



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

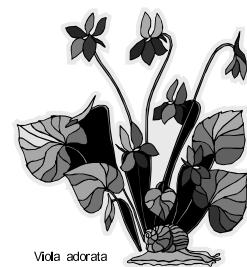
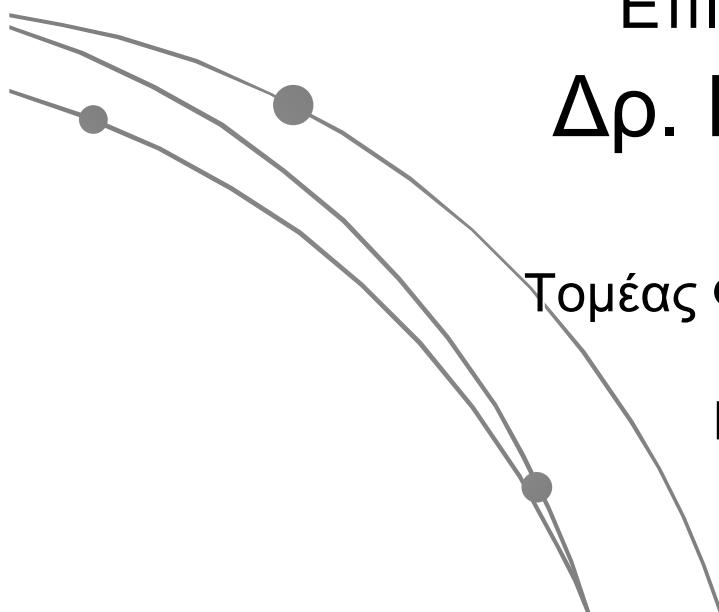


ΓΕΩΠΟΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
Α.Π.Θ.

# Βασικές Έννοιες Εκτιμητικής

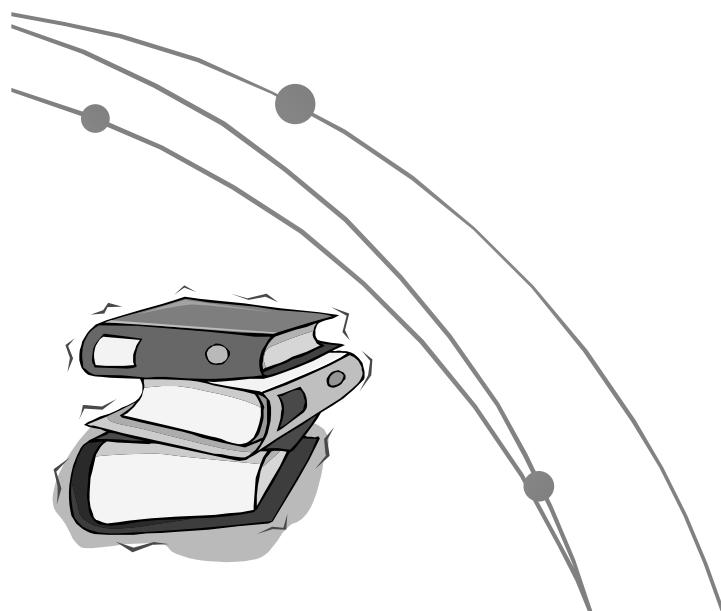
Επιστημονική Επιμέλεια:  
**Δρ. Γεώργιος Μενεξές**

Τομέας Φυτών Μεγάλης Καλλιέργειας  
και Οικολογίας  
Εργαστήριο Γεωργίας



Η παρουσίαση βασίζεται σε υλικό κυρίως  
από το...

- Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο  
(2003). *Σημειώσεις Στατιστικής*.



# Εκτιμητική: Διαστήματα Εμπιστοσύνης

- Διάστημα τιμών στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η τιμή μιας παραμέτρου  $\Theta$  με ορισμένη πιθανότητα  $1-\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$

$$P(l \leq \Theta \leq u) = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

- Είναι συνάρτηση του εκτιμητή  $\hat{\Theta}$  σε τυχαίο δείγμα και προσδιορίζεται με βάση την κατανομή του  $\hat{\Theta}$
- Το  $[l, u]$  ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα  $\alpha$  επίπεδο εμπιστοσύνης  $1-\alpha$ . Οι τιμές  $l$  και  $u$  ονομάζονται όρια εμπιστοσύνης του διαστήματος και η πιθανότητα  $\alpha$  για την οποία ισχύει

$$P(\Theta \notin [l, u]) = \alpha$$

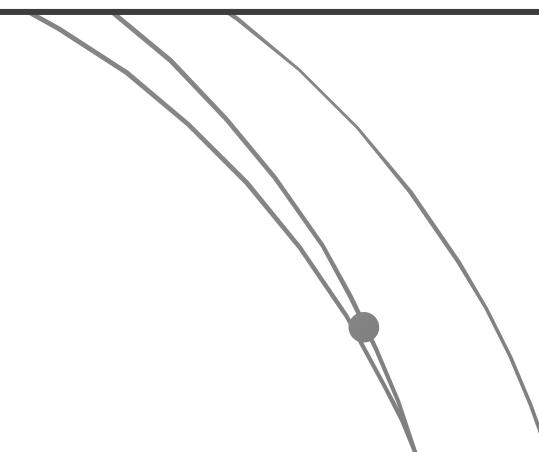
ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας

## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (Διασπορά Πληθυσμού Γνωστή) [ I ]

Αν έχουμε μία τυχαία μεταβλητή  $X$  η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή  $\mu$  και γνωστή διασπορά  $\sigma^2$ , τότε η μέση τιμή  $\bar{X}$  της μεταβλητής  $X$  θα ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/n)$  και η μεταβλητή

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή  $N(0, 1)$ . Συνεπώς το  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της τυπικής κανονικής κατανομής:



## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (Διασπορά Πληθυσμού Γνωστή) [ II ]

Έχουμε:

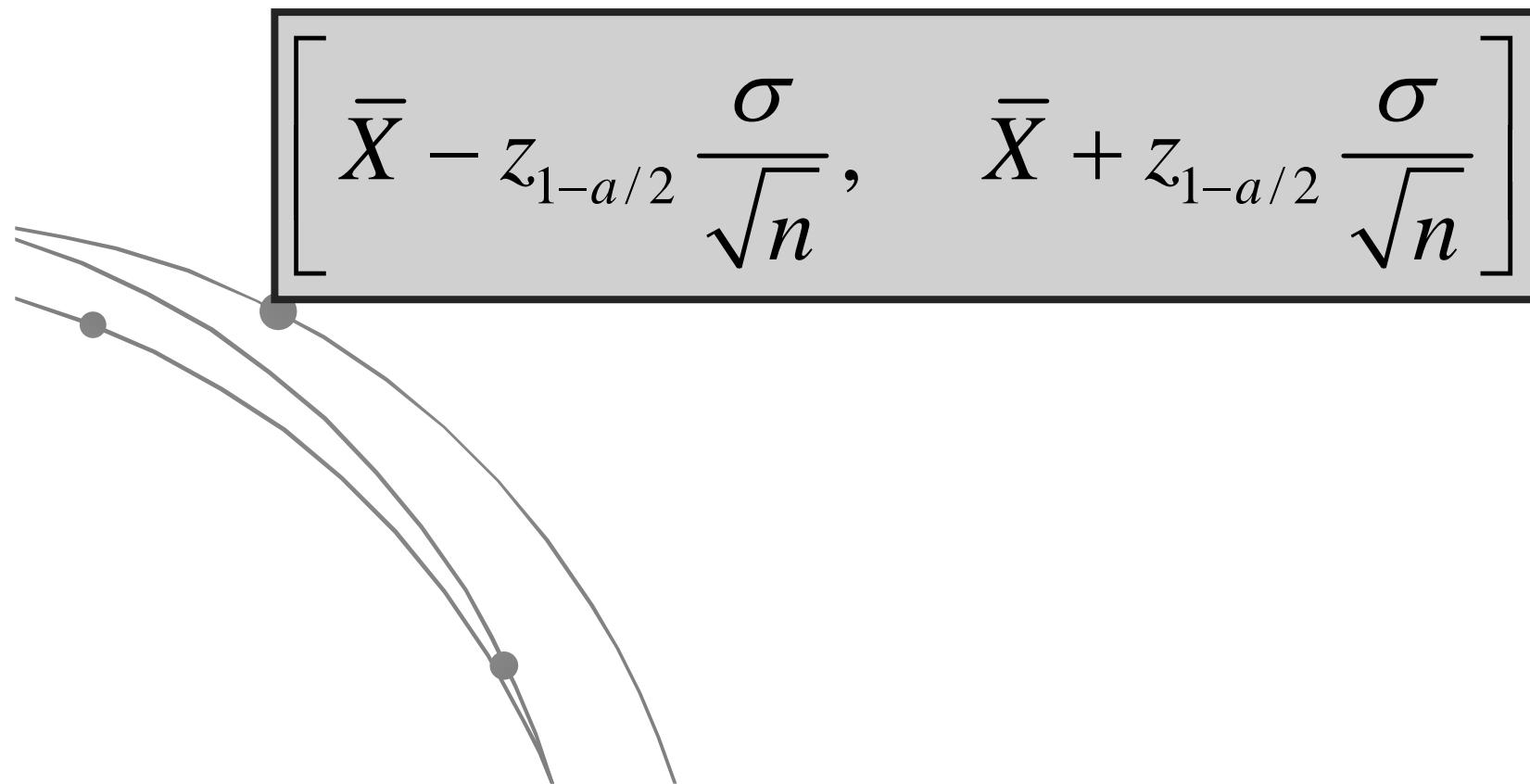
$$1-a = P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow$$
$$\left( \frac{\mu - \sigma}{\sqrt{n}}, \frac{\mu + \sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Άρα το  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή θα είναι:

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (Διασπορά Πληθυσμού Γνωστή) [ II ]



# Παράδειγμα 1

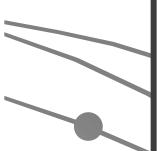
Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 18. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθούν τα 90%, 95% και 99% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Η μέση τιμή του δείγματος είναι  $\bar{X} = 49,44$ . Το πλήθος του δείγματος είναι 16. Από τον πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής παίρνουμε:

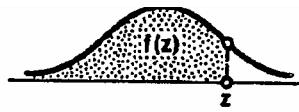
$$z_{0,95}=1,64 \text{ Άρα το } 90\% \text{ Δ.Ε. είναι: } [49,44-1,64*18/4, 49,44+1,64*18/4]=[42,06, 56,82].$$

$$z_{0,975}=1,96 \text{ Άρα το } 95\% \text{ Δ.Ε. είναι: } [49,44-1,96*18/4, 49,44+1,96*18/4]=[40,62, 58,26]$$

$$z_{0,995}=2,58 \text{ Άρα το } 99\% \text{ Δ.Ε. είναι: } [49,44-2,58*18/4, 49,44+2,58*18/4]=[37,83, 61,05]$$



ΠΙΝΑΚΑΣ 5: Αθροιστικές πιθανότητες της τυπικής  
κανονικής κατανομής



|     | 0.00    | 0.01    | 0.02    | 0.03    | 0.04    | 0.05    | 0.06    | 0.07    | 0.08    | 0.09    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.91088 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.93720 | 0.93850 | 0.93976 | 0.94105 | 0.94230 | 0.94353 | 0.94474 | 0.94594 | 0.94715 | 0.94832 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.97095 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97192 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99336 | 0.99366 | 0.99396 | 0.99426 | 0.99456 | 0.99481 | 0.99507 | 0.99532 | 0.99556 | 0.99580 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.99980 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |
| 3.7 | 0.99989 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99991 | 0.99991 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 |

## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη, $n < 30$ ) [ I ]

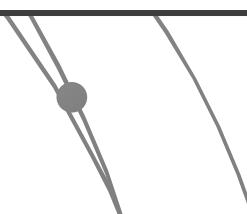
Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές όταν αγνοούμε τη μέση τιμή πληθυσμού αγνοούμε και την διακύμανση του. Στις περιπτώσεις αυτές εκτιμούμε τη διακύμανση του πληθυσμού με την τιμή της δειγματικής διακύμανσης

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Όταν η κατανομή πληθυσμού μπορεί να υποτεθεί κανονική, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί την κατανομή *t-student* με  $v=n-1$  βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς το  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της *t* κατανομής:



## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη, $n < 30$ ) [ II ]

Έχουμε:

$$1 - \alpha = P\left(-t_{v, \alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{v, \alpha/2}\right) \Rightarrow$$

$$1 - \alpha = P\left(-\frac{s}{\sqrt{n}} t_{v, \alpha/2} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{s}{\sqrt{n}} t_{v, \alpha/2}\right) \Rightarrow$$

$$\left[ \bar{X} - t_{v, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{v, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

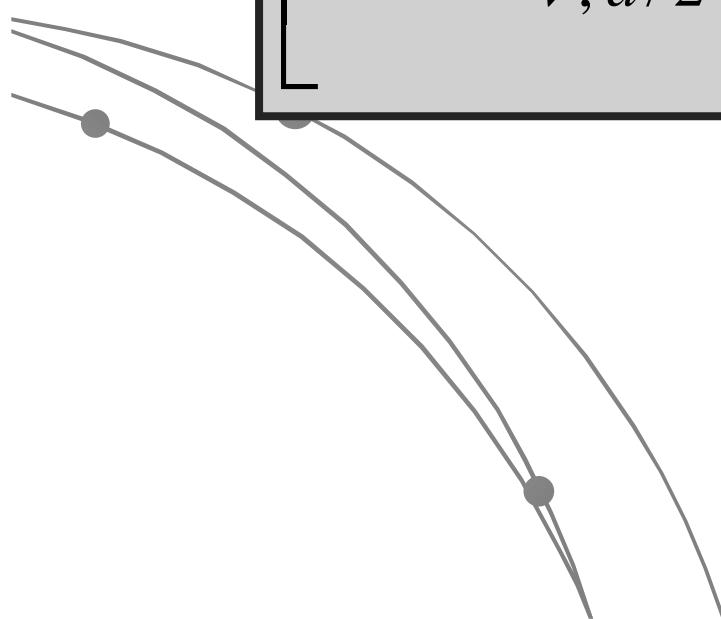
Επομένως, αν  $\bar{X}$  και  $s^2$  είναι η τιμή του μέσου και της διακύμανσης, αντίστοιχα, σε ορισμένο τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n$ , τότε θα εκτιμήσουμε ότι το διάστημα

$$\left[ \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{v, \alpha/2}, \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{v, \alpha/2} \right]$$

θα περιέχει την  $\mu$  με επίπεδο εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$ .

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού  
(Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη,  $n < 30$ ) [ II ]

$$\left[ \bar{X} - t_{\nu, a/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{\nu, a/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$



# Παράδειγμα 2

Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθούν τα 90%, 95% και 99% διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Έχουμε:

Η μέση τιμή του δείγματος είναι  $\bar{X} = 49,44$ . Η δειγματική διασπορά είναι  $s^2 = 451,33$

και η δειγματική τυπική απόκλιση είναι  $s = 21,24$ . Το πλήθος του δείγματος είναι 16. Από τον πίνακα της student κατανομής παίρνουμε:

$t_{15, 0.05} = 1,753$  Άρα το 90% Δ.Ε. είναι:  $[49,44 - 1,753 * 21,24 / 4, 49,44 + 1,753 * 21,24 / 4] = [40,13, 58,75]$ .

$t_{15, 0.025} = 2,131$  Άρα το 95% Δ.Ε. είναι:  $[49,44 - 2,131 * 21,24 / 4, 49,44 + 2,131 * 21,24 / 4] = [38,12, 60,76]$

$t_{15, 0.005} = 2,947$  Άρα το 99% Δ.Ε. είναι:  $[49,44 - 2,947 * 21,24 / 4, 49,44 + 2,947 * 21,24 / 4] = [33,79, 65,09]$

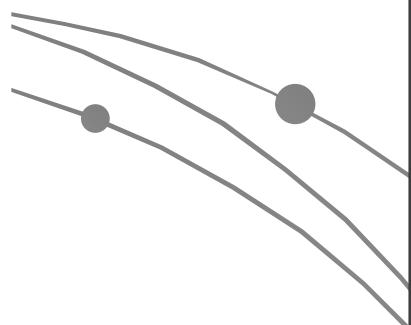
## Βασικοί Υπολογισμοί (Παράδειγμα 2)

| $X_i$         | $X_i - \bar{X}$ | $(X_i - \bar{X})^2$ |
|---------------|-----------------|---------------------|
| 61,00         | 11,56           | 133,63              |
| 32,00         | -17,44          | 304,15              |
| 35,00         | -14,44          | 208,51              |
| 26,00         | -23,44          | 549,43              |
| 25,00         | -24,44          | 597,31              |
| 59,00         | 9,56            | 91,39               |
| 46,00         | -3,44           | 11,83               |
| 99,00         | 49,56           | 2456,19             |
| 57,00         | 7,56            | 57,15               |
| 64,00         | 14,56           | 211,99              |
| 72,00         | 22,56           | 508,95              |
| 67,00         | 17,56           | 308,35              |
| 33,00         | -16,44          | 270,27              |
| 23,00         | -26,44          | 699,07              |
| 33,00         | -16,44          | 270,27              |
| 59,00         | 9,56            | 91,39               |
| <b>791,00</b> |                 | <b>6769,94</b>      |

ΠΙΝΑΚΑΣ 6: Κριτικές Τιμές της Κατανομής t-student



| $v$      | $\alpha$ |       |       |        |       |
|----------|----------|-------|-------|--------|-------|
|          | .100     | .050  | .025  | .010   | .005  |
| 1        | 3.078    | 6.314 | 12.76 | 31.821 | 63.57 |
| 2        | 1.886    | 2.20  | 4.03  | 6.965  | 9.25  |
| 3        | 1.638    | 2.53  | 3.82  | 4.541  | 5.41  |
| 4        | 1.533    | 2.32  | 2.76  | 3.747  | 4.04  |
| 5        | 1.476    | 2.15  | 2.71  | 3.365  | 4.32  |
| 6        | 1.440    | 1.93  | 2.47  | 3.143  | 3.07  |
| 7        | 1.415    | 1.85  | 2.65  | 2.998  | 3.099 |
| 8        | 1.397    | 1.80  | 2.86  | 2.896  | 3.355 |
| 9        | 1.383    | 1.73  | 2.62  | 2.821  | 3.350 |
| 10       | 1.372    | 1.72  | 2.88  | 2.764  | 3.69  |
| 11       | 1.363    | 1.76  | 2.01  | 2.718  | 3.06  |
| 12       | 1.356    | 1.82  | 2.79  | 2.681  | 3.55  |
| 13       | 1.350    | 1.71  | 2.70  | 2.650  | 3.42  |
| 14       | 1.345    | 1.71  | 2.45  | 2.624  | 2.77  |
| 15       | 1.341    | 1.753 | 2.131 | 2.602  | 2.947 |
| 16       | 1.337    | 1.746 | 2.120 | 2.583  | 2.921 |
| 17       | 1.333    | 1.740 | 2.110 | 2.567  | 2.898 |
| 18       | 1.330    | 1.734 | 2.101 | 2.552  | 2.878 |
| 19       | 1.328    | 1.729 | 2.093 | 2.539  | 2.861 |
| 20       | 1.325    | 1.725 | 2.086 | 2.528  | 2.845 |
| 21       | 1.323    | 1.721 | 2.080 | 2.518  | 2.831 |
| 22       | 1.321    | 1.717 | 2.074 | 2.508  | 2.819 |
| 23       | 1.319    | 1.714 | 2.069 | 2.500  | 2.807 |
| 24       | 1.318    | 1.711 | 2.064 | 2.492  | 2.797 |
| 25       | 1.316    | 1.708 | 2.060 | 2.485  | 2.787 |
| 26       | 1.315    | 1.706 | 2.056 | 2.479  | 2.779 |
| 27       | 1.314    | 1.703 | 2.052 | 2.473  | 2.771 |
| 28       | 1.313    | 1.701 | 2.048 | 2.467  | 2.763 |
| 29       | 1.311    | 1.699 | 2.045 | 2.462  | 2.756 |
| 30       | 1.310    | 1.697 | 2.042 | 2.457  | 2.750 |
| 40       | 1.303    | 1.684 | 2.021 | 2.423  | 2.704 |
| 60       | 1.296    | 1.671 | 2.000 | 2.390  | 2.660 |
| $\infty$ | 1.282    | 1.645 | 1.960 | 2.326  | 2.576 |



## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού (Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη, $n > 30$ )

Εφόσον η διακύμανση του πληθυσμού είναι άγνωστη, την εκτιμούμε με την τιμή της δειγματικής διακύμανσης

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Όταν η ~~μεταναστεύουσα πληθυσμού~~ υποστί να ~~υποτεθεί~~ κοινονική και το δείγμα είναι μεγάλο ( $n > 30$ )

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

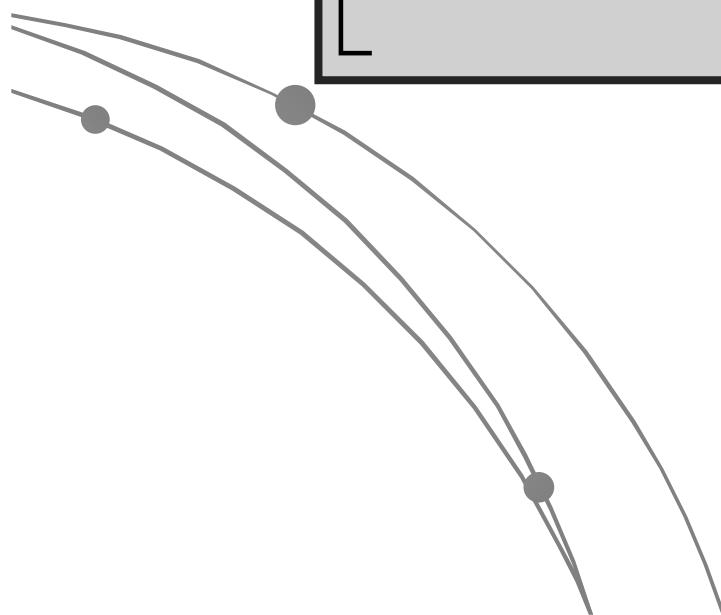
ακολουθαί~~στημα~~ στημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί όπως και στην πρώτη περίπτωση με τη μόνη διαφορά ότι θα χρησιμοποιήσουμε την δειγματική τυπική απόκλιση αντί της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού. Επομένως, αν  $\bar{X}$  και  $s^2$  είναι η τιμή του μέσου και της διακύμανσης, αντίστοιχα, σε ορισμένο τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n$ , τότε θα εκτιμήσουμε ότι το διάστημα

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} s/\sqrt{n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} s/\sqrt{n} \right]$$

θα περιέχει την  $\mu$  με επίπεδο εμπιστοσύνης  $1-\alpha$ .

Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Μέση Τιμή Πληθυσμού  
(Διασπορά Πληθυσμού Άγνωστη,  $n > 30$ )

$$\left[ \bar{X} - z_{1-a/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + z_{1-a/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

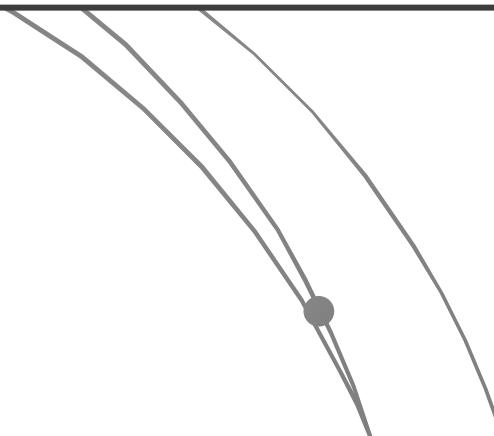


## Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Αναλογία $p$ Πληθυσμού ( $n > 30$ ) [ I ]

Αν η αναλογία στον πληθυσμό ισούται με  $p$  τότε η κατανομή της δειγματικής αναλογίας  $\hat{p}$  σε τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n$ , όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο ( $n \geq 30$ ), προσεγγίζει την κανονική  $N(p, p(1-p)/n)$  και η μεταβλητή

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}}$$

ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή  $N(0, 1)$ . Συνεπώς το  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για τη αναλογία μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της τυπικής κανονικής κατανομής:



## Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Αναλογία $p$ Πληθυσμού ( $n > 30$ ) [ II ]

Έχουμε:

$$1 - \alpha = P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow$$

$$1 - \alpha = P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \Rightarrow$$

$$\left[ \hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

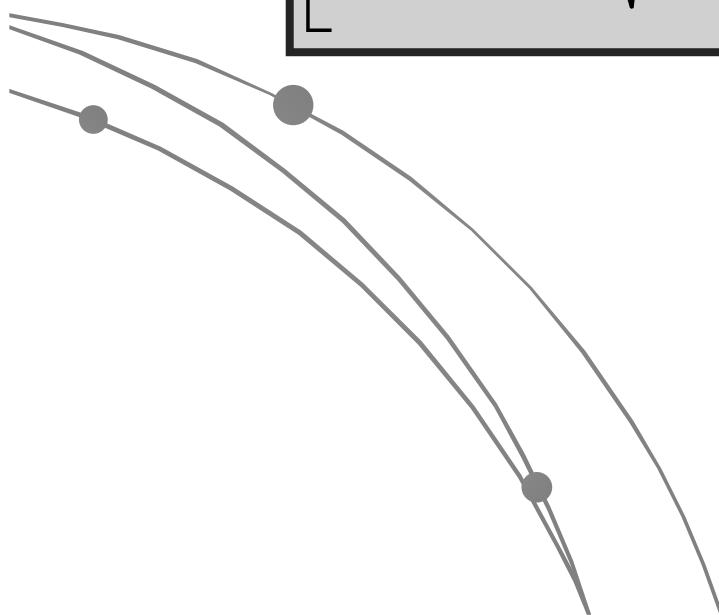
$$1 - \alpha = P\left(\hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \leq p \leq \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}\right)$$

Άρα το  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία θα είναι:

$$\left[ \hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}, \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \right]$$

## Διάστημα Εμπιστοσύνης για την Αναλογία $p$ Πληθυσμού ( $n > 30$ ) [ II ]

$$\left[ \hat{p} - z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{1-a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$



# Παράδειγμα 3

Σε τυχαίο δείγμα από 2000 εκλογείς μιας χώρας οι 400 υποστηρίζουν το κόμμα A. Να εκτιμηθεί διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα 95% για την αναλογία  $p$  των εκλογέων που υποστηρίζουν το κόμμα A.

Έχουμε  $\hat{p} = 400/2000 = 0,2$  και  $z_{0,975} = 1,96$ . Συνεπώς εκτιμούμε το ακόλουθο διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία  $p$  του πληθυσμού

$$\left[ \hat{p} - \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2}, \hat{p} + \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} z_{1-\alpha/2} \right] =$$
$$\left[ 0,2 - \sqrt{\frac{0,2 * 0,8}{2000}} 1,96, \quad 0,2 + \sqrt{\frac{0,2 * 0,8}{2000}} 1,96 \right] =$$
$$[0,2 - 0,018, \quad 0,2 + 0,018] = [0,182, \quad 0,218]$$

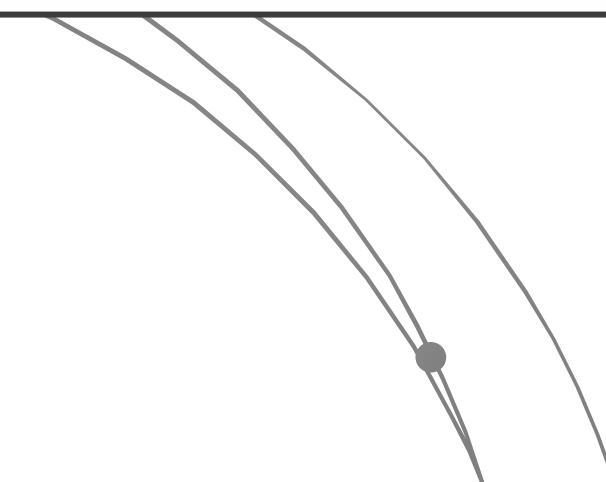
με επίπεδο εμπιστοσύνης 95%.

## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Διακύμανση Πληθυσμού [ I ]

Αν  $s^2$  η διακύμανση τυχαίου δείγματος μεγέθους  $n$  από μία κανονική τυχαία μεταβλητή με διακύμανση  $\sigma^2$ , τότε η τυχαία μεταβλητή

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

ακολουθεί την κατανομή  $\chi^2$  με  $v = n-1$  βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς το  $100(1-\alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας των πίνακα τιμών της χι-τετράγωνο κατανομής:



## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Διακύμανση Πληθυσμού [ II ]

Έχουμε:

$$1 - \alpha = P\left(\chi_{v,1-\alpha/2}^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{v,\alpha/2}^2\right) \Rightarrow$$

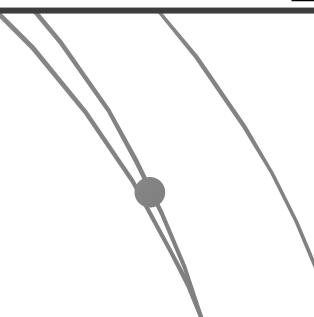
$$1 - \alpha = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,\alpha/2}^2} \leq s^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,1-\alpha/2}^2}\right)$$

$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,1-\alpha/2}^2} \right]$

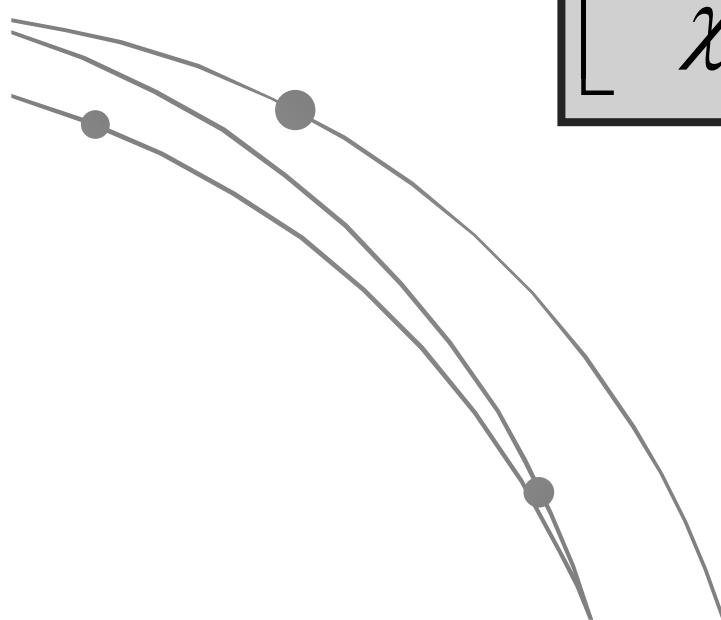
Επομένως, αν σε ορισμό  
εικτυμούμε ότι το διάστημα  
εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$  είναι

διακύμανση  $s^2$ , τότε  
ημού  $\sigma^2$  με επίπεδο

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,1-\alpha/2}^2} \right]$$



## Διάστημα Εμπιστοσύνης για τη Διακύμανση Πληθυσμού [ II ]



$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,a/2}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{v,1-a/2}^2} \right]$$

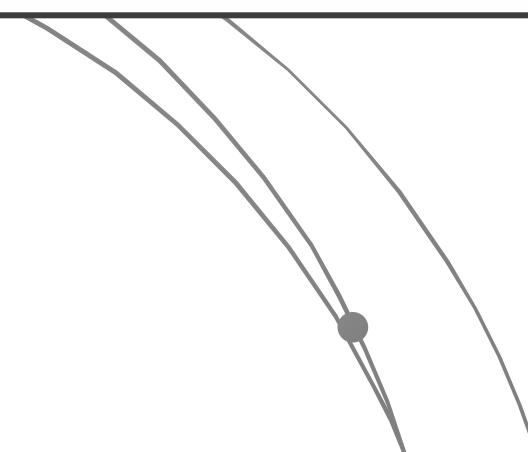
# Παράδειγμα 4

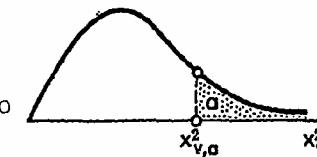
Μας δίνεται ότι η ηλικία ενός πληθυσμού ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι από αυτό τον πληθυσμό έχουμε το παρακάτω δείγμα: 61, 32, 35, 26, 25, 59, 46, 99, 57, 64, 72, 67, 33, 23, 33, 59. Να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά του πληθυσμού..

Για  $1-\alpha=0,95$  και  $\alpha/2=0,025$  από τον πίνακα της κατανομής  $\chi^2$  βρίσκουμε:

$$\chi^2_{15, 0.025}=27,49 \text{ και } \chi^2_{15, 0.975}=6,26. \text{ Άρα το 95% Δ.Ε. είναι:}$$

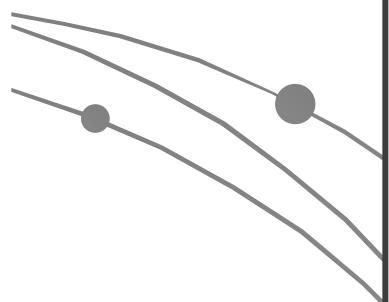
$$[15*451,33/27,49, 15*451,33/6,26] = [246,27, 1082,46]$$



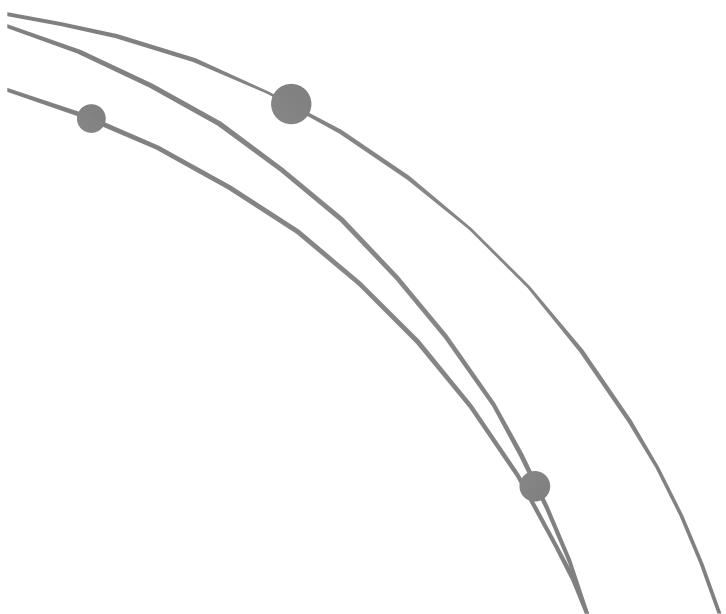


ΠΙΝΑΚΑΣ 7: Κριτικές τιμές της κατανομής χι-τετράγωνο

| $\nu$ | $\alpha$ |         |         |         |        |       |       |       |       |       |
|-------|----------|---------|---------|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | .995     | .990    | .975    | .950    | .900   | .100  | .050  | .025  | .010  | .005  |
| 1     | 0.0393   | 0.03157 | 0.01982 | 0.02393 | 0.0158 | 2.71  | 3.84  | 5.02  | 6.63  | 7.88  |
| 2     | 0.0100   | 0.0201  | 0.0506  | 0.103   | 0.211  | 4.61  | 5.99  | 7.38  | 9.21  | 10.60 |
| 3     | 0.072    | 0.115   | 0.16    | 0.352   | 0.584  | 6.25  | 7.81  | 9.35  | 11.34 | 12.84 |
| 4     | 0.207    | 0.297   | 0.34    | 0.711   | 1.064  | 7.78  | 9.49  | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5     | 0.412    | 0.554   | 0.31    | 1.145   | 1.61   | 9.24  | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6     | 0.676    | 0.872   | 1.4     | 1.64    | 2.20   | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7     | 0.989    | 1.24    | 1.9     | 2.17    | 2.83   | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8     | 1.34     | 1.65    | 2.8     | 2.73    | 3.49   | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 |
| 9     | 1.73     | 2.09    | 2.0     | 3.33    | 4.17   | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10    | 2.16     | 2.56    | 3.25    | 3.94    | 4.87   | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11    | 2.60     | 3.05    | 3.82    | 4.57    | 5.58   | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.73 | 26.76 |
| 12    | 3.07     | 3.57    | 4.40    | 5.23    | 6.30   | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13    | 3.57     | 4.11    | 5.1     | 5.89    | 7.04   | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14    | 4.07     | 4.66    | 5.63    | 6.57    | 7.79   | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15    | 4.60     | 5.22    | 6.26    | 7.26    | 8.55   | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16    | 5.14     | 5.81    | 6.91    | 7.96    | 9.31   | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17    | 5.70     | 6.41    | 7.56    | 8.67    | 10.09  | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18    | 6.26     | 7.01    | 8.23    | 9.39    | 10.86  | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19    | 6.84     | 7.63    | 8.91    | 10.12   | 11.65  | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20    | 7.43     | 8.26    | 9.59    | 10.85   | 12.44  | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21    | 8.03     | 8.90    | 10.28   | 11.59   | 13.24  | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22    | 8.64     | 9.54    | 10.98   | 12.34   | 14.04  | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23    | 9.26     | 10.20   | 11.69   | 13.09   | 14.85  | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24    | 9.89     | 10.86   | 12.40   | 13.85   | 15.66  | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25    | 10.52    | 11.52   | 13.12   | 14.61   | 16.47  | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26    | 11.16    | 12.20   | 13.84   | 15.38   | 17.29  | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27    | 11.81    | 12.88   | 14.57   | 16.15   | 18.11  | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 |
| 28    | 12.46    | 13.56   | 15.31   | 16.93   | 18.94  | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29    | 13.12    | 14.26   | 16.05   | 17.71   | 19.77  | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30    | 13.79    | 14.95   | 16.79   | 18.49   | 20.60  | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 40    | 20.71    | 22.16   | 24.43   | 26.51   | 29.05  | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 50    | 27.99    | 29.71   | 32.36   | 34.76   | 37.69  | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 |
| 60    | 35.53    | 37.48   | 40.48   | 43.19   | 46.46  | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 |
| 70    | 43.28    | 45.44   | 48.76   | 51.74   | 55.33  | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.4 | 104.2 |
| 80    | 51.17    | 53.54   | 57.15   | 60.39   | 64.28  | 96.58 | 101.9 | 106.6 | 112.3 | 116.3 |
| 90    | 59.20    | 61.75   | 65.65   | 69.13   | 73.29  | 107.6 | 113.1 | 118.1 | 124.1 | 128.3 |
| 100   | 67.33    | 70.06   | 74.22   | 77.93   | 82.36  | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 135.8 | 140.2 |



# Υπενθύμιση



# Κατανομή $X^2$

Έστω ότι έχουμε τις τυχαίες μεταβλητές  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_v$  που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και που η κάθε μία από αυτές κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Έστω, δηλαδή, ότι οι ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν την  $N(0,1)$ .

Το άθροισμα όμως των τετραγώνων τους είναι μια άλλη τυχαία μεταβλητή :

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2$$

που η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή αλλά μια άλλη κατανομή, που ονομάζεται **X τετράγωνο κατανομή** και συμβολίζεται με “ $X^2$  κατανομή”, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την:

$$f(x^2) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x^{\frac{v}{2}-1} & \text{όταν } x > 0 \\ 0 & \text{όταν } x \leq 0 \end{cases}$$

με v βαθμούς ελευθερίας.

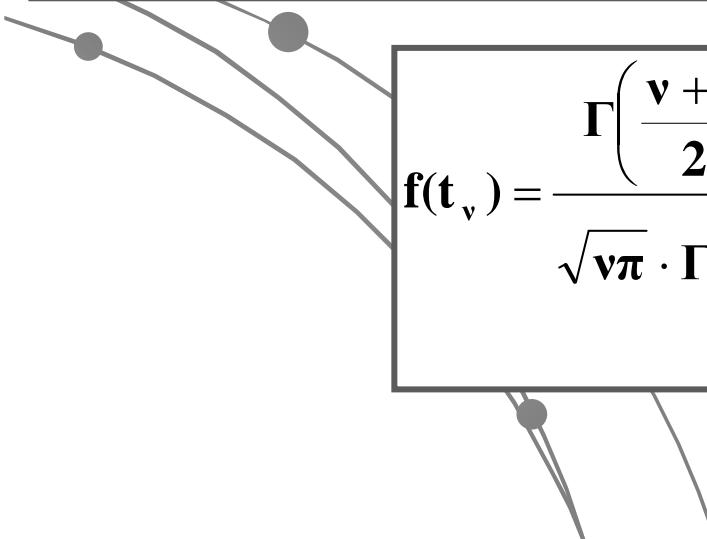
# Κατανομή $t$ (Student)

Αν έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ , από τις οποίες η  $X$  έχει κατανομή πιθανότητας που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση μονάδα ( $N(0,1)$ ) και η  $Y$  ακολουθεί την  $X^2$  κατανομή με  $v$  βαθμούς ελευθερίας, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/v}}$$

ακολουθεί την  $t$  κατανομή με  $v$  βαθμούς ελευθερίας.

$$f(t_v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}} \quad \text{για } -\infty < t < +\infty$$



# $F$ Κατανομή

Αν έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ , των οποίων οι κατανομές πυκνότητας πιθανότητας ακολουθούν την  $X^2$  κατανομή με  $v_1$  και  $v_2$  βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα, τότε η τυχαία μεταβλητή :

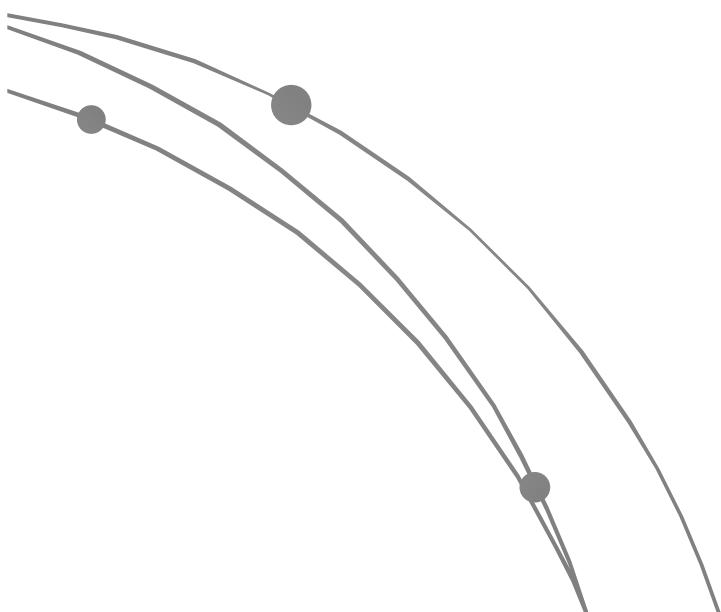
$$F = \frac{X/v_1}{Y/v_2}$$

έχει κατανομή πυκνότητας πιθανότητας που ακολουθεί την  $F_{v_1, v_2}$  κατανομή με  $v_1$  και  $v_2$  βαθμούς ελευθερίας. Η κατανομή  $F$ , που είναι λόγος δύο τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την  $X^2$  κατανομή, ονομάζεται και **λόγος των διακυμάνσεων**.

$$E(F) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \text{για } v_2 > 2$$

$$\text{Var}(F) = \frac{2v_2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)} \quad \text{για } v_2 > 4$$

# Παρατηρήσεις σχετικά με τους Πίνακες

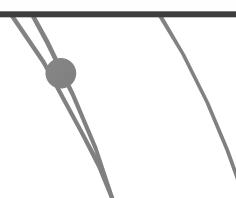


# Προσοχή!!!

## Διαστήματα εμπιστοσύνης

| <i>Παράμετρος πληθυσμού</i> | <i>Προϋποθέσεις</i> | <i>Δείγμα</i> | <i>100(1-a)% δ.ε.</i>   |
|-----------------------------|---------------------|---------------|---|
| $\mu$                       | $\sigma^2$ γνωστό   | οτιδήποτε     | $\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$   |
|                             | $\sigma^2$ άγνωστο  | $n \geq 30$   | $\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} z_{a/2}$  |
|                             | $\sigma^2$ άγνωστο  | $n < 30$      | $\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1; a/2}$   |
| $\sigma^2$                  |                     |               | $\left( \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1; a/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1; 1-a/2}} \right)$ |
|                             |                     |               |   |
| p                           |                     | $n \geq 30$   | $\hat{p} \pm z_{a/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ όπου $\hat{p} = \frac{x}{n}$    |
|                             |                     | $n < 30$      | άβακες  |

**Γιατί;**



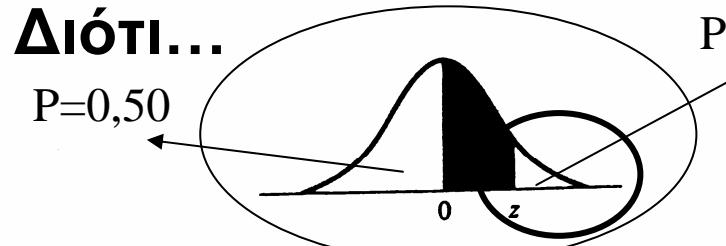
### Πίνακας

Πιθανοτήτων  $P(0 < Z < z)$  για την κανονική κατανομή  $N(0, 1)$

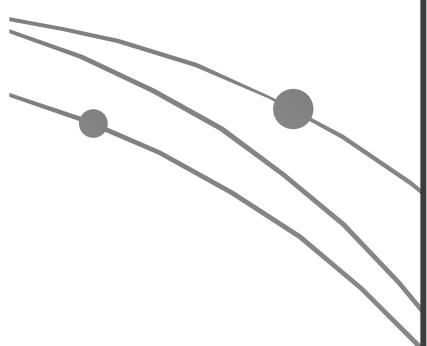
**ΔΙÓΤΙ...**

P=0,50

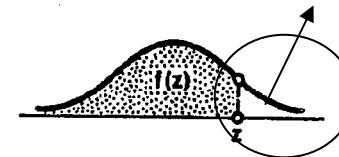
P=0,025



| <i>z</i> | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0      | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1      | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2      | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3      | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4      | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5      | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6      | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2517 | .2549 |
| 0.7      | .2580 | .2611 | .2642 | .2673 | .2704 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8      | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9      | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0      | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1      | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2      | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3      | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4      | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5      | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6      | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7      | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8      | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9      | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0      | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1      | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2      | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3      | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4      | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5      | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6      | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7      | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8      | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9      | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0      | .4987 | .4987 | .4987 | .4988 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 | .4990 |



P=0,025

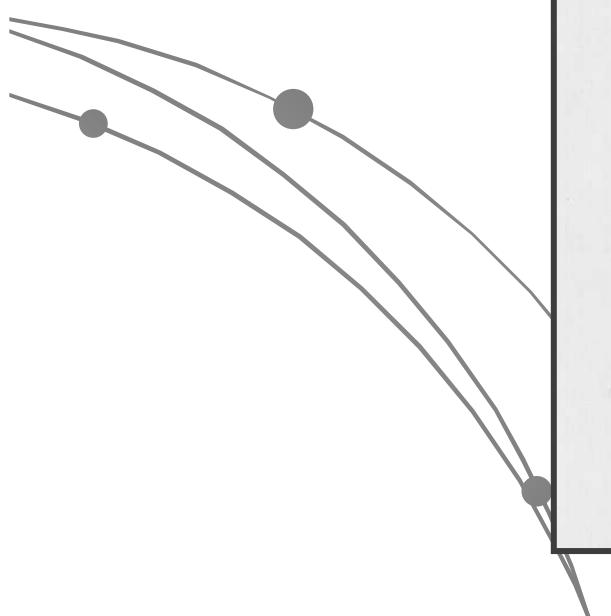


ΠΙΝΑΚΑΣ 5: Αθροιστικές πιθανότητες της τυπικής κανονικής κατανομής

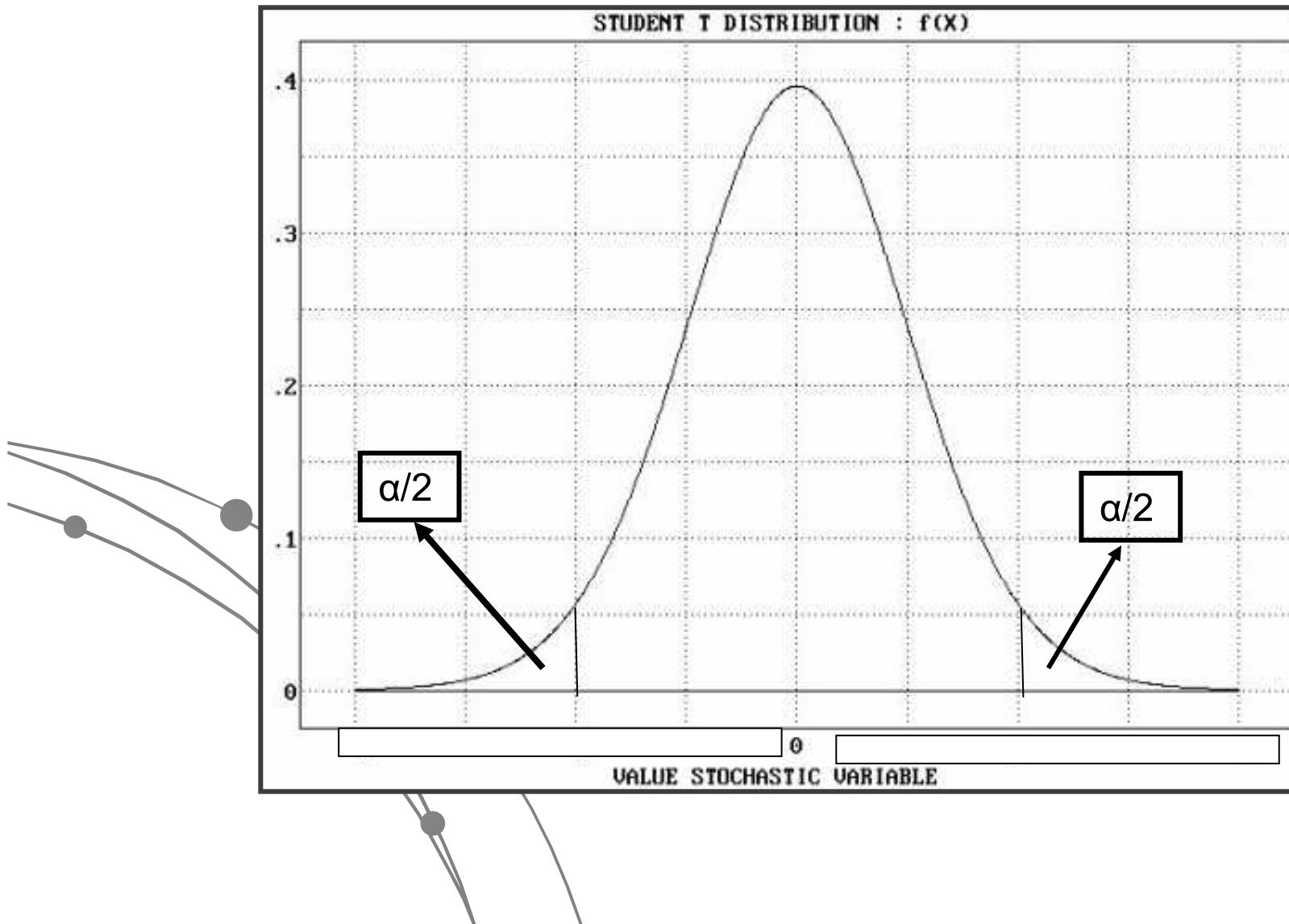
| $z$ | 0.00    | 0.01    | 0.02    | 0.03    | 0.04    | 0.05    | 0.06    | 0.07    | 0.08    | 0.09    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97120 | 0.97199 | 0.97297 | 0.97326 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |

Πίνακας Π.2 Κατανομή t

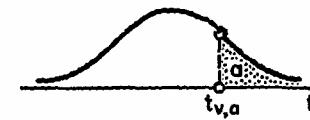
| Βαθμοι<br>ελευθε-<br>ριας | Πιθανότητα μιας απολύτως μεγαλύτερης τιμής (βλ. σχ. 4.8) |       |       |       |       |       |        |        |         |       |
|---------------------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|---------|-------|
|                           | 0,5  | 0,4   | 0,3   | 0,2   | 0,1   | 0,05  | 0,02   | 0,01   | 0,001   |       |
| 1                         | 1,000  | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,14  | 12,06 | 31,821 | 63,657 | 636,619 |       |
| 2                         | 0,816  | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,20  | 4,03  | 6,965  | 9,925  | 31,598  |       |
| 3                         | 0,765  | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,53  | 3,82  | 4,541  | 5,841  | 12,941  |       |
| 4                         | 0,741  | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,32  | 2,76  | 3,747  | 4,604  | 8,610   |       |
| 5                         | 0,727  | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,15  | 2,71  | 3,365  | 4,032  | 6,859   |       |
| 6                         | 0,718  | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,43  | 2,47  | 3,143  | 3,707  | 5,959   |       |
| 7                         | 0,711  | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,95  | 2,65  | 2,998  | 3,499  | 5,405   |       |
| 8                         | 0,706  | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,60  | 2,06  | 2,896  | 3,355  | 5,041   |       |
| 9                         | 0,703  | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,33  | 2,62  | 2,821  | 3,250  | 4,781   |       |
| 10                        | 0,700  | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,12  | 2,28  | 2,764  | 3,169  | 4,587   |       |
| 11                        | 0,697  | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,96  | 2,01  | 2,718  | 3,106  | 4,437   |       |
| 12                        | 0,695  | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,82  | 2,79  | 2,681  | 3,055  | 4,318   |       |
| 13                        | 0,694  | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,71  | 2,60  | 2,650  | 3,012  | 4,221   |       |
| 14                        | 0,692  | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,61  | 2,45  | 2,624  | 2,977  | 4,140   |       |
| 15                        | 0,691  | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,53  | 2,31  | 2,602  | 2,947  | 4,073   |       |
| 16                        | 0,690  | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,46  | 2,20  | 2,583  | 2,921  | 4,015   |       |
| 17                        | 0,689  | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,40  | 2,10  | 2,567  | 2,898  | 3,965   |       |
| 18                        | 0,688  | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,34  | 2,01  | 2,552  | 2,878  | 3,922   |       |
| 19                        | 0,688  | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,29  | 2,03  | 2,539  | 2,861  | 3,883   |       |
| 20                        | 0,687  | 0,860 | 1,064 | 1,323 | 1,25  | 1,725 | 2,080  | 2,528  | 2,845   | 3,850 |
| 21                        | 0,686  | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,21  | 2,080 | 2,518  | 2,831  | 3,819   |       |
| 22                        | 0,686  | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,17  | 2,074 | 2,508  | 2,819  | 3,792   |       |
| 23                        | 0,685  | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,14  | 2,069 | 2,500  | 2,807  | 3,767   |       |
| 24                        | 0,685  | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,11  | 2,064 | 2,492  | 2,797  | 3,745   |       |
| 25                        | 0,684  | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,08  | 2,060 | 2,485  | 2,787  | 3,725   |       |
| 26                        | 0,684  | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,06  | 2,056 | 2,479  | 2,779  | 3,707   |       |
| 27                        | 0,684  | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,03  | 2,052 | 2,473  | 2,771  | 3,690   |       |
| 28                        | 0,683  | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,01  | 2,048 | 2,467  | 2,763  | 3,674   |       |
| 29                        | 0,683  | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462  | 2,756  | 3,659   |       |
| 30                        | 0,683  | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457  | 2,750  | 3,646   |       |
| 40                        | 0,681  | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423  | 2,704  | 3,551   |       |
| 60                        | 0,679  | 0,848 | 1,046 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390  | 2,660  | 3,460   |       |
| 120                       | 0,677  | 0,845 | 1,041 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358  | 2,617  | 3,373   |       |
| $\infty$                  | 0,674  | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326  | 2,576  | 3,291   |       |



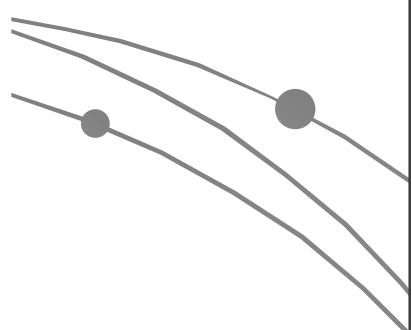
# *t*-Κατανομή



ΠΙΝΑΚΑΣ 6: Κριτικές Τιμές της Κατανομής t-student



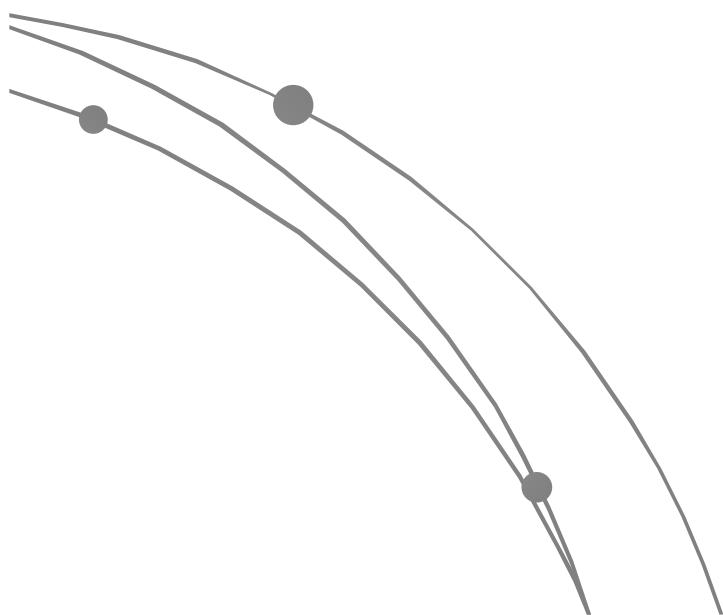
| $\nu$    | $\alpha$ |       |       |        |        |
|----------|----------|-------|-------|--------|--------|
|          | .100     | .050  | .025  | .010   | .005   |
| 1        | 3.078    | 6.14  | 12.76 | 31.821 | 63.657 |
| 2        | 1.886    | 2.20  | 4.03  | 6.965  | 9.925  |
| 3        | 1.638    | 2.53  | 3.82  | 4.541  | 5.841  |
| 4        | 1.533    | 2.32  | 2.76  | 3.747  | 4.604  |
| 5        | 1.476    | 2.15  | 2.71  | 3.365  | 4.032  |
| 6        | 1.440    | 1.43  | 2.47  | 3.143  | 3.707  |
| 7        | 1.415    | 1.95  | 2.65  | 2.998  | 3.499  |
| 8        | 1.397    | 1.60  | 2.06  | 2.896  | 3.355  |
| 9        | 1.383    | 1.33  | 2.62  | 2.821  | 3.250  |
| 10       | 1.372    | 1.12  | 2.28  | 2.764  | 3.169  |
| 11       | 1.363    | 1.96  | 2.01  | 2.718  | 3.106  |
| 12       | 1.356    | 1.82  | 2.79  | 2.681  | 3.055  |
| 13       | 1.350    | 1.71  | 2.60  | 2.650  | 3.012  |
| 14       | 1.345    | 1.61  | 2.45  | 2.624  | 2.977  |
| 15       | 1.341    | 1.53  | 2.31  | 2.602  | 2.947  |
| 16       | 1.337    | 1.46  | 2.20  | 2.583  | 2.921  |
| 17       | 1.333    | 1.40  | 2.10  | 2.567  | 2.898  |
| 18       | 1.330    | 1.34  | 2.01  | 2.552  | 2.878  |
| 19       | 1.328    | 1.29  | 2.03  | 2.539  | 2.861  |
| 20       | 1.925    | 1.725 | 2.086 | 2.528  | 2.845  |
| 21       | 1.323    | 1.721 | 2.080 | 2.518  | 2.831  |
| 22       | 1.321    | 1.717 | 2.074 | 2.508  | 2.819  |
| 23       | 1.319    | 1.714 | 2.069 | 2.500  | 2.807  |
| 24       | 1.318    | 1.711 | 2.064 | 2.492  | 2.797  |
| 25       | 1.316    | 1.708 | 2.060 | 2.485  | 2.787  |
| 26       | 1.315    | 1.706 | 2.056 | 2.479  | 2.779  |
| 27       | 1.314    | 1.703 | 2.052 | 2.473  | 2.771  |
| 28       | 1.313    | 1.701 | 2.048 | 2.467  | 2.763  |
| 29       | 1.311    | 1.699 | 2.045 | 2.462  | 2.756  |
| 30       | 1.310    | 1.697 | 2.042 | 2.457  | 2.750  |
| 40       | 1.303    | 1.684 | 2.021 | 2.423  | 2.704  |
| 60       | 1.296    | 1.671 | 2.000 | 2.390  | 2.660  |
| $\infty$ | 1.282    | 1.645 | 1.960 | 2.326  | 2.576  |



# Βιβλιογραφία

- Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο (2003). *Σημειώσεις Στατιστικής*.
- Φωτιάδης, Ν. (1995). *Εισαγωγή στη Στατιστική για Βιολογικές Επιστήμες*. Θεσσαλονίκη: University Studio Press.
- Κολυβά, Φ. και Μπόρα-Σέντα, Ε. (1995). *Στατιστική: Θεωρία-Εφαρμογές*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις ΖΗΤΗ.
- Φασούλας, Α. Κ. (ανατ. 2008). *Στοιχεία Πειραματικής Στατιστικής*. Θεσσαλονίκη: Άγις-Σάββας Δ. Γαρταγάνης.

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!!!



Viola odorata