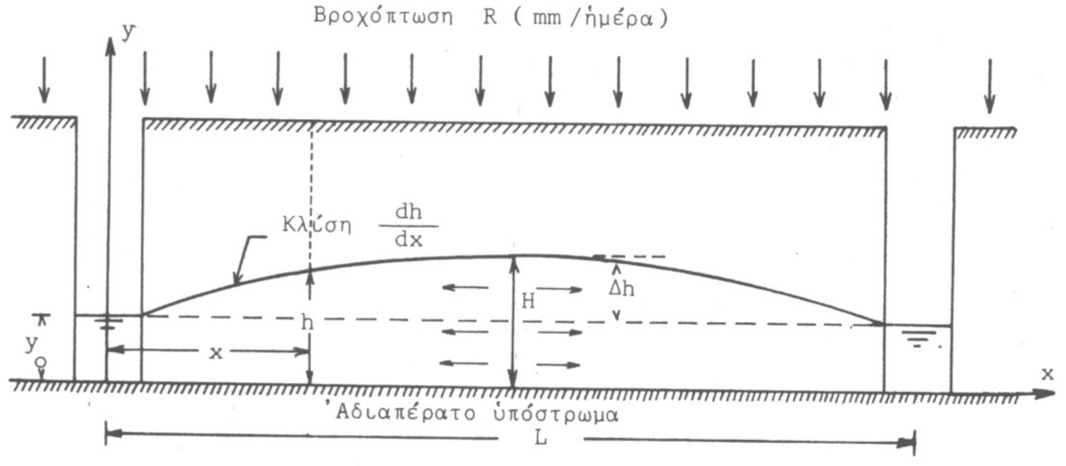
5.2. Μόνιμη ροή

5.2.1. Παράλληλες τάφροι ἑδραζόμενες σέ ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα

Ὅπως φαίνεται στό σχ. 23 οἱ παράλληλες τάφροι φθάνουν μέχρι τό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα καί στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους ὑπάρχει μιά ὁμοιόμορφη ἔνταση βροχῆς R πού προέρχεται, εἴτε ἀπό φυσική βροχή, εἴτε ἀπό ἄρδευση. Ἡ βροχή αὐτή διηθεῖται ἐξολοκλήρου πρός τά κάτω. Ἡ φρεατική στάθμη



Σχ. 23. Παράλληλες τάφροι μέ πυθμένα ἑδραζόμενο στό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα

βρίσκεται σέ ἰσορροπία σέ σχέση μέ τή βροχή. Ἔτσι ἡ ποσότητα τοῦ νεροῦ πού πέφτει στήν ἐπιφάνεια μεταξύ τῶν δύο τάφρων εἶναι ἴση μέ τήν ποσότητα τοῦ νεροῦ πού παροχετεύεται στίς δύο τάφρους καί ἐπειδή τό πρόβλημα εἶναι συμμετρικό θά ἔχουμε

$$R\,(L/2) = Q = \text{παροχή πρός τάφρο.}$$

Τό πλάτος τῆς τάφρου b θεωρεῖται ἀμελητέο σέ σχέση μέ τήν ἰσαποχή L τῶν τάφρων. Θεωροῦμε τώρα ἕνα κάθετο ἐπίπεδο σέ μία ἀπόσταση x ἀπό τήν ἀρχή. Ἡ παροχή πού περνᾶ ἀπό τό κάθετο αὐτό ἐπίπεδο Q_x εἶναι ἴση μέ τήν ποσότητα τοῦ νεροῦ πού πέφτει στήν ἐπιφάνεια μεταξύ τῆς διατομῆς x καί τῆς διατομῆς $(L/2)$, δηλ.

$$Q_x = + R\left(\frac{L}{2} - x\right). \tag{5.1}$$

Ἡ ὑδραυλική κλίση τῆς φρεατικῆς στάθμης εἶναι (dh/dx) καί ἔτσι ἡ παροχή πού περνᾶ ἀπό τό κάθετο ἐπίπεδο εἶναι

$$Q_x = + Kh\,\frac{dh}{dx} \tag{5.2}$$

Ἐπειδή οἱ δύο παροχές εἶναι ἴσες γράφουμε

$$R\left(\frac{L}{2} - x\right) = Kh\,\frac{dh}{dx} \tag{5.3}$$

ἤ

$$Kh\,dh = R\left(\frac{L}{2} - x\right) dx.$$

Ὁλοκληρώνουμε τήν ἐξίσωση αὐτή μεταξύ $x = 0$ $(h = y_0)$ καί $x = \frac{L}{2}$ $(h = H)$

$$R \int_0^{L/2} \left(\frac{L}{2} - x\right) dx = K \int_{y_0}^{H} h\,dh$$

$K \int d\,\frac{h^2}{2}$

ἤ

$$R\,\frac{L^2}{8} = \frac{K}{2}\,(H^2 - y_0^2)$$

$\frac{d}{dh}\,\frac{h^2}{2} = \frac{2h}{2}$

ἤ ἀκόμα

$$L^2 = \frac{4K\,(H^2 - y_0^2)}{R} \tag{5.4}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή φέρει τό ὄνομα τοῦ *Donnan (DONNAN, 1946)*, ἔχει ὅμως ἐξαχθεῖ τό 1936 ἀπό τήν *HOOGHOUDT* [27]. Στήν ἐξίσωση αὐτή εἶναι

R = ἔνταση τῆς βροχοπτώσεως σέ m/ἡμέρα
K = ὑδραυλική ἀγωγιμότητα σέ m/ἡμέρα
H = Τό ὕψος τοῦ νεροῦ πάνω ἀπό τό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα, στό μέσο τῆς ἀποστάσεως μεταξύ τῶν δύο τάφρων.

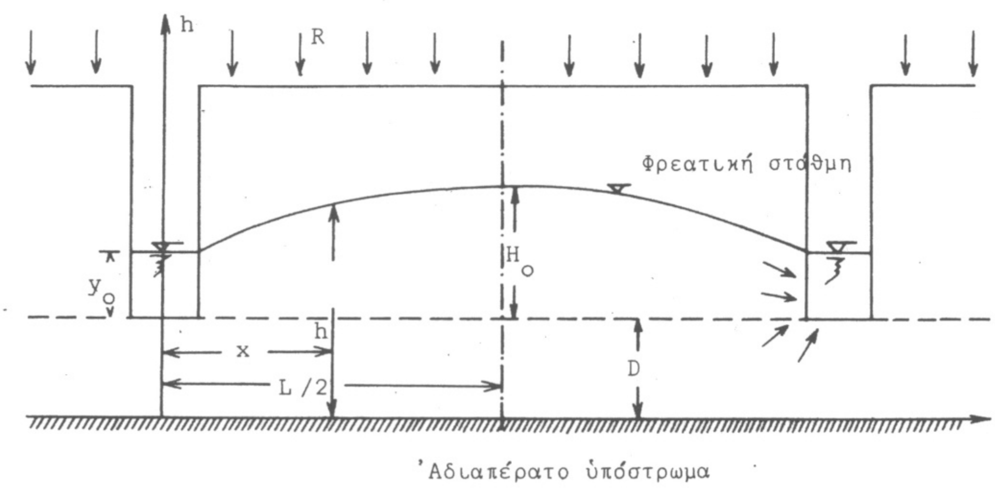
y_0 = Τό βάθος τοῦ νεροῦ στήν τάφρο ἤ τό ὕψος τῆς στάθμης τοῦ νεροῦ στά ντραίνα πάνω ἀπό τό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα

L = Ἡ ἰσαπόσταση μεταξύ τῶν στραγγιστικῶν ἀγωγῶν

Ἡ παραπάνω ἐξίσωση ἰσχύει τόσο γιά τήν περίπτωση παραλλήλων τάφρων, ὅσο καί γιά τήν περίπτωση παραλλήλων ντραίνων, ἔχει δέ ἐξαχθεῖ μέ βάση τῖς ἁπλουστευτικές παραδοχές τοῦ *Dupuit* ὅπως φαίνεται ἀπό τήν παραπάνω ἀνάλυση.

5.2.2. Παράλληλες τάφροι πάνω ἀπό τό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα.

Θεωροῦμε τήν περίπτωση τῶν τάφρων τοῦ σχήματος 24 μέ σταθερή βροχόπτωση R πού διηθεῖται πρός τά κάτω μέ τήν ἴδια ἔνταση, χωρίς δηλαδή νά ἔχουμε ἐπιφανειακή ἀπορροή, ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα. Ἐδῶ ὅμως ὁ πυθμένας τῆς τάφρου ὑπέρκειται τοῦ ἀδιαπέρατου ὑποστρώματος κατά D.



Σχ. 24. Παράλληλες τάφροι πάνω ἀπό τό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα

Ἐφαρμόζουμε καί ἐδῶ τίς παραδοχές τοῦ *Dupuit* και θεωροῦμε ὅπως καί πρίν ἕνα κάθετο ἐπίπεδο σέ ἀπόσταση x ἀπό τήν ἀρχή, ὅπου καί ἐφαρμόζουμε τήν ἰσότητα τῶν παροχῶν.

$$\int Kh\, dh = R \int \left(\frac{L}{2} - x \right) \cdot dx \qquad (5.5)$$

Τά ὅρια ὁλοκληρώσεως γιά τήν περίπτωση τοῦ σχ. 24 εἶναι :

$$\text{γιά} \quad x = 0 \quad h = D + y_0, \quad \text{γιά} \quad x = \frac{L}{2}, \quad h = D + H_0$$

ὁπότε ἡ (5.5) γίνεται μετά τήν ὁλοκλήρωση

$$\frac{(D+H_0)^2}{2} - \frac{(D+y_0)^2}{2} = \frac{R \cdot L^2}{4K} - \frac{R \cdot L^2}{8K} = \frac{R \cdot L^2}{8K}$$

ἤ

$$L^2 = \frac{4K\,(H_0{}^2 - y_0{}^2)}{R} + \frac{8KD\,(H_0 - y_0)}{R}. \tag{5.6}$$

Ὅταν φυσικά ὁ πυθμένας τῆς τάφρου ἑδράζεται στό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα ἔχουμε $D=0$ καί ἡ (5.6) συμπίπτει μέ τήν (5.4).

Στήν πράξη θεωροῦμε ὅτι τό βάθος τῆς τάφρου y_0 εἶναι μικρό καί μπορεῖ νά παραλειφθεῖ ὁπότε ἡ (5.6) γίνεται

$$L^2 = \frac{4KH_0{}^2}{R} + \frac{8KDH_0}{R}. \tag{5.7}$$

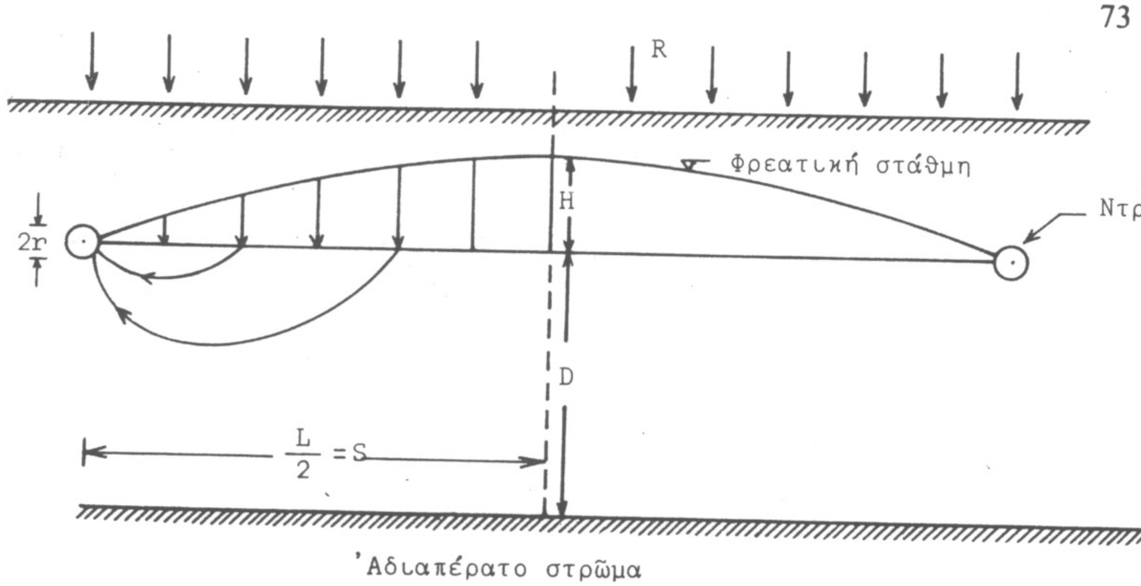
Donnan

Ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει ἐπίσης καί γιά τήν περίπτωση ντραίνων.

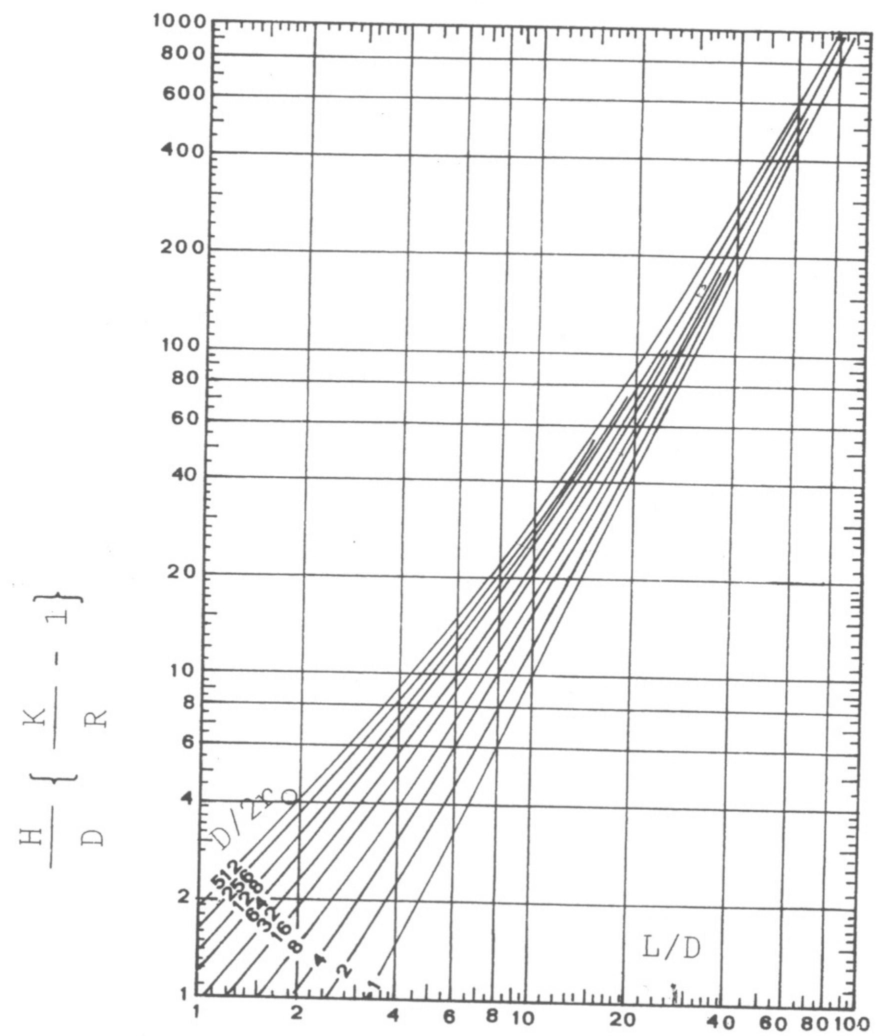
Στό παραπάνω παράδειγμα θεωρήσαμε ὅτι μέ τήν παραδοχή τοῦ *Dupuit* ἡ ροή εἶναι παράλληλη ἀκόμη καί στήν περιοχή τῶν τάφρων, ὁπότε τό νερό εἰσέρχεται ἀπό τήν κάθετη παρειά. Τοῦτο ὅμως δέν εἶναι σωστό γιατί στήν περιοχή κοντά στήν τάφρο οἱ γραμμές ροῆς συγκλίνουν καί ἕνα μέρος τῆς παροχῆς εἰσέρχεται ἀπό τόν πυθμένα.

Γιά νά ἀποφύγουν τήν ἀπροσδιοριστία αὐτή πού δημιουργεῖται ἀπό τίς παραδοχές τοῦ *Dupuit*, πολλοί ἐρευνητές ἐργάστηκαν κατά καιρούς μέ διάφορα ἄλλα μοντέλα πού λιγότερο ἤ περισσότερο προσέγγισαν τό πραγματικό φυσικό πρόβλημα.

Ὁ *Kirkham* [17] τό 1958 ἐπέλυσε κατευθείαν τήν ἐξίσωση τοῦ *Laplace* (ἐξ. 43 τοῦ 4ου κεφαλαίου) μέ σειρές *Fourier* καί ἔλαβε ὑπόψη του ὅλες τίς πραγματικές συνθῆκες τοῦ προβλήματος γιά τήν περίπτωση ντραίνων μέ ἀκτίνα r. Τό πρόβλημα πού μελέτησε ὁ *Kirkham* φαίνεται στό σχ. 25. Ἔτσι στό πρόβλημα αὐτό ὁ *Kirkham* θεώρησε ὅτι ἡ ροή τοῦ νεροῦ εἶναι κατακόρυφη πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο τῶν ντραίνων, ἐνῶ κάτω ἀπό τό ἐπίπεδο αὐτό ἔχουμε κανονικές γραμμές ροῆς πού συγκλίνουν στό ντραίνο. Ἔτσι ἀναπτύσσοντας τό ὑδραυλικό φορτίο σέ σειρές *Fourier* καί παίρνοντας ὑπόψη του τίς ὁριακές συνθῆκες τοῦ σχήματος (25) καταλήγει στήν ἐξίσωση :



Σχ. 25. Μοντέλο τοῦ *Kirkham*.



Σχ. 26. Νομογράφημα γιά τήν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως (5.9).

$$H = \frac{L \cdot R}{K} \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ ln \frac{L}{\pi r} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(cos \frac{m \pi r}{L} - cos\, m \pi\right) \left(cot\, h \frac{2m\pi D}{L} - 1\right) \right\} \quad (5.8)$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή πού εἶναι ἀρκετά πεπλεγμένη μέ τήν μορφή αὐτή, μετατράπηκε ἀργότερα ἀπό τούς *Toksöz-Kirkham* (1961) [23] στήν ἀκόλουθη

$$\frac{L}{D} = \frac{H}{D} \frac{1}{F_k} \left(\frac{K}{R} - 1 \right) \qquad \text{ὅπου} \qquad (5.9)$$

$$F_k = \frac{l}{\pi} \left\{ ln \frac{L}{\pi r} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(cos \frac{m \pi r}{L} - cos\, m \pi\right) \left(cot\, h \frac{2m\, \pi D}{L} - 1\right) \right\} \quad (5.10)$$

Στό σχ. 26 δίνεται ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως (5.9) ὑπό μορφή νομογραφήματος. *Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση (5.8) καί ἡ (5.9) ἐφαρμόζονται ἐπίσης γιά τήν περίπτωση τάφρων*, μόνο πού θά πρέπει νά ἀντικαταστήσουμε τό r μέ τό πλάτος τοῦ πυθμένα τῆς τάφρου $b = 2r$.

5.2.3. Τύπος τοῦ Hooghoudt

Τό 1940 ὁ *Hooghoudt* ἀσχολήθηκε ἐπίσης μέ ἕνα ἀνάλογο πρόβλημα ὅπως φαίνεται στό σχ. 27 καί ἐξήγαγε μιά ἐξίσωση, στήν ὁποία ἔλαβε ὑπόψη του δύο περιοχές ροῆς:

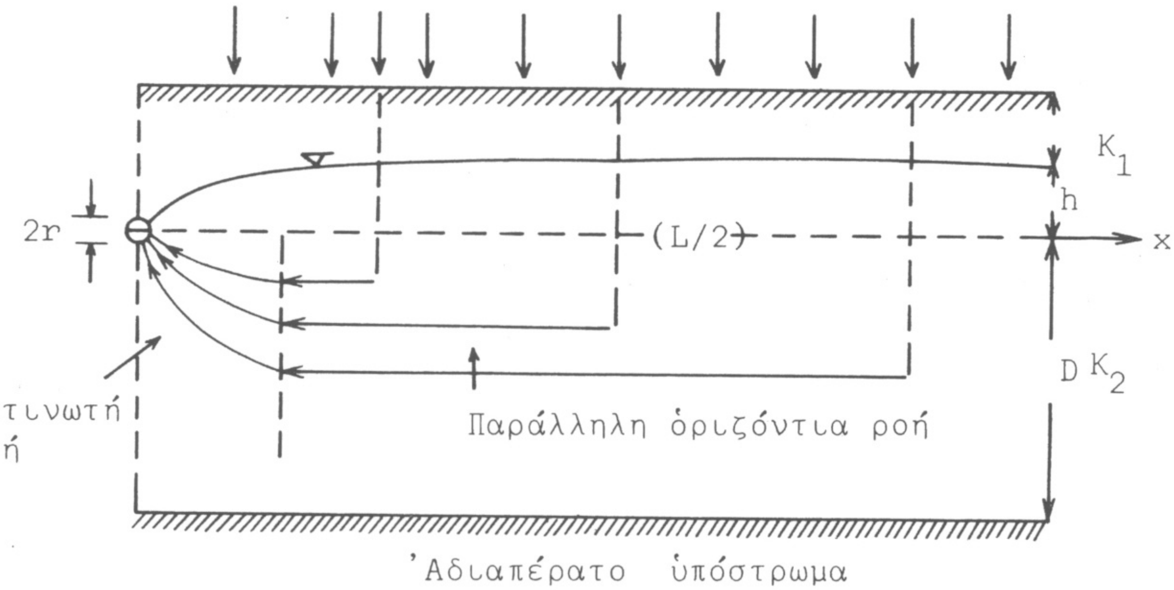
— Μιά μέ ὁριζόντια παράλληλη ροή

— Μιά μέ ἀκτινωτή ροή.

Ἐπειδή ἡ θεωρητική ἀνάπτυξη τῆς μεθόδου τοῦ *Hooghoudt* ξεφεύγει ἀπό τό σκοπό τοῦ μαθήματος δίνουμε μόνο τόν τελικό τύπο τοῦ *Hooghoudt* :

$$\frac{K}{Q} \cdot h = \frac{D \cdot L}{2\pi\, r} + \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{sin \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \frac{D}{L} \sqrt{ch\left(4\pi \frac{D}{L}\right) - cos\left(\pi\sqrt{2}\frac{D}{L}\right)}}{\pi \sqrt{2} \frac{D}{L} \cdot sh\left(\frac{2\pi\, D}{L}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(1 - \frac{D}{L}\sqrt{2}\right)^2}{8 \frac{D}{L}} \qquad (5.11)$$



Σχ. 27. Μοντέλο τοῦ *Hooghoudt*.

Οἱ διάφοροι συμβολισμοί πού χρησιμοποιοῦνται στήν ἐξίσωση (5.11) εἶναι αὐτοί πού φαίνονται στό σχῆμα 27. 'Από πρακτικῆς ἀπόψεως χρησιμοποιοῦμε συνήθως τήν κατά προσέγγιση λύση

$$L^2 = \frac{4K_1h^2}{R} + \frac{8K_2 \cdot h \cdot \hat{d}}{R}, \tag{5.12}$$

ὅπου

L = Ἡ ἰσαπόσταση μεταξύ τῶν ντραίνων.

K_1 = Ἡ ὑδραυλική ἀγωγιμότητα τοῦ ἐδαφικοῦ στρώματος πάνω ἀπό τά ντραίνα.

K_2 = Ἡ ὑδραυλική ἀγωγιμότητα τοῦ ἐδαφικοῦ στρώματος κάτω ἀπό τά ντραίνα.

h = Τό ὕψος τοῦ νεροῦ πάνω ἀπό τά ντραίνα καί στό μέσον τῆς ἀποστάσεως L.

R = Ἡ ἔνταση τῆς βροχοπτώσεως

$\hat{d}$ = Τό λεγόμενο ἰσοδύναμο βάθος τοῦ *Hooghoudt*, συνάρτηση τῶν D, L, καί τῆς ἀκτίνας τῶν ντραίνων r.

Τό ἰσοδύναμο βάθος $\hat{d}$ τοῦ *Hooghoudt* δίνεται προσεγγιστικά ἀπό τόν *Moody* [19]

$$\frac{\hat{d}}{d} = \left\{ 1 + \frac{d}{L} \left(\frac{8}{\pi} \ln \left(\frac{d}{r} \right) - a \right) \right\}^{-1}, \quad 0 \leq \frac{d}{L} \leq 0.3 \tag{5.13}$$

ὅπου $\hat{d}$ = ἰσοδύναμο βάθος, r = ἀκτίνα τῶν ντραίνων, L = ἰσαποχή τῶν ντραίνων καί a = μιά συνάρτηση τοῦ L πού δίνεται ἀπό τή μορφή

$$a = 3.55 - 1.6\,\frac{d}{L} + 2\left(\frac{d}{L}\right)^2 \tag{5.14}$$

καί πού γιά πρακτικούς λόγους παίρνουμε $a = 3.4$.

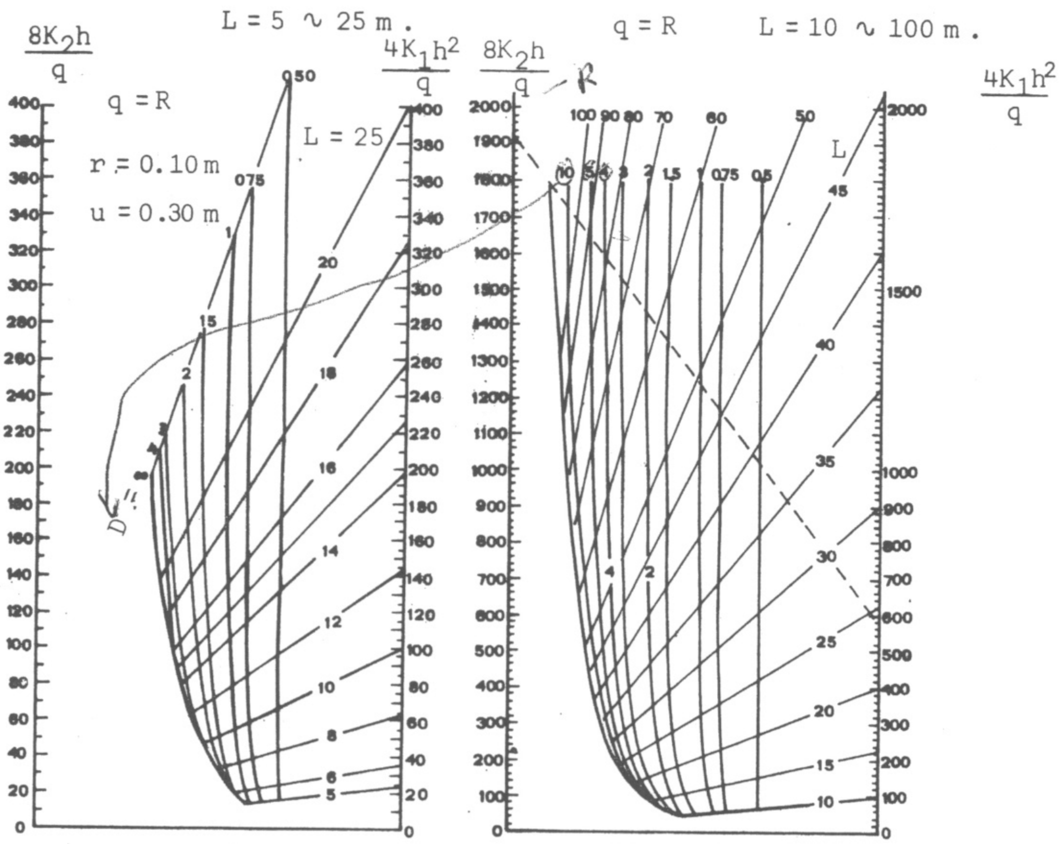
Γιά $(d/L) > 0.3$ ὁ παραπάνω τύπος γίνεται

$$\frac{\hat{d}}{d} = \left\{ \frac{8}{\pi}\ \left[ln\left(\frac{L}{r}\right) - 1.15\right] \right\}^{-1} \tag{5.15}$$

Οἱ τύποι (5.13), (5.15) χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης καί γιά τήν περίπτωση ἀνοικτῶν ἀγωγῶν μέ τήν διαφορά ὅτι στήν περίπτωση αὐτή παίρνουμε

$$r = 2R_{\upsilon}$$

ὅπου R_{υ} = ἡ ὑδραυλική ἀκτίνα τῆς διατομῆς τάφρου.



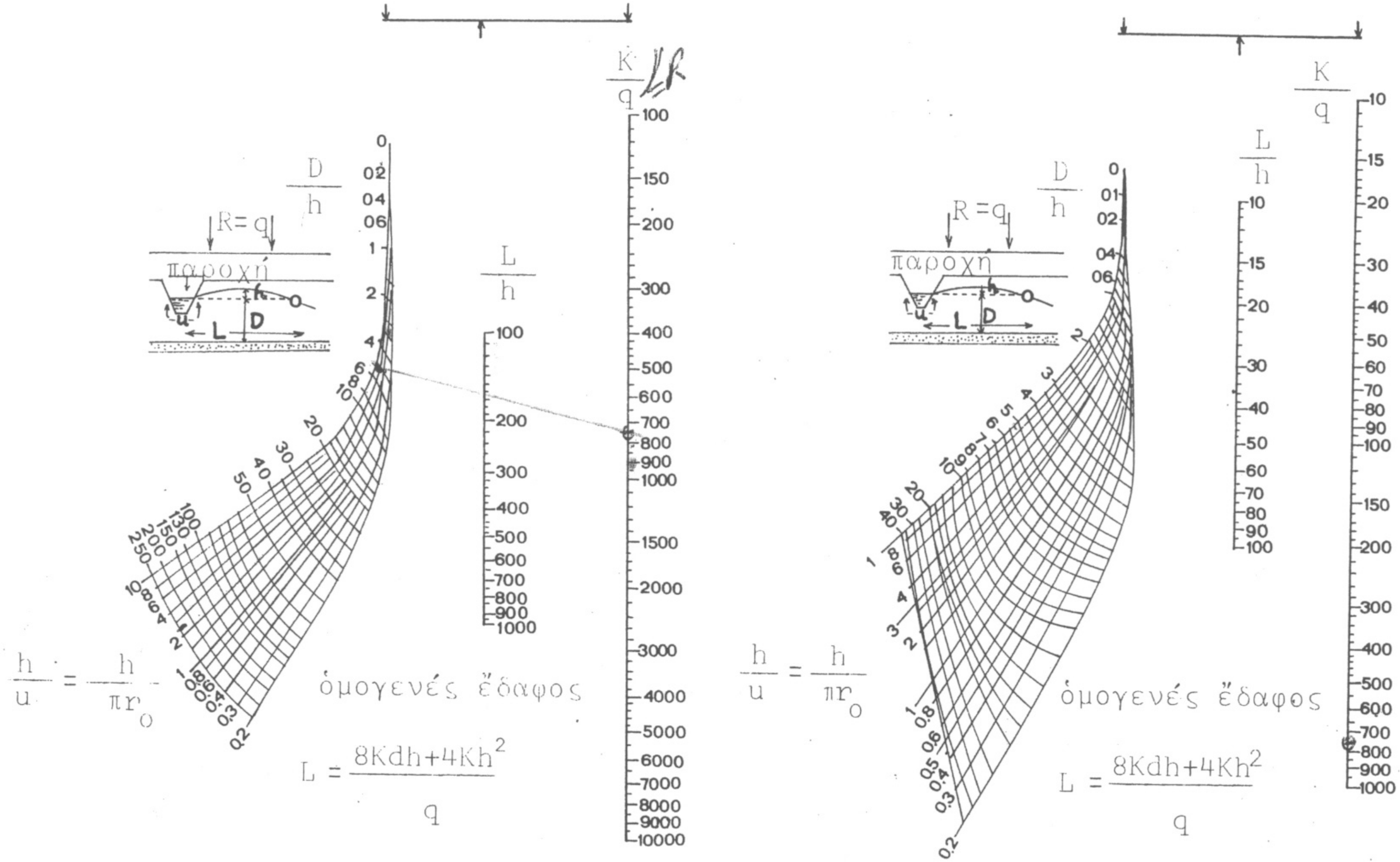
Γιά ὁμογενές ἔδαφος παίρνεται $K_1 = K_2 = K$.

Σχ. 28. Νομογράφημα γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἰσαποχῆς τῶν ντραίνων.

Πίνακας προσδιορισμοῦ τῶν ποσοτήτων $8h/R$ (πρῶτο ψηφίο) καί $4h^2/R$ (δεύτερο ψηφίο)

(Παράδειγμα: $h=0,5\ m$ $R = 7\ mm$/ἡμέρα ($8h/R= 570$ $(4h^2/R) = 145$ R σέ mm/ἡμέρα)

h, m	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
0.1	800 -	40	400	15	265	15	200	10	160	8	135	10	115	5	100	5	90	5	80	5
0.2	1600	160	800	80	530	55	400	40	320	32	265	30	230	25	200	.25	180	20	160	15
0.3	2400	360	1200	180	800	120	600	90	480	70	400	60	345	50	300	45	270	40	240	35
0.4	3200	640	1600	320	1070	215	800	160	640	130	530	110	455	90	400	80	360	70	320	65
0.5	4000	1000	2000	500	1340	335	1000	250	800	200	665	165	570	145	500	125	445	110	400	100
0.6	4800	1440	2400	720	1600	480	1200	360	960	290	800	240	685	205	600	180	535	160	480	145
0.7	5600	1960	2800	980	1860	650	1400	490	1200	390	930	325	800	280	700	245	620	215	560	195
0.8	6400	2560	3200	1280	2140	850	1600	640	1280	510	1070	425	915	365	800	320	710	185	640	255
0.9	7200	3240	3600	1620	2400	1080	1800	810	1440	630	1200	540	1030	460	900	405	800	370	720	325
1.0	8000	4000	4000	2000	2700	1330	2000	1000	1600	800	1330	665	1140	570	1000	500	890	445	800	400
1.1	8800	4840	4400	2420	2940	1600	2200	1210	1760	970	1460	805	1260	690	1100	680	980	535	880	485
1.2	9600	5760	4800	2880	3200	1920	2400	1440	1920	1150	1600	960	1370	820	1200	720	1300	640	960	575



Σχ. 29. Νομογράφημα τοῦ *Boumans* γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἰσαποχῆς τῶν τάφρων.

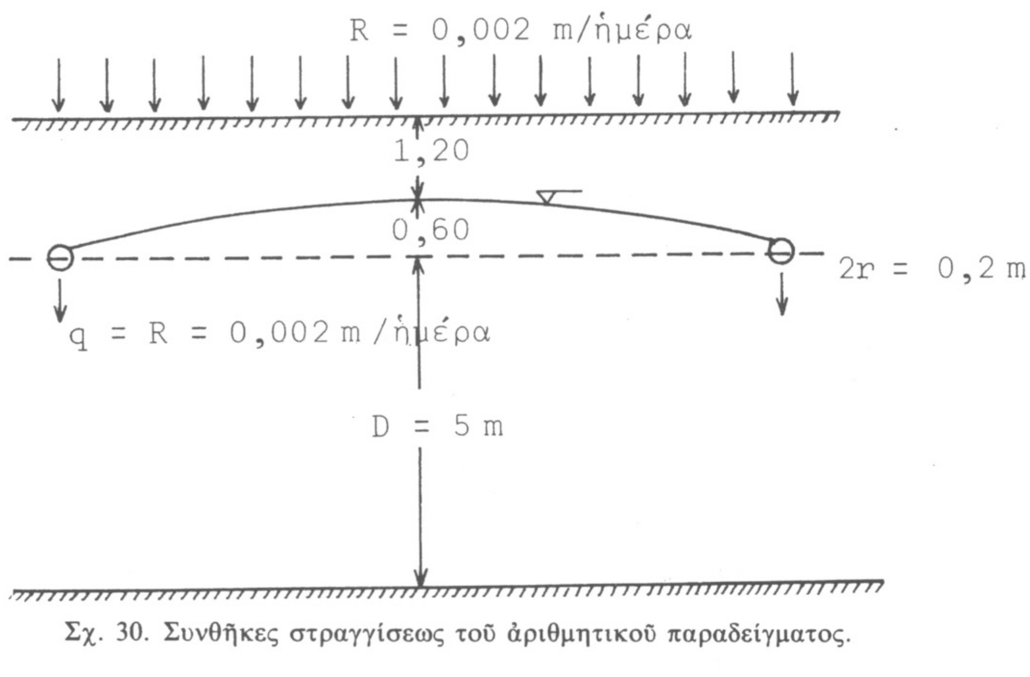
Στό σχ. 28 δίνεται ἕνα νομογράφημα τοῦ *Van Beers* πού ἐπιτρέπει τόν προσδιορισμό τῆς ἰσαποχῆς τῶν ντραίνων μέ τόν τύπο τοῦ *Hooghoudt* [26] (5.12).

Τό νομογράφημα τοῦ σχ. 28 χρησιμοποιεῖται ἐπίσης γιά τήν περίπτωση πού ὑπάρχουν δύο στρώσεις ἐδάφους μέ ὑδραυλικές ἀγωγιμότητες K_1 (ἐπάνω στρώση) καί K_2 (κάτω στρώση). Ἐπίσης χρησιμοποιεῖται καί γιά τήν περίπτωση τάφρων μέ βρεχόμενη περίμετρο τάφρου $u = 0{,}30\ m$.

Ὁ *Boumans* [9, 10] παρουσίασε τό 1963 τό γενικευμένο νομογράφημα τοῦ σχ. 29 γιά ὁμογενές ἔδαφος, πού ἰσχύει ἐπίσης γιά τήν περίπτωση τάφρου (βρεχόμενη περίμετρος u).

5.2.4. *Ἀριθμητικές ἐφαρμογές*

1) Δίνεται μιά περιοχή πού ἀρδεύεται καί θέλουμε νά τή στραγγίσουμε μέ σωληνωτά ντραίνα ἀκτίνας $r=0{,}1\ m$. Τά ντραίνα θά τοποθετηθοῦν σέ βάθος 1,8 *m* κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους, ἐνῶ τό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα βρίσκεται σέ βάθος 6,8 *m* κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους. Τό ἔδαφος θεωρεῖται ὁμογενές μέ ὑδραυλική ἀγωγιμότητα $K=0{,}8\ m$/ἡμέρα. Ἡ ἐπιφάνεια ἀρδεύεται μέ καταιονισμό καί ἡ ἔνταση τῆς βροχῆς πού διηθεῖται ὁλόκληρη στό ἔδαφος εἶναι *2 mm*/ἡμέρα.



Σχ. 30. Συνθῆκες στραγγίσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ παραδείγματος.

Ζητεῖται νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἰσαποχή τῶν ντραίνων ὅταν περιμένουμε ὅτι ἡ φρεατική στάθμη θά βρίσκεται τουλάχιστο 1,20 *m* κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους.

α) Χρησιμοποίηση τοῦ τύπου (5.7) πού προέκυψε μέ τίς παραδοχές τοῦ Dupuit

Ἔχουμε

$$K = 0{,}8\ m/\text{ἡμέρα}$$
$$H_0 = 0{,}60\ m$$
$$R = 0{,}002\ m/\text{ἡμέρα}$$
$$D = 5\ m$$

Ὁ τύπος (5.7) μέ τίς τιμές αὐτές γίνεται

$$L^2 = \frac{4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6^2}{0{,}002} + \frac{8 \cdot 0{,}8 \cdot 5 \cdot 0{,}6}{0{,}002} = 576 + 9600 = 10176\ m^2$$

$$L = 100{,}87\ m$$

β) Χρησιμοποίηση τοῦ νομογραφήματος τοῦ σχ. 26 (ἐξίσωση τῶν Toksöz-Kirkham).

Ὑπολογίζουμε τήν παράσταση

$$\frac{H}{D}\left\{\frac{K}{R} - 1\right\} = \frac{0{,}60}{5{,}00}\left\{\frac{0{,}8}{0{,}002} - 1\right\} = 47{,}88.$$

Ὑπολογίζουμε τώρα τήν παράσταση

$$\frac{D}{2r} = \frac{5}{0{,}20} = 25.$$

$\frac{L}{D} = 17$

Μέ τίς τιμές αὐτές βρίσουμε ἀπό τό νομογράφημα

$$\frac{L}{D} = 17 \Rightarrow L = 85\ m.$$

γ) Χρησιμοποίηση τοῦ νομογραφήματος τοῦ σχ. 28 (ἐξίσωση τοῦ Hooghoudt).

Ὑπολογίζουμε τήν παράσταση

$$\frac{8Kh}{R} = \frac{8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6}{0{,}002} = 1920.$$

Ἐπίσης ὑπολογίζουμε τήν παράσταση

$$\frac{4Kh^2}{R} = \frac{4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6^2}{0{,}002} = 576.$$

Ἑνώνουμε τά σημεῖα $(8Kh/R) = 1920$ καί $(4Kh^2/R) = 576$ μέ μιά εὐθεία πού τέμνει τήν εὐθεία $D = 5\ m$ σ' ἕνα σημεῖο ὅπου καί διαβάζουμε

$$L = 89\ m.$$

δ) Χρησιμοποίηση τῆς ἐξισώσεως (5.12) μέ τίς βοηθητικές σχέσεις (5.13), (5.15) τοῦ ἰσοδύναμου βάθους.

Ἀπό τήν ἐξίσωση (5.7) προέκυψε $L \approx 100\ m$, ἑπομένως εἶναι

$$\frac{d}{L} = \frac{5}{100} = 0{,}05 < 0{,}3$$

καί ἐφαρμόζεται ὁ τύπος (5.13). Παίρνουμε $a = 3{,}4$

$$\frac{\hat{d}}{5} = \left\{ 1 + 0{,}05 \left(\frac{8}{\pi}\ ln \left(\frac{5}{0{,}1} \right) - 3{,}4 \right) \right\}^{-1} = 0{,}752 \Rightarrow \hat{d} = 3{,}76\ m.$$

Ἐφαρμόζουμε τήν ἐξίσωση (5.12)

$$L^2 = \frac{4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6^2}{0{,}002} + \frac{8\cdot 0{,}8\cdot 3{,}76\cdot 0{,}6}{0{,}002} = 576 + 7219 = 7\cdot 795{,}2 \Rightarrow L = 88{,}29\ m.$$

2ος κύκλος

Ἔχουμε τώρα

$$\frac{d}{L} = \frac{6}{88{,}29} = 0{,}0566$$

$$\frac{\hat{d}}{5} = \left\{ 1 + 0{,}0574 \left(\frac{8}{\pi}\ ln \left(\frac{5}{0{,}1} \right) - 3{,}4 \right) \right\}^{-1} = 0{,}726 \Rightarrow \hat{d} = 3.64\ m$$

$$L^2 = 576 + \frac{8\cdot 0{,}8\cdot 3{,}64\cdot 0{,}6}{0{,}002} = 576 + 6999 = 7575 \Rightarrow L = 87\ m.$$

3ος κύκλος

$$\frac{d}{L} = 0{,}0574$$

$$\frac{\hat{d}}{5} = \left\{1+0,0574\left(\frac{8}{\pi}\ ln\left(\frac{5}{0,1}\right)-3,4\right)\right\}^{-1} = 0,726 \Rightarrow \hat{d} = 3,63\ m$$

$$L = 87\ m$$

Μέ βάση τά παραπάνω ἀποτελέσματα σχηματίζουμε τόν πίνακα.

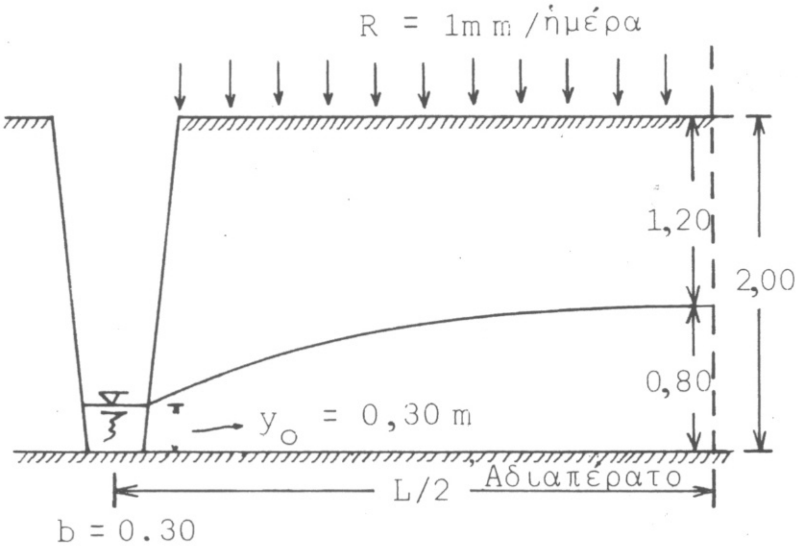
Ἐφαρμοζόμενη μέθοδος	Ἰσαποχή *L (m)*
Ἐξίσωση (5.7). Παραδοχές τοῦ *Dupuit*	100,87
Ἐξίσωση τῶν *Tokzök-Kirkham* Σχ. 26	85,00
Ἐξίσωση τοῦ *Hooghoudt*. Νομογράφημα *Van Beers:*	89,00
Ἐξίσωση τοῦ *Hooghoudt*. Ἰσοδύναμο βάθος	87,00

Παρατηροῦμε ὅτι ἀπό τίς τέσσερεις μεθόδους πού ἐφαρμόσαμε οἱ τρεῖς τελευταῖες παρουσιάζουν μικρή ἀπόκλιση μεταξύ τους, ἐνῶ ἡ ἐξίσωση (5.7) μέ τίς παραδοχές τοῦ *Dupuit* (ὁριζόντια ροή) παρουσιάζει ἀπόκλιση τῆς τάξεως περίπου 15% ὡς πρός τίς ἄλλες. Γιά τήν πράξη χρησιμοποιοῦνται συνήθως τά νομογραφήματα τῶν σχ. 26, 28 καί 29.

2) Δίνεται μιά ἀρδευόμενη περιοχή πού πρόκειται νά ἐξυγιάνουμε μέ σύστημα ἀνοικτῶν τάφρων μέ πλάτος πυθμένα $b = 0,30\ m$. Ὁ πυθμένας τῶν τάφρων ἑδράζεται σέ ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα πού βρίσκεται σέ βάθος *2 m* ἀπό τήν επιφάνεια τοῦ ἐδάφους. Τό ἔδαφος θεωρεῖται ὁμογενές μέ ὑδραυλική ἀγωγιμότητα $K = 0,9\ m$/ἡμέρα. Ἡ ἐπιφάνεια ἀρδεύεται μέ καταιονισμό, ἡ δέ ἔνταση τῆς τεχνητῆς βροχῆς εἶναι 1 *mm*/ἡμέρα. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ ἰσαποχή τῶν ντραίνων γιά τήν περίπτωση πού θέλουμε νά ἔχουμε τή φρεατική στάθμη τουλάχιστο 1,20 κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους, καί τό νερό στίς τάφρους νά ἀνεβαίνει στά *30 cm*.

Λύση

Ἐφαρμόζουμε τήν ἐξίσωση τοῦ *Donnan* (5.4). Στήν προκείμενη περίπτωση ἔχουμε



Σχ. 31. Συνθῆκες στραγγίσεως γιά τό ἀριθμητικό παράδειγμα.

$K = 0{,}9\ m$/ἡμέρα

$H = 0{,}80\ m \qquad y_0 = 0{,}30$

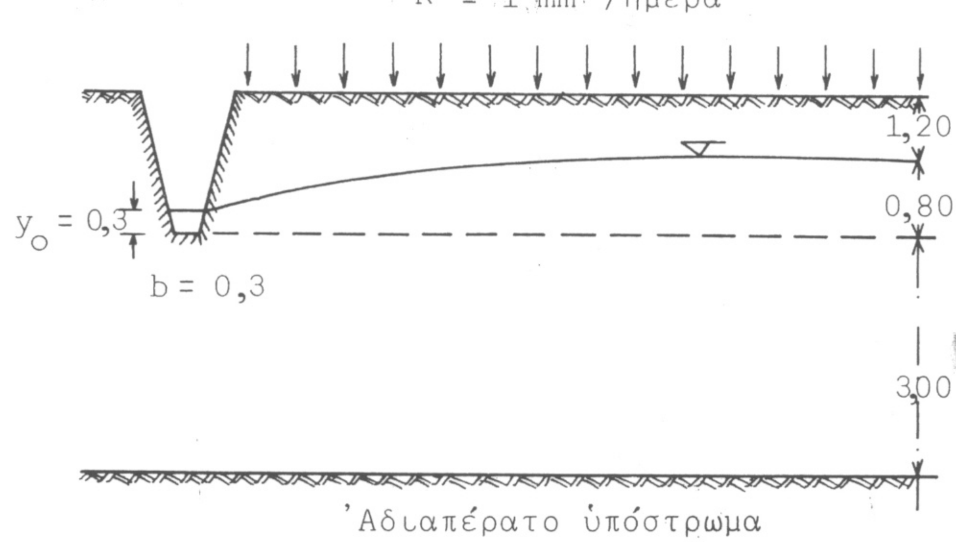
$R = 0{,}001\ m$/ἡμέρα

$$L^2 = \frac{4K\,(H^2 - y_0{}^2)}{R} = \frac{4 \cdot 0{,}9\,(0{,}8^2 - 0{,}3^2)}{0{,}001} = 1980\ m^2$$

$$L = 44{,}50\ m$$

3) Ἡ ἴδια περίπτωση μέ τήν προηγούμενη, μόνο πού ἐδῶ ὁ πυθμένας τῶν τάφρων ὑπέρκειται τοῦ ἀδιαπέρατου ἐδάφους κατά *3 m*

Λύση



Σχ. 32. Συνθῆκες στραγγίσεως γιά τό παράδειγμα.

α) Ἐφαρμόζουμε πρώτα τόν τύπο (5.7)

$$L^2 = \frac{4KH_0^2}{R} + \frac{8K\cdot D\cdot H_0}{R} = \frac{4\cdot 0{,}9\cdot 3\cdot 0{,}8^2}{0{,}001} + \frac{8\cdot 0{,}9\cdot 3\cdot 0{,}8}{0{,}001} =$$

$$= 2304 + 17280 = 19584\ m^2$$

$$L = \underline{139{,}94}\ m$$

β) Ἐφαρμόζουμε τόν τύπο τῶν Toksöz-Kirkham (5.9) μέ τό νομογράφημα τοῦ σχήματος (26)

Στήν περίπτωση αὐτή παίρνουμε $2r = b = 0{,}30\ m$. Βρίσκουμε πρῶτα τήν παράσταση

$$\frac{H}{D}\left\{\frac{K}{R} - 1\right\} = \frac{0{,}8}{3}\left\{\frac{0{,}9}{0{,}001} - 1\right\} = 239{,}73.$$

Στή συνέχεια βρίσκουμε τό λόγο

$$\frac{D}{2r} = \frac{D}{b} = \frac{3}{0{,}3} = 10.$$

Μέ τίς δύο αὐτές τιμές βρίσκουμε

$$\frac{L}{D} = 45 \Rightarrow L = \underline{135\ m}$$

γ) Ἐφαρμόζουμε τό νομογράφημα τοῦ Boumans (σχ. 29) γιά τήν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως τοῦ Hooghoudt (5.12)

Ἔχουμε u = βρεχόμενη περίμετρος $\approx b + 2y_0 = 0{,}90\ m$, $q = R = 0{,}001$ mm/ἡμέρα

$$\frac{D}{h} = \frac{3}{0{,}80} = 3{,}75$$

$$\frac{h}{u} = \frac{0{,}8}{0{,}9} = 0{,}888$$

$$\frac{K}{q} = \frac{0{,}9}{0{,}001} = 900$$

Βρίσκουμε $\frac{L}{h} = 160 \Rightarrow L = 160\cdot 0{,}8 = \underline{128\ m}$

δ) Ἐφαρμόζουμε τούς τύπους (5.13), (5.15) μέ τό ἰσοδύναμο βάθος d.

Βρίσκουμε πρῶτα τήν ὑδραυλική ἀκτίνα R_υ τῆς διατομῆς

$$R_\upsilon = \frac{\text{Βρεχόμενη ἐπιφάνεια}}{\text{Βρεχόμενη περίμετρος}} \approx \frac{0{,}3^2}{0{,}9} = 0{,}1$$

Παίρνουμε τώρα $r = 2R_\upsilon = 0{,}2\ m$

1ος κύκλος

Ἀπό τόν τύπο (5.7) βρήκαμε $L = 139{,}94\ m$ ἄρα

$$\frac{d}{L} = \frac{3}{139{,}94} = 0{,}0214 < 0.3$$

Ἔχουμε

$$\frac{\hat{d}}{d} = \left\{ 1 + 0{,}0214\left(\frac{8}{\pi} ln \frac{3}{0{,}2} - 3{,}4\right\} \right.^{-1} = \{ 1 + 0{,}0214 \cdot 3{,}495 \}^{-1} = 0{,}937$$

$$\hat{d} = 3 \cdot 0{,}937 = 2{,}79$$

Ἐφαρμόζουμε τόν τύπο (5.12)

$$L^2 = \frac{4Kh^{\,2}}{R} + \frac{8K \cdot h \cdot \hat{d}}{R} = \frac{4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8^2}{0{,}001} + \frac{8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}79}{0{,}001} =$$

$$= 2\,304 + 16070 = 18374\ m^2$$

$$L = 135{,}55\ m$$

2ος κύκλος

$$\frac{d}{L} = \frac{3}{135{,}55} = 0{,}0221$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{ 1 + 0{,}0221\ 3{,}495 \}^{-1} = 0{,}928 \Rightarrow \hat{d} = 2{,}784$$

$$L^2 = 2304 + \frac{8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}784}{0{,}001} = 2304 + 16039 = 18343$$

$$L = 135{,}43 \approx 135{,}40$$

Σχηματίζουμε πάλι τόν παρακάτω πίνακα

Ἐφαρμοζόμενη μέθοδος	Ἰσαποχή L (m)
Ἐξίσωση (5.7). Παραδοχή τοῦ *Dupuit*	139,90
Ἐξίσωση τῶν *Toksöz-Kirkham* (Σχ. 26)	135
Ἐξίσωση τοῦ *Hooghoudt*. Νομογράφημα *Boumans*	*128*
Ἐξίσωση τοῦ *Hooghoudt*. Ἰσοδύναμο βάθος d	135,40

Ἐάν τώρα στό ἴδιο ἀκριβῶς παράδειγμα παραδεχθοῦμε ὅτι ὁ πυθμένας τῆς τάφρου ὑπέρκειται τοῦ ἀδιαπεράτου ὑποστρώματος κατά *8 m*, προκύπτουν τά ἀκόλουθα

Ἐφαρμοζόμενη μέθοδος	Ἰσαποχή L (m)
Ἐξίσωση (5.7)	230
Ἐξίσωση τῶν *Toksöz-Kirkham* (Σχ. 26)	200
Ἐξίσωση *Hooghoudt*. Ἰσοδύναμο βάθος	210

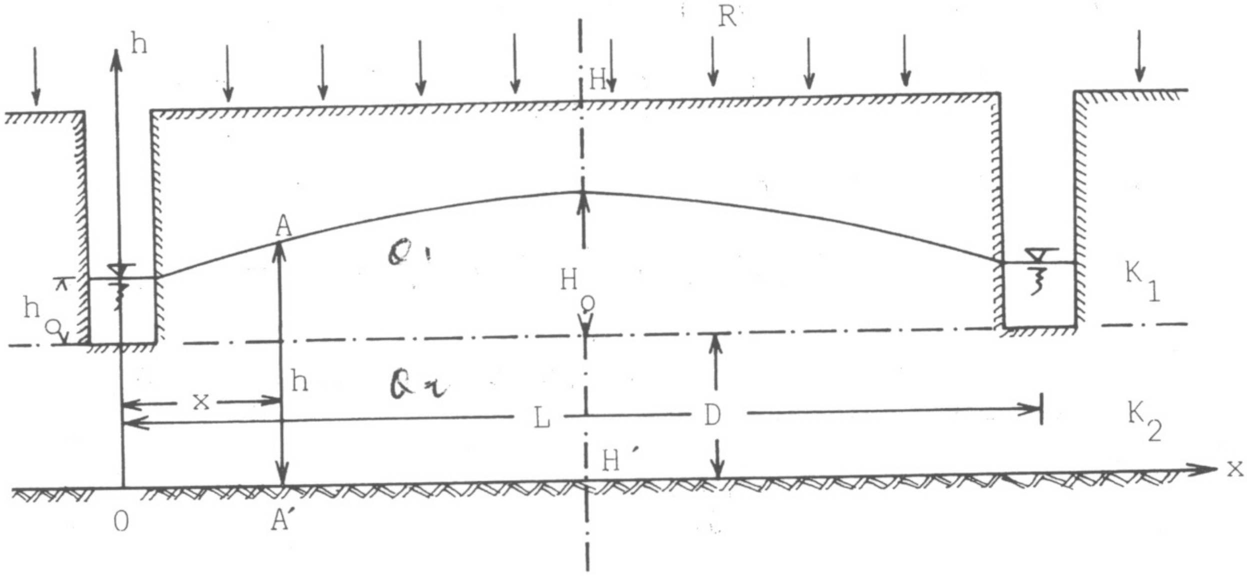
Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει τό συμπέρασμα ὅτι θά πρέπει νά ἐξετάσουμε προσεκτικά κάθε περίπτωση τῆς πράξεως καί νά βλέπουμε πού ἰσχύει ὁ κάθε τύπος. Ἔτσι ὅπως φαίνεται ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα, ὅταν ὁ πυθμένας τῆς τάφρου δέν ἀπέχει πολύ ἀπό τό ἀδιαπέρατο ὑπόστρωμα ἡ ἐξίσωση (5.7) καί ἡ μέθοδος τοῦ ἰσοδύναμου βάθους μᾶς δίνουν περίπου τά αὐτά ἀποτελέσματα. Ἀπενταντίας ὅταν τό d αὐξάνει τότε ἡ μέθοδος τοῦ ἰσοδύναμου βάθους πλησιάζει τήν ἐξίσωση τῶν *Toksöz-Kirkham*.

Πάντως θά πρέπει νά τονιστεῖ ὅτι στήν *U.S.A* ἐφαρμόζεται συνήθως ὁ τύπος τοῦ *Kirkham* ἐνῶ στήν Ὁλλανδία ἐφαρμόζεται ὁ τύπος τοῦ *Hooghoudt* μέ τά νομογραφήματα τῶν *Van Beers* καί *Bouman*.

5.2.5. Περίπτωση δύο ἐδαφικῶν στρώσεων μέ ὑδραυλικές ἀγωγιμότητες K_1 καί K_2

5.2.5.1. Παραδοχές τοῦ Dupuit

Θεωροῦμε τό σχ. 33, ὅπου ὁ πυθμένας τῆς τάφρου ἑδράζεται πάνω στή διαχωριστική ἐπιφάνεια τῶν δύο στρωμάτων μέ ὑδραυλικές ἀγωγιμότητες K_1 (ἐπάνω στρῶμα) καί K_2 (κάτω στρῶμα).



Σχ. 33. Περίπτωση στραγγίσεως μέ δύο στρώματα.

Παίρνουμε ὅπως στήν 5.2.1 ἕνα κάθετο ἐπίπεδο σέ ἀπόσταση x ἀπό τήν ἀρχή. Ἡ παροχή ἀνά μονάδα πλάτους πού διηθεῖται πρός τά κάτω μεταξύ τῆς διατομῆς AA' καί HH' εἶναι [22]

$$Q_x = R\left(\frac{L}{2} - x\right) \tag{5.16}$$

Ἡ ἴδια παροχή περνᾶ ἀπό τήν διατομή AA', δηλ.

$$Q_x = Q_1 + Q_2 = K_1\,(h-D)\,\frac{dh}{dx} + K_2\,D\,\frac{dh}{dx} \tag{5.17}$$

Ἐξισώνουμε τίς (5.16) καί (5.17) καί παίρνουμε

$$R\left(\frac{L}{2} - x\right) = K_1\,(h-D)\,\frac{dh}{dx} + K_2\,D\,\frac{dh}{dx}$$

ἤ

$$\int R\left(\frac{L}{2} - x\right) dx = \int \left\{K_1\,(h-D) + K_2\,D\right\} dh \tag{5.18}$$

Τά ὅρια ὁλοκληρώσεως στήν (5.18) εἶναι

$$x=0,\quad h=D+h_0,\qquad x=\frac{L}{2},\quad h=D+H_0$$

ὁπότε ἡ (5.18) μετά τήν ὁλοκλήρωση γίνεται

$$R\left(\frac{L}{2}x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{L/2} = \left\{K_1\left(\frac{h}{2} - Dx\right) + K_2 Dh\right\}\Big|_{D+h_0}^{D+H_0}$$

ἤ μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων

$$L^2 = \frac{4K_1}{R}(H_0^2 - h_0^2) + \frac{8K_2 D}{R}(H_0 - h_0). \qquad (5.19)$$

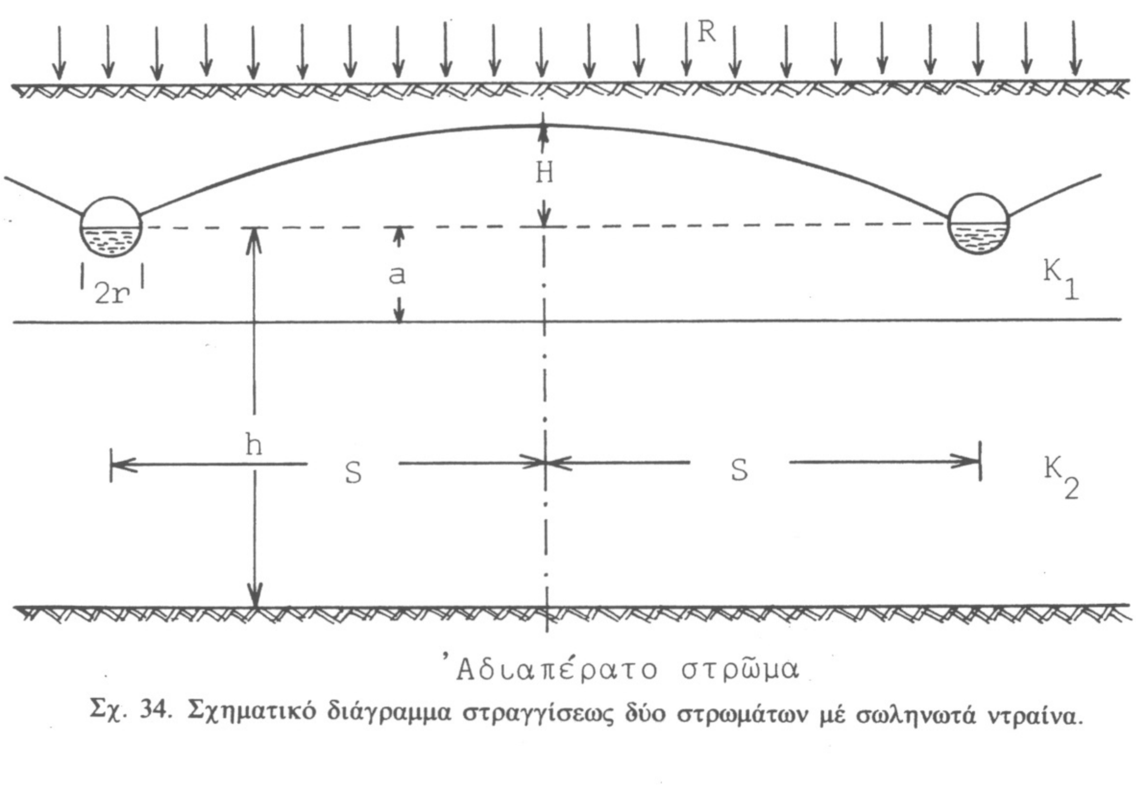
Στήν πράξη τό h_0 εἶναι μικρό καί μπορεῖ νά παραλειφθεῖ, ὁπότε ἡ παραπάνω ἐξίσωση γίνεται

$$L^2 = \frac{4K_1 \cdot H_0^2}{R} + \frac{8K_2 D H_0}{R} \qquad (5.20)$$

Ἡ ἐξίσωση (5.20) γιά $K_1 = K_2 = K$ παίρνει τήν μορφή (5.7) ἤ (5.12) τοῦ *Hooghoudt* γιά ὁμογενές ἔδαφος

5.2.5.2. Ἐξίσωση καί νομογραφήματα τῶν Toksöz καί Kirkham

Τό 1971 οἱ *Toksöz-Kirkham* [24, 25] παρουσίασαν τήν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος τῆς στραγγίσεως δύο στρωμάτων, ὅταν τά ντραίνα εἶναι τοποθετημένα στήν ἐπάνω στρώση.



Σχ. 34. Σχηματικό διάγραμμα στραγγίσεως δύο στρωμάτων μέ σωληνωτά ντραίνα.

Γιά νά ἀποφύγουμε τή σύγχυση χρησιμοποιοῦμε τούς ἴδιους συμβολισμούς μέ τούς *Kirkham-Toksöz*. Γιά τήν ἐπίλυση τοῦ προβλήματος τοῦ σχ. 34 οἱ *Kirkham-Toksöz* χρησιμοποιοῦν τήν ἐξίσωση τοῦ *Laplace* $\nabla^2\varphi = 0$ καί τήν ἐπίλυση μέ σειρές *Fourier* παίρνοντας ὑπόψη τους τίς ὁριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος. Στήν διεπιφάνεια χρησιμοποιοῦν τή συνθήκη

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

δηλαδή σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διεπιφάνειας τό ὁλικό φορτίο ἑκατέρωθεν εἶναι τό ἴδιο. Ἐπίσης χρησιμοποιοῦν ὁρισμένα τεχνάσματα σ' ὅτι ἀφορᾶ τήν περιοχή μεταξύ τῆς φρεατικῆς στάθμης καί τοῦ ἐπιπέδου τῶν ντραίνων, θεωρώντας ὅτι ἡ περιοχή αὐτή ἀποτελεῖται ἀπό μεταλλικές μεμβράνες μέ ἰδεατό ἀμμοχάλικο μέ ἄπειρη ὑδραυλική ἀγωγιμότητα. Στή συνέχεια ἀφαιροῦν τό ἀμμοχάλικο καί τό ἀντικαθιστοῦν μέ ἔδαφος μέ ὑδραυλική ἀγωγιμότητα K_1. Ἐπίσης θεωροῦν ὅτι τά ντραίνα εἶναι λεπτές ὁριζόντιες ὀρθογωνικές σχισμές, ἀπειροστοῦ πάχους καί μήκους *2δ*.

Ἡ λύση στήν ὁποία καταλήγουν οἱ *Toksöz-Kirkham* δίνεται μέ τή μορφή :

$$\frac{H}{\mathrm{a}}\left(\frac{K_1}{R} - 1\right) = \frac{2s}{\mathrm{a}}\left(E + \Sigma F - \Sigma FG\right) \tag{5.21}$$

ὅπου

$$F\left(\frac{2s}{\mathrm{a}}, \frac{\mathrm{a}}{2r}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{m}\left(-1 + \cot h\,\frac{m\pi \mathrm{a}}{s}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\cos\left(m\pi\frac{2r}{\mathrm{a}}\cdot\frac{\mathrm{a}}{2s}\right) - \cos m\pi\right] \tag{5.22}$$

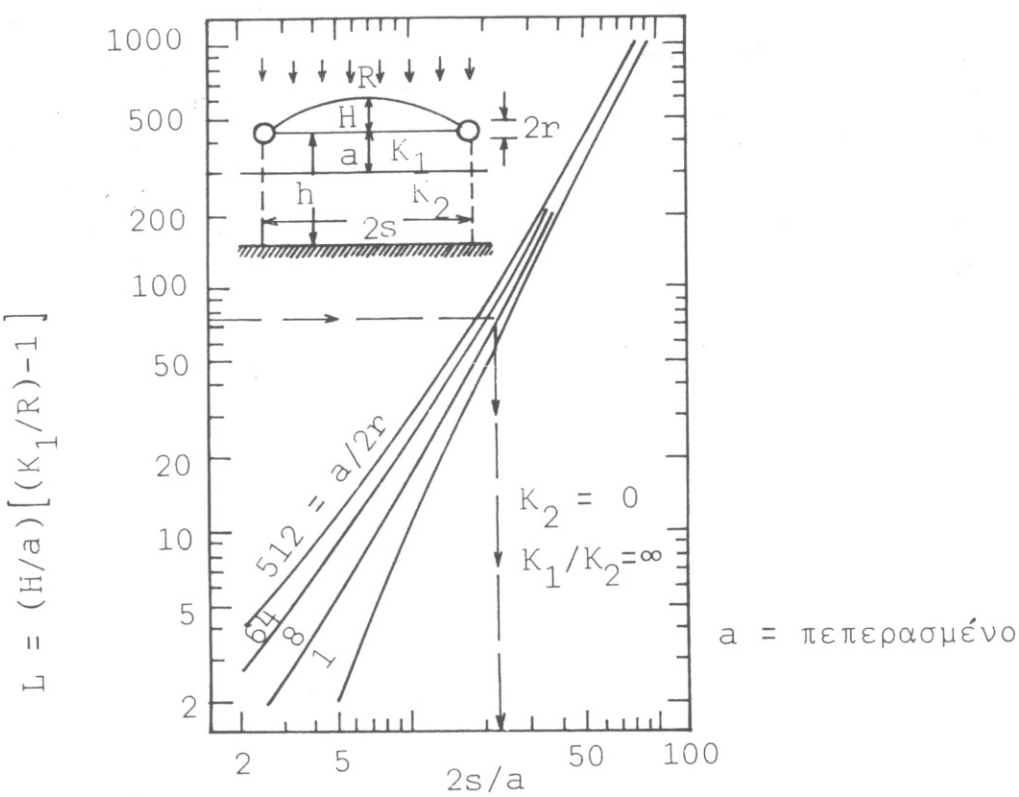
$$G\left(\frac{2s}{\mathrm{a}}, \frac{\mathrm{a}}{h}, \frac{K_1}{K_2}\right) = \frac{e^{(2m\pi \mathrm{a}/2s)}}{\sin h\left(\frac{2m\pi \mathrm{a}}{2s}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\frac{K_1}{K_2}\cot h\, 2m\pi\left(\frac{h}{\mathrm{a}}\cdot\frac{\mathrm{a}}{2s}\right) + \cot h\,\frac{2m\pi \mathrm{a}}{2s}} \tag{5.23}$$

$$E\left(\frac{2s}{\mathrm{a}},\ \frac{\mathrm{a}}{2r}\right)=\frac{1}{\pi}\,ln\,\frac{1}{sin\,\{(\pi/2)\,(2r/\mathrm{a})\,(\mathrm{a}/2s)\}} \tag{5.24}$$

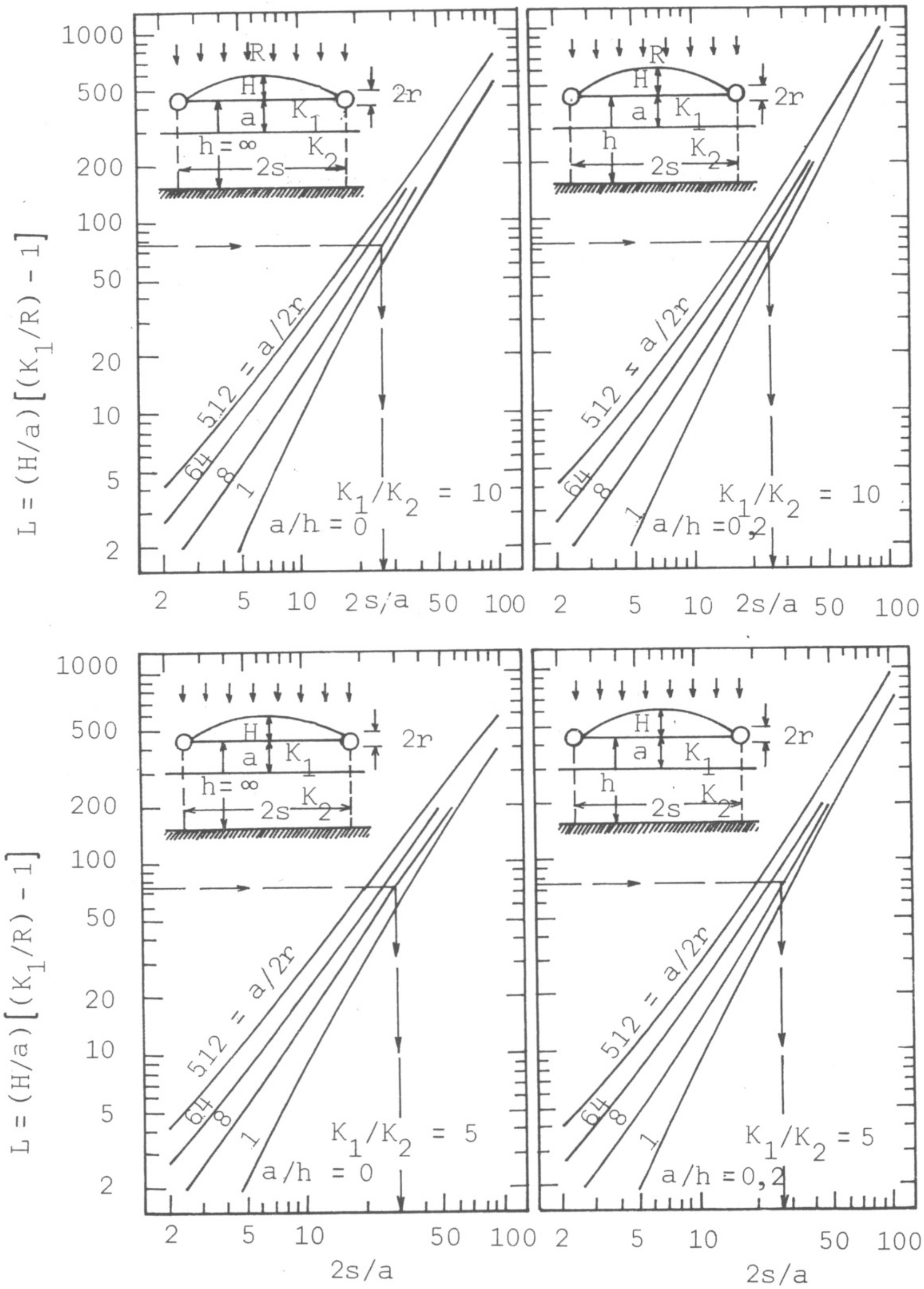
ἡ ἐξίσωση (5.21) εἶναι ἀδιάστατη καί εἶναι πεπλεγμένη ὡς πρός $(2s/\mathrm{a})$, γιαυτό καί δέν εἶναι δυνατή ἡ ἐπίλυσή της. Ἔτσι οἱ *Toksöz-Kirkham* κατασκεύασαν μιά σειρά νομογραφημάτων, πού τά παρουσιάζουμε στά ἑπόμενα σχήματα, καί πού ἡ χρήση τους εἶναι πάρα πολύ ἁπλή. Στά ἑπόμενα σχ. 35-41 δίνεται ἡ ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως (5.21) γιά τιμές τοῦ (K_1/K_2) ἴσες πρός

$$\infty,\ 10,\ 5,\ 2,\ 1/2,\ 1/5,\ 1/10,\ 1/20,\ 0.$$



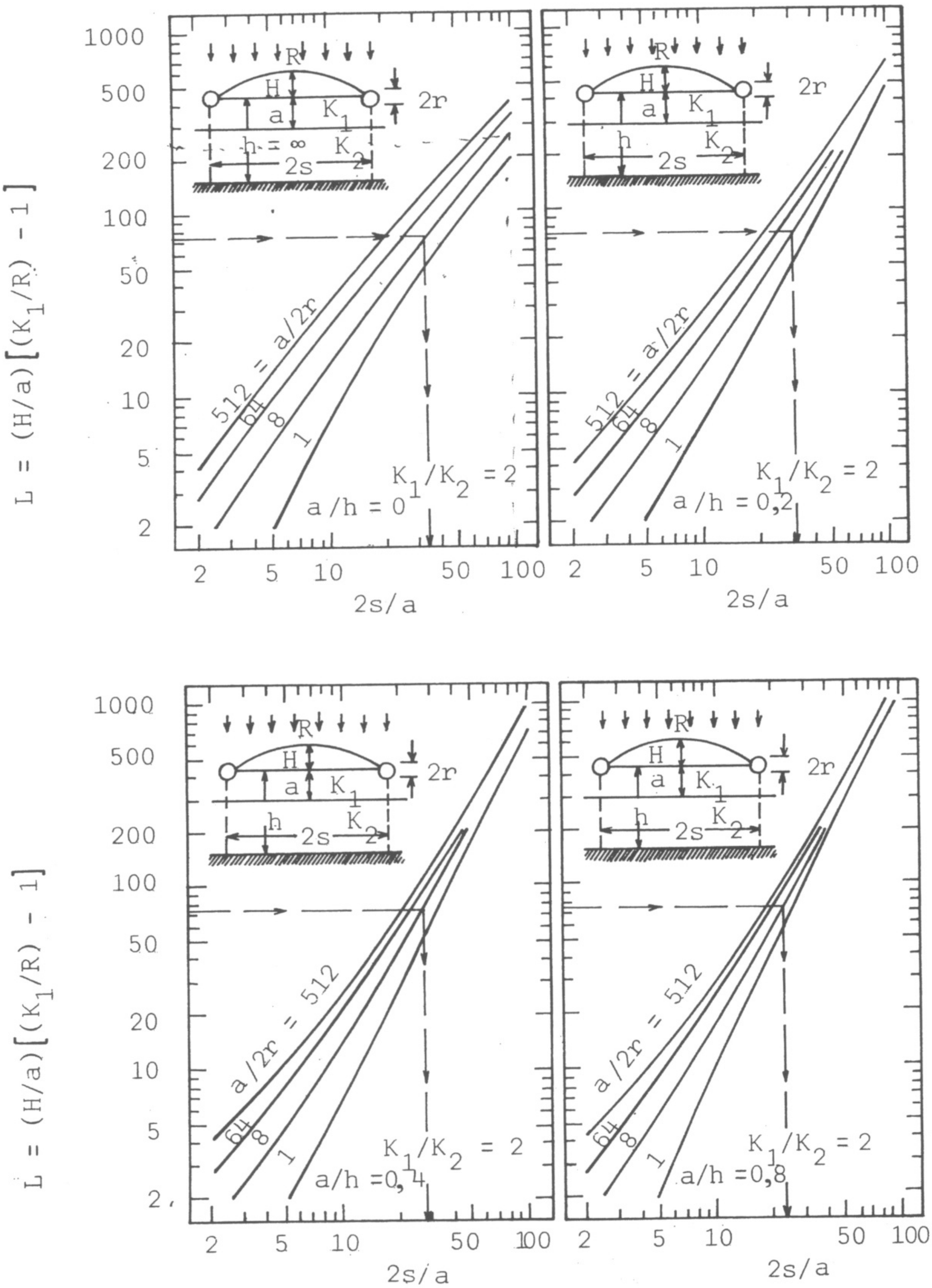
Σχ. 35

S= 4/1.

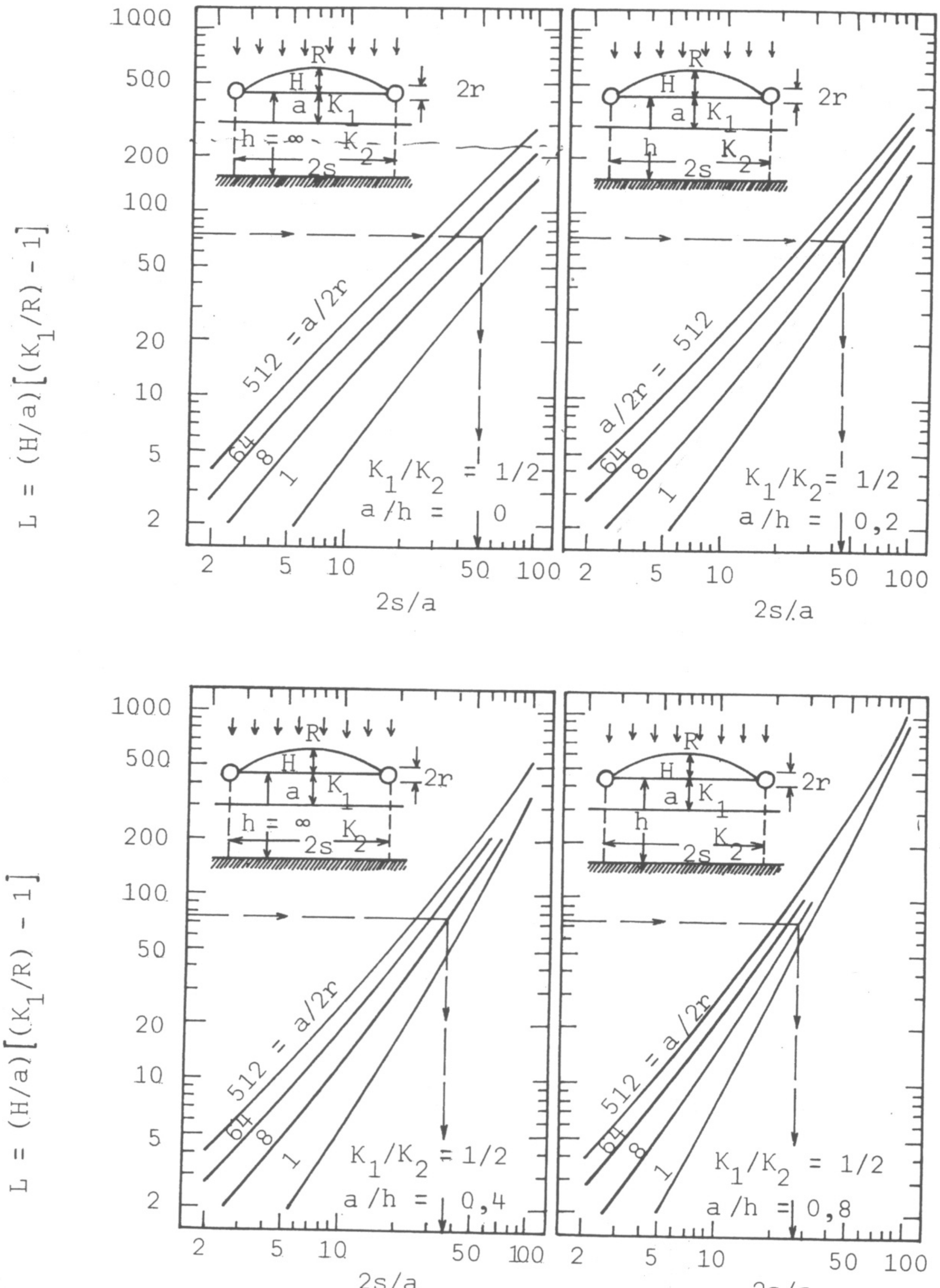


L = (H/a)[(K1/R) - 1]
R
H
a
K1
K2
h = ∞
h
2s
2r
512 = a/2r
64
8
1
K1/K2 = 10
a/h = 0
a/h = 0,2
K1/K2 = 5
2s/a

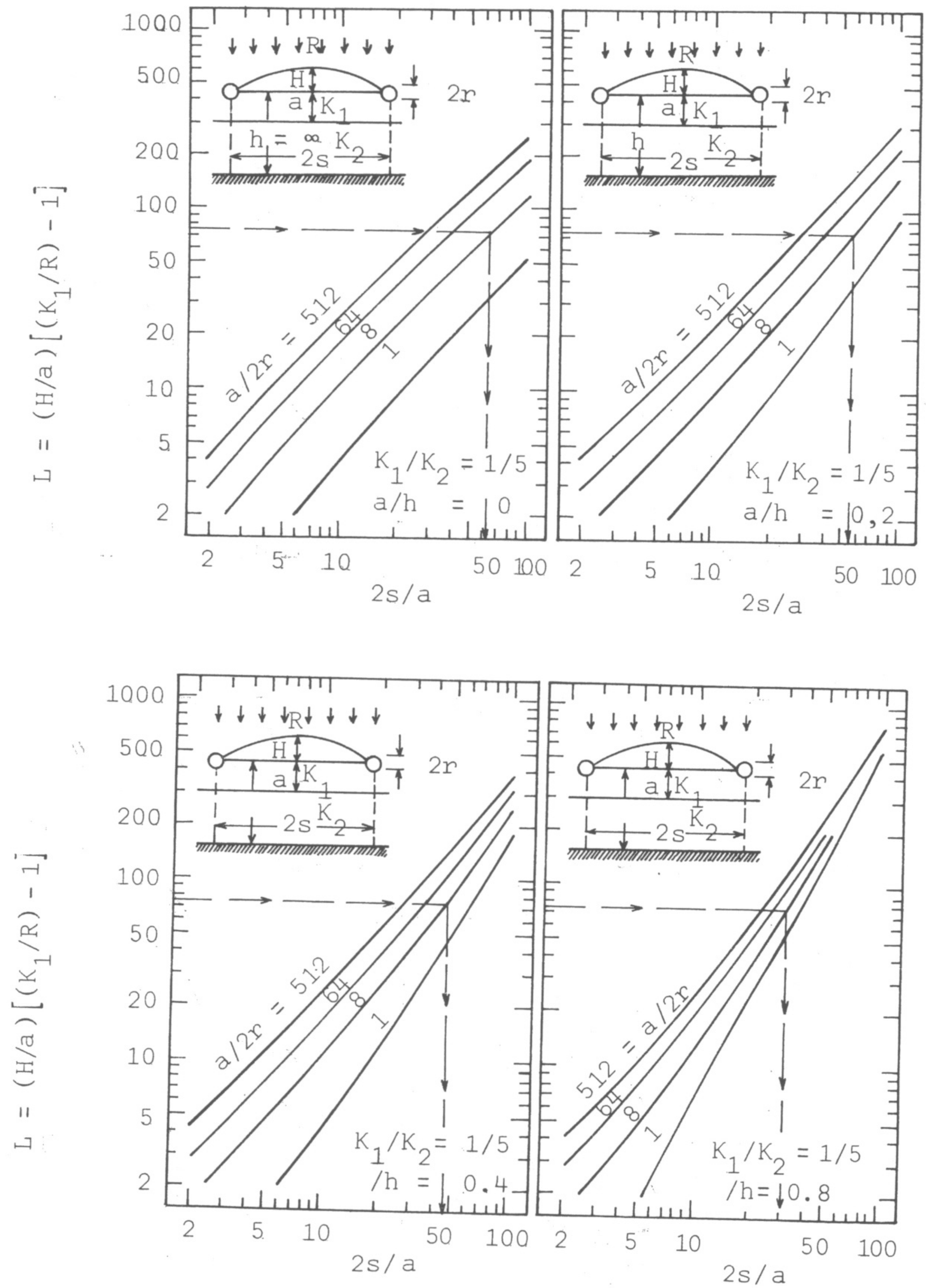
Σχ. 36


1000
500
200
100
50
20
10
5
2
L = (H/a)[(K1/R) - 1]
R
H
a
K1
h = ∞
K2
2s
2r
h
512 = a/2r
64
8
1
K1/K2 = 2
a/h = 0
a/h = 0,2
a/2r = 512
a/h = 0,4
a/h = 0,8
2
5
10
50
100
2s/a

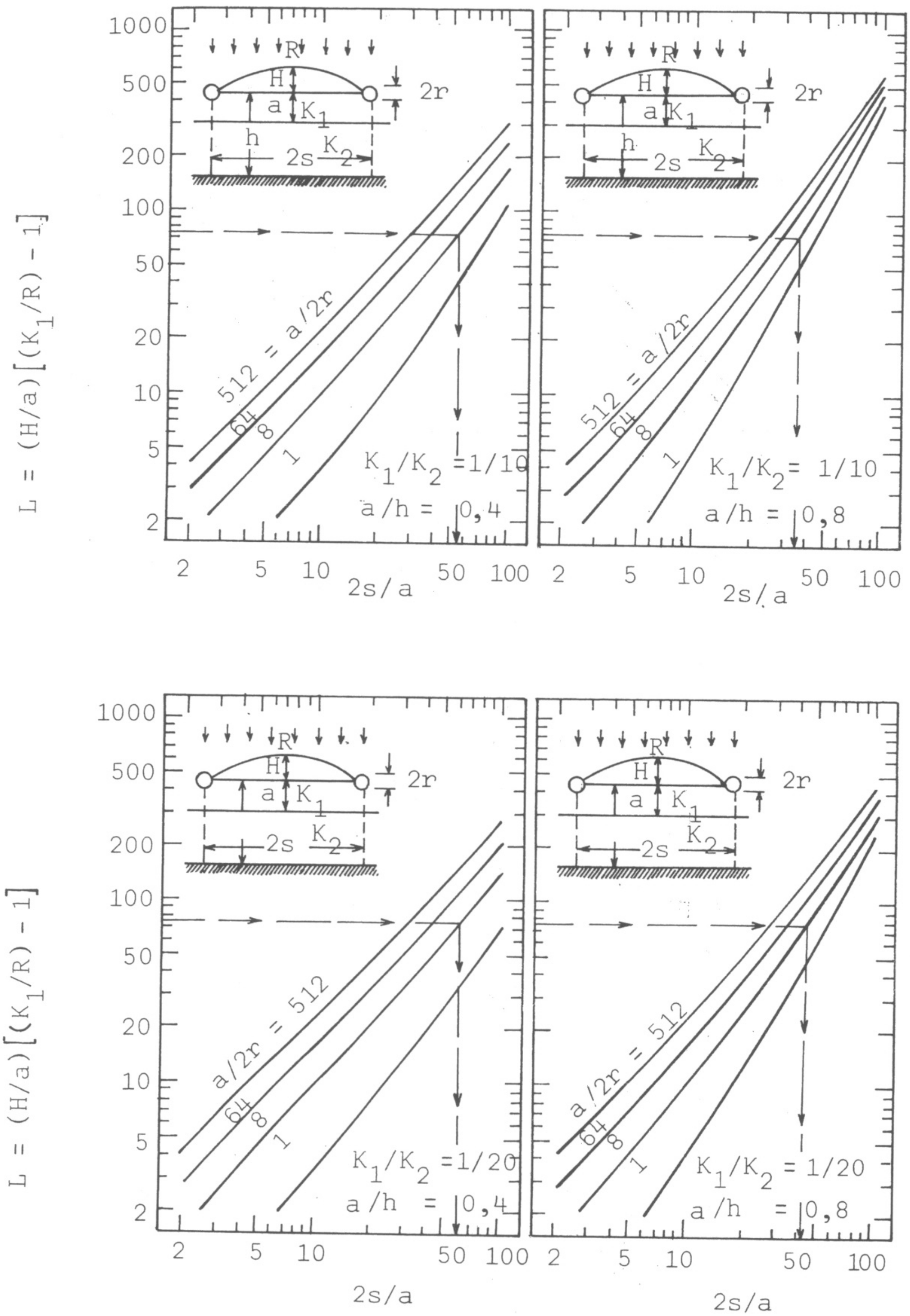
Σχ. 37


L = (H/a)[(K1/R) - 1]
1000
500
200
100
50
20
10
5
2
R
H
a
K1
K2
2r
h = ∞
h
2s
512 = a/2r
a/2r = 512
64
8
1
K1/K2 = 1/2
a/h = 0
a/h = 0,2
a/h = 0,4
a/h = 0,8
2
5
10
50
100
2s/a

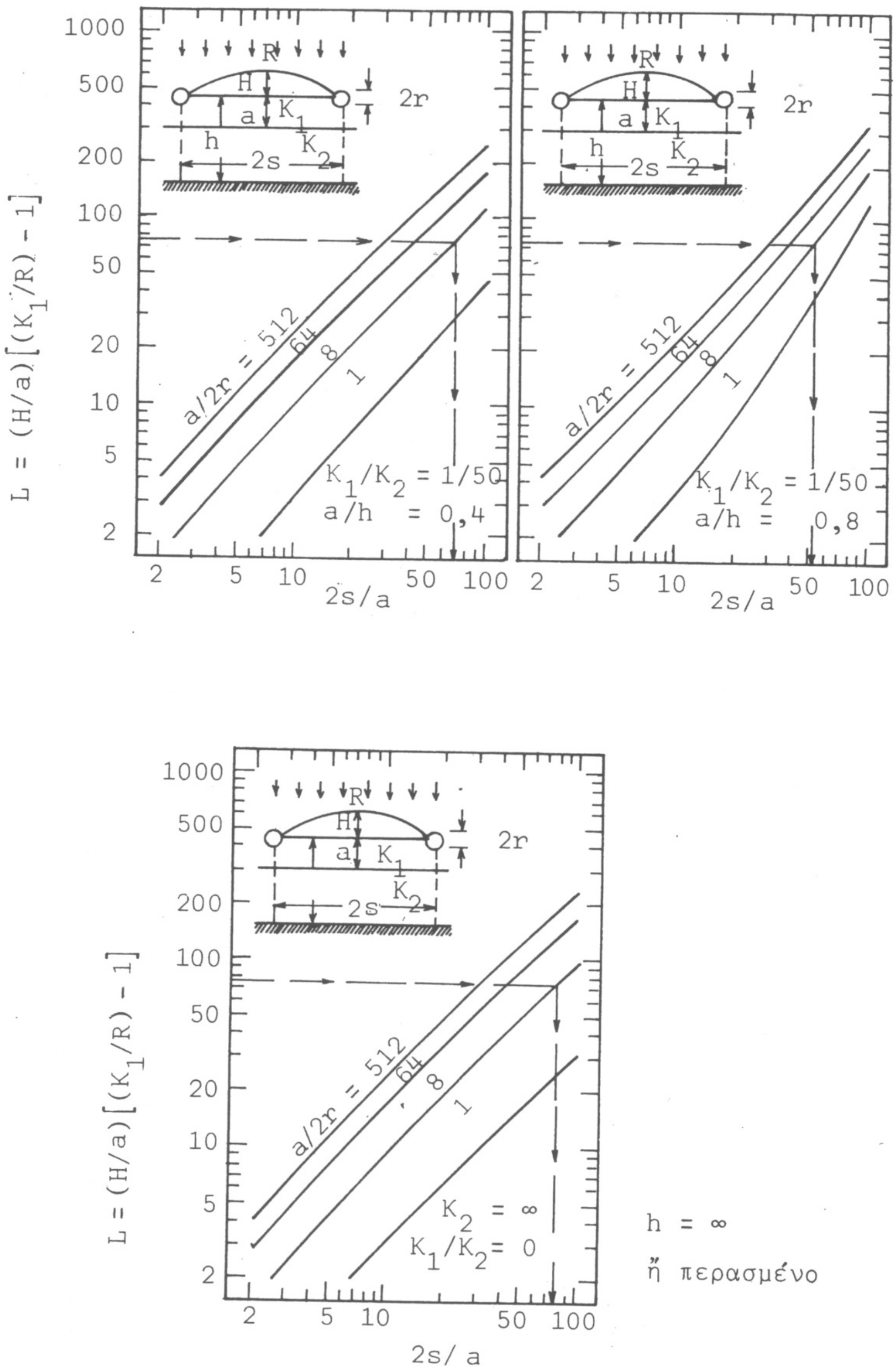
Σχ. 38


L = (H/a)[(K1/R) - 1]
a/2r = 512
64
8
1
K1/K2 = 1/5
a/h = 0
2s/a
K1/K2 = 1/5
a/h = 0,2
K1/K2 = 1/5
/h = 0.4
512 = a/2r
K1/K2 = 1/5
/h= 0.8
R
H
a
K1
K2
h = ∞
2s
2r
h

Σχ. 39


R
H
a
K_1
h
2s
K_2
2r
L = (H/a)[(K_1/R) - 1]
512 = a/2r
64
8
1
K_1/K_2 = 1/10
a/h = 0,4
a/h = 0,8
K_1/K_2 = 1/20
a/2r = 512
2s/a
1000
500
200
100
50
20
10
5
2
2
5
10
50
100

Σχ. 40



R
H
a
K_1
K_2
h
2s
2r
1000
500
200
100
50
20
10
5
2
L = (H/a)[(K1/R) - 1]
a/2r = 512
64
8
1
K1/K2 = 1/50
a/h = 0,4
a/h = 0,8
2
5
10
50
100
2s/a
K2 = ∞
K1/K2 = 0
h = ∞
ή περασμένο

Σχ. 41

5.2.5.3. Ἀριθμητικές ἐφαρμογές

1) Δίνεται μιά ἀγροτική ἔκταση πού ἀποτελεῖται ἀπό δύο στρώματα. Τό ἐπάνω στρῶμα ἔχει ὑδραυλική ἀγωγιμότητα $K_1=0{,}20$ καί τό κάτω ἔχει ἀγωγιμότητα $K_2 = 0{,}4$ (σέ m/ἡμέρα).

Πρόκειται νά στραγγίσουμε τήν περιοχή μέ ἕνα δίκτυο στραγγιστικῶν τάφρων, πού ὁ πυθμένας τους ἑδράζεται στή διαχωριστική ἐπιφάνεια. Τό πάχος τῆς κάτω στρώσεως εἶναι $3\ m$, τό νερό στίς τάφρους εἶναι $h_0=0{,}3\ m$. Μεταξύ τῆς φρεατικῆς ἐπιφάνειας καί τοῦ πυθμένα στίς τάφρους ὑπάρχει ὑψομετρική διαφορά $1{,}20\ m$. Ζητεῖται ἡ ἰσαποχή τῶν τάφρων ὅταν ἡ ἔνταση τῆς τεχνητῆς βροχῆς εἶναι

$$R = 0{,}01\ m/\text{ἡμέρα}$$

Λύση

Ἀπό τό σχ. 33 ἔχουμε τά ἀκόλουθα χαρακτηριστικά μεγέθη

$$\begin{aligned}
K_1 &= 0{,}20\ m/\text{ἡμέρα}\\
K_2 &= 0{,}4\ m/\text{ἡμέρα}\\
R &= 0{,}01\ m/\text{ἡμέρα}\\
H_0 &= 1{,}20\ m\\
D &= 3\ m
\end{aligned}$$

Ἐφαρμόζουμε τόν τύπο (5.20) καί παίρνουμε

$$L^2 = \frac{4K_1 \cdot H_0^2}{R} + \frac{8K_2 \cdot D \cdot H_0}{R} = \frac{4\times 0{,}20\times 1{,}20^2}{0{,}01} + \frac{8\times 0{,}4\times 3\times 1{,}2}{0{,}01} =$$

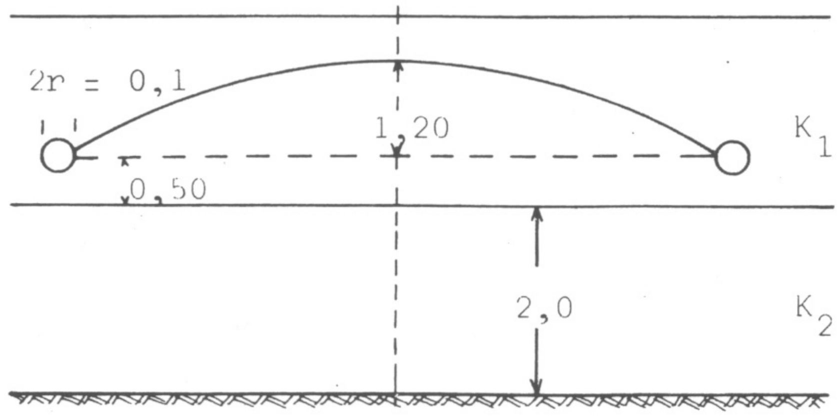
$$= 115{,}20 + 1152 = 1267{,}19\ m^2$$

$$L = 35{,}60\ m$$

2) Δίνεται τό ἴδιο ἔδαφος ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα καί ἐπιδιώκουμε τή στράγγισή του μέ σύστημα σωληνωτῶν ντραίνων ($r=0{,}05$) πού τοποθετοῦνται $0{,}5\ m$ πάνω ἀπό τή διαχωριστική ἐπιφάνεια ὅπως φαίνεται στό σχ. 42

Γιά τήν περίπτωση αὐτή μεταχειριζόμαστε τό νομογράφημα τῶν *Toksöz-Kirkham* τοῦ σχ. 38 γιά $(K_1/K_2) = (1/2)$. Ἔχουμε

$$\frac{H}{a}\left[\frac{K_1}{R} - 1\right] = \frac{1{,}20}{0{,}5}\left[\frac{0{,}20}{0{,}01} - 1\right] = 45{,}6$$



Σχ. 42. Περίπτωση στραγγίσεως μέ παράλληλα ντραίνα.

$$\frac{a}{h} = \frac{0{,}5}{2{,}5} = 0{,}2$$

$$\frac{a}{2r} = \frac{0{,}5}{0{,}10} = 5$$

Μέ τίς τιμές αὐτές βρίσκουμε ἀπό τό νομογράφημα

$$\frac{2s}{a} = 38 \Rightarrow L = 2s = 19\ m$$

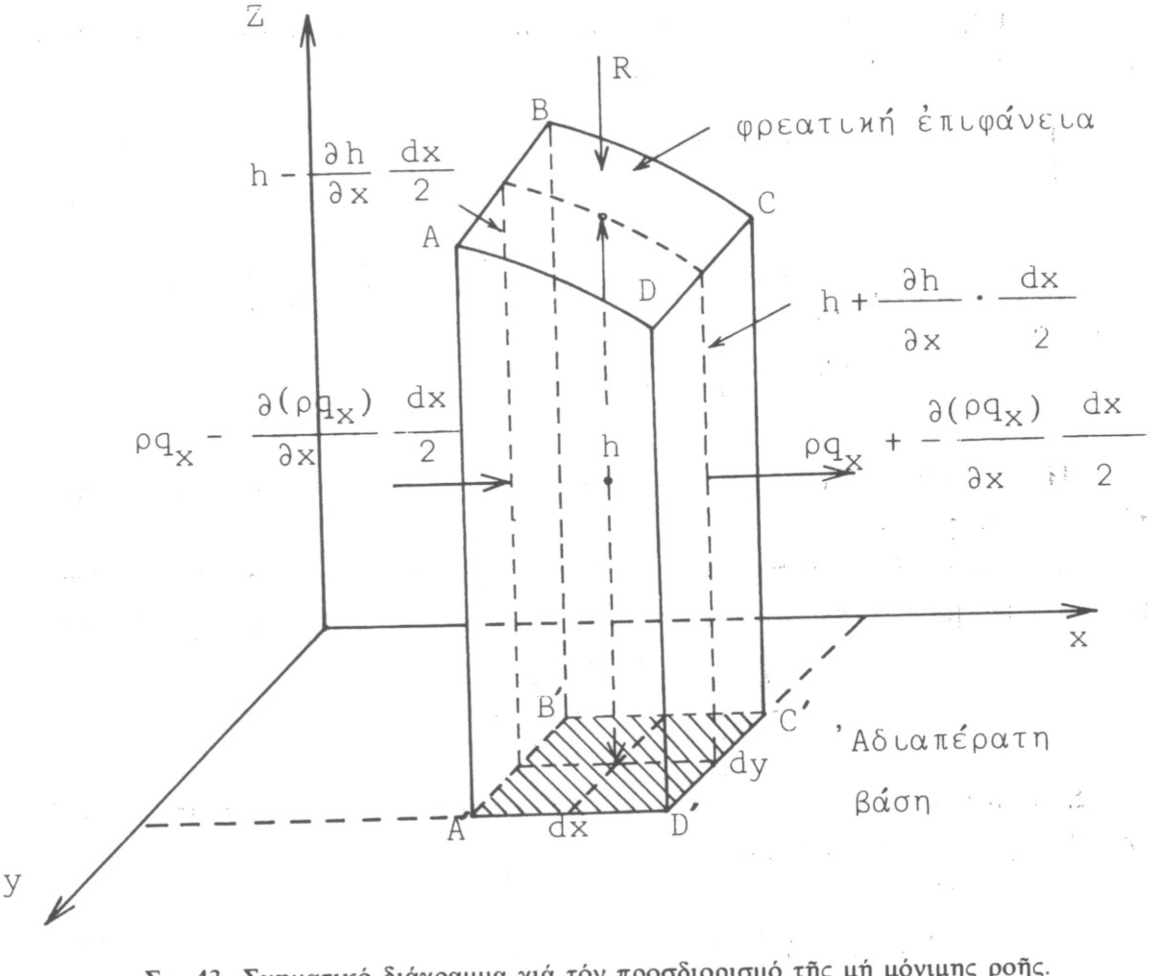
5.3. Μή μόνιμη ροή

5.3.1. Ἐξίσωση τοῦ Boussinesq

Σέ πολλές περιοχές μέ περιοδική ἄρδευση ἤ μέ τεχνητή βροχή ὑψηλῆς πυκνότητας ἡ παραδοχή μιᾶς μόνιμης τροφοδοτήσεως τοῦ ὑπογείου ὁρίζοντα δέν ἰσχύει πιά καί πρέπει νά ἐφαρμόζεται ἡ θεωρία τῆς μή μόνιμης καταστάσεως. Στήν περίπτωση αὐτή μεγάλη ἐφαρμογή στήν πράξει ἔχει ἡ ἐξίσωση τοῦ *Boussinesq* πού ἡ ἐξαγωγή της στηρίζεται στίς ἁπλουστευτικές παραδοχές τοῦ *Dupuit* ὅπως ἀναφέρθηκαν στήν παράγραφο 4.12. Θά πρέπει νά σημειωθεῖ ἐδῶ ὅτι ἡ *Pulobarinova-Cochina* [20] καί ὁ *Bear* [2] ἀναφέρουν τήν λύση τέτοιων προβλημάτων τῆς ροῆς διά πορώδους μέσου μέ τίς παραδοχές τοῦ *Dupuit*, σάν τήν ὑδραυλική προσέγγιση τοῦ προβλήματος.

Τό μεγάλο πλεονέκτημα τῆς ὑδραυλικῆς ἀντιμετωπίσεως αὐτῶν τῶν προβλημάτων εἶναι ὅτι μειώνεται ὁ ἀριθμός τῶν ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν καί ἐπίσης ἡ θέση τῆς ἐλεύθερης ἐπιφάνειας καθορίζεται πολύ πιό εὔκολα.

Θεωροῦμε στό σχ. 43 ἕνα στοιχειώδη ὄγκο ἐλέγχου *(control volume)*,



Σχ. 43. Σχηματικό διάγραμμα γιά τόν προσδιορισμό τῆς μή μόνιμης ροῆς.

πού ἡ βάση του ἑδράζεται στό ἀδιαπέρατο ὁριζόντιο ὑπόστρωμα, ἐνῶ ἡ πάνω ἐπιφάνεια του ἀποτελεῖ τήν φρεατική ἐπιφάνεια. Σύμφωνα μέ τίς παραδοχές τοῦ *Dupuit* οἱ ὁριζόντιες συνιστῶσες τῆς εἰδικῆς παροχῆς ἤ ταχύτητας *Darcy* q εἶναι

$$q_x = -K\frac{\partial h}{\partial x} \qquad q_y = -K\frac{\partial h}{\partial y} \tag{5.25}$$

Ἡ μάζα τοῦ νεροῦ πού εἰσέρχεται ἀπό τό κατακόρυφο ἐπίπεδο $ABB'A'$ στόν χρόνο dt εἶναι :

$$\left\{ \rho q_x - \frac{\partial (\rho q_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} \cdot \left\{ h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} dy \cdot dt$$

ἐνῶ ἡ μάζα τοῦ νεροῦ πού ἐξέρχεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια $DCC'D'$ εἶναι

$$\left\{ \rho q_x + \frac{\partial (\rho q_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} \cdot \left\{ h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} dy \cdot dt .$$

Ἔτσι ἡ συνολική μάζα νεροῦ πού ἐξέρχεται κατά τήν διεύθυνση x εἶναι ἡ διαφορά τῶν παραπάνω μαζῶν

$$\left\{ \rho q_x - \frac{\partial (\rho q_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} \cdot \left\{ h - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} dy \cdot dt - \left\{ \rho q_x + \frac{\partial (\rho q_x)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ h + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{2} \right\} dy \cdot dt = \left\{ - h \frac{\partial (\rho q_x)}{\partial x} - \rho\, q_x \frac{\partial h}{\partial x} \right\} dx \cdot dy \cdot dt =$$

$$= - \frac{\partial (\rho q_x h)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dt . \qquad (5.26)$$

Ἡ παραπάνω ἔκφραση προκύπτει γιατί παραλείπονται οἱ ὅροι ἀνωτέρας τάξεως $0\,(dx^2)$.

Μιά ὅμοια ἔκφραση προκύπτει καί κατά τήν διεύθυνση y καί ἔτσι ἡ συνολική μάζα πού εἰσέρχεται στόν στοιχειώδη ὄγκο τοῦ σχ. 43 εἶναι

$$- \left\{ \frac{\partial (\rho q_x h)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho q_y h)}{\partial y} \right\} dx \cdot dy \cdot dt . \qquad (5.27)$$

Στό διάστημα dt ἡ μάζα τοῦ στοιχειώδους ὄγκου ὑφίσταται μιά μεταβολή πού εἶναι ἴση μέ :

$$\rho n_e \cdot dx\, dy\, \left\{ h_{t+dt} - h_t \right\} = \rho n_e\, dx\, dy \frac{\partial h}{\partial t} dt. \qquad (5.28)$$

Στήν παραπάνω σχέση (5.28) μεταχειριζόμαστε τό ἀποτελεσματικό πορῶδες n_e ἀντί τοῦ πορώδους n, καί θεωροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι σταθερό. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς μάζας, οἱ δύο μάζες (5.27) καί (5.28) εἶναι ἴσες καί ἔχουμε

$$\rho n_e \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho q_x h)}{\partial x} - \frac{\partial (\rho q_y h)}{\partial y}$$

ἤ γιά $\rho =$ σταθερό (ἀσυμπίεστο ρευστό) παίρνουμε

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial (q_x h)}{\partial x} - \frac{\partial (q_y h)}{\partial y} . \tag{5.29}$$

Γιά τήν περίπτωση πού ἔχουμε κατά τή διεύθυνση z μιά βροχόπτωση R (θετική πρός τά κάτω) ἤ μιά ἐξάτμιση (ἀρνητική), τότε στήν ἐξίσωση συνεχείας πρέπει νά προστεθεῖ καί ὁ ὅρος

$$R\, dx\, dy\, dt$$

ὁπότε παίρνουμε

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial (q_x h)}{\partial x} - \frac{\partial (q_y h)}{\partial y} + R. \tag{5.30}$$

Ἀντικαθιστοῦμε τώρα στήν ἐξίσωση (5.30) τίς σχέσεις (5.25) καί γιά K=σταθερό (ἔδαφος ὁμογενές) ἔχουμε

$$n_e \frac{\partial h}{\partial t} = K \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y}\right) \right\} + R. \tag{5.31}$$

Ἡ ἐξίσωση (5.31) καλεῖται ἐξίσωση τοῦ *Boussinesq* καί περιγράφει τήν μή μόνιμη κίνηση τοῦ νεροῦ, γιά τήν περίπτωση πού ἰσχύουν οἱ παραδοχές τοῦ *Dupuit*.

Σέ πολλές περιπτώσεις προβλημάτων τό h μεταβάλλεται πολύ λίγο καί μποροῦμε νά τό ἀντικαταστήσουμε μέ μιά μέση τιμή D καί νά θεωρήσουμε ἐπίσης ὅτι οἱ ὅροι $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$ καί $\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2$ εἶναι πολύ μικροί. Ἔτσι ἡ ἐξίσωση (5.31) γίνεται

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{K\, D}{n_e} \right) \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right\} + \frac{R}{n_e} . \tag{5.32}$$

5.3.2. Μή μόνιμη ροή, στράγγιση μέ σωληνωτά ντραίνα. Ἐξισώσεις τῶν Glover-Dumm

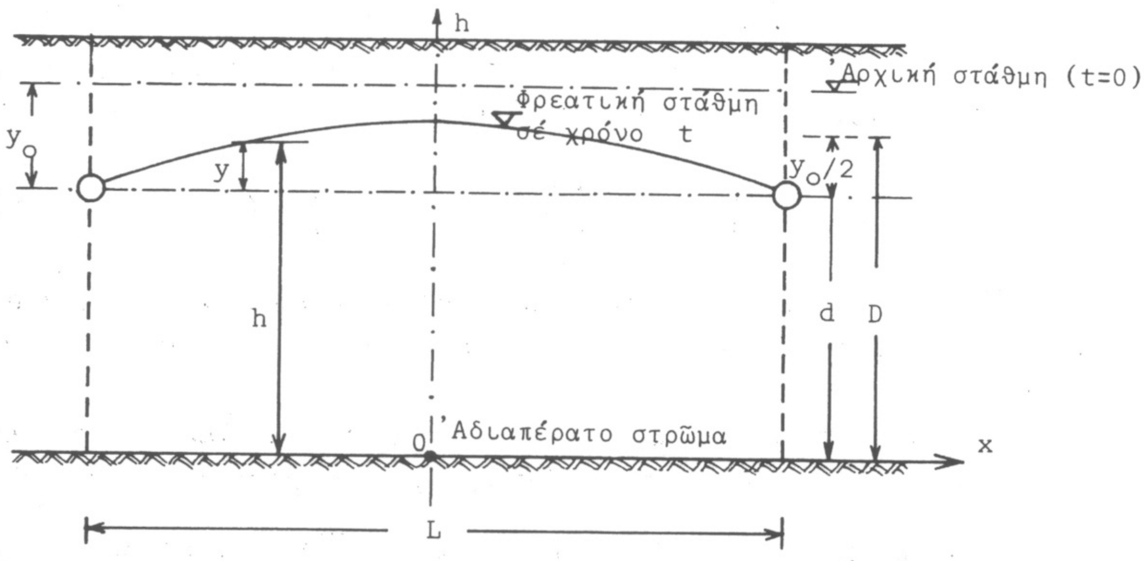
α. Φυσικό πρόβλημα.

Θεωροῦμε τήν περίπτωση μή μόνιμης στραγγίσεως ἑνός ἐδάφους μέ σωληνωτά ντραίνα (σχ. 44). Οἱ *Glover, Dumm, Mansland, Van de Leur* [9] ἔλυσαν τό παραπάνω πρόβλημα μέ τίς ἀκόλουθες συνθῆκες :

— Ἡ κίνηση θεωρεῖται μονοδιάστατη καί παίρνεται $R=0$, ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (5.32) γίνεται :

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{KD}{n_e}\;\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \tag{5.33}$$

Σημείωση: Στήν Ἀμερικάνικη βιβλιογραφία χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος S=σταθερή εἰδική ἀπόδοση σέ νερό τοῦ ἐδάφους *(specific yield)* ἀντί τοῦ ὅρου n_e = ἀποτελεσματικό πορῶδες.



Σχ. 44. Μή μόνιμη στράγγιση μέ σωληνωτά ντραίνα.

— Ἀρχική συνθήκη ροῆς

Θεωρεῖται ὅτι σέ χρόνο $t = 0$, πρίν δηλαδή ἀρχίσει τό φαινόμενο τῆς στραγγίσεως, (ἤ ὁ ὑποβιβασμός τῆς φρεατικῆς ἐπιφάνειας), ἡ στάθμη τοῦ νεροῦ βρίσκεται σέ σταθερό ἐπίπεδο

$$h = d+y_0 = h_0 \quad , \qquad -\frac{L}{2}<x<\frac{L}{2}\,. \tag{5.34}$$

— Ὁριακές συνθῆκες

α. Στή θέση $x=0$ ἔχουμε λόγω συμμετρίας

$$\frac{\partial h}{\partial x}= 0. \qquad\qquad t \geqslant 0. \tag{5.35}$$

β. Στή θέση $x = \pm \frac{L}{2}$ ἔχουμε

$$h = d \qquad t > 0. \tag{5.36}$$

Γιά νά λύσουμε τό παραπάνω πρόβλημα τῆς μή μόνιμης στράγγισης, πού περιγράφεται ἀπό τή διαφορική ἐξίσωση (5.33) καί ἀπό τίς συνθῆκες (5.34), (5.35) καί (5.36), προχωροῦμε καταρχή σέ μιά ἀδιαστατοποίηση, πού διευκολύνει τούς ὑπολογισμούς καί ἐπιτρέπει τήν ἐξαγωγή γενικῶν συμπερασμάτων.

Θέτουμε λοιπόν νέες ἀδιάστατες μεταβλητές

$$H = \frac{h}{h_0}, \qquad \xi = \frac{2x}{L}, \qquad \tau = \frac{4K\,D}{n_e\,L^2} \cdot t = \frac{4at}{L^2}\,, \qquad \left(a = \frac{KD}{n_e}\right).$$

Μέ βάση τίς μεταβλητές αὐτές ἡ ἐξίσωση (5.33) γίνεται

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}\,. \tag{5.33)'$$

Ἡ ἀρχική συνθήκη γίνεται

$$H = 1 \qquad -1 < \xi < 1 \tag{5.34)'$$

καί οἱ ὁριακές συνθῆκες (5.35) καί (5.36) γίνονται

α. $$\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 0, \quad \tau \geqslant 0 \tag{5.35)'$$

β. $$H = \frac{d}{h_0} = d_h\,, \quad \xi = \pm 1 \quad \tau > 0 \tag{5.36)'$$

Γιά νά διευκολύνουμε στή λύση τοῦ προβλήματος εἰσάγουμε νέα ἐξαρτημένη μεταβλητή

$$y = H - d_h,$$

ὁπότε οἱ παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \tag{5.33)''$$

— Ἀρχική συνθήκη

$$y = 1 - d_h \qquad -1 < \xi < 1 \tag{5.34)''$$

— Όριακές συνθῆκες

α. $\dfrac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \quad \xi=0, \quad \tau \geqslant 0$ (5.35)´´

β. $y=0, \quad \xi = \pm 1, \quad \tau > 0$ (5.36)´´

β. Ἐπίλυση τοῦ προβλήματος μέ τή μέθοδο τοῦ χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν

Γιά νά λύσουμε τήν παραπάνω ἐξίσωση μέ τή μέθοδο τοῦ χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν, θεωροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $y\,(\xi,\,\tau)$ εἶναι γινόμενο δύο συναρτήσεων $X\,(\xi)$ καί $T\,(\tau)$:

$$y\,(\xi,\,\tau) = X\,(\xi)\cdot T\,(\tau). \tag{5.37}$$

Παραγωγίζουμε τήν παραπάνω σχέση ὡς πρός τ καί ξ καί παίρνουμε :

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = X\cdot T' , \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = X''\cdot T . \tag{5.39}$$

Ἀντικαθιστοῦμε τίς δύο σχέσεις (5.38) καί (5.39) στήν ἐξίσωση (5.33) καί παίρνουμε :

$$XT' = X''T$$

ἤ

$$\frac{T'(\tau)}{T\,(\tau)} = \frac{X''(\xi)}{X\,(\xi)} .$$

Στήν παραπάνω ἐξίσωση κάθε μέλος εἶναι συνάρτηση μόνο μιᾶς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς καί ἑπομένως γιά νά ἰσχύει αὐτό θά πρέπει ἡ παραπάνω ἐξίσωση νά ἰσοῦται μέ μιά σταθερή ποσότητα $-k^2$, δηλαδή

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -k^2.$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή παίρνουμε

$$T' + k^2T = 0$$

ἤ

$$\frac{dT}{T} = -k^2dt$$ $\ln T = -k^2 t$

ἤ

$$T = exp\,[-k^2\tau] \qquad (5.40)$$

Ἐπίσης παίρνουμε τή δεύτερη σχέση

$X' = ike^{ik\xi}$

$$X'' + k^2X = 0.$$

$X'' = -k^2 e^{ik\xi} = -k^2$

Ἡ λύση τῆς παραπάνω διαφορικῆς ἐξίσωσης εἶναι

$X = e^{ik\xi}$

$$X = exp\,[ik\xi] = cos\,k\xi + i\,sin\,k\xi. \qquad (5.41)$$

Ἔτσι ἡ σχέση (5.37), δηλαδή ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσης (5.33) γίνεται

$$y = exp\,[-k^2\tau]\,(cos\,k\xi + i\,sin\,k\xi). \qquad (5.42)$$

Ἐπειδή ἡ διαφορική ἐξίσωση (5.33) εἶναι γραμμική, μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ ἡ ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας, δηλαδή τό ἄθροισμα πολλῶν λύσεων τῆς μορφῆς (5.42), πολλαπλασιασμένων μέ κατάλληλους συντελεστές, ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση τῆς (5.33). Ἔτσι ἡ γενική λύση τῆς (5.33) γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, sin\, k_n\,\xi\; exp\,[-k_n^2\tau] + \sum_{m=1}^{\infty} D_m\, cos\, k_m\xi\; exp\,[-k_m^2\tau] \qquad (5.43)$$

Ἱκανοποίηση τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν

Ἀπό τή συνθήκη συμμετρίας ἔχουμε :

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, k_n\, cos k_n\xi\; exp[-k_n^2\tau] - \sum_{m=1}^{\infty} D_m\, k_m\, sin\, k_m\,\xi\; exp\,[-k_m^2\tau] = 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, k_n\, \overset{1}{cos(k_n\cdot 0)}\; exp[-k_n^2\tau] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, k_n\, exp\,[-k_n^2\tau] = 0. \qquad (5.44)$$

Γιά νά ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση αὐτή, πρέπει νά ἰσχύει $C_n=0$, γιατί στό διάστημα τῆς μή μόνιμης στράγγισης ὁ ὅρος $exp\,[-k_n^2\tau]$ δέν ἰσοῦται μέ μηδέν.

Χρησιμοποιοῦμε τώρα τή συνθήκη (5.36) γιά νά προσδιορίσουμε τή σταθερή k_n ἔχουμε: Γιά

$$\xi = \pm 1 \qquad y=0$$

ἤ

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n\, cos\,(k_n\cdot 1) = 0 \rightarrow cos\, k_n = 0$$

$$k_n = \frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\ .\ .\ .$$

ἤ

$$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}\ .$$

Συνεπῶς ἡ γενική λύση τοῦ προβλήματος γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$y\,(\xi,\,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\ cos\ \left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]\ exp\ \left[-\,(2n-1)^2\frac{\pi}{4}\tau\right]. \qquad (5.45)$$

Γιά νά βροῦμε τή σταθερή D_n μεταχειριζόμαστε τώρα τήν ἀρχική συνθήκη, δηλαδή γιά

$$\tau = 0, \qquad y = 1-d_h \qquad -1 < \xi < 1$$

ἤ

$$1 - d_h = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\ cos\ k_n\xi. \qquad (5.46)$$

Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως (5.46) ἐπί $cos\ k_m\xi$ καί ὁλοκληρώνουμε ἀπό -1 ἕως 1

$$\int_{-1}^{1}(1-d_h)\ cos\,(k_m\xi)\ d\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1} D_n\ cos\,(k_m\xi)\ cos\,(k_n\xi)\ d\xi.$$

Ἐπειδή οἱ συναρτήσεις $cos\,(k_n\xi)$ εἶναι ὀρθογωνικές ἰσχύει

$$\int_{-1}^{1} cos\,(k_m\xi)\ cos\,(k_n\xi)\ d\xi = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

Ἔτσι τό δεύτερο μέλος τῆς παραπάνω ἐξισώσεως γίνεται :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1} D_n\ cos\,(k_m\xi)\ cos\,(k_n\xi)\ d\xi = D_n.$$

Ἀπό τό πρῶτο μέλος ἔχουμε

$$\int_{-1}^{1}(1-d_h)\ cos\,(k_m\,\xi)\ d\xi = (1-d_h)\ 2\int_{0}^{1} cos\,(k_m\xi)\ d\xi = (1-d_h)\ \frac{2sin\ k_m}{k_m} =$$

$$= 2\,(1-d_h)\ \frac{(-1)^{n+1}}{k_n}$$

(ἀλλάζουμε τό δείκτη m σέ n).

Τελικά παίρνουμε :

$$D_n = 2\,(1-d_h)\,\frac{(-1)^{n+1}}{k_n}$$

καί ἡ γενική λύση (5.45) γίνεται

$$y\,(\xi,\,\tau) = (1-d_n)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{k_n}\,(-1)^{n+1}\,cos\,(k_n\xi)\cdot exp\,[-k_n^2\tau], \qquad (5.47\alpha)$$

ὅπου $$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

Ἀλλά ἔχουμε

$$y = H-d_h = \frac{h}{h_0}-\frac{d}{h_0} = \frac{h-d}{h_0}\,,\quad 1-d_h = \frac{d}{h_0} = \frac{h_0-d}{h_0}\,,\quad \xi = \frac{2x}{L}\,,\quad \tau = \frac{4at}{L^2}$$

καί τελικά ἡ λύση (5.47) γίνεται

$$\frac{h-d}{h_0-d} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{k_n}\,(-1)^{n+1}\,cos\left(k_n\frac{2x}{L}\right)\,exp\left(-\,k_n^2\,\frac{4at}{L^2}\right). \qquad (5.47\beta)$$

Γιά τήν περίπτωση πού τά ντραίνα ἑδράζονται πάνω στό ἀδιαπέρατο στρῶμα, θέτουμε στήν ἐξίσωση (5.47β) $d=0$.

Ἡ παραπάνω σχέση γιά $x = 0$ γίνεται :

$$h-d = m = (h_0-d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{k_n}(-1)^{n+1}\,exp\left[-k_n^2\,\frac{4at}{L^2}\right].$$

Ἀπό τό ἄθροισμα αὐτό παίρνουμε μόνο τόν πρῶτο ὅρο, θεωρώντας ὅτι οἱ ὑπόλοιποι εἶναι πολύ μικροί καί ἔχουμε

$$k_1 = \frac{\pi}{2}\,,\qquad y_0 = h_0 - d$$

$$m = \frac{4y_0}{\pi}\,exp\left[-\frac{\pi^2 at}{L^2}\right] \qquad \text{ἤ} \qquad L^2 = (\pi^2/at)\Big/\,ln\left(\frac{4y_0}{m\cdot\pi}\right)$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή ἀναφέρεται στή διεθνή βιβλιογραφία σάν ἐξίσωση τοῦ *Glover* καί χρησιμοποιήθηκε γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἰσαποχῆς τῶν στραγγιστικῶν ντραίνων γιά τήν περίπτωση πού ἡ φρεατική στάθμη μεταβάλλεται μέ τό χρόνο.

Ἀργότερα ὁ *Dumm* [11] θεωρεῖ ὅτι γιά χρόνο $t=0$ ἡ φρεατική ἐπιφάνεια ἔχει τή μορφή μιᾶς παραβολῆς τετάρτου βαθμοῦ:

$$y = 8y_0\left(\frac{x}{L}-3\left(\frac{x}{L}\right)^2+4\left(\frac{x}{L}\right)^3-2\left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$$

καί μέ τήν ἴδια πορεία ὑπολογισμοῦ, ὅπως ἀναπτύχθηκε πιό πάνω καταλήγει στή λύση

$$y = \frac{192 y_0}{\pi^5} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^2\pi^2-8}{(2m+1)^5} \cdot e^{-(2m+1)^2 \pi a^2 t/L^2} sin\,(2m+1)\,\pi\,\frac{x}{L} \qquad (5.48α)$$

Γιά $x = \frac{L}{2}$ παίρνουμε πάλι μέ τόν ἴδιο τρόπο τήν ἐξίσωση

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 KDt}{n_e}\right) \Big/ ln\left(\frac{3{,}65 y_0}{m\pi}\right), \qquad (5.48β)$$

πού εἶναι γνωστή σάν ἐξίσωση τῶν *Glover-Dumm*. Ἡ μόνη διαφορά ἀπό τήν ἐξίσωση (5.48) εἶναι ὁ συντελεστής τοῦ y_0 πού στήν ἐξ (5.48) εἶναι 4 καί στήν (5.48β) εἶναι 3,65.

Ὁ *Terzidis* [21] τό 1968 χρησιμοποίησε τήν ἀρχική ἐξίσωση τοῦ *Boussinesq* καί ἐκτελώντας τό μετασχηματισμό :

$$\omega = 1 - e^{-(y/D)}$$

καί μέ μερική γραμμικοποίηση τῆς ἐξισώσεως τοῦ *Boussinesq* καταλήγει στόν τύπο τῆς ἰσαποχῆς

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 K\ D\ T}{n_e}\right) \Big/ ln\, \frac{4\,\{2 - e^{(y_0/D)}\}}{\pi\,\{l - e^{(m/D)}\}}\,. \qquad (5.49)$$

Στά σχήματα 45, καί 46 δίνεται ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως (5.48), ἐνῶ στό σχ. 47 δίνεται ἡ γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως (5.49). Ὁ *Moody* (1966) θεωρεῖ ὅτι θά πρέπει νά γίνεται ἕνας συνδυασμός τῶν παραπάνω σχέσεων μέ τίς ἐξισώσεις τοῦ ἰσοδύναμου βάθους { (5.13), (5.14), (5.15)} , ἔτσι ὥστε νά παίρνεται ὑπόψη καί ἡ σύγκλιση τῶν γραμμῶν ροῆς κοντά στά ντραίνα. Θά πρέπει νά τονιστεῖ ἰδιαίτερα ὅτι ὅλες οἱ παραπάνω ἰσχύουν καί γιά τήν περίπτωση πού ἔχουμε ἀνοικτές τάφρους.

c. Ἐπίλυση τοῦ προβλήματος μέ τό μετασχηματισμό τοῦ Laplace

Ἐφαρμόζουμε στήν ἐξίσωση (5.33) τό μετασχηματισμό τοῦ *Laplace*

$$L\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\} = L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right\} \quad ἤ \quad s\bar{y} - y\,(x,\,0) = y'' \quad ἤ \quad \bar{y}'' - s\bar{y} + (1-d_h) = 0.$$

Ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι :

$$y = C_1\,e^{\xi\sqrt{s}} + C_2\,e^{-\xi\sqrt{s}} + \frac{(1-d_h)}{s}\,.$$

Ἐφαρμόζουμε τό μετασχηματισμό τοῦ *Laplace* στίς ὁριακές συνθῆκες (5.35) καί (5.36)

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) = \bar{y}' = 0$$

$$L\,(y) = \bar{y} = 0.$$

Ἀπό τήν πρώτη συνθήκη παίρνουμε :

$$\bar{y}'\Big|_{\xi=0} = \sqrt{s}\,[C_1\, e^{\xi\sqrt{s}} - C_2\, e^{-\sqrt{s}}] = \sqrt{s}\,[C_1 - C_2] = 0.$$

$$C_1 = C_2.$$

Ἀπό τή δεύτερη συνθήκη παίρνουμε

$$\bar{y}\Big|_{\xi=1} = C_1\, e^{\sqrt{s}} + C_2 e^{-\sqrt{s}} + \frac{1-d_h}{s} = 0$$

ἤ

$$C_1\left[e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}\right] = -\frac{(1-d_h)}{s}$$

$$C_1 = -\frac{(1-d_h)}{s}\cdot\frac{1}{2\cos h\,(\sqrt{s})}.$$

Ἑπομένως ἡ παραπάνω λύση γίνεται :

$$\bar{y} - \left(\frac{1-d_h}{s}\right) = -\frac{1-d_h}{s}\cdot\frac{\cos h\,(\xi\sqrt{s})}{\cos h\,(\sqrt{s})}.$$

Ἐφαρμόζουμε τώρα τόν ἀντίστροφο μετασχηματισμό τοῦ *Laplace* στήν παραπάνω σχέση καί παίρνουμε :

$$L^{-1}\left[\bar{y} - \left(\frac{1-d_h}{s}\right)\right] = -L^{-1}\left[\left(\frac{1-d_h}{s}\right)\frac{\cos h\,(\xi\sqrt{s})}{\cos h\,\sqrt{s}}\right]$$

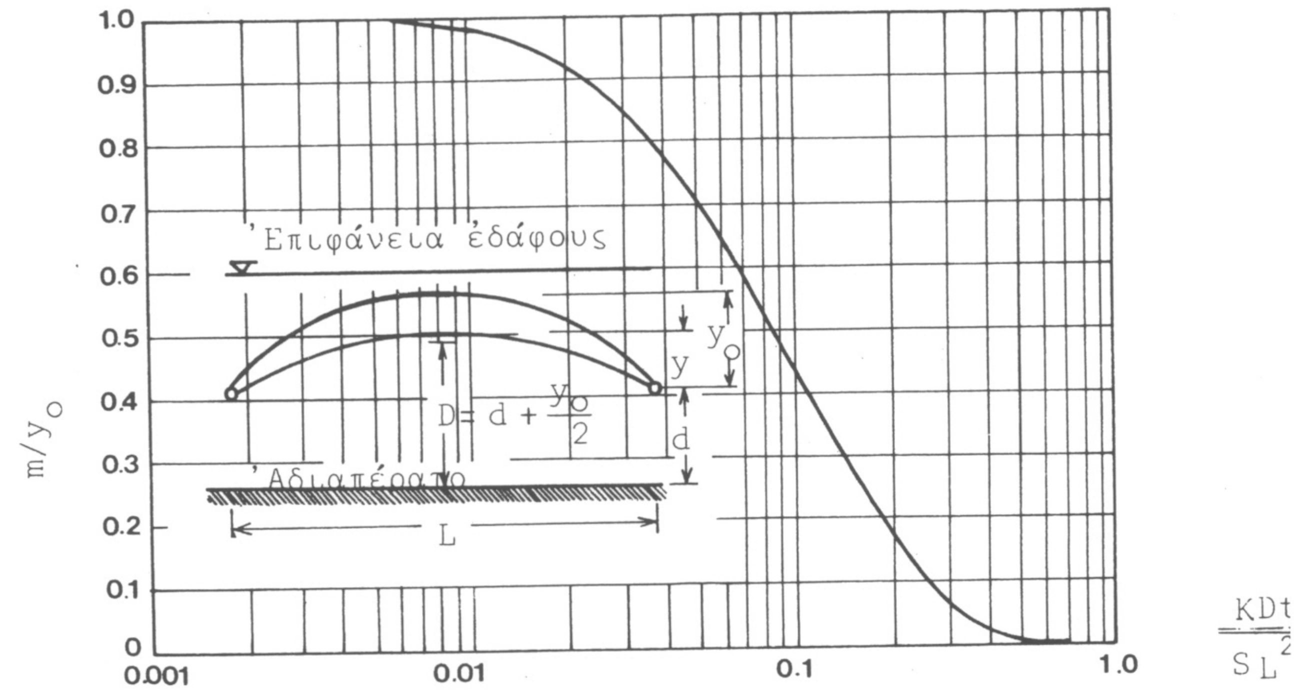
ἤ

$$y = (1-d_h)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{k_n}(-1)^{n+1}\cos\,(k_n\xi)\,\exp\,[-k_n{}^2\tau]$$

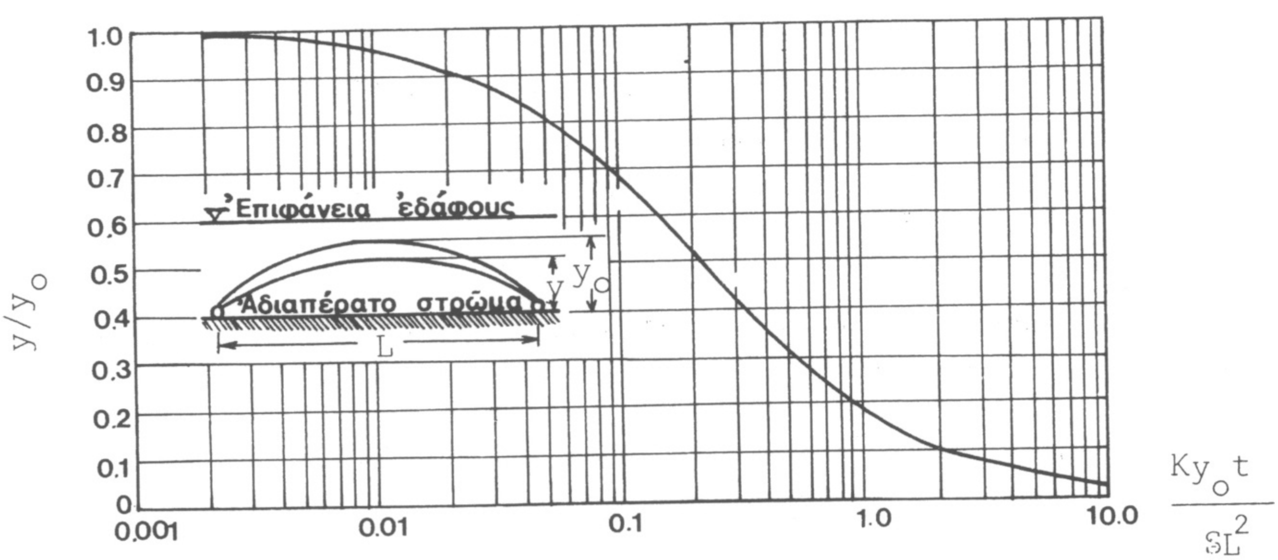
ἤ ἀκόμη

$$\frac{h-d}{h_0-d} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{k_n}(-1)^{n+1}\cos k_n\left(\frac{2x}{L}\right)\exp\left[-k_n\,\frac{4^2at}{L^2}\right].$$

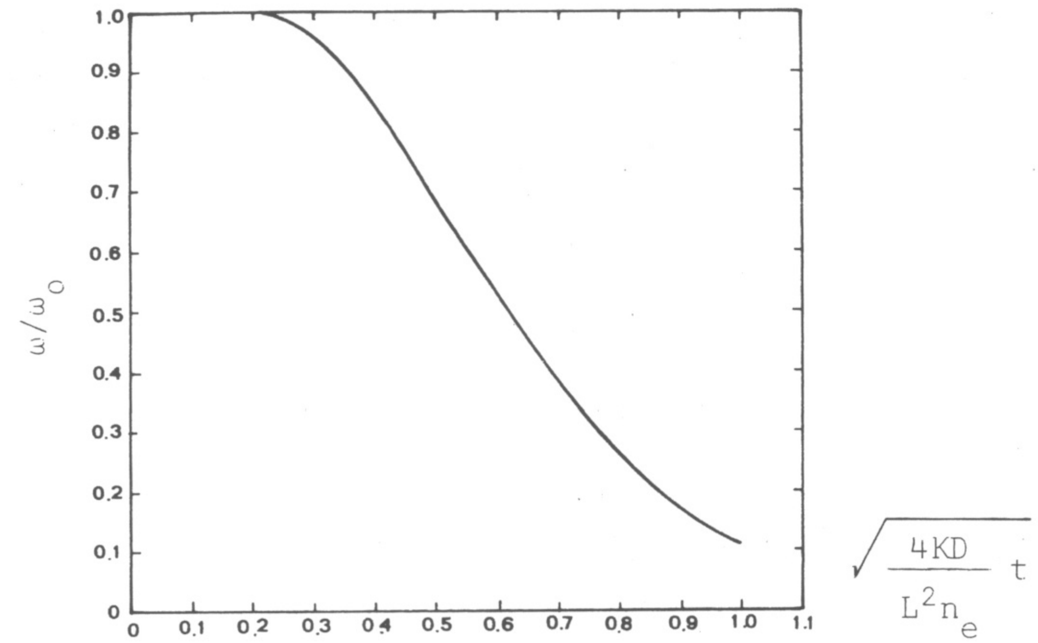
Ἡ λύση αὐτή εἶναι ἴδια μέ τήν ἐξίσωση (5.47β).



Σχ. 45. Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως (5.48) $(S=n_e)$.



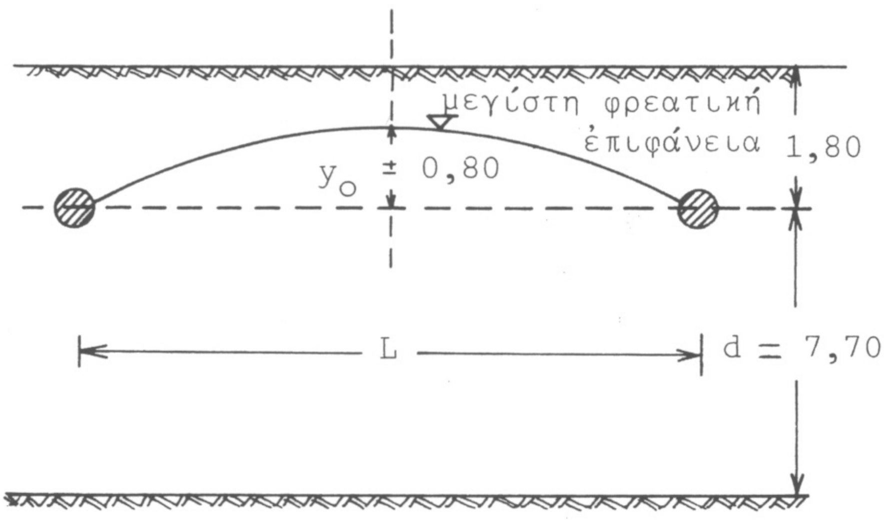
Σχ. 46. Γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως (5.48) γιά τήν περίπτωση πού τά ντραίνα ἐδράζονται στό ἀδιαπέρατο στρῶμα $(S=n_e)$.



Σχ. 47. Γραφική παράσταση τῆς ἐξισώσεως (5.49).

5.3.3. Ἀριθμητική ἐφαρμογή - Συμπεράσματα

Δίνεται μιά ἀρδευόμενη ἔκταση, πού στραγγίζεται μέ παράλληλα ντραίνα μέ ἀκτίνα $r_0 = 0{,}1\ m$, τοποθετημένα σέ ἀπόσταση 1,80 κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους. Τό μέγιστο ἐπιτρεπόμενο ὕψος τῆς



Σχ. 48. Σχηματική διάταξη τοῦ προβλήματος.

φρεατικῆς ἐπιφάνειας εἶναι $1\ m$ κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους. Τό νερό ἐφαρμόζεται κάθε 10 μέρες καί προκαλεῖ μιά ἀπότομη αὔξηση τῆς φρεατικῆς ἐπιφάνειας κατά $\Delta y=0,5\ m$. Ἐάν ἡ ὑδραυλική ἀγωγιμότητα εἶναι $K=1\ m$/ἡμέρα νά βρεθεῖ ἡ ἰσαπόσταση τῶν ντραίνων γιά νά μή περάσουμε τό μέγιστο ἐπιτρεπόμενο ὕψος τῆς φρεατικῆς ἐπιφάνειας. Δίνεται $n_e=0,05$

Λύση :

Ἐπειδή θέλουμε νά μήν ξεπεράσουμε τό μέγιστο ἐπιτρεπόμενο ὕψος τῆς φρεατικῆς ἐπιφάνειας, θά πρέπει στό χρονικό διάστημα τῶν 10 ἡμερῶν ἡ φρεατική στάθμη νά πέσει $1,50\ m$ κάτω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους, ἔτσι ὥστε μέ τήν ἀπότομη ἄνοδο τῶν $\Delta y=0,5\ m$ πού θά συμβεῖ μόλις ἐφαρμοστεῖ τό νερό, νά φθάνουμε στό ἐπιθυμητό μέγιστο ἐπιτρεπόμενο ὕψος. Ἔτσι τό μέγιστο ὕψος τῆς φρεατικῆς στάθμης σέ χρόνο $t=10$ μέρες θά εἶναι

$$m = 1,80 - 1,50 = 0,30\ m$$

1) Ἐξίσωση τοῦ Glover.

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 K\cdot D\cdot t}{n_e}\right) \Big/ ln\left(\frac{4y_0}{m\pi}\right)$$

Ἔχουμε

$$K = 1\ m/\text{ἡμέρα}$$
$$D = d + (y_0/2) = 7,70 + 0,40 = 8,10\ m$$
$$n_e = 0,05$$
$$t = 10\ \text{ἡμέρες}$$
$$y_0 = 0,80\ m$$
$$m = 0,30\ m$$
$$r = 0,10\ m$$

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2\times 1\times 8.10\times 10}{0,05}\right) \Big/ ln\left(\frac{4\times 0,80}{0,30\times\pi}\right) = 13.080\ m^2$$

$$L = 114,36\ m$$

α΄ κύκλος

$$\frac{d}{L} = \frac{7,70}{114,36} = 0,067 < 0,3,$$ ἐφαρμόζεται ἡ ἐξίσωση (5.13)

$$\frac{\hat{d}}{d} = \left\{ 1 + 0{,}067 \left(\frac{8}{\pi} \; ln \left(\frac{7{,}70}{0{,}1} \right) - 3{,}4 \right) \right\}^{-1} =$$

$$= \{1 + 0{,}067 \times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}66$$

$$\hat{d} = 0{,}66 \; d = 5{,}09 \; m$$

β΄ κύκλος

Μέ τό νέο ἰσοδύναμο βάθος βρίσκουμε

$$D = \hat{d} + \frac{y_0}{2} = 5{,}09 + 0{,}40 = 5{,}49$$

καί

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 \times 1 \times 5{,}49 \times 10}{0{,}05} \right) / \; ln \left(\frac{4 \times 0{,}80}{0{,}30 \times \pi} \right) = 8.865 \; m^2$$

$$L = 94{,}15 \; m$$

γ΄ κύκλος

$$\frac{d}{L} = \frac{7{,}70}{94{,}15} = 0{,}082$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{1 + 0{,}082 \times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}615$$

$$\hat{d} = 0{,}615 \times d = 4{,}73 \qquad D = 4{,}73 + 0{,}40 = 5{,}13 \; m$$

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 \times 1 \times 5{,}13 \times 10}{0{,}05} \right) / ln \left(\frac{4 \times 0{,}80}{0{,}30 \times \pi} \right) = 8284 \; m^2$$

$$L = 91{,}00 \; m$$

δ΄ κύκλος

$$\frac{d}{L} = \frac{7{,}70}{91} = 0{,}0846$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{1 + 0{,}0846 \times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}606 \qquad \hat{d} = 4{,}67 \qquad D = 5{,}07$$

$$L^2 = 8190 \Rightarrow L = 90{,}50 \; m$$

2) Ἐξίσωση τῶν Glover-Dumm

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 K \cdot D \cdot t}{n_e}\right) \Big/ \ln\left(\frac{3{,}65\ y_0}{m \cdot \pi}\right)$$

α΄ κύκλος

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 \times 1 \times 8{,}10 \times 10}{0{,}05}\right) \Big/ \ln\left(\frac{3{,}65 \times 0{,}80}{0{,}30 \times \pi}\right) = 14139\ m^2$$

$$L = 118{,}90\ m$$

$$\frac{d}{L} = \frac{7{,}70}{118{,}90} = 0{,}0647$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{1 + 0{,}0647 \times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}668 \quad \hat{d} = 5{,}14 \quad D = 5{,}54$$

β΄ κύκλος

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 \times 1 \times 5{,}54 \times 10}{0{,}05}\right) \Big/ 1{,}13 = 9670\ m^2$$

$$L = 98{,}34\ m$$

$$\frac{d}{L} = \frac{7{,}70}{98{,}34} = 0{,}0783$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{1 + 0{,}0783 \times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}625 \quad \hat{d} = 4{,}81 \quad D = 5{,}21$$

γ΄ κύκλος

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 \times 1 \times 5{,}21 \times 10}{0{,}05}\right) \Big/ 1{,}13 = 9099\ m^2$$

$$L = 95{,}39\ m$$

$$\frac{d}{L} = \frac{7{,}70}{35{,}39} = 0{,}0807$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{1 + 0{,}0807 \times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}617 \quad \hat{d} = 4{,}75 \quad D = 5{,}16\ m$$

δ΄ κύκλος

$$L^2 = \left(\frac{\pi^2 \times 1 \times 5{,}16 \times 10}{0{,}05}\right) \Big/ 1{,}13 = 9003\ m^2$$

$$L = 94{,}88 \approx 95\ m$$

3) Ἐξίσωση τοῦ Τερζίδη

Ἔχουμε

$$\omega = 1-e^{m\,D} = 1-e^{0.30\;8.10} = -\;0{,}0377$$

$$\omega_0 = 1 - e^{\nu_0 D} = 1-e^{0.8\;8.10} = -\;0{,}1038 \qquad \omega/\omega_0 = 0{,}363$$

Ἀπό τό νομογράφημα τοῦ σχήματος 47 παίρνουμε

$$\sqrt{\frac{4K\cdot D\cdot t}{L^2\;n_e}} = a = 0{,}705 \Rightarrow L^2 = \frac{4K\cdot D\cdot t}{a^2 n_e} = \frac{4\times 1\times 10}{0{,}05}\;\frac{D}{a^2} = 800\;\frac{D}{a^2}$$

$$L = \frac{28{,}28}{a}\sqrt{D} = \frac{28{,}28}{0{,}705}\sqrt{8{,}10} = 114{,}18\;m$$

$$\frac{d}{L} = \frac{7{,}70}{114{,}18} = 0{,}0674$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{1+0{,}0783\times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}659 \qquad \hat{d}=5{,}08\;m \qquad D=5{,}48\;m$$

β΄κύκλος

$$\omega = 1-e^{0{,}30/5{,}48} = -\;0{,}0562$$

$$\omega_0 = 1-e^{0{,}80/5{,}48} = -\;0{,}1572 \qquad \omega/\omega_0 = 0{,}358$$

Ἀπό τό νομογράφημα παίρνουμε $a = 0{,}71$

$$L = \frac{28{,}28}{0{,}71}\sqrt{5{,}48} = 93{,}24\;m$$

$$\frac{d}{L} = \frac{7{,}70}{93{,}24} = 0{,}0826$$

$$\frac{\hat{d}}{d} = \{1+0{,}0826\times 7{,}66\}^{-1} = 0{,}612 \qquad \hat{d}=4{,}71 \qquad D=5{,}11$$

γ΄ κύκλος

$$\omega = 1-e^{0{,}30/5{,}11} = -\;0{,}060$$

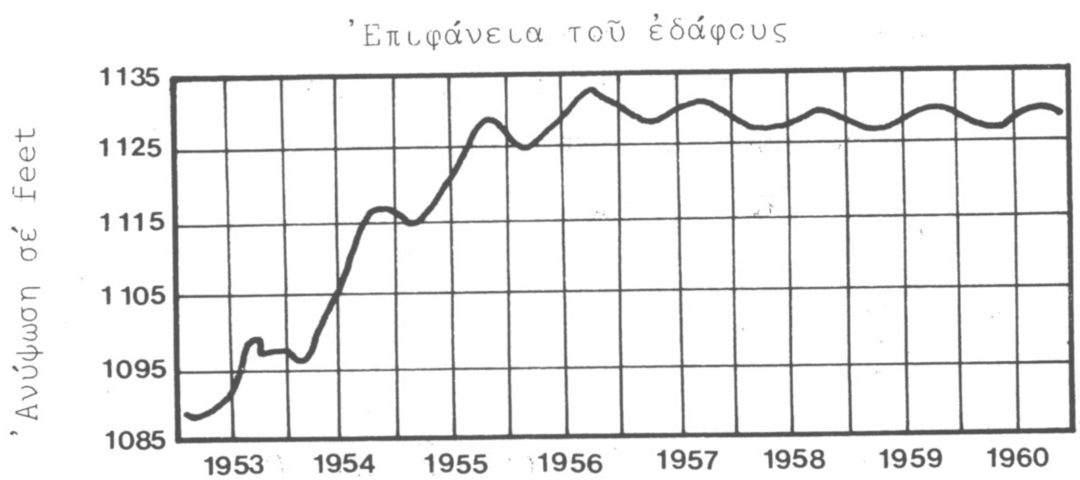
$$\omega_0 = 1-e^{0{,}80/5{,}11} = -\;0{,}169 \qquad \omega/\omega_0=0{,}356 \qquad a\approx 0{,}71$$

$$L = \frac{28{,}28}{0{,}71}\sqrt{5{,}11} = 90{,}03$$

Ἀπό τά παραπάνω διαπιστώνουμε ὅτι οἱ τρεῖς παραπάνω μέθοδοι εἶναι ἰσοδύναμες μεταξύ τους ἀπό πρακτικῆς πλευρᾶς καί γιά προβλήματα τῆς πράξεως εἶναι δυνατό νά ἐφαρμόζουμε ὁποιαδήποτε ἀπό τίς τρεῖς, σέ συνδυασμό μέ τίς ἐξισώσεις τοῦ ἰσοδύναμου βάθους.

Ἡ ἐξίσωση τοῦ *Glover-Dumm* παρουσιάζει μιά διαφορά τῆς τάξεως τοῦ 5% σέ σχέση μέ τίς ἄλλες δύο, πού ὀφείλεται βέβαια στή διαφορετική μορφή τῆς φρεατικῆς ἐπιφάνειας πού δέχεται ὁ *Dumm* σέ χρόνο $t=0$, δηλαδή μιά παραβολή τετάρτου βαθμοῦ, ἀντί γιά y_0 σταθερό, ὅπως δέχονται οἱ *Glover* καί *Terzidis*.

Θά προσπαθήσουμε τώρα νά δώσουμε μιά ἐξήγηση τοῦ σκοποῦ τῶν ντραίνων στή διατήρηση τοῦ ὑπόγειου ὑδάτινου ἰσοζυγίου καί σέ ὅτι καλοῦμε *δυναμική ἰσορροπία. (Dumm* 1968 [12]*)*. Ἐάν σέ μιά ἀρδευόμενη ἐπιφάνεια ἡ ποσότητα τοῦ νεροῦ πού εἰσέρχεται στό ἔδαφος (εἰσροή μέ ὁποιοδήποτε τρόπο (τεχνητό ἤ φυσικό) εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ποσότητα νεροῦ πού ἀπορρέει (ἀπορροή), τότε ἡ φρεατική στάθμη ἀνέρχεται προοδευτικά ἀπό ἔτους σέ ἔτος (σχ. 49). Ὅταν ἡ εἰσροή γίνει ἴση μέ τήν ἀπορροή, τότε οἱ διακυμάνσεις τῆς φρεατικῆς στάθμης ἀποκτοῦν μιά μέση σταθερή τιμή ἀπό ἔτους σέ ἔτος καί αὐτή ἡ συνθήκη ὀνομάζεται δυναμική ἰσορροπία.



Σχ. 49. Ὑδρογράφημα πού δείχνει τήν δυναμική ἰσορροπία μέ τήν παρέμβαση ἑνός δικτύου ντραίνων *(Dumm* 1968*)*

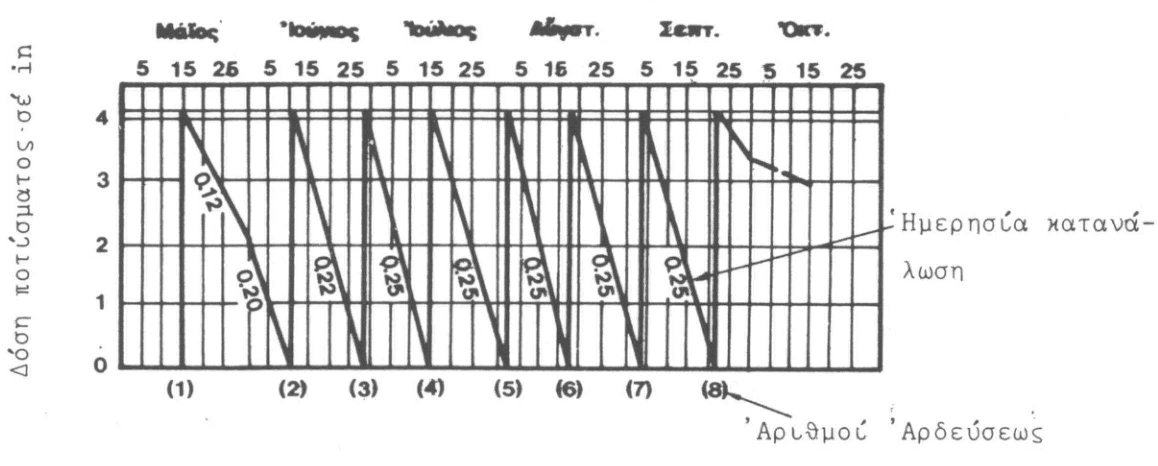
Φυσικά αὐτή ἡ συνθήκη τῆς δυναμικῆς ἰσορροπίας πετυχαίνει σέ μιά περιοχή μέ τήν κατάλληλη διάταξη ἑνός στραγγιστικοῦ δικτύου.

Ἔτσι ὅταν πρόκειται νά μελετήσουμε τή στράγγιση μιᾶς περιοχῆς, θεωροῦμε ὅλα τά εἴδη τῶν καλλιεργειῶν πού ἔχει ἡ ἀρδευόμενη ἔκταση, καθώς ἐπίσης καί τίς ποσότητες νεροῦ πού ἐφαρμόζονται σέ κάθε περίοδο ἀρδεύσεως καί τά προγράμματα ἀρδεύσεως.

Γιά παράδειγμα ἀναφέρουμε μιά περιοχή ὅπου τό νερό ἐφαρμόζεται κάθε 10 ἡμέρες σέ ποσότητα 25 *mm*. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε μιά ξαφνική εἰσροή νεροῦ $R_i = 0{,}025\ m$ καί ἐάν τό ἀποτελεσματικό πορῶδες τοῦ ἐδάφους εἶναι $n_e = 0{,}05$ ἡ ποσότητα αὐτή προκαλεῖ μιά ξαφνική ἀνύψωση τῆς φρεατικῆς στάθμης κατά

$$\Delta h = (R_i/n_e) = 0.5\ m$$

Μελετοῦμε λοιπόν ἕνα τέτοιο σύστημα ντραίνων πού νά μπορεῖ νά ἀποχετεύει αὐτή τήν ποσότητα ἤ νά κατεβάζει τήν φρεατική στάθμη σέ ἕνα ἐπιθυμητό ὕψος, ἔτσι ὥστε μέ τήν ἐπανάληψη τοῦ ποτίσματος ἡ νέα ἀνύψωση νά παραμένει μέσα σέ ἐπιθυμητά ὅρια. Ἔτσι στό σχ. 50 φαίνε-



Σχ. 50. Διακύμανση τῆς ὑπόγειας στάθμης μεταξύ τῶν ποτισμάτων.

ται σέ κάθε πότισμα ἡ δόση ποτίσματος σέ *in*, πού ἀντιστοιχεῖ καί σέ ἀνύψωση τῆς στάθμης καί ἡ μεταξύ δύο ποτισμάτων ἡμερήσια κατανάλωση, ἄν φυσικά δεχθοῦμε ὅτι ἡ κατανάλωση ἀκολουθεῖ γραμμικό νόμο. Μ' αὐτό λοιπόν τόν τρόπο ἔχουμε πετύχει τή λεγόμενη δυναμική ἰσορροπία πού ἐπιτρέπει καί τήν κανονική ἀνάπτυξη τῶν καλλιεργειῶν.