτρέπεται η χρήση του τυπολογίου αυτού
από τους φοιτητές κατά τη διάρκεια των εξετάσεων

Φωτοστοιχειοθεσία
Εκτύπωση
Βιβλιοδεσία

Π. ΖΗΤΗ & Σια ΟΕ
18^{ο} χλμ Θεσσαλονίκης - Περαίας
Τ.Θ. 4171 • Περαία Θεσσαλονίκης • Τ.Κ. 570 19
Τηλ.: 2392.072.222 - Fax: 2392.072.229 • e-mail: info@ziti.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
www.ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ - ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ:
Αρμενοπούλου 27 - 546 35 Θεσσαλονίκη • Τηλ.: 2310-203.720 • Fax 2310-211.305
e-mail: sales@ziti.gr

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΑΠΟΘΗΚΗ ΑΘΗΝΩΝ:
Χαριλάου Τρικούπη 22 - Τ.Κ. 106 79, Αθήνα • Τηλ.-Fax: 210-3816.650
e-mail: athina@ziti.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ: www.ziti.gr

Μέση τιμή – Διασπορά τυχαίων μεταβλητών

α) Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$$Eg(x) = \sum_x g(x)p(x) \quad \text{όπου} \quad p(x) \text{ η σ.π. της } X.$$

$$Varx = \sum_x (x-\mu)^2 p(x)$$

β) Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

$$Eg(x) = \int_R g(x)f(x)dx \quad \text{όπου} \quad f(x) \text{ η σ.π.π. της } X.$$

$$Varx = \int_R (x-\mu)^2 f(x)dx .$$

Οι κυριότερες διακριτές κατανομές

Διωνυμική: $B(n, p)$ $\quad P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$

$$EX = np \quad VarX = np(1-p)$$

Υπεργεωμετρική: $P(X=x) = \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{\nu-x}}{\binom{N}{\nu}}, \quad x = 0, 1, \ldots, \nu$

$$EX = \frac{\nu k}{N} \quad VarX = \frac{k}{N}\cdot\frac{N-k}{N}\cdot\frac{N-\nu}{N-1}$$

Poisson: $P(\lambda)$ $\quad P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$

$$EX = \lambda \quad VarX = \lambda$$

Αρνητική διωνυμική: $P(X=x) = \binom{x-1}{\nu-1} p^\nu (1-p)^{x-\nu}, \quad x = \nu, \ \nu+1, \ldots$

$$EX = \frac{\nu}{p} \quad VarX = \frac{\nu(1-p)}{p^2}$$

Γεωμετρική: $P(X=x) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1, 2, \ldots$

$$EX = \frac{1}{p} \quad VarX = \frac{1-p}{p^2}$$

Οι κυριότερες συνεχείς κατανομές

Ομοιόμορφες: $U(\alpha, \beta)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$EX = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad VarX = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Κανονική: $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$EX = \mu \qquad VarX = \sigma^2$$

Γάμμα: $G(\alpha, \beta)$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$$

$$EX = \frac{\alpha}{\beta}, \quad VarX = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Εκθετική: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$

$$EX = \frac{1}{\lambda} \qquad VarX = \frac{1}{\lambda^2}$$

Δεσμευμένες πιθανότητες

Τύπος Bayes: $P(A / B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k) \cdot P(B / A_k)}{P(A_1) \cdot P(B / A_1) + \ldots + P(A_k) \cdot P(B / A_k)}$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ)

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. με $EX_i = \mu$ και $VarX_i = \sigma^2$, τότε:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{ή} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad \text{για} \quad n \ge 30$$

Στατιστικά δείγματος

α) Στατιστικά δείγματος για μη ομαδοποιημένα δεδομένα:

Μέση τιμή: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Διασπορά: $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$

Διάμεσος: $M_d = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{για } n \text{ περιττό} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & \text{για } n \text{ άρτιο} \end{cases}$

όπου $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ οι παρατηρήσεις κατ' αύξουσα σειρά μεγέθους.

β) Στατιστικά δείγματος για ομαδοποιημένα δεδομένα:

Μέση τιμή: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$

όπου k το πλήθος των τάξεων,
n_i η συχνότητα της i-τάξης και
x_i το κέντρο της.

Διασπορά: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$

P-ποσοστιαίο σημείο: $M_p = L + \frac{w}{n_m}\left(\frac{np}{100} - N_{m-1}\right)$

όπου L = το αριστερό άκρο του διαστήματος στο οποίο ανήκει το ποσοστιαίο σημείο (διάστημα αναφοράς)
N_{m-1} = η αθροιστική συχνότητα του διαστήματος που προηγείται του διαστήματος αναφοράς
n_m = η συχνότητα του διαστήματος αναφοράς
w = το πλάτος των διαστημάτων

γ) Δειγματική συνδιασπορά δύο δειγμάτων:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\cdot\overline{y}\right)$$

Διαστήματα εμπιστοσύνης – Έλεγχοι υποθέσεων

Πίνακας 5.1: *Διαστήματα εμπιστοσύνης*

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Μέγεθος δείγματος*	$100(1-a)\%$ *δ.ε.*
μ	σ^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\overline{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	$n \geq 30$	$\overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
	σ^2 άγνωστο	$n \leq 30$	$\overline{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$
σ^2			$\left(\frac{(n-1)s^2}{\mathcal{X}^2_{n-1;\, a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\mathcal{X}^2_{n-1;\, 1-a/2}} \right)$
p		$n \geq 30$	$\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$
		$n < 30$	άβακες
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστό	οτιδήποτε	$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$
	σ_1^2, σ_2^2 άγνωστο	$n, m \geq 30$	$\overline{x} - \overline{y} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}$

Πίνακας 5.1: *(συνέχεια)*

Παράμετρος πληθυσμού	*Προϋποθέσεις*	*Μέγεθος δείγματος*	100(1−a)% *δ.ε.*
$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ άγνωστο	$n, m < 30$	$\overline{x} - \overline{y} \pm t_{v;\, a/2} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$ όπου $s^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}$ και $v = n+m-2$
	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ άγνωστο	$n, m < 30$	$\overline{x} - \overline{y} \pm t_{v;\, a/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}}$ και $v = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{m}\right)^2}{m-1}}$ όταν $n \neq m$ ενώ $v = 2(n-1)$ όταν $n = m$
	ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$n < 30$	$\overline{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{n-1;\, a/2}$ όπου $\overline{z}$ η μέση τιμή των $x_i - y_i$ και s_z^2 η διασπορά των $x_i - y_i$
σ_1^2 / σ_2^2			$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} / F_{n-1,\, m-1;\, a/2},\ \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{m-1,\, n-1;\, a/2} \right)$
$p_1 - p_2$		$n, m \geq 30$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}$
		$n < 30$	άβακες

Πίνακας 5.2: *Έλεγχοι υποθέσεων που αναφέρονται σ' ένα δείγμα*

H_0	H_1	*Προϋποθέσεις*	*Απορρ. περιοχή R*	*Επεξηγήσεις*
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{z > z_{\mathrm{a}}\}$	όπου $z = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$
		σ^2 άγνωστο $n \geq 30$	$R = \{t > z_{\mathrm{a}}\}$	και $t = \dfrac{(\overline{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$
		σ^2 άγνωστο $n < 30$	$R = \{t > t_{n-1;\ \mathrm{a}}\}$	
	$\mu < \mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{z < -z_{\mathrm{a}}\}$	
		σ^2 άγνωστο $n \geq 30$	$R = \{t < -z_{\mathrm{a}}\}$	
		σ^2 άγνωστο $n < 30$	$R = \{t < -t_{n-1;\ \mathrm{a}}\}$	
	$\mu \neq \mu_0$	σ^2 γνωστό	$R = \{\lvert z \rvert > z_{\mathrm{a}/2}\}$	
		σ^2 άγνωστο $n \geq 30$	$R = \{\lvert t \rvert > z_{\mathrm{a}/2}\}$	
		σ^2 άγνωστο $n < 30$	$R = \{\lvert t \rvert > t_{n-1;\ \mathrm{a}/2}\}$	
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$R = \{X^2 > \mathcal{X}^2_{n-1;\ \mathrm{a}}\}$	όπου $X^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$R = \{X^2 < \mathcal{X}^2_{n-1;\ 1-\mathrm{a}}\}$	
	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$R = \{X^2 > \mathcal{X}^2_{n-1;\ \mathrm{a}/2}$ ή $X^2 < \mathcal{X}^2_{n-1;\ 1-\mathrm{a}/2}\}$	
$p = p_0$	$p > p_0$	$n > 30$	$R = \{z > z_{\mathrm{a}}\}$	όπου $z = \dfrac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$
	$p < p_0$	$n > 30$	$R = \{z < -z_{\mathrm{a}}\}$	και $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$
	$p \neq p_0$	$n > 30$	$R = \{\lvert z \rvert > z_{\mathrm{a}/2}\}$	(x=αριθμός επιτυχιών)

Πίνακας 5.3: *Έλεγχοι υποθέσεων που αναφέρονται σε δύο δείγματα*

H_0	H_1	*Προϋποθέσεις*	*Απορρ. περιοχή R*	*Επεξηγήσεις*
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2>\delta$	σ_1^2,σ_2^2 γνωστά	$R=\{z>z_a\}$	$z=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$ συνήθως $\delta=0$
		σ_1^2,σ_2^2 άγνωστα $n,m>30$	$R=\{z>z_a\}$	$z=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$
		$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ άγνωστο $n,m<30$	$R=\{t>t_{n+m-2;\,a}\}$	$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$, $s=\sqrt{\dfrac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}}$
		$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ άγνωστο $n,m<30$	$R=\{t>t_{v;\,a}\}$	$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$, όταν $n=m$, $v=2(n-1)$ όταν $n\neq m$, $v=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1}+\dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}$
		ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$R=\left\{\dfrac{\overline{z}\sqrt{n}}{s_z}>t_{n-1;\,a}\right\}$	όπου $\overline{z}$ και s_z η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των x_i-y_i

Πίνακας 5.3: *(συνέχεια)*

H_0	H_1	*Προϋποθέσεις*	*Απορρ. περιοχή R*	*Επεξηγήσεις*
$\mu_1-\mu_2=\delta$	$\mu_1-\mu_2<\delta$	$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ γνωστά	$R=\{z<-z_{\mathrm{a}}\}$	$z=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$ συνήθως $\delta=0$
		$\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ άγνωστα $n,\ m>30$	$R=\{z<-z_{\mathrm{a}}\}$	$z=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$
		$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ άγνωστο $n,\ m<30$	$R=\{t<-t_{n+m-2;\,\mathrm{a}}\}$	$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$ και $s=\sqrt{\dfrac{(n-1)s_1^2+(m-1)s_2^2}{n+m-2}}$
		$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ άγνωστα $n,\ m<30$	$R=\{t<-t_{v;\,\mathrm{a}}\}$	$t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}}}$ όταν $n=m,\ v=2(n-1)$ όταν $n\neq m$, $v=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n}+\dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1}+\dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}$
		ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$R=\left\{\dfrac{\overline{z}\sqrt{n}}{s_z}<t_{n-1;\,\mathrm{a}/2}\right\}$	όπου $\overline{z}$ και s_z η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των x_i-y_i

Πίνακας 5.3: *(συνέχεια)*

H_0	H_1	*Προϋποθέσεις*	*Απορρ. περιοχή R*	*Επεξηγήσεις*
$\mu_1 - \mu_2 = \delta$	$\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	σ_1^2, σ_2^2 γνωστά	$R = \{\lvert z \rvert > z_{a/2}\}$	$z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}}$ συνήθως $\delta = 0$
		σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα $n, m > 30$	$R = \{\lvert z \rvert > z_{a/2}\}$	$z = \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n} + \dfrac{s_2^2}{m}}}$
		$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ άγνωστο $n, m < 30$	$R = \{\lvert t \rvert > t_{n+m-2;\, a/2}\}$	$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{s\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}}$ $s = \sqrt{\dfrac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2}}$
		$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ άγνωστα $n, m < 30$	$R = \{\lvert t \rvert > t_{v;\, a/2}\}$	$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n} + \dfrac{s_2^2}{m}}}$ όταν $n = m,\ v = 2(n-1)$ όταν $n \neq m$, $v = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n} + \dfrac{s_2^2}{m}\right)^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1} + \dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}$
		ζευγαρωτές παρατηρήσεις	$R = \left\{\left\lvert \dfrac{\bar{z}\sqrt{n}}{s_z} \right\rvert > t_{n-1;\, a/2}\right\}$	όπου $\bar{z}$ και s_z η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των $x_i - y_i$

Πίνακας 5.3: *(συνέχεια)*

H_0	H_1	*Προϋποθέσεις*	*Απορρ. περιοχή R*	*Επεξηγήσεις*
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$s_1 > s_2$	$R = \left\{ \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n-1,\, m-1;\, \mathrm{a}} \right\}$	
ή $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$s_2 > s_1$	$R = \left\{ \frac{s_2^2}{s_1^2} > F_{m-1,\, n-1;\, \mathrm{a}} \right\}$	
	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$s_1^2 \geq s_2^2$	$R = \left\{ \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n-1,\, m-1;\, \mathrm{a}/2} \right\}$	
		$s_2^2 \geq s_1^2$	$R = \left\{ \frac{s_2^2}{s_1^2} \geq F_{m-1,\, n-1;\, \mathrm{a}/2} \right\}$	
$p_1 - p_2 = \delta$	$p_1 - p_2 > \delta$	$n,\, m \geq 30$	$R = \{z > z_{\mathrm{a}}\}$	$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \delta}{s}$, $\hat{p}_1 = \frac{x}{n}$, $\hat{p}_2 = \frac{y}{m}$
	$p_1 - p_2 < \delta$	$n,\, m \geq 30$	$R = \{z < -z_{\mathrm{a}}\}$	όταν δ=0, $s = \sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$, $\hat{p} = \frac{x+y}{n+m}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$
				όταν
	$p_1 - p_2 \neq \delta$	$n,\, m \geq 30$	$R = \{\lvert z \rvert > z_{\mathrm{a}/2}\}$	$\delta \neq 0$, $s = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{m}}$, $\hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1$, $\hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2$

Πίνακας 5.4

Τύπος	*Προϋποθέσεις*
$n \geq \left[\dfrac{z_{a/2}\sigma}{d}\right]^2$	Ισχύει όταν η διασπορά σ^2 του πληθυσμού είναι γνωστή και το 100(1–a)% δ.ε. θέλουμε να έχει εύρος το πολύ d. Όταν σ^2 άγνωστο χρησιμοποιούμε μια οποιαδήποτε εκτίμησή του.
$n \geq pq\left[\dfrac{z_{a/2}}{d}\right]^2$	Ο τύπος χρησιμοποιείται όταν γνωρίζουμε το $\hat{p}$ ή το p του πληθυσμού και το δ.ε. θέλουμε να έχει εύρος το πολύ d.
$n \leq \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{z_{a/2}}{d}\right]^2$	Ο τύπος δίνει ένα άνω φράγμα για το n στην περίπτωση που μας είναι τελείως άγνωστο το p.
$n \geq \dfrac{\sigma^2(z_a + z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$	Αναφέρεται στον έλεγχο $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu = \mu_1 \; \mu_1 > \mu_0$ και a και β είναι τα μεγέθη των σφαλμάτων τύπου I και II. Το z_a αντικαθίσταται με το $z_{a/2}$ όταν $H_1 : \mu \neq \mu_1$ και το σ^2 με το s^2 όταν $n \geq 30$ και σ^2 άγνωστο.

Δοκιμασία X^2

Έλεγχος προσαρμογής X^2

$H_0 : p_1 = p_{10}, \ldots, p_k = p_{k0}$

$H_1 : p_i \neq p_{i0}$ για κάποιο i

$$\boxed{R = \{X^2 > \mathcal{X}^2_{k-m-1;\, a}\}}$$

όπου $X^2 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(n_i - \theta_i)^2}{\theta_i} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i^2}{\theta_i} - n$,

$n_i =$ παρατηρούμενα μεγέθη

$\theta_i = np_i =$ θεωρητικά μεγέθη

$k =$ πλήθος κατηγοριών

$m =$ πλήθος εκτιμώμενων παραμέτρων

Περιορισμός: $\theta_i \geq 5$.

Έλεγχος ανεξαρτησίας και ομοιογένειας X^2

$H_0 : p_{ij} = p_i \cdot p_j$ για όλα τα (i, j)

$H_1 : p_{ij} \neq p_i \cdot p_j$ για κάποια (i, j)

$$\boxed{R = \{X^2 > \mathcal{X}^2_{(s-1)(k-1);\ \text{a}}\}}$$

όπου $\quad X^2 = \sum_{i,\,j} \frac{(n_{ij} - \theta_{ij})^2}{\theta_{ij}} = \sum_{i,\,j} \frac{n_{ij}^2}{\theta_{ij}} - n$

s = πλήθος γραμμών του πίνακα συνάφειας
k = πλήθος στηλών » » »
n = μέγεθος δείγματος
n_{ij} = παρατηρούμενο μέγεθος στη θέση (i, j) του πίνακα συνάφειας
θ_{ij} = θεωρητικό μέγεθος στη θέση (i, j) του πίνακα συνάφειας

$$\theta_{ij} = \frac{(\text{άθροισμα } i \text{ γραμμής}) \cdot (\text{άθροισμα } j \text{ στήλης})}{(\text{γενικό άθροισμα})}$$

Περιορισμός: $\theta_{ij} \geq 5$.

Γραμμική Παλινδρόμηση – Συσχέτιση

Για το μοντέλο $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ ισχύουν:

$$\hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad \hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{n-1}{n-2}\left(s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}\right) = \frac{n-1}{n-2}(s_y^2 - \hat{\beta}^2 s_x^2)$$

$$s_\alpha^2 = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{(n-1)s_x^2}\right), \quad s_\beta^2 = \frac{s^2}{(n-1)s_x^2}$$

100(1–a)% δ.ε. για το α: $\quad (\hat{\alpha} \pm s_\alpha \cdot t_{n-2;\ \text{a}/2})$

100(1–a)% δ.ε. για το β: $\quad (\hat{\beta} \pm s_\beta \cdot t_{n-2;\ \text{a}/2})$

100(1–a)% δ.ε. για το $E(\hat{Y})$: $\quad \left(\hat{y} \pm s \cdot t_{n-2;\ \text{a}/2}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{x})^2}{(n-1)s_x^2}}\right)$..

100(1–a)% δ.ε. για τη διαφορά $\beta_1 - \beta_2$: $\quad \left(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \pm s_0 t_{n_1+n_2-4;\ \text{a}/2}\sqrt{\frac{n_1-1}{s_{x_1}^2} + \frac{n_2-1}{s_{x_2}^2}}\right)$

όπου $s_0^2 = \frac{(n_1-2)s_{x_1}^2 + (n_2-2)s_{x_2}^2}{n_1+n_2-4}$.

Για το γενικό γραμμικό μοντέλο $\underset{\sim}{Y} = X \cdot \underset{\sim}{\beta} + e$ ισχύουν:

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1} X'\underset{\sim}{Y} \quad \text{με} \quad s^2 = \frac{\underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X\underset{\sim}{X}}{n-(k+1)}$$

Συντελεστής συσχέτισης: $\rho = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{VarX \cdot VarY}}$, $\quad r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R = \left\{ |t| = \frac{\left| r\sqrt{n-2} \right|}{\sqrt{1-r^2}} > t_{n-2;\, a/2} \right\}}$$

Συντελεστής μερικής συσχέτισης: $r_{y1,2} = \dfrac{r_{y1} - r_{y2} r_{12}}{\sqrt{(1-r_{y2})^2 (1-r_{12}^2)}}$

$$r_{y2,1} = \frac{r_{y2} - r_{y1} r_{12}}{\sqrt{(1-r_{y1})^2 (1-r_{12})^2}}$$

Ανάλυση Διασποράς

Ανάλυση Διασποράς για έναν παράγοντα

Θεωρητικό μοντέλο: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$

όπου μ = γενικός μέσος

α_i = η επίδραση του παράγοντα A στο i δείγμα

e_{ij} = τυχαία σφάλματα από κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$

Πίνακας Ανάλυσης Διασποράς για σύγκριση των μέσων τιμών k δειγμάτων

Πηγή μεταβολής	*Άθροισμα τετραγώνων (SS)*	*β.ε*	*Μέση μεταβολή (MS)*	*F*
Μεταξύ δειγμάτων (παράγοντας Α)	$SSA = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2$	$k-1$	$MSA = \dfrac{SSA}{k-1}$	$F = \dfrac{MSA}{MSE}$
Μέσα στα δείγματα (υπόλοιπο ή σφάλμα)	$SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$	$n-k$	$MSE = \dfrac{SSE}{n-k}$	
Ολική	$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2$	$n-1$		

όπου: y_{ij} είναι η j παρατήρηση του i δείγματος

n_i είναι το πλήθος των παρατηρήσεων του i δείγματος.

$\overline{y}_i$ είναι η δειγματική μέση τιμή του i δείγματος, δηλαδή:

$$\overline{y}_i = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} / n_i$$

k είναι το πλήθος των δειγμάτων

$\overline{y}$ είναι ο γενικός δειγματικός μέσος

$$\overline{y} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} / n$$

n είναι το πλήθος όλων των παρατηρήσεων δηλαδή $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

Υποθέσεις που ελέγχονται:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ ή $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ για κάποια i και j ή $\alpha_i \neq 0$ για κάποιο i.

$$\boxed{R = \{F > F_{k-1,\ n-k;\ \mathrm{a}}\}}$$

Ανάλυση διασποράς για δύο παράγοντες και $r = 1$

Θεωρητικό μοντέλο: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + b_j + e_{ij}$

όπου $\mu =$ γενικός μέσος

$\alpha_i =$ η επίδραση του παράγοντας A στην i-στάθμη

$b_j =$ η επίδραση του παράγοντα B στην j-στάθμη

$e_{ij} =$ τυχαία σφάλματα από $N(0, \sigma^2)$ κατανομή

Υποθέσεις που ελέγχονται:

i) $H_{0A} : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$

$H_{1A} : \alpha_i \neq 0$ για κάποιο i

ii) $H_{0B} : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\lambda = 0$

$H_{1B} : \beta_j \neq 0$ για κάποιο j

Απορριπτικές περιοχές:	της H_{0A} : $\mathrm{R} = \{\mathrm{F}_A > F_{k-1,\ (k-1)(\lambda-1);\ \mathrm{a}}\}$
	της H_{0B} : $\mathrm{R} = \{\mathrm{F}_B > F_{\lambda-1,\ (k-1)(\lambda-1);\ \mathrm{a}}\}$

Πίνακας Ανάλυσης Διασποράς με δύο παράγοντες χωρίς αλληλεπίδραση

Πηγή	*Άθροισμα τετραγώνων*	*β.ε*	*Μέσα τετράγωνα*	*F*
Παράγοντας A	$SSA = \lambda \sum_{i=1}^{k} (\overline{y}_{i\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2$	$k-1$	$MSA = \frac{SSA}{k-1}$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$
Παράγοντας B	$SSB = k \sum_{j=1}^{\lambda} (\overline{y}_{\bullet j} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2$	$\lambda-1$	$MSB = \frac{SSB}{\lambda-1}$	$F_B = \frac{MSB}{MSE}$
Σφάλματα	$SSE = SST - SSA - SSB$	$(k-1)(\lambda-1)$	$MSE = \frac{SSE}{(\kappa-1)(\lambda-1)}$	
Ολική μεταβολή	$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda} (y_{ij} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2$	$k\lambda-1$		

όπου: y_{ij} είναι η παρατήρηση στην i γραμμή και j στήλη του πίνακα των δεδομένων

k είναι το πλήθος των γραμμών (στάθμες του παράγοντα A)

λ είναι το πλήθος των στηλών (στάθμες του παράγοντα B)

$n = k \cdot \lambda$ το σύνολο των παρατηρήσεων

$$\overline{y}_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\lambda} y_{ij} / k \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\overline{y}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{k} y_{ij} / \lambda \quad j = 1, 2, \ldots, \lambda$$

$\overline{Y}_{\bullet\bullet}$ είναι ο γενικός μέσος: $\overline{Y}_{\bullet\bullet} = \sum_{i,j} y_{ij} / n$

Ανάλυση διασποράς για δύο παράγοντες και $r > 1$

Θεωρητικό μοντέλο: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk}$

όπου μ, α_i, β_j, e_{ijk} είναι ίδια με την προηγούμενη περίπτωση και

γ_{ij} είναι η αλληλεπίδραση της i στάθμης του παράγοντα A και της j του παράγοντα B.

Πίνακας δεδομένων

Παράγοντας Α	Παράγοντας Β			
	B_1	B_2	…	B_λ
A_1	y_{111}	y_{121}	…	$y_{1\lambda 1}$
	y_{112}	y_{122}	…	$y_{1\lambda 2}$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	y_{11r}	y_{12r}	…	$y_{1\lambda r}$
A_2	y_{211}	y_{221}	…	$y_{2\lambda 1}$
	y_{212}	y_{222}	…	$y_{2\lambda 2}$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	y_{21r}	y_{22r}	…	$y_{2\lambda r}$
	⋮	⋮	⋮	⋮
A_k	y_{k11}	y_{k21}	…	$y_{k\lambda 1}$
	y_{k12}	y_{k22}	…	$y_{k\lambda 2}$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	y_{k1r}	y_{k2r}	…	$y_{k\lambda r}$

Πίνακας αθροισμάτων

A \ B	B_1	B_2	…	B_λ	*Σύνολο*
A_1	$T_{11\bullet}$	$T_{12\bullet}$	…	$T_{1\lambda\bullet}$	$T_{1\bullet\bullet}$
A_2	$T_{21\bullet}$	$T_{22\bullet}$	…	$T_{2\lambda\bullet}$	$T_{2\bullet\bullet}$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_k	$T_{k1\bullet}$	$T_{k2\bullet}$	…	$T_{k\lambda\bullet}$	$T_{k\bullet\bullet}$
Σύνολο	$T_{\bullet 1\bullet}$	$T_{\bullet 2\bullet}$	…	$T_{\bullet\lambda\bullet}$	$T_{\bullet\bullet\bullet}$

$$\overline{Y}_{i\bullet\bullet} = T_{i\bullet\bullet} / \lambda, \quad \overline{Y}_{\bullet j\bullet} = T_{\bullet j\bullet} / k, \quad \overline{Y}_{ij\bullet} = T_{ij\bullet} / r, \quad \overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = T_{\bullet\bullet\bullet} / k\lambda r$$

Πίνακας Ανάλυσης Διασποράς για α.δ. με δύο παράγοντες και αλληλεπίδραση

Πηγή	*Αθροίσματα τετραγώνων*	*β.ε*	*Μέση μεταβολή*	*F*
Παράγοντας A	$SSA = \lambda r \sum_{i=1}^{k} (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$k-1$	$MSA = \dfrac{SSA}{k-1}$	$F_A = \dfrac{MSA}{MSE}$
Παράγοντας B	$SSB = kr \sum_{j=1}^{\lambda} (\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$\lambda-1$	$MSB = \dfrac{SSB}{\lambda-1}$	$F_B = \dfrac{MSB}{MSE}$
Αλληλεπίδραση Α×Β	$SSAB =$ $= r \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda} (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$(k-1)(\lambda-1)$	$MSAB =$ $= \dfrac{SSAB}{(k-1)(\lambda-1)}$	$F_{AB} = \dfrac{MSAB}{MSE}$
Σφάλμα	$SSE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{r} (y_{ij\mu} - \bar{y}_{ij\bullet})^2$	$k\lambda(r-1)$	$MSE = \dfrac{SSE}{k\lambda(r-1)}$	
Υπόλοιπο	$SST = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{r} (y_{ij\mu} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$	$k\lambda r - 1$		

Υποθέσεις που ελέγχονται:

i) H_{0A}: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ (ο παράγοντας A δεν επιδρά)

H_{1A}: $\alpha_i \neq 0$ για κάποιο i

ii) H_{0B}: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\lambda = 0$ (ο παράγοντας B δεν επιδρά)

H_{1B}: $\beta_j \neq 0$ για κάποιο j

iii) H_{0AB}: $\gamma_{ij} = 0$ για κάθε i και j (δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων A και B)

H_{1AB}: $\gamma_{ij} \neq 0$ για κάποια i και j.

Απορριπτικές περιοχές:
της H_{0A}: $\mathrm{R} = \{\mathrm{F}_A > F_{k-1,\, k\lambda(r-1);\, \mathrm{a}}\}$
της H_{0B}: $\mathrm{R} = \{\mathrm{F}_B > F_{\lambda-1,\, k\lambda(r-1);\, \mathrm{a}}\}$
της H_{0AB}: $\mathrm{R} = \{\mathrm{F}_{AB} > F_{(k-1)(\lambda-1),\, k\lambda(r-1);\, \mathrm{a}}\}$

Μη παραμετρικές δοκιμασίες

	Τύπος μεταβλητής	*Κριτήρια*
1 δείγμα	ποιοτική ποσοτική	X^2 ροών Kolmogorov - Smirnov
2 δείγματα ανεξάρτητα	ποιοτική ποσοτική	X^2 διαμέσου, Mann-Whitney, Kolmogorov - Smirnov, Wald - Wolfowitz,
2 δείγματα εξαρτημένα	ποιοτική ποσοτική	Mc Nemar προσημικό, Wilcoxon
k δείγματα ανεξάρτητα	ποσοτική	διαμέσου, Kruskal - Wallis
k δείγματα εξαρτημένα	ποιοτική ποσοτική	Cochran Friedman

Κριτήριο ροών

H_0: το δείγμα είναι τυχαίο ή δύο δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή

H_1: όχι η H_0

$n_1,\ n_2 \le 10$ $\boxed{R = \{u : P(\mathcal{U} \le k_1) = P(\mathcal{U} \ge k_2) = \mathrm{a}/2\}}$

$n_1,\ n_2 > 10$ $\boxed{R = \left\{ u : \dfrac{|u - \mu_u|}{\sigma_u} > z_{\mathrm{a}/2} \right\}}$, όπου: u το πλήθος των ροών στο δείγμα και

$$\mu_u = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1, \quad \sigma_u^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_2 - n_1)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}$$

Κριτήριο Kolmogorov - Smirnov για ένα δείγμα

$H_0: F(x) = F_0(x)$

$H_1: F(x) \ne F_0(x)$

$$\boxed{R = \{D_n > D_{n;\,\mathrm{a}}\}}$$

όπου $D_n = \sup\limits_{x_i} |F_n(x_i) - F_0(x_i)|$

Κριτήριο Kolmogorov - Smirnov για δύο δείγματα

$H_0: F(x) = G(x)$
$H_1: F(x) \neq G(x)$

$$\boxed{R = \{D_{n,\,m} > D_{n,\,m;\,\mathrm{a}}\}}$$

όπου $D_{n,\,m} = \sup\limits_{x_i} |F_n(x_i) - G_m(x_i)|$

Κριτήριο Wilcoxon - Mann - Whitney

$H_0: \mu_x = \mu_y$
$H_1: \mu_x \neq \mu_y$ για $n < m$ $W = \sum_{i=1}^{n} r_i$

$$U_1 = nm + \frac{(n+1)n}{2} - W, \qquad U_2 = nm - U_1, \qquad U = \min\{U_1,\, U_2\}$$

$m \leq 20$ $R = \{P(U) \leq k_1) \leq \mathrm{a}/2\}$ ή $R = \{P(U \geq k_2) \leq \mathrm{a}/2\}$ από πίνακες

$m > 20$ $R = \left\{ \dfrac{|U - \mu_U|}{\sigma_U} \geq z_{\mathrm{a}/2} \right\}$ όπου $\mu_U = \dfrac{nm}{2}$ και $\sigma_U^2 = \dfrac{nm(n+m-1)}{12}$

Προσημικό κριτήριο

$H_0: \mu_x = \mu_y \Leftrightarrow d = 0$

$H_1: \mu_x \neq \mu_y \Leftrightarrow d \neq 0$, $H_1': \mu_x > \mu_y \Leftrightarrow d > 0$, $H_1'': \mu_x < \mu_y \Leftrightarrow d < 0$

$\boxed{R = \{|z| > z_{\mathrm{a}/2}\}}$, $\boxed{R = \{z > z_{\mathrm{a}}\}}$, $\boxed{R = \{z < -z_{\mathrm{a}}\}}$

όπου $z = \dfrac{2T - n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 20$ και T το πλήθος των θετικών διαφορών,

ή

$$z = \begin{cases} \dfrac{2T + 1 - n}{\sqrt{n}} & \alpha\nu \ \ T > \dfrac{n}{2} \\[2ex] \dfrac{2T - 1 - n}{\sqrt{n}} & \alpha\nu \ \ T < \dfrac{n}{2} \end{cases}, \quad 10 \leq n < 20$$

Για $n < 10$

$\boxed{R = \left\{ P(T \leq k) \leq \dfrac{\mathrm{a}}{2} \right\}}$ ή $\boxed{R = \{P(T \leq k) \leq \mathrm{a}\}}$ όπου $T = \min\{T^+,\, T^-\}$.

Κριτήριο Wilcoxon

$H_0: d = 0$

$H_1: d \neq 0$ ή $d > 0$ ή $d < 0$ $\quad T = \min\{T^+, T^-\}$

$n \leq 25$ από πίνακες

$n > 25$ $\boxed{R = \left\{ \frac{|T - \mu_T|}{\sigma_T} > z_{a/2} \right\}}$, $\boxed{R = \left\{ \frac{(T^+ - \mu_T)}{\sigma_T} > z_a \right\}}$, $\boxed{R = \left\{ \frac{(T^- - \mu_T)}{\sigma_T} < -z_a \right\}}$

όπου $\mu_T = \frac{n(n+1)}{4}$, $\sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$.

Κριτήριο Kruskal - Wallis

H_0: τα k δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

H_1: όχι η H_0

$$\boxed{R = \left\{ H > \mathcal{X}^2_{k-1;\, a} \right\}}$$

όπου: $H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$

όπου: $n_i =$ το μέγεθος του i δείγματος, $i = 1, 2, \ldots, k$

$k =$ το πλήθος των δειγμάτων

$R_i =$ το άθροισμα των βαθμών του i δείγματος στο ενιαίο δείγμα

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Αν υπάρχουν δεσμοί (πολλαπλές τιμές): $\boxed{R = \left\{ H' = \frac{H}{c} > \mathcal{X}^2_{k-1;\, a} \right\}}$ όπου:

$$c = 1 - \frac{1}{n(n^2 - 1)} \sum_{j=1}^{\rho} \mu_j (\mu_j^2 - 1)$$

$\rho =$ το πλήθος των πολλαπλών τιμών

$\mu_j =$ η πολλαπλότητα της τιμής j.

Κριτήριο Friedman

H_0: τα k δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

H_1: όχι η H_0

$\boxed{R = \{\mathcal{F} > \mathcal{F}_{n,\, k;\, a}\}}$ για $k = 3$ και $n = 1, 2, \ldots, 9$,

$k = 4$ και $n = 2, 3, 4$

$\boxed{R=\{\mathcal{F}>\mathcal{X}^2_{k-1;\,\mathrm{a}}\}}$ για τις υπόλοιπες τιμές των k και n.

όπου: $\mathcal{F}=\dfrac{12}{nk(k+1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}R_1^2-3n(k+1)$

n = μέγεθος των δειγμάτων

k = πλήθος των δειγμάτων

R_i = άθροισμα τάξεων του i δείγματος (η ταξινόμηση γίνεται σε καθεμιά από τις παρατηρήσεις)

Κριτήριο Q του Cochran

H_0: τα k δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό

H_1: όχι η H_0

$$\boxed{R=\left\{Q=\frac{(k-1)\left[k\displaystyle\sum_{j=1}^{k}G_j^2-\left(\sum_{j=1}^{k}G_j\right)^2\right]}{k\displaystyle\sum_{i=1}^{n}L_i-\sum_{i=1}^{n}L_i^2}>\mathcal{X}^2_{k-1;\,\mathrm{a}}\right\}}$$

G_j = το πλήθος των επιτυχιών της j στήλης

L_i = » » » » » i γραμμής

Τα δεδομένα δίνονται σε μορφή πίνακα $n\times k$.

Συντελεστής συσχέτισης του Spearman

$$r_s=1-\frac{6\displaystyle\sum_{i=1}^{n}d_i^2}{n(n^2-1)}\quad\text{όπου}\quad d_i=r_{x_i}-r_{y_i}$$

H_0 : οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες

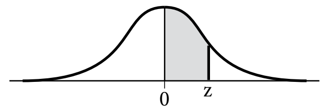
H_1 : οι τ.μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες

$n\le 10$ $\boxed{R=\{r_s\ge k\}}$ από πίνακες

$n>10$ $\boxed{R=\{t_s\ge t_{n-2;\,\mathrm{a}/2}\}}$ όπου $t_s=r_s\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r_s^2}}$

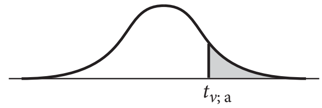
Πίνακες

Πίνακας: Πιθανοτήτων $P(0 < Z < z)$ για την κανονική κατανομή $N(0,\ 1)$



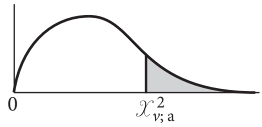
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Πίνακας: Τιμών $t_{\nu;\,a}$ της t_ν -κατανομής ώστε
$P(t_\nu > t_{\nu;\,a}) = a$



β.ε.	a=0,10	a=0,05	a=0,025	a=0,010	a=0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Πίνακας: Τιμών $\mathcal{X}^2_{\nu;\,a}$ της $\mathcal{X}^2$ κατανομής για τις οποίες $P(X^2 > \mathcal{X}^2_{\nu;\,a}) = a$



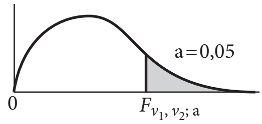
β.ε.	a = 0,995	a = 0,990	a = 0,975	a = 0,950	a = 0,900
1	0,0000393	0,0001571	0,0009821	0,0039321	0,0157908
2	0,0100251	0,0201007	0,0506356	0,102587	0,210720
3	0,0717212	0,114832	0,215795	0,351846	0,584375
4	0,206990	0,297110	0,484419	0,710721	1,063623
5	0,411740	0,554300	0,831211	1,145476	1,61031
6	0,675727	0,872085	1,237347	1,63539	2,20413
7	0,989265	1,239043	1,68987	2,16735	2,83311
8	1,344419	1,646482	2,17973	2,73264	3,48954
9	1,734926	2,087912	2,70039	3,32511	4,16816
10	2,15585	2,55821	3,24697	3,94030	4,86518
11	2,60321	3,05347	3,81575	4,57481	5,57779
12	3,07382	3,57056	4,40379	5,22603	6,30380
13	3,56503	4,10691	5,00874	5,89186	7,04150
14	4,07468	4,66043	5,62872	6,57063	7,78953
15	4,60094	5,22935	6,26214	7,26094	8,54675
16	5,14224	5,81221	6,90766	7,96164	9,31223
17	5,69724	6,40776	7,56418	8,67176	10,0852
18	6,26481	7,01491	8,23075	9,39046	10,8649
19	6,84398	7,63273	8,90655	10,1170	11,6509
20	7,43386	8,26040	9,59083	10,8508	12,4426
21	8,03366	8,89720	10,28293	11,5913	13,2396
22	8,64272	9,54249	10,9823	12,3380	14,0415
23	9,26042	10,19567	11,6885	13,0905	14,8479
24	9,88623	10,8564	12,4011	13,8484	15,6587
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734
26	11,1603	12,1981	13,8439	15,3791	17,2919
27	11,8076	12,8786	14,5733	16,1513	18,1138
28	12,4613	13,5648	15,3079	16,9279	18,9392
29	13,1211	14,2565	16,0471	17,7083	19,7677
30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4926	20,5992
40	20,7065	22,1643	24,4331	26,5093	29,0505
50	27,9907	29,7067	32,3574	34,7642	37,6886
60	35,5346	37,4848	40,4817	43,1879	46,4589
70	43,2752	45,4418	48,7576	51,7393	55,3290
80	51,1720	53,5400	57,1532	60,3915	64,2778
90	59,1963	61,7541	65,6466	69,1260	73,2912
100	67,3276	70,0648	74,2219	77,9295	82,3581

Πίνακας *(συνέχεια)*

a = 0,10	a = 0,05	a = 0,025	a = 0,010	a = 0,005	*β.ε.*
2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944	1
4,60517	5,99147	7,37776	9,21034	10,5966	2
6,25139	7,81473	9,34840	11,3449	12,8381	3
7,77944	9,48773	11,1433	13,2767	14,8602	4
9,23635	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496	5
10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476	6
12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777	7
13,3616	15,5073	17,5346	20,0902	21,9550	8
14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5893	9
15,9871	18,3070	20,4831	23,2093	25,1882	10
17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7569	11
18,5494	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995	12
19,8119	22,3621	24,7356	27,6883	29,8194	13
21,0642	23,6848	26,1190	29,1413	31,3193	14
22,3072	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013	15
23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672	16
24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185	17
25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1564	18
27,2036	30,1435	32,8523	36,1908	38,5822	19
28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968	20
29,6151	32,6705	35,4789	38,9321	41,4010	21
30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7956	22
32,0069	35,1725	38,0757	41,6384	44,1813	23
33,1963	36,4151	39,3641	42,9798	45,5585	24
34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9278	25
35,5631	38,8852	41,9232	45,6417	48,2899	26
36,7412	40,1133	43,1944	46,9630	49,6449	27
37,9159	41,3372	44,4607	48,2782	50,9933	28
39,0875	42,5569	45,7222	49,5879	52,3356	29
40,2560	43,7729	46,9792	50,8922	53,6720	30
51,8050	55,7585	59,3417	63,6907	66,7659	40
63,1671	67,5048	71,4202	76,1539	79,4900	50
74,3970	79,0819	83,2976	88,3794	91,9517	60
85,5271	90,5312	95,0231	100,425	104,215	70
96,5782	101,879	106,629	112,329	116,321	80
107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	90
118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	100

Για $\nu > 100$, $\mathcal{X}^2_{\nu;\,a} = \frac{1}{2}\left(z_a + \sqrt{2\nu - 1}\right)^2$

Πίνακας: Των τιμών $F_{v_1,v_2;\,a}$ της F -κατανομής για τις οποίες $P(F > F_{v_1,v_2;\,a}) = a$



v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

Πίνακας *(συνέχεια)*

10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ν_1 / ν_2
241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3	1
19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50	2
8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53	3
5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63	4
4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36	5
4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67	6
3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23	7
3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93	8
3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71	9
2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54	10
2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40	11
2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30	12
2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21	13
2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13	14
2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07	15
2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01	16
2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96	17
2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92	18
2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88	19
2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84	20
2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81	21
2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78	22
2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76	23
2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73	24
2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71	25
2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69	26
2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67	27
2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65	28
2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64	29
2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62	30
2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51	40
1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39	60
1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25	120
1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00	∞

Πίνακας: Κριτήριο Kolmogorov - Smirnov (για ένα δείγμα). Τιμές του $D_{n;\,a}$

Μέγεθος δείγματος n	Στάθμη σημαντικότητας a				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,210	0,220	0,240	0,270	0,320
30	0,190	0,200	0,220	0,240	0,290
35	0,180	0,190	0,210	0,230	0,270
40				0,210	0,250
50				0,190	0,230
60				0,170	0,210
70				0,160	0,190
80				0,150	0,180
90				0,140	
100				0,140	
Προσεγγιστικοί τύποι	$\frac{1,07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

Πίνακας: Κριτήριο Kolmogorov - Smirnov (για δύο δείγματα)
Τιμές του $D_{n,\, m;\, a}$

n	m											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *	* *		
2		* *	* *	* *	* *	* *	* *	7/8 *	16/18 *	9/10 *		
3			* *	* *	12/15 *	5/6 *	18/21 *	18/24 *	7/9 8/9		9/12 11/12	
4				3/4 *	16/20 *	9/12 10/12	21/28 24/28	6/8 7/8	27/36 32/36	14/40 16/20	8/12 10/12	
5					4/5 4/5	20/30 25/30	25/35 30/35	27/40 32/40	31/45 36/45	7/10 8/10		10/15 11/15
6						4/6 5/6	29/42 35/42	16/24 18/24	12/18 14/18	19/30 22/30	7/12 9/12	
7							5/7 5/7	35/56 42/56	40/63 47/63	43/70 53/70		
8								5/8 6/8	45/72 54/72	23/40 28/40	14/24 16/24	
9									5/9 6/9	52/90 62/90	20/36 24/36	
10										6/10 7/10		15/30 19/30
12											6/12 7/12	30/60 35/60
15												7/15 8/15

Σημ. 1: Οι πάνω και κάτω τιμές των τετραγώνων αναφέρονται σε επίπεδα σημαντικότητας a=0,05 και a=0,01 αντίστοιχα.

Σημ. 2: Ο * (αστερίσκος) σημαίνει αποδοχή της αρχικής υπόθεσης, δηλαδή ότι τα δείγματα προέρχονται από την ίδια κατανομή.

Σημ. 3: Για μεγάλα m και n τα δύο a-σημεία δίνονται κατά προσέγγιση από τους τύπους:

$$D_{n,\, m;\, 0{,}05} = 1{,}36\sqrt{\frac{m+n}{mn}}\,, \quad D_{n,\, m;\, 0{,}01} = 1{,}63\sqrt{\frac{m+n}{mn}}$$