

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ & ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΚΑΙ ΥΔΡΑΥΛΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ  
ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

Α. ΔΑΜΑΣΚΗΝΙΔΟΥ-ΓΕΩΡΓΙΑΔΟΥ  
Ε. ΣΙΑΗΡΟΠΟΥΛΟΣ  
Αναπληρωτές καθηγητές

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1996

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΕΚΔΟΣΗ  
ΤΜΗΜΑ ΕΚΔΟΣΕΩΝ  
2010-2011

天

●

■

天

■

■

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ</b>	<b>1</b>
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ	1
1.2 ΡΟΗ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ	2
1.3 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ	3
1.4 ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ	6
1.5 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΡΟΗΣ - ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	7
1.6 ΤΟ ΤΡΙΑΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΕΔΙΟ ΚΑΙ Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ	10
Παραδείγματα	13
<b>2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ</b>	<b>16</b>
2.1 ΟΡΙΣΜΟΙ	16
2.2 ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ	17
2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	19
2.4 ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	20
2.5 ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ	20
<b>3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ</b>	<b>21</b>
3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΛΙΚΟΥ ΟΓΚΟΥ	21
3.2 ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ	22
3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ	23
3.3.1 Εξίσωση συνέχειας	23
3.3.2 Εξισώσεις γραμμικής ορμής	26
α. Ανάπτυξη αριστερού μέλους της εξίσωσης	26
β. Εξωτερικές δυνάμεις	27
γ. Εξισώσεις γραμμικής ορμής και κίνησης	31
δ. Άλλες μορφές των εξισώσεων γραμμικής ορμής και κίνησης	33
3.3.3 Εξισώσεις ροής για αγωγό μεταβλητού πλάτους	34
3.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ	37
3.4.1 Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή	37
3.4.2 Ομοιόμορφη ροή	39
3.4.3 Απότομα μεταβαλλόμενη ροή	40
3.4.4 Γενικές παρατηρήσεις	43

<b>4. ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</b>	44
4.1 ΑΡΙΘΜΟΣ FROUDE - ΚΡΙΣΙΜΟ ΒΑΘΟΣ	44
4.1.1 Επίλυση προβλημάτων κρίσιμης ροής	45
4.1.2 Υπολογισμός κρίσιμου βάθους	46
α. Ορθογωνική διατομή	46
β. Διατομή εκθετικής μορφής	46
γ. Τραπεζοειδής διατομή	47
δ. Κυκλική διατομή	48
4.2 ΕΙΔΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ	49
4.2.1 Μελέτη της συνάρτησης $E(y)$	49
4.2.2 Η έννοια της ειδικής ενέργειας σε ειδικά προβλήματα ροής	51
α. Εφαρμογή 1η : Θυρίδα	52
β. Εφαρμογή 2η : Αναβαθμός	54
γ. Εφαρμογή 3η : Στένωση διατομής	58
4.3 ΕΙΔΙΚΗ ΟΡΜΗ	62
4.3.1 Μελέτη της συνάρτησης $M(y)$	62
4.3.2 Η έννοια της ειδικής ορμής σε προβλήματα απότομα μεταβαλλόμενης ροής	64
α. Το απλό υδραυλικό άλμα	64
β. Υδραυλικό άλμα σε αγωγό με απότομο καταβαθμό	69
γ. Παρεμβολή θυρίδας	71
4.4 ΚΛΙΣΗ ΤΡΙΒΗΣ	72
4.4.1 Η εξίσωση του Chezy	72
α. Εξαγωγή της εξίσωσης Chezy	72
β. Υπολογισμός του συντελεστή τριβής $C$	73
4.4.2 Η εξίσωση του Manning	75
α. Η εμπειρική εξίσωση Manning	75
β. Ο συντελεστής τριβής $n$	76
γ. Ισοδύναμος συντελεστής $n_e$	78
δ. Η εξίσωση του Manning σε αγωγούς σύνθετης διατομής	78
4.4.3 Αγωγιμότητα	79
α. Αγωγοί 1 <sup>ου</sup> είδους ή αγωγοί ανοικτής διατομής	79
β. Αγωγοί 2 <sup>ου</sup> είδους ή αγωγοί κλειστής διατομής	80
4.4.4 Κλίση τριβής σε ομοιόμορφη ροή	82
4.4.5 Κλίση τριβής - Κρίσιμη κλίση - Ορισμοί	82

5.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ	85
5.1	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ	85
5.2	ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ	85
5.3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΒΑΘΟΥΣ	88
	α. Τριγωνικός αγωγός	88
	β. Ορθογωνικός αγωγός μεγάλου πλάτους	89
	γ. Ορθογωνικός αγωγός	90
	δ. Τραπεζοειδής αγωγός	91
	ε. Κυκλικός αγωγός	92
5.4	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΣΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ	95
6.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ	98
6.1	Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	98
6.1.1	Ποιοτική ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης	99
6.1.2	Ταξινόμηση των καμπυλών ελεύθερης επιφάνειας	100
6.1.3	Παραδείγματα καμπυλών σε πρισματικούς αγωγούς	103
	α. Καμπύλες τύπου M σε αγωγούς ήπιας κλίσης	103
	β. Καμπύλες τύπου S σε αγωγούς απότομης κλίσης	104
	γ. Καμπύλες τύπου C σε αγωγούς κρίσιμης κλίσης	104
	δ. Καμπύλες τύπου H σε οριζόντιους αγωγούς	105
	ε. Καμπύλες τύπου A* σε αγωγούς με αρνητική κλίση	105
6.2	ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	106
6.2.1	Διατομές ελέγχου	106
6.2.2	Οριακές συνθήκες ομοιόμορφου βάθους και αλλαγή κατά μήκος κλίσης	108
6.2.3	Οριακές συνθήκες εξόδου	109
	α. Εκβολή σε λίμνη	109
	β. Ελεύθερη υδατόπτωση	111
6.2.4	Συνθήκες εισόδου - Εκροή από λίμνη	112
6.2.5	Χάραξη σύνθετων προφίλ	114
6.3	ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ	116
6.3.1	Αναλυτική επίλυση	116
	α. Υδραυλικοί εκθέτες	117
	β. Η συνάρτηση μεταβαλλόμενης ροής	119
	γ. Υπολογισμός των εκθετών M και N	120
	δ. Αναλυτική επίλυση για οριζόντιο αγωγό	124
	ε. Αναλυτική επίλυση για κυκλικό αγωγό	125
6.3.2	Αριθμητική επίλυση	127

α. Αριθμητική επίλυση για πρισματικό αγωγό	127
β. Αριθμητική επίλυση για μη πρισματικό αγωγό	128
γ. Επίλυση με κλασικές μεθόδους	131
6.4 ΘΕΣΗ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΑΛΜΑΤΟΣ	132
<b>7. ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΗΣ ΡΟΗΣ</b>	136
7.1 ΘΥΡΙΔΕΣ - ΘΥΡΟΦΡΑΓΜΑΤΑ	136
7.2 ΕΚΧΕΙΛΙΣΤΕΣ	138
7.2.1 Εκχειλιστές λεπτής στέψης	138
α. Ορθογωνικός εκχειλιστής χωρίς πλευρική συστολή	138
β. Ορθογωνικός εκχειλιστής με πλευρική συστολή	139
γ. Τριγωνικός εκχειλιστής	139
7.2.2 Εκχειλιστές κανονικής ή πρότυπης στέψης	140
7.2.3 Εκχειλιστές ευρείας στέψης	141
7.3 Ελεύθερη υδατόπτωση	143
7.4 Έλεγχος θέσης άλματος	147
7.4.1 Μικρός αναβαθμός	147
7.4.2 Παραδείγματα λεκανών ηρεμίας	148
<b>8. ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</b>	150
8.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ	150
8.1.1 Κατακόρυφη μεταβολή σε αγωγό μεγάλου πλάτους	150
8.1.2 Κατανομή σε αγωγό πεπερασμένης διατομής	153
8.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΙΩΡΥΓΩΝ	155
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ</b>	
Π1. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΟΡΘΩΤΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ	158
Π2. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	160
Π3. ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΒΕΙΣΩΣΗΣ 3.11	162
Π4. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ Η/Υ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ	163
Π5. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ Η/Υ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΣΥΖΥΓΩΝ ΒΑΘΩΝ	168
Π6. ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $F(u, N)$	173
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	176

# 1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

## 1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

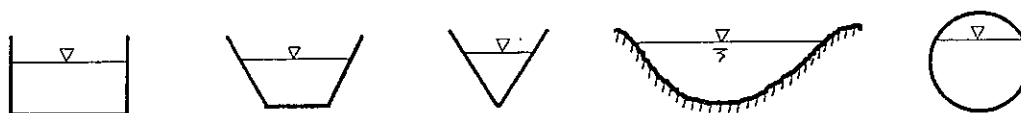
Η Υδραυλική ανοικτών αγωγών είναι ένας κλάδος της Υδραυλικής που ασχολείται με τη μελέτη της κίνησης του νερού σε ανοικτούς αγωγούς. Ένας αγωγός ονομάζεται **ανοικτός** ή αγωγός ελεύθερης ροής, όταν το νερό που ρέει σ' αυτόν εμφανίζει ελεύθερη επιφάνεια στην οποία η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Η κύρια κινητήρια δύναμη της ροής οφείλεται στη βαρύτητα. Η επιβράδυνση της ροής οφείλεται στις δυνάμεις τριβής.

Με τον τρόπο αυτόν οι ανοικτοί αγωγοί αντιδιαστέλλονται προς τους κλειστούς, στους οποίους το νερό καλύπτει πλήρως τη διατομή του σωλήνα και κινείται υπό πίεση.

Οι ανοικτοί αγωγοί αντιπροσωπεύουν μια ευρύτατη κατηγορία ροών. Μεγάλα ποτάμια και εφήμερα ρυάκια, αρδευτικές διώρυγες και δίκτυα αποχετευτικών αγωγών προσφέρουν μερικά παραδείγματα τέτοιων ροών. Τους ανοικτούς αγωγούς τους διακρίνουμε σε φυσικούς και τεχνητούς :

**Φυσικοί** είναι οι αγωγοί που έχουν δημιουργηθεί από φυσικές διεργασίες και δεν έχουν υποστεί σημαντική επέμβαση από τον άνθρωπο. Στην κατηγορία αυτή υπάγονται οι ποταμοί, οι χείμαρροι και γενικά όλα τα φυσικά υδατορεύματα. Ποικίλλουν σε μέγεθος και η μορφή της διατομής είναι συνήθως ακανόνιστη. Εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία στη μορφή των τοιχωμάτων από άποψη τραχύτητας και χαρακτηρίζονται συχνά από χαλαρότητα των υλικών του πυθμένα και των παρειών, και μεταβλητότητα της μορφής τους στο χρόνο.

**Τεχνητοί** είναι οι αγωγοί που έχουν κατασκευαστεί ή διαμορφωθεί από τον άνθρωπο. Τέτοιοι αγωγοί είναι οι διώρυγες, τα αρδευτικά κανάλια, οι στραγγιστικές τάφροι, και τέλος οι σήραγγες και οι υπόνομοι όταν η διατομή τους δεν είναι πλήρης. Ανάλογα με το σχήμα της διατομής τους ονομάζονται *ορθογωνικοί, τραπεζοειδείς, τριγωνικοί, κυκλικοί, ωοειδείς κ.λ.π.*



*Σχήμα 1.1* : Χαρακτηριστικές μορφές διατομών ανοικτών αγωγών

Ένας τεχνητός αγωγός ονομάζεται ~~αυστηρά~~ **πρισματικός**, όταν η διατομή του και η κλίση του είναι σταθερές κατά μήκος. Μπορεί ακόμη να είναι κατά τμήματα πρισματικός, αν αποτελείται από ευθυγραμμίες σταθερής διατομής αλλά διαφορετικής κατά μήκος κλίσης. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ο αγωγός ονομάζεται **μη πρισματικός**. Τους μη πρισματικούς αγωγούς τους διακρίνουμε σε αγωγούς, των οποίων ο άξονας βρίσκεται πάντα στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, και σε αγωγούς οι οποίοι εμφανίζονται καμπυλόγραμμοι σε οριζοντιογραφία.

Στα επόμενα κεφάλαια η αναφορά σε φυσικούς αγωγούς θα είναι περιορισμένη. Παρόλο που οι βασικές αρχές της υδραυλικής των ανοικτών αγωγών ισχύουν προφανώς για όλα τα είδη ροής σε ανοικτούς αγωγούς, η πλήρης κατανόηση της ροής σε ένα φυσικό αγωγό απαιτεί ένα συνδυασμό γνώσεων και από άλλες επιστημονικές περιοχές (όπως υδρολογία, μηχανική φερτών υλών, γεωμορφολογία κ.ά.). Συνεπώς η μελέτη αυτών των ροών υπερβαίνει τα πλαίσια του συγκεκριμένου μαθήματος ανοικτών αγωγών.

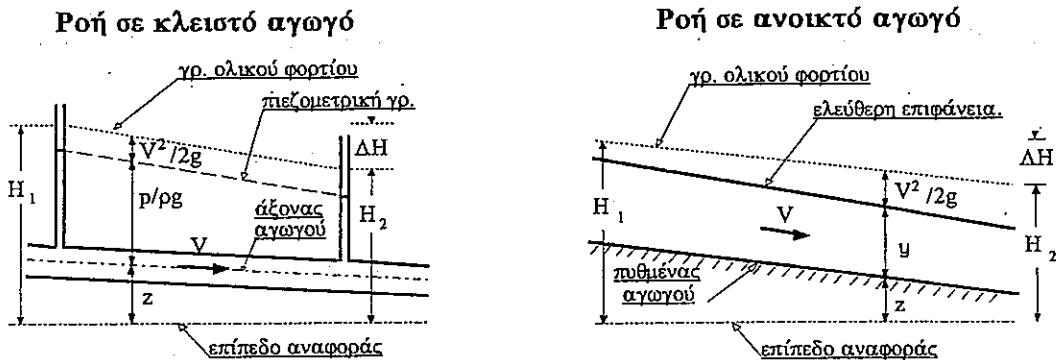
## **1.2 ΡΟΗ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ : ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

Οι ανοικτοί και οι κλειστοί αγωγοί είναι γενικά αγωγοί που μεταφέρουν νερό από μία θέση μεγαλύτερου σε μία θέση μικρότερου ολικού φορτίου. Ενώ όμως στους κλειστούς αγωγούς η κίνηση του νερού γίνεται υπό πίεση και ανεξάρτητα από την υψομετρική θέση της αρχής και του τέλους του άξονα του αγωγού, η ροή στους ανοικτούς αγωγούς εμφανίζει παντού ελεύθερη επιφάνεια και πραγματοποιείται υπό την επίδραση της βαρύτητας που ενεργεί ως κύρια κινητήρια δύναμη της ροής. Η αντίσταση στην κίνηση του νερού και στα δύο είδη αγωγών είναι όμοιας φύσης και οφείλεται στις τριβές με το τοίχωμα αγωγού και στις τριβές που αναπτύσσονται στο εσωτερικό της ροής. Επομένως και σε ανοικτούς και σε κλειστούς αγωγούς εμφανίζονται απώλειες φορτίου κατά τη διεύθυνση της ροής. Στο σχήμα 1.2 διακρίνονται μερικά χαρακτηριστικά μεγέθη της ροής στα δύο είδη ροής.

Παρόλες τις ομοιότητες μεταξύ των δύο κατηγοριών ροής, η ροή σε ανοικτούς αγωγούς παρουσιάζει μεγαλύτερες δυσκολίες επίλυσης. Το βάθος ροής μπορεί να μεταβάλλεται στο χώρο και στο χρόνο με αποτέλεσμα να μεταβάλλονται όλα τα γεωμετρικά μεγέθη της υγρής διατομής και κατά συνέπεια και τα υδραυλικά μεγέθη που εξαρτώνται από αυτά. Έτσι στις εξισώσεις της ροής υπεισέρχονται περισσότερες μεταβλητές. Επίσης, οι



ανοικτοί αγωγοί εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη ποικιλία στο σχήμα της διατομής και στις διαστάσεις της καθώς και μεταβλητότητα στην τραχύτητα των τοιχωμάτων.



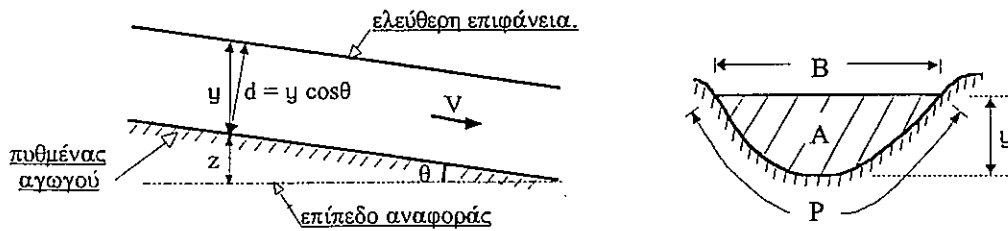
**Διευκρινίσεις συμβόλων**

$H$  = ολικό φορτίο,  $\Delta H = H_1 - H_2$  = απώλεια φορτίου,  $V^2/2g$  = κινητικό φορτίο,  $p/\rho g$  = φορτίο πίεσης,  $y$  = βάθος ροής ( $y = p_0/\rho g$ , φορτίο πίεσης στον πυθμένα<sup>1</sup>)  
 $z$  = φορτίο θέσης (υψόμετρο άξονα ή πυθμένα)

**Σχήμα 1.2:** Συγκριτικά στοιχεία μηκοτομής κλειστών και ανοικτών αγωγών.

**1.3 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ**

Στην παράγραφο αυτή δίνονται οι ορισμοί και οι συμβολισμοί ορισμένων γεωμετρικών και υδραυλικών μεγεθών, που χρησιμοποιούνται στη μελέτη της ροής σε ανοικτούς αγωγούς.



**Σχήμα 1.3 :** Βασικά μεγέθη κατά μήκος και κατά πλάτος τομής.

1 Για απλοποίηση της σύγκρισης ο ανοικτός αγωγός του σχήματος θεωρείται ότι έχει μικρή κατά μήκος κλίση και ελεύθερη επιφάνεια μικρής καμπυλότητας. Στην περίπτωση αυτή ισχύει η παραδοχή υδροστατικής κατανομής της πίεσης και η πιεζομετρική γραμμή συμπίπτει με την ελεύθερη επιφάνεια (κεφ. 1.6).

### Χαρακτηριστικά μεγέθη κατά μήκος τομής :

- Γωνία  $\theta$  :** η γωνία, που σχηματίζει η κατά μήκος τομή του πυθμένα με το οριζόντιο επίπεδο.
- Κλίση  $S_0$  :** η κατά μήκος κλίση του πυθμένα ως προς το οριζόντιο επίπεδο ( $S_0 = \text{tg}\theta$ ).
- Βάθος ροής  $y$  :** η κατακόρυφη απόσταση του χαμηλότερου σημείου της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια.
- Βάθος ροής  $d$  :** η απόσταση του χαμηλότερου σημείου της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια σε διεύθυνση κάθετη προς τον πυθμένα ( $y = d/\cos\theta$ ). Συνήθως η γωνία  $\theta$  είναι πολύ μικρή και γίνεται η παραδοχή :  $\cos\theta \approx 1$  και  $y \approx d$ .

### Χαρακτηριστικά μεγέθη υγρής διατομής

- Εμβαδό διατομής  $A$  :** το εμβαδό της υγρής διατομής σε επίπεδο κάθετο προς την κύρια διεύθυνση της ροής.
- Πλάτος διατομής  $B$  :** το πλάτος της υγρής διατομής στην ελεύθερη επιφάνεια
- Βρεχόμενη περίμετρος  $P$  :** το μήκος του, στερεού ορίου της διατομής, που βρέχεται από το νερό.
- Υδραυλική ακτίνα  $R$  :** ο λόγος του εμβαδού  $A$  προς τη βρεχόμενη περίμετρο ( $R=A/P$ )
- Υδραυλικό βάθος  $y_b$  :** ο λόγος του εμβαδού προς το πλάτος της διατομής ( $y_b=A/B$ ). Είναι δηλαδή ένα μέσο βάθος της διατομής.

Στον πίνακα 1.1 δίνονται ορισμένα γεωμετρικά μεγέθη μερικών χαρακτηριστικών διατομών.

### Βασικά υδραυλικά μεγέθη :

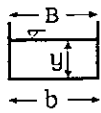
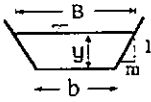
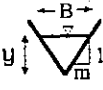
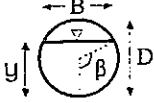
- Ταχύτητα  $u$  :** η κάθετη προς τη διατομή συνιστώσα της ταχύτητας του νερού σε τυχαία χρονική στιγμή και θέση. Έτσι η  $u$  είναι μία συνάρτηση της μορφής :  $u(x, y, z, t)$ .
- Μέση ταχύτητα  $V$  :** η μέση τιμή της ταχύτητας  $u$  σε μία διατομή. Εκφράζεται

με τη σχέση :  $V(x, t) = \frac{1}{A} \cdot \iint_A u dA.$

**Παροχή Q :** ο όγκος του ρευστού, που διέρχεται κάθετα από μία διατομή στη μονάδα του χρόνου :  $Q = V \cdot A.$

**Παροχή q :** η παροχή ανά μονάδα πλάτους ορθογωνικής διατομής :  $q = Q/b = V \cdot y$  (χρησιμοποιείται μόνο σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής)

**Πίνακας 1.1 :** Γεωμετρικά μεγέθη διαφόρων διατομών.

Στοιχεία διατομής	Εμβαδό (A)	Βρεχόμενη περίμετρος (P)	Πλάτος διατομής (B)
	$b \cdot y$	$b + 2y$	$b$
	$(b + my)y$	$b + 2y\sqrt{1 + m^2}$	$b + 2my$
	$m \cdot y^2$	$2y\sqrt{1 + m^2}$	$2my$
	$(2\beta - \sin 2\beta) \frac{D^2}{8}$	$\beta D$	$D \sin \beta$

## 1.4 ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ ΣΕ ΑΝΟΙΚΤΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

Η ροή σε έναν ανοικτό αγωγό μπορεί να διακριθεί σε διάφορα είδη με κριτήριο διάκρισης τη μεταβολή των υδραυλικών μεγεθών στο χώρο και στο χρόνο.

### **Μόνιμη - Μη Μόνιμη ( Κριτήριο διάκρισης η μεταβολή στο χρόνο )**

Στη **μόνιμη** ροή τα διάφορα μεγέθη (βάθος ροής, ταχύτητα κ.λ.π.) είναι ανεξάρτητα από το χρόνο και μπορούν να μεταβάλλονται μόνο ως συνάρτηση της θέσης μέσα στον αγωγό. Στη **μη μόνιμη ροή** τα μεγέθη της ροής είναι συναρτήσεις και του χρόνου. Μη μόνιμες είναι οι περισσότερες ροές στη φύση. Όμως σε πλήθος περιπτώσεων η μεταβολή ως προς το χρόνο είναι τόσο αργή, ώστε να είναι δυνατό να θεωρηθούν ως μόνιμες. Έτσι μια μεγάλη κατηγορία τεχνικών μελετών βασίζεται σ' αυτήν την παραδοχή.

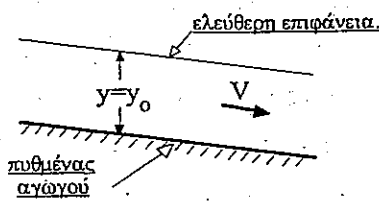
### **Ομοιόμορφη-Ανομοιόμορφη (Κριτήριο διάκρισης η μεταβολή στο χώρο)**

Η ροή ονομάζεται **ομοιόμορφη**, όταν το διάνυσμα της μέσης ταχύτητας είναι σταθερό κατά μέγεθος και διεύθυνση σε όλο το μήκος του αγωγού. Ομοιόμορφη ροή είναι δυνατό να υπάρξει μόνο σε πρισματικούς αγωγούς. Στην περίπτωση αυτή το εμβαδό, το βάθος ροής και γενικά όλα τα μεγέθη της ροής παραμένουν σταθερά και ανεξάρτητα της θέσης  $x$ . Το βάθος της ομοιόμορφης ροής ονομάζεται **ομοιόμορφο ή κανονικό βάθος**.

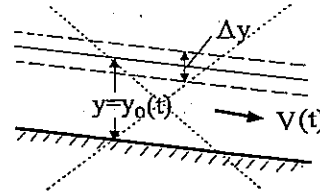
Η ροή ονομάζεται **ανομοιόμορφη**, όταν η μέση ταχύτητα και κατά συνέπεια και το βάθος ροής μεταβάλλονται κατά μήκος του αγωγού. Η πλειοψηφία των ροών στη φύση υπάγεται στην κατηγορία της ανομοιόμορφης ροής. Η ανομοιόμορφη ροή διακρίνεται σε **βαθμιαία μεταβαλλόμενη** και σε **απότομα μεταβαλλόμενη**, όταν αντίστοιχα ο ρυθμός μεταβολής των μεγεθών της ροής είναι αργός (βαθμιαία μεταβολή σε μεγάλο μήκος) ή γρήγορος (έντονη μεταβολή σε μικρό μήκος).

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται μερικά παραδείγματα μόνιμης/μη μόνιμης ομοιόμορφης και ανομοιόμορφης ροής. Είναι προφανές ότι η ομοιόμορφη ροή είναι δυνατή μόνο ως μόνιμη. Μη μόνιμη ομοιόμορφη ροή θα σήμαινε ακαριαία παράλληλη μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας προς τα πάνω ή προς τα κάτω σε όλο το μήκος του αγωγού, πράγμα πρακτικά αδύνατο.

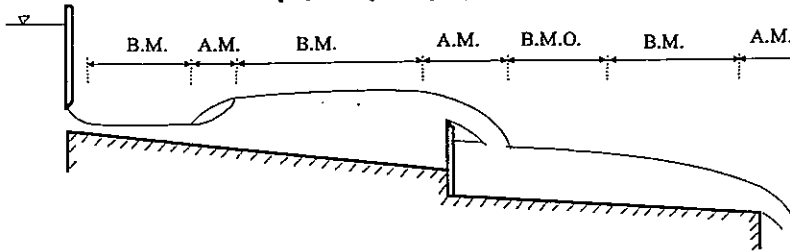
### Μόνιμη ομοιόμορφη ροή



### Μη Μόνιμη ομοιόμορφη ροή (αδύνατη)

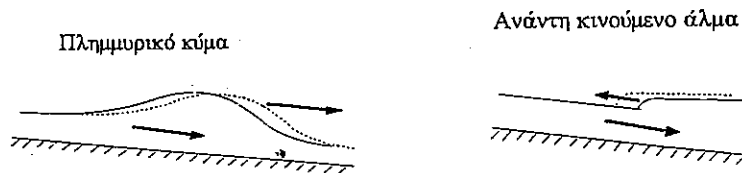


### Μόνιμη ανομοιόμορφη ροή



- A.M. : Απότομα μεταβαλλόμενη
- B.M. : Βαθμιαία μεταβαλλόμενη
- B.M.O. : B.M. σχεδόν ομοιόμορφη ροή

### Μη Μόνιμη ανομοιόμορφη ροή



Σχήμα 1.4. Παραδείγματα ειδών ροής

## 1.5 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΡΟΗΣ - ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι κύριες δυνάμεις που ενεργούν και επηρεάζουν τη ροή σε έναν ανοικτό αγωγό είναι οι δυνάμεις αδρανεΐας, βαρύτητας και ιξώδους. Η σχέση ανάμεσα στη δύναμη αδρανεΐας και στις δυνάμεις ιξώδους και βαρύτητας προσδιορίζει τη συμπεριφορά της ροής και εκφράζεται με δύο αδιάστατους αριθμούς, τον αριθμό Reynolds (Re) και τον αριθμό Froude (Fr). Με βάση το μέγεθος των δύο αυτών αριθμών γίνεται η διάκριση της ροής σε κατηγορίες :

### Αριθμός Reynolds : Στρωτή - Τυρβώδης Ροή

Ο αριθμός Reynolds (που είναι ήδη γνωστός από τη θεωρία οριακών στιβάδων και την εφαρμοσμένη υδραυλική) είναι μία έκφραση του λόγου της δύναμης αδρανεΐας προς τη δύναμη ιξώδους, που ενεργούν σε ένα στοιχειώδη όγκο της ροής. Γενικά ο αριθμός Reynolds (Re) εκφράζεται με τη σχέση :

$$Re = V \cdot L / \nu \quad (1.1)$$

όπου  $\nu$  ( $=\mu/\rho$ ) είναι ο συντελεστής κινηματικού ιξώδους και  $L$  κάποιο χαρακτηριστικό μήκος. Για τη ροή σε ανοικτούς αγωγούς  $V$  είναι η μέση ταχύτητα στη διατομή και ως  $L$  χρησιμοποιείται η υδραυλική ακτίνα  $R$ . Ας σημειωθεί ότι στην αντίστοιχη έκφραση του αριθμού Reynolds σε κλειστούς αγωγούς χρησιμοποιείται η ακτίνα  $D$  του αγωγού στη θέση του μήκους  $L$ . Η σχέση ανάμεσα στα  $D$  και  $R$  σε πλήρη σωλήνα είναι :  $R = D/4$ .

Ανάλογα με το μέγεθος του αριθμού Reynolds η ροή διακρίνεται σε **στρωτή**, **τυρβώδη** ή **μεταβατική**. Οι έννοιες αυτές είναι ήδη γνωστές και γι' αυτό δεν αναπτύσσονται περισσότερο σε αυτήν την παράγραφο.

Στους ανοικτούς αγωγούς πολύ σπάνια παρατηρείται στρωτή ροή. Ροή αυτού του είδους συναντούμε μόνο σε περιπτώσεις επιφανειακών απορροών και σε εργαστηριακά μοντέλα, ή όταν πρόκειται για ροή ρευστού μεγάλου ιξώδους.

#### Αριθμός Froude : Κρίσιμη - Υποκρίσιμη - Υπερκρίσιμη Ροή

Ο αριθμός Froude είναι ένα μέγεθος που έχει ιδιαίτερη σημασία σε όλα τα είδη ροής με ελεύθερη επιφάνεια. Ορίζεται ως το πηλίκο της ταχύτητας  $V$  προς την ταχύτητα μετάδοσης μικρών κυμάτων βαρύτητας ( $\sqrt{gy}$ ) και είναι μία έκφραση της σχέσης ανάμεσα στη δύναμη αδρανείας και στη δύναμη βαρύτητας. Στους ανοικτούς αγωγούς ο αριθμός Froude ορίζεται από τη σχέση :

$$Fr = V / \sqrt{gy_u} \quad (2) \quad (1.2)$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $y_u$  το υδραυλικό βάθος. Συνήθως χρησιμοποιείται η ισοδύναμη έκφραση :

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3} \quad (1.3)$$

όπου  $A$  και  $B$  το εμβαδό και το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας αντίστοιχα.

- 
2. Σύμφωνα με τον Liggett (1993) ακριβέστερη έκφραση του αριθμού Froude για ροή ανοικτών αγωγών είναι η ακόλουθη :  $Fr = \sqrt{\beta} \cdot V / \sqrt{gy_u}$  ή  $Fr^2 = \beta \cdot Q^2 B / (g A^3)$ , όπου  $\beta$  ο διορθωτικός συντελεστής γραμμικής ορμής (κεφ. 1.6 και παράρτημα Π1).

Σε αγωγούς ορθογωνικής διατομής το υδραυλικό βάθος  $y_b$  ταυτίζεται με το βάθος ροής  $y$  και ο αριθμός  $Fr$  δίνεται από τη σχέση :

$$Fr^2 = V^2 / gy = \frac{q^2}{gy^3} \quad (1.4)$$

όπου  $q$  η παροχή ανά μονάδα πλάτους διατομής.

Ανάλογα με το μέγεθος του αριθμού Froude η ροή διακρίνεται σε κρίσιμη, υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη.

Όταν  $Fr = 1$ , η ροή ονομάζεται **κρίσιμη**. Στην περίπτωση αυτή κρίσιμα ονομάζονται και τα μεγέθη της ροής βάθος και μέση ταχύτητα και συμβολίζονται με  $y_c$  και  $V_c$  αντίστοιχα.

Όταν  $Fr < 1$ , η ροή ονομάζεται **υποκρίσιμη**. Στην περίπτωση αυτή η επίδραση της βαρύτητας είναι καθοριστική. Η ροή διαθέτει σχετικά μικρή ταχύτητα και μεγάλο βάθος και συχνά περιγράφεται ως **ήρεμη ή ποτάμια**.

Όταν  $Fr > 1$ , η ροή ονομάζεται **υπερκρίσιμη** και υπερισχύουν οι δυνάμεις αδρανείας. Η ροή εμφανίζεται με μεγάλη ταχύτητα και σχετικά μικρό βάθος και συχνά περιγράφεται ως **ταχεία ή χειμαρρώδης**.

Από τους παραπάνω ορισμούς είναι εμφανές ότι η διάκριση της ροής στις τρεις αυτές κατηγορίες γίνεται με βάση τη σύγκριση της ταχύτητας της ροής και της ταχύτητας μετάδοσης μικρών κυμάτων βαρύτητας. Η παρατήρηση αυτή μπορεί πρακτικά να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο αναγνώρισης του είδους της ροής. Πράγματι μια μικρή διαταραχή στην επιφάνεια του νερού δημιουργεί μέτωπα που κινούνται σε σχέση με το νερό με ταχύτητα  $C = \pm \sqrt{gy_b}$ . Αν λοιπόν η ροή είναι υποκρίσιμη ( $|C| > V$ ), τότε ένας κυματισμός στην επιφάνεια του νερού μπορεί να κινηθεί προς τα ανάντη με ταχύτητα ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή ίση προς  $V - |C|$  ( $< 0$ ). Αν αντίθετα η ροή είναι υπερκρίσιμη ( $|C| < V$ ), τότε ένας ακίνητος παρατηρητής βλέπει το μέτωπο της διαταραχής να παρασύρεται προς τα κατόντη με ταχύτητα  $V - |C|$  ( $> 0$ ). Τέλος αν η ροή είναι κρίσιμη ( $|C| = V$ ), τότε το ανάντη μέτωπο της διαταραχής φαίνεται ακίνητο ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή και ονομάζεται στάσιμο κύμα.

Η τελευταία αυτή παρατήρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως κριτήριο για τον ορισμό του **κρίσιμου βάθους**. Έτσι για ροή συγκεκριμένης παροχής ως κρίσιμο ορίζεται το μέγιστο βάθος που δεν επιτρέπει σε μία διαταραχή να κινηθεί προς τα ανάντη. Θα έπρεπε επίσης να σημειωθεί, ότι το κρίσιμο βάθος προσδιορίζει στη διαφορική εξίσωση της κίνησης το σημείο στο οποίο η εξίσωση εμφανίζει ανωμαλία (βλ. κεφ. 3.4.1, εξίσ. 3.44).

## 1.6 ΤΟ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΕΔΙΟ ΚΑΙ Η ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

Η ροή στους ανοικτούς αγωγούς είναι γενικά τριδιάστατη στο χώρο. Τα φυσικά μεγέθη της, όπως η ταχύτητα και η πίεση, μεταβάλλονται τόσο κατά μήκος της ροής όσο και μέσα στη διατομή.

Πράγματι, η ροή σε έναν ανοικτό αγωγό αποτελεί κίνηση ρευστού που έρχεται σε επαφή με το στερεό τοίχωμα (ανάπτυξη οριακής στιβάδας). Τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται πάνω στο τοίχωμα, προσκολλώνται σ' αυτό και έχουν έτσι μηδενική ταχύτητα. Η ταχύτητά τους αυξάνει όσο μεγαλώνει η απόστασή τους από το στερεό όριο. Παράλληλα η διατημητική τάση που αναπτύσσεται στον πυθμένα μεταβιβάζεται σταδιακά στο ρευστό με τη μορφή εσωτερικών τριβών. Σε τυρβώδη ροή, που όπως είπαμε αποτελεί τη συνηθέστερη δίαιτα ροής σε ανοικτούς αγωγούς, η ταχύτητα ακολουθεί μια λογαριθμική ως προς την απόσταση σχέση (βλ. κεφ.8.1).

Η πίεση επίσης μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο μέσα στη διατομή. Γενικά η ροή σε ανοικτούς αγωγούς χαρακτηρίζεται από σχετικά μικρό βάθος. Με βάση την παρατήρηση αυτή σε αγωγούς με μικρή κλίση πυθμένα, στους οποίους η ελεύθερη επιφάνεια δεν εμφανίζει μεγάλες καμπυλότητες, μπορεί να θεωρηθεί ότι η πίεση ακολουθεί με ικανοποιητική ακρίβεια την υδροστατική κατανομή :  $p(z) = \rho g(z_s - z)$ . Έτσι το πιεζομετρικό φορτίο  $z_p$  (φορτίο θέσης + φορτίο πίεσης) σε κάθε σημείο της διατομής είναι σταθερό και ίσο με τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας  $z_s$  :

$$z_p = z + p/\rho g = z + (z_s - z) = z_s = z_0 + y \quad (1.5)$$

όπου  $z_0$  το υψόμετρο του πυθμένα. Δηλαδή, η πιεζομετρική γραμμή συμπίπτει με την ελεύθερη επιφάνεια.

Το μικρό βάθος ροής και οι μικρές καμπυλότητες οδηγούν στη διαπίστωση ότι στο πεδίο ροής κυριαρχεί η διάσταση κατά τη διεύθυνση της ροής  $x$ . Επομένως οι επιδράσεις των εγκάρσιων διαστάσεων μπορούν να ενσωματωθούν σε μια μονοδιάστατη θεώρηση της ροής, αν αντί των σημειακών ταχυτήτων χρησιμοποιηθεί ο μέσος όρος ταχυτήτων :

$$V = V(x, t) = \frac{1}{A(x, t)} \iint_A u(x, y, z, t) dA \quad (1.6)$$



ο οποίος θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει ικανοποιητικά το πεδίο ταχυτήτων στη διατομή. Αντίστοιχα χρησιμοποιείται το βάθος ροής  $y$  ( $=p_0/\rho g$ ) ως αντιπροσωπευτικό του φορτίου πίεσης στη διατομή.

Με αυτόν τον τρόπο το μαθηματικό πρόβλημα μετατρέπεται από τριδιάστατο σε μονοδιάστατο, πράγμα που διευκολύνει σημαντικά την επίλυσή του. Πράγματι, η αντιμετώπιση της ροής ως τριδιάστατης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη και στις περισσότερες περιπτώσεις δεν οδηγεί σε πρακτικά και εύχρηστα αποτελέσματα. Αντίθετα, η μονοδιάστατη θεώρηση οδηγεί σε απλούστευση της μορφής των βασικών εξισώσεων της Υδραυλικής, οι οποίες μετατρέπονται πλέον σε εξισώσεις μιας χωρικής μεταβλητής, του μήκους  $x$  (και του χρόνου  $t$ ). Έτσι, στην πλειοψηφία των προβλημάτων ροής σε ανοικτούς αγωγούς, εξετάζεται τελικά η μεταβολή μόνο μέσω των ή αντιπροσωπευτικών μεγεθών μιας διατομής κατά μήκος του αγωγού.

Οι γενικές εξισώσεις της υδραυλικής, πέρα από τα βασικά μεγέθη της ταχύτητας και της πίεσης, περιλαμβάνουν και άλλες παράγωγες ποσότητες. Για την κατάστρωση των μονοδιάστατων εξισώσεων υπολογίζονται, με ολοκλήρωση των αντίστοιχων στοιχειωδών ποσοτήτων, οι μέσοι όροι των ποσοτήτων αυτών σε μία διατομή και εκφράζονται και αυτοί ως συναρτήσεις των βασικών μεγεθών  $V$  και  $y$ . Έτσι για παράδειγμα η παροχή που περνά κάθετα από τη διατομή δίνεται από τη σχέση :

$$Q = \iint_A u dA = V \cdot A \quad (1:7)$$

και η δύναμη που ασκείται σε μία διατομή λόγω ανάπτυξης υδροστατικών πιέσεων προκύπτει από την ολοκλήρωση στην επιφάνεια της διατομής των αντίστοιχων στοιχειωδών δυνάμεων.

Για ποσότητες, που είναι μη γραμμικές συναρτήσεις της ταχύτητας, όπως για παράδειγμα το κινητικό φορτίο ή η γραμμική ορμή του ρευστού που περνά από μία επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου, η έκφραση μέσω των ή συνολικών τιμών διευκολύνεται με την εισαγωγή διορθωτικών συντελεστών. Έτσι για παράδειγμα, το μέσο κινητικό φορτίο σε μία διατομή εκφράζεται με τον όρο  $\alpha \cdot (V^2/2g)$  και η συνολική γραμμική ορμή του ρευστού που περνά από μία διατομή στη μονάδα του χρόνου εκφράζεται με τον όρο  $\beta \cdot \rho QV$  ( $=\beta \cdot \rho AV^2$ ). Οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  ονομάζονται διορθωτικοί συντελεστές κινητικού φορτίου και γραμμικής ορμής αντίστοιχα και υπολογίζονται από τις σχέσεις (βλ. παράρτημα Π1) :

$$\alpha = \frac{1}{V^3 A} \iint_A u^3 dA \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{V^2 A} \iint_A u^2 dA \quad (1.8)$$

Ο συντελεστής  $\alpha$  κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 1.0 και 1.2 σε ευθύγραμμους πρισματικούς αγωγούς και μπορεί να ξεπεράσει το 2.0 σε φυσικά υδατορεύματα. Τα αντίστοιχα όρια διακύμανσης του  $\beta$  είναι 1.0 έως 1.33 (Chow, 1959). Στις συνήθεις περιπτώσεις τεχνητών αγωγών απλής διατομής η τιμή των συντελεστών αυτών βρίσκεται πολύ κοντά στη μονάδα. Επιπλέον, επειδή η ακριβής τιμή τους δεν είναι γνωστή (παρά μόνον αν επιλυθεί το τριδιάστατο πρόβλημα), γίνεται η παραδοχή ότι σε αυτές τις περιπτώσεις αγωγών οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  είναι περίπου ίσοι με τη μονάδα και παραλείπονται. Η χρησιμοποίησή τους επιβάλλεται, όταν ο αγωγός είναι φυσικός ή τεχνητός σύνθετης διατομής. Στην περίπτωση αυτή η διατομή χωρίζεται σε υποδιατομές και ο υπολογισμός των  $\alpha$  και  $\beta$  μπορεί κατά προσέγγιση να γίνει με τη βοήθεια των σχέσεων :

$$\alpha = \frac{1}{V^3 A} \cdot \sum_i V_i^3 A_i \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{V^2 A} \cdot \sum_i V_i^2 A_i \quad (1.9)$$

Με αντίστοιχο σκεπτικό γίνεται χρήση και ενός τρίτου συντελεστή, του διορθωτικού συντελεστή φορτίου πίεσης  $\alpha'$ . Ο συντελεστής αυτός τίθεται για τη διόρθωση του σφάλματος στην περίπτωση που η κατανομή της πίεσης αποκλίνει από την υδροστατική. Έτσι, ως αντιπροσωπευτικό μέγεθος για το φορτίο πίεσης στη διατομή θεωρούμε τον όρο :  $\alpha' \cdot y$ . Για υδροστατική κατανομή είναι  $\alpha' = 1$ . Σε αγωγό με μεγάλη κατά μήκος κλίση είναι :  $\alpha' = \cos^2 \theta$ . Σε καμπυλόγραμμες ροές που στρέφουν τα κοίλα προς τα πάνω :  $\alpha' > 1$ , ενώ αν στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω :  $\alpha' < 1$  (βλ. παράδειγμα 3).

Με βάση τα παραπάνω, το ολικό φορτίο σε μία διατομή γράφεται αντιπροσωπευτικά ως :

$$H = z + \alpha' \cdot y + \alpha \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (1.10)$$

όπου με  $z$  συμβολίζουμε πλέον το υψόμετρο του πυθμένα. Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, στις συνήθεις περιπτώσεις ευθύγραμμων αγωγών απλής διατομής και μικρής κατά μήκος κλίσης τίθεται :  $\alpha = 1$  και  $\alpha' = 1$ .

## Παράδειγμα 1

Η κατανομή της ταχύτητας του νερού σε έναν αγωγό ορθογωνικής διατομής πλάτους  $b$  και βάθους ροής  $y$  προσεγγίστηκε με την εξίσωση :  $u = k \cdot \xi^{1/2}$ , όπου  $k$  σταθερά και  $\xi$  η κατακόρυφη απόσταση από τον πυθμένα. Να υπολογιστούν : α) η μέση ταχύτητα  $V$  ως συνάρτηση του  $k$  και του  $y$ , και ως συνάρτηση της μέγιστης ταχύτητας  $u_{\max}$ , β) οι διορθωτικοί συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$ .

Λύση

$$\alpha) \quad u(\xi) = k \cdot \xi^{1/2}, \quad A = b \cdot y$$

$$V = \frac{1}{A} \cdot \iint_A u \cdot dA = \frac{1}{by} \cdot \int_0^y (k \cdot \xi^{1/2}) \cdot b \cdot d\xi$$

$$= \frac{k}{y} \cdot \int_0^y \xi^{1/2} \cdot d\xi = \frac{2k}{3} \cdot y^{1/2}$$

$$u_{\max} = u|_{\xi=y} = k \cdot y^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{2}{3} \cdot u_{\max}$$

$$\beta) \quad \alpha = \frac{1}{V^3 A} \cdot \iint_A u^3 dA = \frac{k^3}{V^3 y} \cdot \int_0^y \xi^{3/2} d\xi = \frac{k^3}{V^3} \cdot \frac{2}{5} \cdot y^{3/2}$$

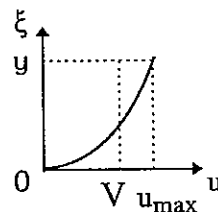
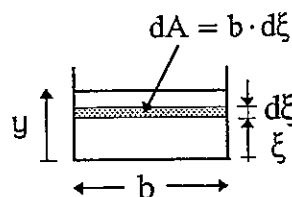
και μετά την αντικατάσταση της  $V$  προκύπτει :  $\alpha = \frac{27}{20} = 1.35$

Όμοια :

$$\beta = \frac{1}{V^2 A} \cdot \iint_A u^2 dA = \frac{k^2}{V^2 y} \cdot \int_0^y \xi \cdot d\xi = \frac{k^2}{V^2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{9}{8} = 1.125$$

## Παράδειγμα 2

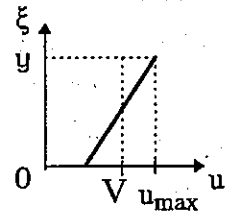
Η κατανομή της ταχύτητας του νερού σε έναν ορθογωνικό αγωγό μεγάλου πλάτους προσεγγίστηκε με την εξίσωση :  $u = 0.4 + 0.6 \cdot \xi/y$  (m/s). Να υπολογιστούν : α) η μέση ταχύτητα  $V$  και η μέγιστη ταχύτητα  $u_{\max}$ , β) οι διορθωτικοί συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$ .



Λύση

$$\alpha) \quad u(\xi) = 0.4 + 0.6 \cdot \xi/y \quad \text{ή} \quad u(\eta) = 0.4 + 0.6 \cdot \eta, \quad \text{όπου } \eta = \xi/y$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{A} \cdot \iint_A u \cdot dA = \frac{1}{y} \cdot \int_0^y u(\xi) \cdot d\xi = \int_0^1 u(\eta) \cdot d\eta \\ &= \int_0^1 (0.4 + 0.6 \cdot \eta) \cdot d\eta = 0.4 + 0.6/2 = 0.7 \text{ m/s} \end{aligned}$$



$$u_{\max} = u|_{\eta=1} = 0.4 + 0.6 = 1.0 \text{ m/s}$$

β)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{V^3 A} \cdot \iint_A u^3 dA = \frac{1}{V^3} \cdot \int_0^1 (0.4 + 0.6 \cdot \eta)^3 d\eta \\ &= \frac{1}{0.6 \cdot V^3} \cdot \int_{0.4}^1 (0.4 + 0.6 \cdot \eta)^3 d(0.4 + 0.6 \cdot \eta) \\ &= \frac{1}{0.6 \cdot V^3} \cdot \frac{1 - 0.4^4}{4} = \frac{0.406}{0.7^3} = 1.184 \end{aligned}$$

Όμοια :  $\beta \approx 1.061$

### Παράδειγμα 3

Για την καμπυλόγραμμη ροή του σχήματος, να βρεθεί η σχέση που εκφράζει την κατανομή των πιέσεων στη διατομή 0-1, που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την κατακόρυφη, και στην κατακόρυφη διατομή 0-z, αν η κατανομή της πίεσης κατά τη διεύθυνση z περιγράφεται από τη σχέση:  $\frac{\partial}{\partial r}(p + \rho g z) = -\rho \cdot a_r$ ,

όπου  $a_r$  είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης κατά τη διεύθυνση r. Να εξεταστεί η απλή περίπτωση :  $a_r = \text{σταθ.}$

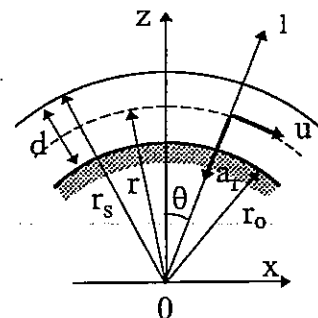
Λύση

$$\frac{\partial}{\partial r}(p + \rho g z) = -\rho \cdot a_r$$

$$\Rightarrow p + \rho g z = -\rho \cdot \int a_r \cdot dr + c$$

Για  $a_r = \text{σταθ.}$

$$\Rightarrow p + \rho g z = \rho \cdot a_r \cdot r + c$$



όπου :  $z = r \cos\theta$ .

Οριακή συνθήκη στην ελεύθερη επιφάνεια :  $p = 0, r = r_s, z = r_s \cos\theta$ .

$$\Rightarrow c = \rho \cdot r_s \cdot (g \cos\theta + a_r)$$

Μετά την αντικατάσταση του  $c$  η εξίσωση γίνεται :

$$\frac{p}{\rho g} = (r_s - r) \cdot \left( \cos\theta + \frac{a_r}{g} \right)$$

Η πίεση στον πυθμένα είναι :

$$\frac{p_0}{\rho g} = (r_s - r_0) \cdot \left( \cos\theta + \frac{a_r}{g} \right) = d \cdot \left( \cos\theta + \frac{a_r}{g} \right)$$

Για την κατακόρυφη διατομή O-z είναι :  $\cos\theta = 1$  και :

$$\frac{p}{\rho g} = (z_s - z) \cdot \left( 1 + \frac{a_r}{g} \right) = \left( \frac{p}{\rho g} \right)_{\text{ωρ}} \cdot \alpha'$$

όπου :  $\left( \frac{p}{\rho g} \right)_{\text{ωρ}} =$  το αντίστοιχο υδροστατικό φορτίο πίεσης και  $\alpha' = 1 + \frac{a_r}{g}$ .

Αντίστοιχα το φορτίο πίεσης στον πυθμένα είναι :  $\frac{p_0}{\rho g} = y \cdot \alpha'$

### Παρατηρήσεις

- Στην περίπτωση της καμπυλόγραμμης ροής του σχήματος, που στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι :  $a_r < 0$  και επομένως  $\alpha' < 1$ . Δηλαδή οι πιέσεις που αναπτύσσονται είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες υδροστατικές. Το αντίστροφο θα συνέβαινε, αν η ροή έστρεφε τα κοίλα προς τα πάνω.

- Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι γενικά ίση με :  $a_r = u^2/r$ , όπου  $u$  η ταχύτητα κατά τη διεύθυνση των γραμμών ροής (βλ. σχήμα). Η κατανομή της πίεσης μπορεί συνεπώς να προσδιοριστεί, αν είναι γνωστή η σχέση  $u = u(r)$ . Ανάλογα με το είδος του προβλήματος που εξετάζεται, μπορούν για λόγους απλής ανάλυσης να γίνουν οι ακόλουθες απλουστευτικές παραδοχές σχετικά με τη μορφή της συνάρτησης  $u(r)$  σε καμπυλόγραμμες ροές : α)  $u = V = \text{σταθ.}$ , β)  $u = c \cdot r$ , γ)  $u = c/r$ . Στην περίπτωση του παραδείγματος θεωρήθηκε :  $a_r = V^2/r_m$ , όπου  $r_m$  η μέση ακτίνα καμπυλότητας.

- Αν  $r \rightarrow \infty \Rightarrow a_r \rightarrow 0$ . Έχουμε δηλαδή ευθύγραμμη κίνηση. Για μικρή κλίση πυθμένα έχουμε :  $\theta$  μικρό,  $\cos\theta \approx 1$  και σύμφωνα με τα παραπάνω:  $\alpha' = 1$  και  $p_0/\rho g = y$ . Για μεγάλη κλίση πυθμένα :  $p_0/\rho g = d \cdot \cos\theta = y \cdot \cos^2\theta$ , δηλαδή  $\alpha' = \cos^2\theta$ .

## 2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Η κίνηση του νερού σε έναν ανοικτό αγωγό μπορεί να θεωρηθεί ως κίνηση ενός ρευστού σταθερής πυκνότητας  $\rho$  μέσα σε ένα χώρο, που τα όριά του προσδιορίζονται από τη μορφή του στερεού τοιχώματος του αγωγού και από την ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας. Για την εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση αυτή, μπορούμε λοιπόν να ανατρέξουμε στις βασικές αρχές της μηχανικής των ρευστών και, ακόμη γενικότερα, της μηχανικής των συνεχών μέσων, και να τις εφαρμόσουμε στη συνέχεια στην ειδική περίπτωση της ροής που εξετάζουμε.

Στα επόμενα κεφάλαια αναπτύσσονται περιληπτικά οι βασικές αυτές αρχές. Οι γενικές εξισώσεις που εξάγονται, παρουσιάζονται σε ολοκληρωματική μορφή, κατάλληλη για άμεση εφαρμογή στην ειδική περίπτωση ροής σε ανοικτούς αγωγούς.

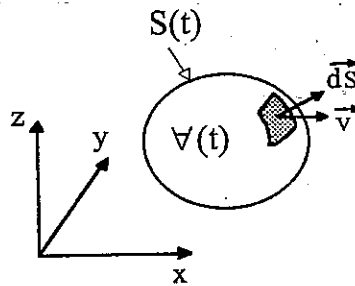
### 2.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Το ρευστό είναι ένα συνεχές μέσο και μπορούμε να το φανταστούμε σαν ένα σύνολο υλικών σημείων, που βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο και είναι συνεχώς κατανεμημένα στο χώρο. Σε κάθε υλικό σημείο αποδίδονται ορισμένες φυσικές ποσότητες, όπως μάζα, ταχύτητα, γραμμική ορμή κ.ά., και κινείται κάτω από την επίδραση δυνάμεων. Η κίνηση αυτή διέπεται από τους νόμους του Νεύτωνα.

Στην κλασική μηχανική τα υλικά σημεία διαθέτουν πεπερασμένη ποσότητα μάζας. Στην περίπτωση όμως ενός συνεχούς μέσου, επειδή δεν μπορούμε να μιλάμε για πεπερασμένη μάζα υλικού σημείου, ανάγουμε τη μάζα στη μονάδα του όγκου (βλ. Σημ. Εφαρμοσμένης Υδραυλικής, Π.Τολίκα και Χ.Φωτιάδη). Χρησιμοποιούμε δηλαδή την έννοια της πυκνότητας ( $\rho$ ). Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αναγάγουμε στη μονάδα του όγκου και άλλες φυσικές ποσότητες. Αν τώρα θεωρήσουμε ένα σύνολο υλικών σημείων που καταλαμβάνουν όγκο  $V$ , τότε η συνολική μάζα  $M_\alpha$  στον όγκο αυτό δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$M_{\alpha} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} \quad (2.1)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο όγκος  $\mathcal{V}$  περικλείεται από μία κλειστή επιφάνεια  $S$  σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x, y, z$  και ότι περιλαμβάνει πάντα το ίδιο σύνολο υλικών σημείων. Έτσι καθώς το ρευστό κινείται, η επιφάνεια  $S$  αλλάζει με το χρόνο μορφή και θέση καθώς παρακολουθεί την



κίνηση του συγκεκριμένου συνόλου υλικών σημείων. Εξετάζουμε επομένως την κίνηση ενός όγκου του ρευστού  $\mathcal{V}(t)$ , τον οποίο ονομάζουμε **υλικό όγκο** για να είναι εμφανής ο τρόπος ορισμού του. Μπορούμε τώρα στον υλικό αυτόν όγκο να εφαρμόσουμε τις βασικές αρχές της μηχανικής των ρευστών, και ειδικότερα τις αρχές διατήρησης της μάζας και της γραμμικής ορμής.

## 2.2 ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΑΖΑΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ

Σύμφωνα με την **αρχή διατήρησης της μάζας**, απώλεια ή δημιουργία μάζας λόγω κίνησης είναι αδύνατη. Στην περίπτωση του υλικού όγκου  $\mathcal{V}(t)$ , και αφού με τον ορισμό του έχουμε αποκλείσει την ανταλλαγή μάζας με τον περιβάλλοντα χώρο, η μάζα  $M_{\alpha}$ , που περιέχεται στον  $\mathcal{V}$  πρέπει να είναι σταθερή, ή αλλιώς η μεταβολή της ως προς το χρόνο να είναι ίση με το μηδέν:

$$\frac{DM_{\alpha}}{Dt} = 0 \quad (2.2.\alpha)$$

$$\text{ή : } \frac{D}{Dt} \iiint_{\mathcal{V}(t)} \rho \, d\mathcal{V} = 0 \quad (2.2.\beta)$$

Ο συμβολισμός  $D/Dt$  χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει παραγωγή, που παρακολουθεί την κίνηση συγκεκριμένου υλικού όγκου και ονομάζεται **υλική παράγωγος**<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Ο συμβολισμός  $D/Dt$  είναι γνωστός από το κεφάλαιο της κινηματικής (βλ. Σημ. Εφαρμοσμένης Υδραυλικής, Π.Τολικά και Χ.Φωτιάδη) όπου δίνεται με τη μορφή σημειακής υλικής παραγωγού. Παριστάνει δηλαδή το ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας που ακολουθεί την κίνηση μεμονωμένου υλικού σημείου στο χώρο.

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της γραμμικής ορμής (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα) η συνισταμένη  $\vec{F}$  όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε υλικό όγκο  $\nabla$  του ρευστού είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της γραμμικής του ορμής.

Η γραμμική ορμή  $\vec{M}_f$  του ρευστού που καταλαμβάνει όγκο  $\nabla$  εκφράζεται με το ολοκλήρωμα :

$$\vec{M}_f = \iiint_{\nabla} \rho \vec{v} dV \quad (2.3)$$

όπου  $\vec{v}$  το διάνυσμα της ταχύτητας και  $(\rho\vec{v})$  η πυκνότητα της γραμμικής ορμής σε τυχαίο σημείο μέσα στον όγκο  $\nabla$ . Η σχέση 2.3 είναι αντίστοιχη της 2.1 που εκφράζει τη μάζα. Επομένως η αρχή διατήρησης της γραμμικής ορμής για τον όγκο  $\nabla(t)$  γράφεται :

$$\vec{F} = \frac{D\vec{M}_f}{Dt} \quad (2.4.a)$$

$$\text{ή : } \vec{F} = \frac{D}{Dt} \iiint_{\nabla(t)} \rho \vec{v} dV \quad (2.4.β)$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις διακρίνονται σε δυνάμεις πεδίου  $\vec{F}_b$  (π.χ. δύναμη βαρύτητας), που ασκούνται στον όγκο  $\nabla$ , και σε επιφανειακές  $\vec{F}_s$  (δυνάμεις πίεσης και διάτμησης), που ασκούνται στην επιφάνεια  $S$  :

$$\vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_s = \iiint_{\nabla} \vec{f}_b \rho dV + \iint_S \vec{f}_s ds \quad (2.5)$$

όπου :  $\vec{f}_b$  η επιτάχυνση του πεδίου (όταν έχουμε μόνο πεδίο βαρύτητας η  $\vec{f}_b$  είναι ίση με το  $g$  θεωρούμενο ως διάνυσμα) και

$\vec{f}_s$  η τάση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) στην επιφάνεια  $S$ .

Οι εξισώσεις 2.2 και 2.4 εκφράζουν τους νόμους διατήρησης της μάζας και της γραμμικής ορμής για το ρευστό που καταλαμβάνει όγκο  $\nabla(t)$ .



## 2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Στις εξισώσεις 2.2 και 2.4 διαπιστώνουμε ότι περιέχονται όροι της μορφής :

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \omega \, dV \quad (2.6)$$

όπου :  $\omega = \omega(x,y,z,t)$  μια συνεχής συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, όπως η πυκνότητα ( $\rho$ ) και η γραμμική ορμή ( $\rho \bar{v}$ ), και

$\Omega = \Omega(t)$  το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτής στον όγκο  $V$ .

Η ολοκλήρωση της συνάρτησης  $\omega$  γίνεται σε έναν όγκο που κινείται και μεταβάλλεται με τον χρόνο. Επομένως δεν μπορούμε να μεταφέρουμε την παράγωγο στο εσωτερικό του ολοκληρώματος. Για την παραγωγή του ολοκληρώματος αυτού χρησιμοποιούμε το λεγόμενο **θεώρημα μεταφοράς του Reynolds**, η απόδειξη του οποίου δίνεται στο παράρτημα Π2 :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \omega \, dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial \omega}{\partial t} \, dV + \iint_{S(t)} \omega (\bar{v} \cdot \bar{n}) \, dS \quad (2.7)$$

όπου  $\bar{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την κλειστή επιφάνεια  $S$  και με φορά προς τα έξω.

Σύμφωνα με τη μαθηματική αυτή σχέση η παράγωγος ως προς το χρόνο ενός ολοκληρώματος σε όγκο  $V(t)$  μετατρέπεται σε άθροισμα ενός ολοκληρώματος όγκου και ενός επιφανειακού ολοκληρώματος. Στον πρώτο όρο η παραγωγή έχει μεταφερθεί στο εσωτερικό του ολοκληρώματος. Ο δεύτερος όρος οφείλεται στη μετατόπιση της επιφάνειας  $S$  με το χρόνο, καθώς αυτή παρακολουθεί την κίνηση του υλικού όγκου. Από φυσική άποψη το επιφανειακό αυτό ολοκλήρωμα παριστάνει το ρυθμό εξόδου της ποσότητας  $\omega$  από τον όγκο  $V$  ως αποτέλεσμα της μετατόπισης της  $S$ .

## 2.4 ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Με τη βοήθεια του θεωρήματος μεταφοράς 2.7 η εξίσωση 2.2, που εκφράζει τη διατήρηση της μάζας, παίρνει τη μορφή :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.8)$$

Η 2.8 είναι η ολοκληρωματική μορφή της εξίσωσης συνέχειας για υλικό όγκο  $V$ .

Για ρευστό σταθερής πυκνότητας  $\rho$ , όπως είναι το νερό, η εξίσωση συνέχειας απλοποιείται σε :

$$\boxed{\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0} \quad (2.9)$$

## 2.5 ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΡΜΗΣ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Η εξίσωση 2.4, που εκφράζει τη διατήρηση της γραμμικής ορμής, σε συνδυασμό με το θεώρημα μεταφοράς 2.7 μετατρέπεται σε :

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F} \quad (2.10)$$

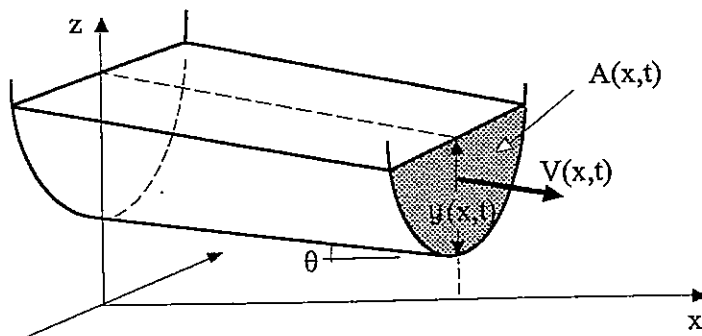
Η 2.10 σε συνδυασμό με την 2.5 είναι η ολοκληρωματική μορφή της εξίσωσης γραμμικής ορμής για υλικό όγκο  $V$ .

Για ρευστό σταθερής πυκνότητας  $\rho$ , π.χ. νερό, η εξίσωση αυτή γίνεται :

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV + \iint_S \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \frac{\vec{F}}{\rho}} \quad (2.11)$$

### 3. ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ.

Ας θεωρήσουμε τη ροή σε έναν ανοικτό αγωγό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διατομή του αγωγού είναι τυχαία και μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού. Η ροή στη γενική περίπτωση θεωρείται μη μόνιμη και ανομοιομορφη.



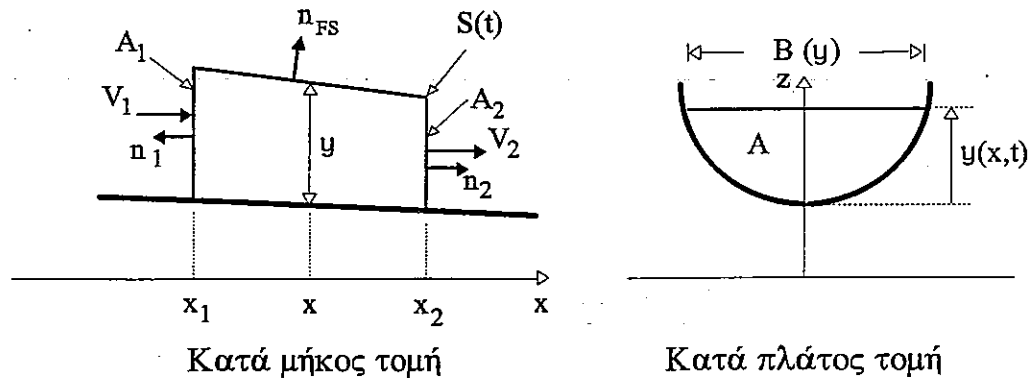
Σχήμα 3.1 : Τμήμα ροής σε ανοικτό αγωγό

Για την εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν αυτό το είδος ροής θα χρησιμοποιήσουμε τις ολοκληρωματικές εξισώσεις συνέχειας και γραμμικής ορμής της μηχανικής των ρευστών. Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να ορίσουμε τον υλικό όγκο  $\nabla$ , στον οποίο θα εφαρμοστούν οι εξισώσεις.

#### 3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΛΙΚΟΥ ΟΓΚΟΥ

Ο υλικός όγκος  $\nabla$  περικλείεται από μια κλειστή επιφάνεια  $S$  που η μορφή της μπορεί να είναι τυχαία. Μόνος περιορισμός στον ορισμό της είναι, ότι αυτή περικλείει πάντα το ίδιο σύνολο υλικών σημείων, επομένως παραμορφώνεται με τον χρόνο. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε την επιφάνεια  $S$  κατά τρόπο που να διευκολύνει την εξαγωγή μονοδιάστατων εξισώσεων ροής σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 1.6. Ας ορίσουμε λοιπόν ως  $S$  την κλειστή επιφάνεια, που σε κάποια χρονική στιγμή  $t$  αποτελείται από δύο κατακόρυφες διατομές στις θέσεις  $x_1$  και  $x_2$ , την ενδιάμεση παράπλευρη επιφάνεια του αγωγού και το αντίστοιχο τμήμα της ελεύθερης επιφάνειας του νερού. Μετά από χρόνο  $\Delta t$  η μορφή της  $S$  αλλάζει καθώς τα σημεία τόσο της ελεύθερης επιφάνειας όσο και των δύο διατομών μετατοπίζονται με ρυθμό ίσο προς την ταχύτητα των αντίστοιχων υγρών σωματιδίων.

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται η μορφή της επιφάνειας  $S$  καθώς και ορισμένοι συμβολισμοί. Με  $V_1$  και  $V_2$  συμβολίζονται τα μεγέθη της μέσης ταχύτητας  $V$  στις διατομές εμβαδού  $A_1$  και  $A_2$  αντίστοιχα. Με  $n$  συμβολίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την επιφάνεια. Ο δείκτης  $FS$  αντιστοιχεί στην ελεύθερη επιφάνεια.



Σχήμα 3.2 : Ορισμός υλικού όγκου

### 3.2 ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Για την εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν τη μη μόνιμη και ανομοιομορφη ροή γίνονται οι ακόλουθες παραδοχές :

- i. Το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο και ομογενές ( $\rho = \text{σταθερό}$ ).
- ii. Η κατά μήκος κλίση του αγωγού είναι μικρή ( $\cos\theta \approx 1$ ,  $\sin\theta \approx \tan\theta = S_0$ ,  $y \approx d$ ). Σχετική αναφορά γίνεται στο κεφάλαιο 1.3.
- iii. Σε τμήματα ροής, όπου η ελεύθερη επιφάνεια και οι γραμμές ροής εμφανίζουν μικρή καμπυλότητα, η πίεση ακολουθεί την υδροστατική κατανομή (κεφ. 1.6).
- iv. Η τριβή του ρευστού με τα τοιχώματα και το τυρβώδες εκφράζονται με τη βοήθεια εμπειρικών συντελεστών.
- v. Οι δυνάμεις τριβής μεταξύ ελεύθερης επιφάνειας και ατμοσφαιρικού αέρα, και η επιφανειακή τάση θεωρούνται αμελητέες.
- vi. Οι εξισώσεις ροής καταστρώνονται με βάση τη μονοδιάστατη θεώρηση, όπως αυτή επεξηγήθηκε στο κεφάλαιο 1.6.

### 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με τη μη μόνιμη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή. Με τον όρο αυτόν εννοούμε τη ροή, της οποίας η ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζει μικρές κατά μήκος καμπυλότητες και κατά συνέπεια όλα τα μονοδιάστατα μεγέθη της είναι συνεχείς συναρτήσεις της θέσης  $x$  και του χρόνου  $t$ . Επιπλέον η παραδοχή της υδροστατικής κατανομής της πίεσης ισχύει σε όλο το μήκος της ροής.

Η απότομα μεταβαλλόμενη ροή περιορίζεται συνήθως σε μικρές περιοχές έντονων μεταβολών, πέρα από τις οποίες η ροή υπάγεται στην κατηγορία της βαθμιαία μεταβαλλόμενης. Τέτοια τμήματα ροής θα μελετηθούν σε ιδιαίτερο κεφάλαιο και μόνο για συνθήκες μόνιμης ροής (βλ. κεφ.3.4.3). Σύντομη όμως αναφορά στο μη μόνιμο πρόβλημα θα γίνει και στο τέλος του κεφαλαίου της μη μόνιμης βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής (κεφ. 3.3.2).

Είναι βέβαια προφανές, ότι σε όλα τα είδη ροής ισχύουν οι ίδιοι βασικοί νόμοι διατήρησης της μάζας και της γραμμικής ορμής. Για το λόγο αυτόν η πορεία εξαγωγής των εξισώσεων για τη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή θα γίνει κατά τρόπο που να διευκολύνει την εξαγωγή των αντίστοιχων εξισώσεων για τα τμήματα απότομα μεταβαλλόμενων ροών.

#### 3.3.1 Εξίσωση συνέχειας

Για την εξαγωγή της εξίσωσης συνέχειας σε μη μόνιμη ανομοιόμορφη ροή ρευστού σταθερής πυκνότητας θα χρησιμοποιηθεί η ολοκληρωματική εξίσωση συνέχειας 2.9, η οποία θα εφαρμοστεί στον υλικό όγκο που ορίσαμε στην παράγραφο 3.1 (σχήμα 3.2). Η εξίσωση αυτή περιλαμβάνει το επιφανειακό ολοκλήρωμα της κάθετης προς την επιφάνεια συνιστώσας της ταχύτητας. Η επιφάνεια ολοκλήρωσης  $S$  αποτελείται από επιμέρους τμήματα. Επομένως η εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$\iint_{A_1} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \iint_{A_2} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \iint_{ST} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \iint_{FS} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (3.1)$$

όπου  $ST$  η παράπλευρη επιφάνεια και  $FS$  η ελεύθερη επιφάνεια.

Ας εξετάσουμε κάθε έναν από τους όρους της 3.1 χωριστά.

Στις δύο διατομές που βρίσκονται στις θέσεις  $x_1$  και  $x_2$  το μοναδιαίο διάνυσμα της διατομής συμπίπτει κατά διεύθυνση με την οριζόντια συνιστώσα  $u(x,y,z,t)$  της ταχύτητας. Άρα οι δύο πρώτοι όροι της 3.1 παίρνουν τη μορφή :

$$\iint_A (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \pm \iint_A u dA = \pm V A = \pm Q \quad (3.2)$$

όπου:  $Q = Q(x,t)$  η παροχή. Το αρνητικό πρόσημο αφορά στη διατομή 1 και οφείλεται στο ότι το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{n}_1$  έχει φορά αντίθετη προς τη φορά της ταχύτητας.

Στην παράπλευρη επιφάνεια ST (στερεό και αδιαπέρατο τοίχωμα) θεωρούμε ότι η ταχύτητα του νερού είναι μηδενική, δηλαδή ότι τα υγρά σωματίδια προσκολλώνται στο στερεό τοίχωμα. Έτσι, ο  τρίτος όρος  της εξίσωσης είναι ίσος με το μηδέν.

Ο  τέταρτος όρος  της εξίσωσης 3.1 περιλαμβάνει ολοκλήρωση στην ελεύθερη επιφάνεια FS. Εδώ το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{v} \cdot \vec{n}$  (δηλαδή η κάθετη προς την επιφάνεια συνιστώσα της ταχύτητας των αντίστοιχων υγρών σωματιδίων) παριστάνει το ρυθμό μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Μπορεί συνεπώς να θεωρηθεί ίσο προς το ρυθμό μεταβολής του βάθους  $\partial y / \partial t$  :

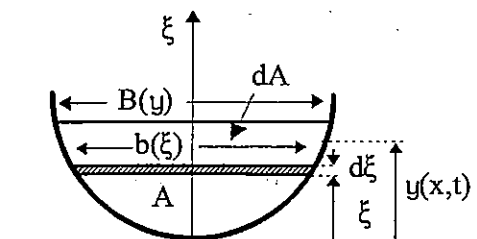
$$\iint_{FS} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{FS} \frac{\partial y}{\partial t} dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial y}{\partial t} B dx$$

όπου το  $dS$  της ελεύθερης επιφάνειας αντικαταστάθηκε από το  $B dx$ .

Αλλά, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας  $B$  είναι ίσο με τη μεταβολή του εμβαδού  $A$  ως προς  $y$ . Πράγματι, είναι :

$$A = \int_0^y b(\xi) d\xi$$

$$\text{και : } \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y b(\xi) d\xi$$



Σχήμα 3.3

Διευκρίνιση στοιχείων διατομής

Σύμφωνα με τον κανόνα του Leibnitz η παράγωγος του ολοκληρώματος αυτού γίνεται :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \int_0^y \frac{\partial}{\partial y} [b(\xi)] d\xi + 1 \cdot [b]_{\xi=y} = B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\partial A}{\partial y} \quad (3.3)$$

Επομένως :

$$B \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}$$

Και για μικρό  $\Delta x$ , ισχύει :

$$\iint_{FS} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \quad (3.4)$$

Τέλος από το συνδυασμό των 3.2 και 3.4 με την εξίσωση 3.1 προκύπτει :

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Delta x + Q_2 - Q_1 = 0 \quad (3.5)$$

όπου :  $Q_2 = Q(x_2, t)$  και  $Q_1 = Q(x_1, t)$ .

Αφού η  $Q$  είναι συνεχής συνάρτηση του  $x$  και παραγωγίσιμη, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor. Για  $\Delta x$  μικρό ( $x_2 \rightarrow x_1$ ) και αν αγνοήσουμε τους όρους ανώτερης τάξης, η  $Q_2$  γράφεται με τη μορφή :

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x$$

Μετά την αντικατάσταση της  $Q_2$  στην 3.5 και την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει η ακόλουθη μορφή της εξίσωσης συνέχειας για μη μόνιμη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή σε ανοικτούς αγωγούς :

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0} \quad (3.6)$$

### 3.3.2 Εξισώσεις γραμμικής ορμής

Η εξίσωση γραμμικής ορμής 2.11 είναι μια διανυσματική εξίσωση που μπορεί ως προς τον άξονα των  $x$  να γραφεί με τη μορφή :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \iint_S u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \frac{F_x}{\rho} \quad (3.7)$$

#### α. Ανάπτυξη του αριστερού μέλους της εξίσωσης

Όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης συνέχειας, το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.7) αναπτύσσεται σε άθροισμα τεσσάρων ολοκληρωμάτων της μορφής :

$$\begin{aligned} & \iint_S u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \\ &= - \iint_{A_1} u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \iint_{A_2} u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \iint_{ST} u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \iint_{FS} u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \end{aligned} \quad (3.8)$$

Τους δύο πρώτους όρους του αθροίσματος τους εκφράζουμε ως συναρτήσεις της μέσης ταχύτητας  $V$  και του εμβαδού  $A$  με τη βοήθεια της σχέσης :

$$\iint_A u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \iint_A u^2 dA = \beta V^2 A = \beta Q V \quad (3.9)$$

όπου :  $\beta$  συντελεστής ολοκλήρωσης που ονομάζεται διορθωτικός συντελεστής γραμμικής ορμής. Για αγωγούς απλής διατομής ο συντελεστής  $\beta$  τίθεται ίσος προς τη μονάδα και παραλείπεται ( $\beta \approx 1$ , βλ. κεφ.1.6).

Ο τρίτος όρος αφορά ολοκλήρωση στην παράπλευρη επιφάνεια και είναι ίσος με το μηδέν.

Έτσι η εξίσωση 3.7 παίρνει τη μορφή :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \iint_{FS} u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS - (Q V)_1 + (Q V)_2 = \frac{F_x}{\rho} \quad (3.10)$$

Αλλά, όπως αποδεικνύεται στο παράρτημα Π3, το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων στο αριστερό μέλος της 3.10 δίνει :

$$\iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \iint_{FS} u (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dx = \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta x \quad (3.11)$$



Τέλος, η ποσότητα  $(QV)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση του  $x$  και επομένως για μικρό  $\Delta x$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor. Έτσι, αν αγνοήσουμε τους όρους ανώτερης τάξης, η  $(QV)_2$  γίνεται :

$$(QV)_2 = (QV)_1 + \frac{\partial(QV)}{\partial x} \Delta x \quad (3.12)$$

Από την αντικατάσταση των σχέσεων 3.11 και 3.12 στην εξίσωση 3.10 προκύπτει :

$$\left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(QV)}{\partial x} \right] \rho \Delta x = F_x \quad (3.13)$$

Υπενθυμίζουμε εδώ, ότι το αριστερό μέλος της 3.13 παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της γραμμικής ορμής στον υλικό όγκο  $\nabla$ , όπως αυτός ορίστηκε στην παράγραφο 3.1.

### β. Εξωτερικές δυνάμεις

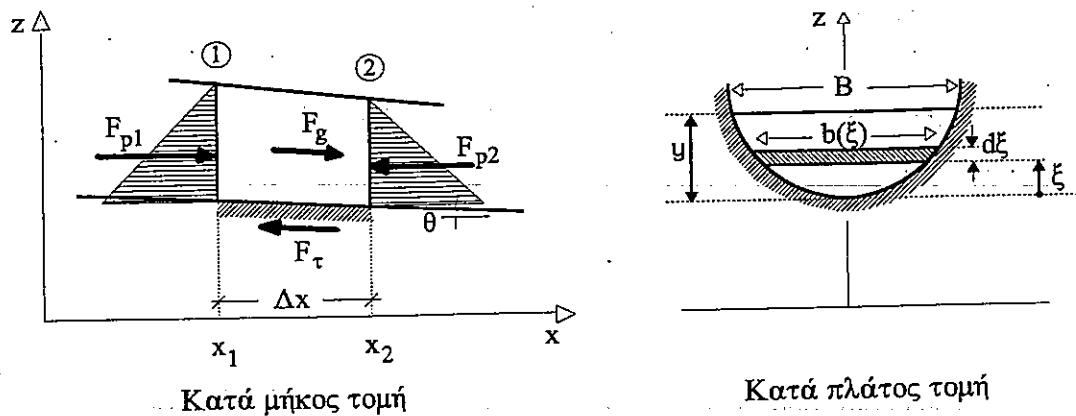
Η δύναμη  $F_x$  αντιπροσωπεύει τη συνισταμένη όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στον όγκο  $\nabla$  κατά τη διεύθυνση της ροής. Όπως έχει αναφερθεί και προηγούμενα (εξίσωση 2.5), οι δυνάμεις αυτές διακρίνονται σε δυνάμεις πεδίου και σε επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται στην επιφάνεια  $S$ . Δύναμη πεδίου είναι η δύναμη βαρύτητας. Επιφανειακές δυνάμεις, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.4, είναι : (α) η συνισταμένη  $F_{px}$  των δυνάμεων, που αναπτύσσονται λόγω υδροστατικής πίεσης στις διατομές 1 και 2 από το υπόλοιπο ρευστό και (β) η αντίσταση τριβής  $F_\tau$ . Έτσι έχουμε :

$$F_x = F_g - F_\tau + F_{px} \quad (3.14)$$

όπου :  $F_{px} = F_{p1} - F_{p2}$

Στις επιφανειακές δυνάμεις θα έπρεπε να περιληφθεί και η δύναμη που αναπτύσσεται περιμετρικά στην παράπλευρη επιφάνεια του αγωγού λόγω υδροστατικών πιέσεων. Η δύναμη αυτή ενεργεί κάθετα προς το τοίχωμα και η συνιστώσα της κατά τη διεύθυνση  $x$  είναι διάφορη από το μηδέν μόνο σε περιοχές διεύρυνσης ή στένωσης της διατομής. Για λόγους απλότητας ας περιοριστούμε εδώ στην περίπτωση πρισματικών αγωγών, δηλαδή αγωγών που

η γεωμετρία της διατομής τους παραμένει σταθερή κατά μήκος του αγωγού. Έτσι έχουμε :  $B=B(y)$ ,  $A=A(y)$ , όπου βέβαια  $y=y(x,t)$ . Η περίπτωση μη πρισματικού αγωγού θα εξεταστεί στην επόμενη παράγραφο 3.3.3.



Σχήμα 3.4 : Σχηματική παρουσίαση των εξωτερικών δυνάμεων

### Δύναμη βαρύτητας ( $F_g$ )

Σύμφωνα με τη σχέση 2.5 και την παραδοχή (ii), και για μικρό  $\Delta x$  η συνιστώσα της δύναμης βαρύτητας κατά τη διεύθυνση  $x$  δίνεται από τη σχέση:

$$F_g = \iiint_V \rho g dV \sin \theta = \rho g \sin \theta \nabla = \rho g S_o A \Delta x \quad (3.15)$$

όπου:  $S_o$  η κατά μήκος κλίση του πυθμένα.

### Αντίσταση τριβής ( $F_\tau$ )

Η αντίσταση τριβής ασκείται στον όγκο  $\nabla$  μέσω διάτμησης κατά μήκος του στερεού τοιχώματος. Γενικά έχει επικρατήσει να εκφράζεται η διατμητική δύναμη ανά μονάδα μήκους αγωγού ως :  $\rho g A S_f$ , όπου  $S_f$  αδιάστατος συντελεστής που ονομάζεται **συντελεστής ή κλίση τριβής** (παραδοχή iv). Έτσι για μήκος  $\Delta x$  η δύναμη τριβής δίνεται από τη σχέση :

$$F_\tau = S_f \rho g \nabla = \rho g S_f A \Delta x \quad (3.16)$$

Η κλίση τριβής δίνεται από εμπειρικούς τύπους και ειδικότερα από τους τύπους του Chezy :  $S_f = V^2 / (C^2 R)$  ή του Manning :  $S_f = (nV)^2 / R^{4/3}$ , όπου  $C$  και  $n$  συντελεστές τριβής του Chezy και του Manning αντίστοιχα (κεφ. 4.4)

### Υδροστατική δύναμη ( $F_{px}$ )

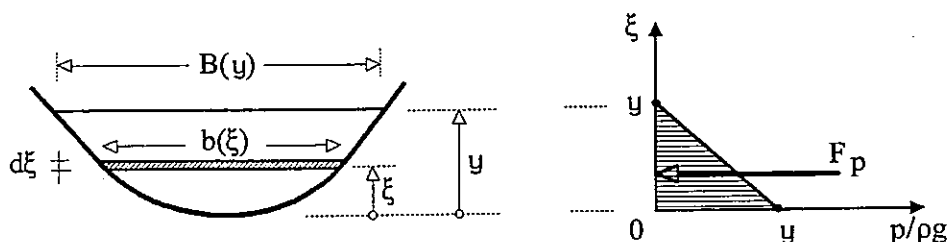
Σύμφωνα με την παραδοχή (iii), σε περιοχές ροής με μικρές καμπυλότητες, η πίεση μέσα στο ρευστό ακολουθεί την υδροστατική κατανομή. Έτσι σε τυχαίο σημείο μιας διατομής ασκείται πίεση ίση με :

$$p = p(\xi) = \rho g (y - \xi) \quad (3.17)$$

όπου :  $y = y(x)$  το βάθος ροής και

$\xi$  η κατακόρυφη απόσταση από το χαμηλότερο σημείο του πυθμένα.

Στο σχήμα που ακολουθεί, παρουσιάζεται το διάγραμμα της υδροστατικής κατανομής πίεσης σε αγωγό τυχαίας διατομής.



Σχήμα 3.5: Κατανομή πίεσης σε μία διατομή

Η συνολική δύναμη που ασκείται σε μία διατομή υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα :

$$F_p = \iint_A p dA = \iint_A \rho g (y - \xi) dA = \rho g \int_0^y (y - \xi) b(\xi) d\xi \quad (3.18.a)$$

ή αλλιώς :

$$F_p = \rho g \bar{y} A \quad (3.18.β)$$

όπου :  $\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_A \rho g (y - \xi) dA$  : η απόσταση του κέντρου βάρους της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια.

Η συνολική δύναμη  $F_{px}$  είναι :

$$F_{px} = F_{p1} - F_{p2} = F_p(x_1) - F_p(x_2) \quad (3.19)$$

Στην περίπτωση βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής η δύναμη  $F_p$  είναι συνεχής συνάρτηση του  $x$  και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor. Για μικρό  $\Delta x$  αγνοούμε τους όρους δεύτερης και ανώτερης τάξης οπότε :

$$F_{p2} = F_{p1} + \frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x$$

$$\text{και : } F_{px} = F_{p1} - F_{p2} = - \frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x \quad (3.20)$$

Για τον υπολογισμό της παραγώγου  $\partial F_p / \partial x$  χρησιμοποιείται η σχέση 3.18.α<sup>1</sup>.  
Ας σημειωθεί ακόμη ότι :  $y = y(x)$ ,  $b = b(\xi)$  και ότι ισχύουν οι σχέσεις :

$$b|_{\xi=y} = B \quad \text{και} \quad \int_0^y b(\xi) d\xi = A$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Leibnitz έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y (y - \xi) b(\xi) d\xi \\ &= \rho g \left\{ \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} [(y - \xi) b(\xi)] d\xi + \frac{\partial y}{\partial x} [(y - \xi) b(\xi)]_{\xi=y} \right\} \\ &= \rho g \int_0^y \frac{\partial y}{\partial x} b(\xi) d\xi = \rho g \frac{\partial y}{\partial x} \int_0^y b(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\text{Άρα : } \frac{\partial F_p}{\partial x} = \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.21)$$

Τελικά, από το συνδυασμό των εξισώσεων 3.20 και 3.21 προκύπτει :

$$F_{px} = -\rho g A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x \quad (3.24)$$

### Άθροισμα εξωτερικών δυνάμεων ( $F_x$ )

Η συνισταμένη  $F_x$  των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στον υλικό όγκο  $\nabla$  κατά τη διεύθυνση της ροής, υπολογίζεται αν στην εξίσωση 3.14 οι επιμέρους δυνάμεις αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες εκφράσεις τους (εξισώσεις 3.15, 3.16, 3.24). Είναι :

1 Αν για την έκφραση της  $F_p$  χρησιμοποιηθεί η εξίσωση 3.18.β αντί της 3.18.α, τότε :

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial}{\partial x} (\bar{y} A) \quad (3.22)$$

και αποδεικνύεται έτσι η ακόλουθη σχέση που θα μας φανεί χρήσιμη σε μεταγενέστερο στάδιο

$$\boxed{\frac{\partial (\bar{y} A)}{\partial x} = A \frac{\partial y}{\partial x}} \quad (3.23)$$

$$F_x = \left( S_o - S_f - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \rho g A \Delta x \quad (3.25)$$

### γ. Εξισώσεις γραμμικής ορμής και κίνησης

Από το συνδυασμό των εξισώσεων 3.13 και 3.25, και μετά την εκτέλεση κατάλληλων πράξεων, προκύπτει η ακόλουθη μορφή της εξίσωσης γραμμικής ορμής :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(QV)}{\partial x} = gA \left( S_o - S_f - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (3.26)$$

Στη συνέχεια με τις κατάλληλες αντικαταστάσεις μπορεί ο αριθμός των εξαρτημένων μεταβλητών στην εξίσωση 3.26 να μειωθεί. Η επιλογή των μεταβλητών που εμφανίζονται στην εξίσωση εξαρτάται από το είδος του προβλήματος που εξετάζουμε και τη μέθοδο επίλυσης που επιλέγουμε. Έτσι η 3.26 μπορεί να πάρει διάφορες μορφές κατάλληλες για την επίλυση επιμέρους περιπτώσεων ροής με διάφορες μεθόδους. Παρουσιάζουμε εδώ τις ακόλουθες δύο :

(i) Αν στο αριστερό μέλος της εξίσωσης 3.26 η ταχύτητα αντικατασταθεί με την ισοδύναμη έκφραση  $Q/A$ , τότε καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή της εξίσωσης γραμμικής ορμής :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial y}{\partial x} = gA (S_o - S_f) \quad (3.27)$$

(ii) Με τη χρησιμοποίηση της σχέσης :  $Q = VA$  το άθροισμα στο αριστερό μέλος της 3.26 γίνεται :

$$\frac{\partial(AV)}{\partial t} + \frac{\partial(QV)}{\partial x} = A \frac{\partial V}{\partial t} + V \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + Q \frac{\partial V}{\partial x}$$

Αλλά σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας (3.6) η παράσταση που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση είναι ίση με το μηδέν. Έτσι, η σχέση 3.26 παίρνει τη μορφή :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) A = gA \left( S_o - S_f - \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

$$\eta \quad \boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g(S_0 - S_f)} \quad (3.28)$$

Η εξίσωση 3.28 ονομάζεται **εξίσωση κίνησης** και περιλαμβάνει ως εξαρτημένες μεταβλητές την ταχύτητα  $V$  και το βάθος  $y$ . Υπενθυμίζουμε ότι για την εξαγωγή της χρησιμοποιήθηκε και η εξίσωση της συνέχειας.

Οι εξισώσεις 3.27 και 3.28 είναι δύο διαφορετικές μορφές της εξίσωσης γραμμικής ορμής. Κάθε μία από αυτές μαζί με την εξίσωση της συνέχειας (3.6) σχηματίζουν ένα σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τη ροή. Ως προϋπόθεση για την εξαγωγή τους χρησιμοποιήθηκε η παραδοχή της συνέχειας των μεγεθών ως προς  $x$  και  $t$ . Επομένως οι εξισώσεις αυτές ισχύουν για ροή βαθμιαία μεταβαλλόμενη.

Έτσι στην περίπτωση βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα και οδηγούν σε ταυτόσημες λύσεις. Η εξίσωση όμως 3.27 έχει τη μορφή εξίσωσης που επιδέχεται και ασθενείς λύσεις. Οι λύσεις αυτές ικανοποιούν τους νόμους διατήρησης και στην περίπτωση ροής που εμφανίζει σε κάποια θέση περιορισμένη έκταση ασυνέχεια (ή αλλιώς απότομη μεταβολή) στην ελεύθερη επιφάνεια (π.χ. κινούμενο υδραυλικό άλμα)<sup>2,3</sup>.

Στην περίπτωση ροής με ασυνέχεια οι εξισώσεις 3.27 και 3.28 δεν είναι ισοδύναμες. Το σύστημα των εξισώσεων συνέχειας (3.6) και κίνησης (3.28) δεν επαρκεί για να προσδιορίσει λύσεις σε μια μικτή ροή με τμήμα περιορισμένης ασυνέχειας. Πράγματι, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, η εξίσωση 3.28 περιέχει όρους που έχουν τη μορφή φορτίων, τα οποία δε διατηρούνται κατ'ανάγκη κατά μήκος μιας ασυνέχειας (πχ. στην περίπτωση άλματος παρατηρούνται έντονες απώλειες λόγω στροβιλισμών). Αντίθετα η εξίσωση 3.27 περιλαμβάνει ποσότητες που αντιπροσωπεύουν όρους γραμμικής ορμής (ανά μονάδα μάζας), η οποία πάντα διατηρείται. Έτσι η εξίσωση κίνησης χρησιμοποιείται αποκλειστικά για βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή, ενώ η εξίσωση γραμμικής ορμής (3.27) έχει ευρύτερο πεδίο εφαρμογής<sup>3,4</sup>.

2 Μια ασυνέχεια αυτής της μορφής περιορίζεται σε μια πεπερασμένη ζώνη έντονου τυρβώδους, όπου η ταχύτητα και το βάθος μεταβάλλονται ταχύτατα και όπου παρατηρούνται σημαντικές απώλειες ενέργειας. Πέρα από τη ζώνη αυτή, τόσο ανάντη όσο και κατάντη της ασυνέχειας, η ροή επανέρχεται σε βαθμιαία μεταβαλλόμενη. Θα μπορούσαμε να φανταστούμε την ασυνέχεια σαν ένα (ασυνεχές) μέτωπο μεταξύ δύο τμημάτων βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής.

3 Η αναφορά στην περιοχή ισχύος της εξίσωσης γραμμικής ορμής 3.27 και στο θέμα της ισοδυναμίας ή μη των εξισώσεων 3.27 και 3.28, είναι σύντομη και περιλαμβάνεται μόνο για λόγους απλής ενημέρωσης. Για την εμπάθυνση στο θέμα και την απόδειξη των ισχυρισμών παραπέμπουμε στη σχετική βιβλιογραφία (Abbott, 1979; Cunge et al., 1980; Τερζίδης, 1982).

δ. Άλλες μορφές των εξισώσεων γραμμικής ορμής και κίνησης

(i) Η εξίσωση γραμμικής ορμής (3.27) με τη χρησιμοποίηση της σχέσης 3.23 παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{gA} + \bar{y} A \right) = g A (S_o - S_f) \quad (3.29)$$

Εισάγουμε τώρα μια νέα συνάρτηση :

$$M = \frac{Q^2}{gA} + A\bar{y} \quad (3.30)$$

Η M ονομάζεται συνάρτηση ορμής ή ειδική ορμή ή αλλιώς ειδική δύναμη.

Με τη χρησιμοποίηση της 3.30 η εξίσωση 3.29 παίρνει την εξής απλή μορφή :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} = g A (S_o - S_f)} \quad (3.31)$$

(ii) Την εξίσωση κίνησης (3.28) μπορούμε να τη γράψουμε ως :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} + y \right) = g (S_o - S_f) \quad (3.32)$$

Η παράσταση μέσα στην παρένθεση συμβολίζεται με E και ονομάζεται ειδική ενέργεια :

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (3.33)$$

Δηλαδή, για διορθωτικούς συντελεστές ίσους με τη μονάδα, η ειδική ενέργεια εκφράζει το άθροισμα του πιεζομετρικού και του κινητικού φορτίου σε μία διατομή, ή αλλιώς το ολικό φορτίο ως προς το χαμηλότερο σημείο της διατομής. Με τη χρησιμοποίηση της 3.33 η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial E}{\partial x} = g (S_o - S_f)} \quad (3.34)$$

Οι ειδικές συναρτήσεις M και E καθώς και η κλίση τριβής  $S_f$  εξετάζονται σε ιδιαίτερα κεφάλαια.

4 Ας σημειωθεί ότι σε περιπτώσεις έντονης ασυνέχειας και μεταβολών που δεν περιορίζονται σε μικρό μήκος, ενδέχεται να μην είναι δυνατή η χρησιμοποίηση διαφορικών εξισώσεων οποιασδήποτε μορφής. Αντί αυτών χρησιμοποιούνται εξισώσεις ολοκληρωματικής μορφής (βλ. σχετική βιβλιογραφία : Cunge et al., 1980; Τερζίδης, 1982).

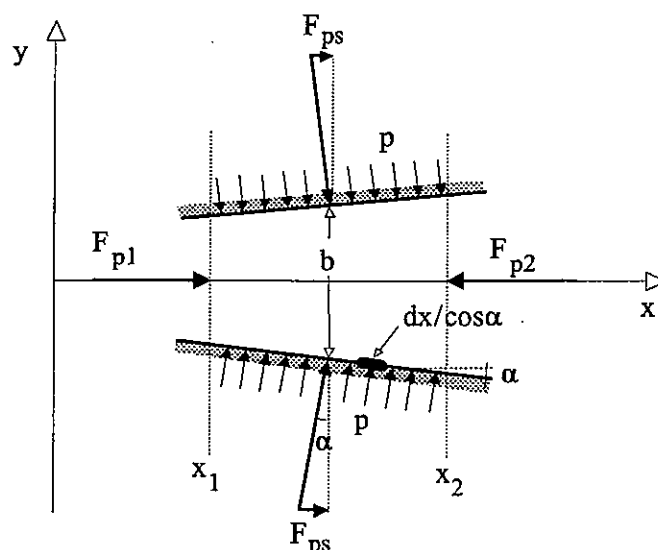
### 3.3.3 Εξισώσεις ροής για αγωγό μεταβλητού πλάτους

Στο προηγούμενο κεφάλαιο η εξαγωγή των εξισώσεων γραμμικής ορμής και κίνησης περιορίστηκε για λόγους απλότητας στην περίπτωση πρισματικού αγωγού. Έτσι τα μεγέθη της υγρής διατομής ήταν συναρτήσεις μόνο του βάθους  $y$ , το οποίο φυσικά μεταβάλλεται κατά μήκος του αγωγού.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός αγωγού, του οποίου τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά μεταβάλλονται ως συνάρτηση της θέσης  $x$  με την παραδοχή, ότι η μεταβολή αυτή γίνεται βαθμιαία και η κλίση των παρειών ως προς τον άξονα του αγωγού είναι μικρή. Αποκλείονται δηλαδή τμήματα απότομων μεταβολών στη διατομή.

Η διαδικασία εξαγωγής των εξισώσεων ροής διαφοροποιείται στην περίπτωση αυτή μόνο ως προς τον τρόπο υπολογισμού των εξωτερικών δυνάμεων  $F_x$  και ειδικότερα της συνισταμένης  $F_{px}$  των δυνάμεων, που αναπτύσσονται στην επιφάνεια  $S$  λόγω υδροστατικών πιέσεων. Στις δυνάμεις αυτές, πέρα από τις  $F_{p1}$  και  $F_{p2}$  που ασκούνται στις δύο διατομές, περιλαμβάνεται τώρα και η αντίδραση του στερεού τοιχώματος. Ας συμβολίσουμε με  $F_{ps}$  τη συνιστώσα της δύναμης αυτής κατά  $x$ . Έτσι, για βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή θα έχουμε :

$$F_{px} = F_{p1} - F_{p2} + F_{ps} = -\frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x + F_{ps} \quad (3.35)$$



Σχήμα 3.6 : Δυνάμεις λόγω υδροστατικών πιέσεων σε αγωγό μεταβλητού πλάτους (τομή σε ύψος  $\xi$ ).



Η δύναμη  $F_{ps}$  υπολογίζεται ως ολοκλήρωμα της συνιστώσας κατά τη διεύθυνση  $x$  της δύναμης που ασκείται σε στοιχειώδες τμήμα  $ds$  της παράπλευρης επιφάνειας  $ST$  λόγω υδροστατικής πίεσης :

$$F_{ps} = \iint_{ST} p \sin \alpha \, ds = \iint_{ST} p \sin \alpha \frac{dx}{\cos \alpha} \, d\xi = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \int_0^y (y - \xi) \tan \alpha \, dx \, d\xi$$

Αλλά η εφαπτομένη της  $\alpha$  σε κάποιο ύψος  $\xi$  είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής ως προς  $x$  του πλάτους  $b$  της διατομής στο συγκεκριμένο ύψος :  $\tan \alpha = \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_{\xi}$

Αν τώρα συμβολίσουμε με  $I$  το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^y (y - \xi) \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_{\xi} \, d\xi$$

τότε για μικρό  $\Delta x$  έχουμε :

$$F_{ps} = \rho g \int_{x_1}^{x_2} I \, dx = \rho g I \Delta x \quad (3.36)$$

Πέρα όμως από την εισαγωγή του όρου  $F_{ps}$ , η μεταβολή του πλάτους πρέπει να ληφθεί υπόψη και στον υπολογισμό της παραγώγου  $\partial F_p / \partial x$ . Η  $F_p$  εκφράζεται με τη σχέση 3.18.α, όπου :  $y = y(x)$ ,  $B = B(y(x), x)$ ,  $b = b(\xi, x)$ . Τότε με τη βοήθεια του θεωρήματος του Leibnitz :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y(x)} (y - \xi) b(\xi, x) \, d\xi \\ &= \rho g \int_0^{y(x)} \frac{\partial}{\partial x} [(y - \xi) b(\xi, x)] \, d\xi + \rho g \frac{\partial y}{\partial x} [(y - \xi) b(\xi, x)]_{\xi=y} \\ &= \rho g \int_0^{y(x)} \left[ \frac{\partial y}{\partial x} b(\xi, x) + (y - \xi) \left. \frac{\partial b}{\partial x} \right|_{\xi} \right] \, d\xi \\ &= \rho g \frac{\partial y}{\partial x} A + \rho g I \end{aligned} \quad (3.37)$$

Από το συνδυασμό των εξισώσεων 3.35, 3.36 και 3.37 προκύπτει τελικά :

$$\begin{aligned} F_{px} &= -\frac{\partial F_p}{\partial x} \Delta x + F_{ps} = \rho g \left[ -A \frac{\partial y}{\partial x} - I + I \right] \Delta x \\ &= -\rho g A \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x \end{aligned} \quad (3.38)$$

Η εξίσωση 3.38 είναι ακριβώς όμοια με την εξίσωση 3.24. Γίνεται δηλαδή φανερό ότι οι όροι που προστίθενται λόγω μεταβολής της διατομής αλληλοαναιρούνται και επομένως οι εξισώσεις συνέχειας (3.6), γραμμικής ορμής (3.27) και κίνησης (3.28) ισχύουν γενικότερα και για μη πρισματικούς αγωγούς.

### 3.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ

Η μόνιμη ροή μπορεί να θεωρηθεί ως υποπερίπτωση της γενικότερης μη μόνιμης ροής. Έτσι οι εξισώσεις που την περιγράφουν προκύπτουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις της μη μόνιμης ροής, εάν σ' αυτές μηδενιστούν οι όροι που εκφράζουν μεταβολή ως προς το χρόνο.

#### 3.4.1. Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

Για την περιγραφή της μόνιμης βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις συνέχειας (3.6) και κίνησης (3.28 ή 3.34), αν σ' αυτές τεθεί  $\partial/\partial t=0$  :

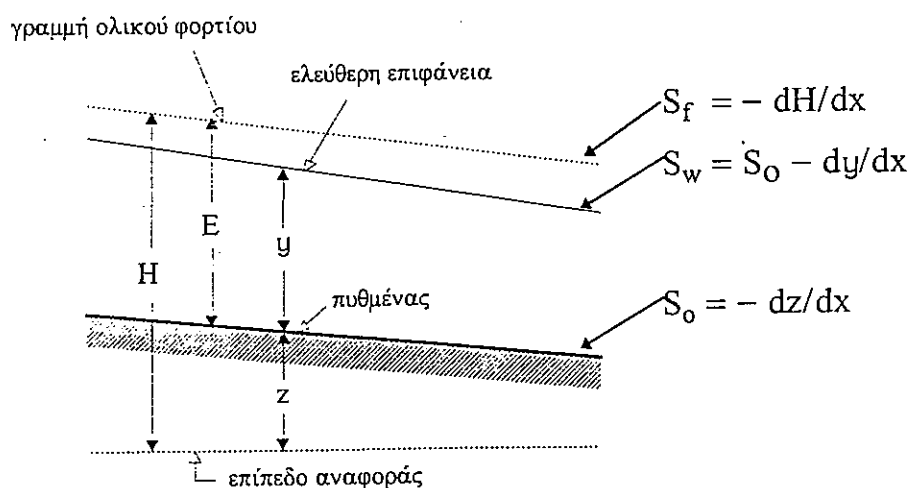
$$\text{Εξίσωση συνέχειας : } \frac{dQ}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{Q(x) = Q} = \text{σταθερό} \quad (3.39)$$

$$\text{Εξίσωση κίνησης : } \boxed{V \frac{dV}{dx} + g \frac{dy}{dx} = g(S_o - S_f)} \quad (3.40)$$

$$\text{ή : } \boxed{\frac{dE}{dx} = S_o - S_f} \quad (3.41)$$

όπου :  $E$  η συνάρτηση ειδικής ενέργειας (εξίσ. 3.33).

Αν τώρα στην 3.41 θέσουμε :  $S_o = -dz/dx$  , όπου  $z$  η απόσταση του πυθμένα από το επίπεδο αναφοράς (σχήμα 3.7) η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή :



Σχήμα 3.7 : Προσδιορισμός κλίσεων

$$\frac{d}{dx}(E+z) = -S_f \Rightarrow \boxed{\frac{dH}{dx} = -S_f} \quad (3.42)$$

όπου :  $H = z + E = z + y + \frac{V^2}{2g}$  είναι το ολικό φορτίο στη διατομή.

Υπενθυμίζεται, ότι  $S_f$  είναι ο συντελεστής ή κλίση τριβής (βλ. εξίσ. 3.16). Έτσι, η εξίσωση 3.42 δίνει μία ακόμη ερμηνεία για την κλίση  $S_f$  : σε ροές με σχεδόν ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας στη διατομή, η  $S_f$  είναι ίση με την κλίση της γραμμής ολικού φορτίου.

Η εξίσωση 3.42 χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας και του βάθους ροής κατά μήκος του αγωγού σε φυσικούς αγωγούς, αν γραφεί με διακριτοποιημένη μορφή (κεφ. 6.3.3).

Στην περίπτωση πρισματικού αγωγού η εξίσωση κίνησης 3.42 μπορεί να γραφεί και με άλλη μορφή. Πράγματι, σύμφωνα με τη σχέση 3.33, είναι :

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Για σταθερό μέγεθος παροχής η ειδική ενέργεια είναι συνάρτηση του βάθους ροής  $y$  :  $E=E(y)$ . Έτσι, με τη βοήθεια της σχέσης :  $B=dA/dy$  (εξίσ. 3.3) και του αριθμού Froude :  $Fr^2 = Q^2B/gA^3$  (κεφάλαιο 1.5), έχουμε :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dy} \frac{dy}{dx}$$

και :

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 1 - \frac{Q^2B}{gA^3} = 1 - Fr^2 \quad (3.43)$$

Από το συνδυασμό των εξισώσεων αυτών με την εξίσωση 3.40 προκύπτει :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}} \quad (3.44)$$

Η διαφορική εξίσωση 3.44 εκφράζει τη μεταβολή του βάθους ροής  $y$  κατά μήκος του αγωγού και ονομάζεται εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας. Χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής σε πρισματικούς αγωγούς (βλ. κεφ.6). Στην εξίσωση αυτή μπορεί να καταλήξει κανείς και μέσω της εξίσωσης γραμμικής ορμής (3.29 ή 3.31), αν την εφαρμόσει σε μόνιμο πρόβλημα ροής.

### 3.4.2 Ομοιόμορφη ροή

Σύμφωνα με τον ορισμό της (κεφ. 1.4) η ροή είναι ομοιόμορφη όταν το διάνυσμα της ταχύτητας είναι σταθερό κατά μέγεθος και διεύθυνση σε όλο το μήκος του αγωγού. Κατά συνέπεια ισχύει :  $dV/dx = 0$ . Η ομοιόμορφη ροή μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως υποπερίπτωση της γενικότερης ανομοιόμορφης ροής. Έτσι, ισχύει η εξίσωση συνέχειας (3.39) η οποία γράφεται :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= 0 \\ \text{Αλλά : } \frac{dQ}{dx} &= \frac{d(VA)}{dx} = V \frac{dA}{dx} + A \frac{dV}{dx} = V \frac{dA}{dx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dA}{dx} = 0$$

Συνεπώς για ομοιόμορφη ροή το εμβαδό  $A$  είναι σταθερό κατά μήκος του αγωγού. Αν ο αγωγός είναι πρισματικός, τότε  $A=A(y)$  και :

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} = 0$$

και η εξίσωση συνέχειας εκφυλίζεται σε :

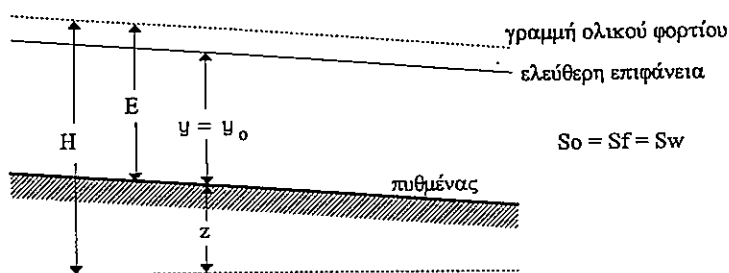
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{y=y_0} = \text{σταθερό} \quad (3.45)$$

Το  $y_0$  ονομάζεται ομοιόμορφο ή κανονικό βάθος ροής.

Από την εξίσωση κίνησης (3.40), αν σ'αυτήν θέσουμε :  $dV/dx=0$  και  $dy/dx=0$ , προκύπτει αμέσως ότι :

$$\boxed{S_o = S_f} \quad (3.46)$$

Δηλαδή στην ομοιόμορφη ροή η κλίση τριβής είναι ίση με την κλίση του πυθμένα και οι γραμμές ολικού φορτίου και ελεύθερης επιφάνειας είναι παράλληλες προς τον πυθμένα.

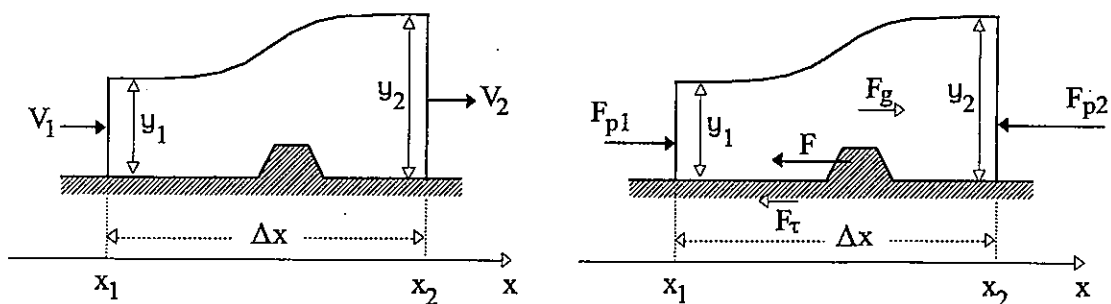


Σχήμα 3.8

### 3.4.3 Απότομα μεταβαλλόμενη ροή

Στις περισσότερες περιπτώσεις μόνιμης ροής σε ανοικτούς αγωγούς μεταξύ των τμημάτων βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής παρεμβάλλονται τμήματα ροής, που χαρακτηρίζονται από απότομες μεταβολές ή ακόμη και από ασυνέχεια στη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας και κατ' επέκταση στα υδραυλικά μεγέθη της ροής ( $V$ ,  $y$ ,  $A$ ). Τμήματα απότομα μεταβαλλόμενης ροής αποτελούν για παράδειγμα το υδραυλικό άλμα (δηλαδή η απότομη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας που συνοδεύεται από στροβιλισμούς και έντονη απώλεια ενέργειας), καθώς και τμήματα ροής στην περιοχή τεχνικών έργων, π.χ. θυρίδες (όπου η συνέχεια της ελεύθερης επιφάνειας διακόπτεται από την ύπαρξη της θυρίδας χωρίς όμως να παρατηρείται ταυτόχρονα σημαντική απώλεια ενέργειας), εκχειλιστές (όπου η ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζει μεγάλες καμπυλότητες), κ.ά.

Για την εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν ροές αυτού του είδους μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις συνέχειας και γραμμικής ορμής στην αρχική τους μορφή (εξισώσεις 3.1 και 3.7), αν σ' αυτές διαγραφούν οι όροι που εκφράζουν μεταβολή ως προς το χρόνο. Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται σε έναν υλικό όγκο όπως αυτός ορίστηκε στο κεφ. 3.1. Στην περίπτωση της βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής η θέση του υλικού όγκου κατά μήκος της ροής που εξετάζεται είναι τυχαία και η απόσταση  $\Delta x$  μεταξύ των διατομών 1 και 2 είναι σχετικά μικρή. Όταν εξετάζεται τμήμα απότομα μεταβαλλόμενης ροής, ο υλικός όγκος ορίζεται κατά τρόπο που να περικλείει το τμήμα αυτό της ροής. Οι διατομές 1 και 2 που καθορίζουν τα όρια του υλικού όγκου τοποθετούνται έξω από την περιοχή έντονων μεταβολών και επομένως ισχύει σ' αυτές η παραδοχή της υδροστατικής κατανομής της πίεσης.



Σχήμα 3.9

Αναφερόμενοι λοιπόν σε έναν όγκο αυτής της μορφής μπορούμε να προχωρήσουμε στη μορφοποίηση των εξισώσεων που περιγράφουν τμήματα μόνιμης απότομα μεταβαλλόμενης ροής.

Στην εξίσωση συνέχειας 3.1 διαγράφουμε τον τρίτο όρο του αθροίσματος, που είναι ίσος με το μηδέν, καθώς και τον τέταρτο όρο, που παριστάνει το ρυθμό μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας ως προς το χρόνο, και έχουμε :

$$\iint_{A_1} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \iint_{A_2} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = 0$$

όπου:  $A_1, A_2$  είναι τα εμβαδά των διατομών στις θέσεις  $x_1$  και  $x_2$  αντίστοιχα.

Η εξίσωση αυτή με τη βοήθεια της σχέσης 3.2 μετατρέπεται σε :

$$- Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\text{ή : } \boxed{Q_1 = Q_2 = Q} \quad (\text{σταθερό}) \quad (3.47)$$

που αποτελεί την εξίσωση συνέχειας για μόνιμη απότομα μεταβαλλόμενη ροή.

Όμοια η εξίσωση γραμμικής ορμής 3.7 σε συνδυασμό με τις 3.8 και 3.9 και ταυτόχρονη απαλοιφή των όρων που παριστάνουν μεταβολή ως προς το χρόνο, παίρνει τη μορφή :

$$(QV)_2 - (QV)_1 = \frac{F_x}{\rho} \quad (3.48)$$

ή σε συνδυασμό με την 3.47 :

$$\boxed{\rho Q(V_2 - V_1) = F_x} \quad (3.49)$$

όπου :  $F_x$  η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στον όγκο του σχήματος (3.9) κατά τη διεύθυνση  $x$ . Οι δυνάμεις αυτές (βλ. παρ.3.3.2.β) είναι : η συνιστώσα  $F_g$  της δύναμης βαρύτητας κατά  $x$ , η αντίσταση τριβής  $F_\tau$  και η συνισταμένη  $F_{px}$  των δυνάμεων που αναπτύσσονται λόγω υδροστατικής πίεσης στις διατομές 1 και 2 ( $F_{px} = F_{p1} - F_{p2}$ ). Σ' αυτές πρέπει να προστεθεί, εφόσον υπάρχει, η εξωτερική δύναμη  $F$  που ασκείται στο ρευστό από κάποιο τεχνικό έργο (π.χ. θυρίδα, αναβαθμός, εκχειλιστής κ.ά.).

Επειδή αναφερόμαστε σε τμήμα μόνιμης απότομα μεταβαλλόμενης ροής, για το οποίο η θέση του υλικού όγκου είναι δεδομένη και σταθερή ως προς το χρόνο, το μήκος  $\Delta x$  είναι σχετικά μικρό και με την προϋπόθεση ότι η κλίση

του αγωγού είναι μικρή, η επίδραση των τριβών και της βαρύτητας θεωρείται αμελητέα. Μπορεί λοιπόν να τεθεί :

$$F_g \approx 0 \quad \text{και} \quad F_r \approx 0$$

Οι υδροστατικές δυνάμεις  $F_{p1}$  και  $F_{p2}$  υπολογίζονται με την εξίσωση 3.18.β. Έτσι :

$$F_x = F_{p1} - F_{p2} + F = \rho g \left[ (\bar{y}A)_1 - (\bar{y}A)_2 \right] + F \quad (3.50)$$

Η δύναμη  $F$  στην εξίσωση αυτή είναι θετική όταν έχει τη φορά της ροής και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση.

Από το συνδυασμό των εξισώσεων 3.49 και 3.50 προκύπτουν οι ακόλουθες μορφές της εξίσωσης γραμμικής ορμής :

$$\frac{Q}{g} (V_2 - V_1) = \bar{y}_1 A_1 - \bar{y}_2 A_2 + \frac{F}{\rho g} \quad (3.51.α)$$

$$\text{ή :} \quad \left[ \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2 A_2 \right] = \left[ \frac{Q^2}{gA_1} + \bar{y}_1 A_1 \right] + \frac{F}{\rho g} \quad (3.51.β)$$

$$\text{ή :} \quad \boxed{M_2 - M_1 = \frac{F}{\rho g}} \quad (3.51.γ)$$

όπου :  $M = \frac{Q^2}{gA} + A \bar{y}$  η συνάρτηση ορμής (σχέση 3.30).

Είναι προφανές ότι αν δεν υπάρχει κάποια κατασκευή που να ασκεί εξωτερικά δύναμη  $F$  στη ροή, η εξίσωση 3.51.γ γίνεται :

$$\boxed{M_2 - M_1 = 0} \quad (3.52)$$

**Παρατήρηση :** Τόσο η εξίσωση συνέχειας 3.47, όσο και η εξίσωση γραμμικής ορμής 3.52, μπορούν να θεωρηθούν ως διακριτοποιημένες μορφές των αντίστοιχων εξισώσεων για μόνιμη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή. Αυτό είναι εμφανές για την εξίσωση συνέχειας 3.47 αν συγκριθεί με την 3.39. Η εξίσωση γραμμικής ορμής 3.52 θα πρέπει να συγκριθεί με την εξίσωση :  $dM/dx=0$ , που προκύπτει από την 3.31 αν διαγραφεί ο όρος  $\partial Q/\partial t$  (μόνιμο φαινόμενο) και αν ληφθούν υπόψη οι επιπλέον παραδοχές που έγιναν στο κεφάλαιο αυτό, δηλαδή αμελητέες δυνάμεις βαρύτητας και τριβής (δεξιό μέλος της εξίσωσης).



### 3.4.4 Γενικές παρατηρήσεις

Με βάση την ανάπτυξη που προηγήθηκε μπορούμε να καταλήξουμε στα εξής :

- (i) Στη μόνιμη ροή χωρίς πλευρική εισροή/εκροή το μέγεθος της παροχής είναι σταθερό κατά μήκος του αγωγού (εξισώσεις συνέχειας 3.39, 3.47).
- (ii) Στη βαθμιαία μεταβαλλόμενη και στην ομοιόμορφη ροή κυρίαρχο ρόλο παίζουν οι δυνάμεις βαρύτητας και τριβής. Για τον υπολογισμό της θέσης της ελεύθερης επιφάνειας στη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή χρησιμοποιείται συνήθως η εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας 3.44, αν ο αγωγός είναι πρισματικός ή κατά τμήματα πρισματικός. Αλλιώς, γίνεται χρήση των εξισώσεων κίνησης 3.41 ή 3.42. Στους υπολογισμούς ομοιόμορφης ροής χρησιμοποιείται η εξίσωση 3.46.
- (iii) Στην απότομα μεταβαλλόμενη ροή, επειδή το βάθος διαφοροποιείται σημαντικά από το ένα άκρο του τμήματος ροής στο άλλο, κυριαρχεί η συνισταμένη των υδροστατικών δυνάμεων που ασκούνται στις δύο διατομές, καθώς και οι τυχόν εξωτερικές δυνάμεις, που προέρχονται από κάποια τεχνητή παρεμβολή στη ροή (παρουσία τεχνικού έργου). Στους σχετικούς υπολογισμούς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση ορμής 3.51 (ή 3.52).

Στις εξισώσεις που περιγράφουν τη βαθμιαία και την απότομα μεταβαλλόμενη μόνιμη ροή περιλαμβάνονται ορισμένα μεγέθη, όπως ο αριθμός Froude (εξίσωση 3.44), η ειδική ενέργεια  $E$  (σχέση 3.41), η ειδική ορμή  $M$  (σχέση 3.51 ή 3.50) και η κλίση τριβής  $S_f$  (3.41, 3.44 και 3.46). Για σταθερό μέγεθος παροχής τα μεγέθη αυτά είναι συναρτήσεις του βάθους ροής  $y$  και μπορούμε να τα χαρακτηρίσουμε ως ειδικές συναρτήσεις. Κάθε μία από τις συναρτήσεις αυτές έχει ειδική σημασία και συνδέεται με την επίλυση επιμέρους προβλημάτων ροής. Στις παραγράφους που ακολουθούν, εξετάζονται κάθε μία από τις συναρτήσεις αυτές χωριστά.

## 4. ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### 4.1 ΑΡΙΘΜΟΣ FROUDE - ΚΡΙΣΙΜΟ ΒΑΘΟΣ

Ο αριθμός Froude, όπως είναι ήδη γνωστό, είναι ένα αδιάστατο μέγεθος και εκφράζεται από τη σχέση :

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3} \quad (4.1)$$

Για δεδομένο μέγεθος παροχής (και γεωμετρία διατομής) ο αριθμός αυτός είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του βάθους  $y$ .

Το μέγεθος του αριθμού Froude σε σύγκριση με τη μονάδα χαρακτηρίζει το είδος ροής (βλ. κεφ. 1.5). Αν  $Fr = 1$ , τότε η ροή είναι **κρίσιμη** και το αντίστοιχο βάθος ροής  $y_c$  ονομάζεται κρίσιμο βάθος. Αν είναι  $Fr < 1$ , τότε η ροή είναι **υποκρίσιμη** και αν  $Fr > 1$ , τότε η ροή είναι **υπερκρίσιμη**.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το κρίσιμο βάθος ικανοποιεί τη σχέση :

$$Fr(y_c) = 1 \quad (4.2)$$

και ακόμη ότι :

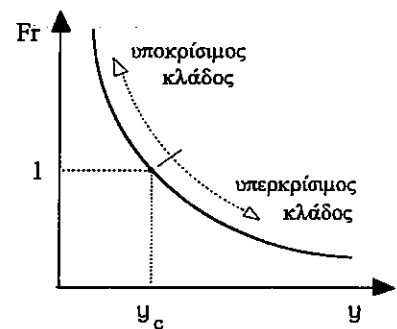
$$\left. \begin{aligned} Fr(y) < 1 &\Leftrightarrow y > y_c : y = \text{υποκρίσιμο βάθος ροής} \\ Fr(y) > 1 &\Leftrightarrow y < y_c : y = \text{υπερκρίσιμο βάθος ροής} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

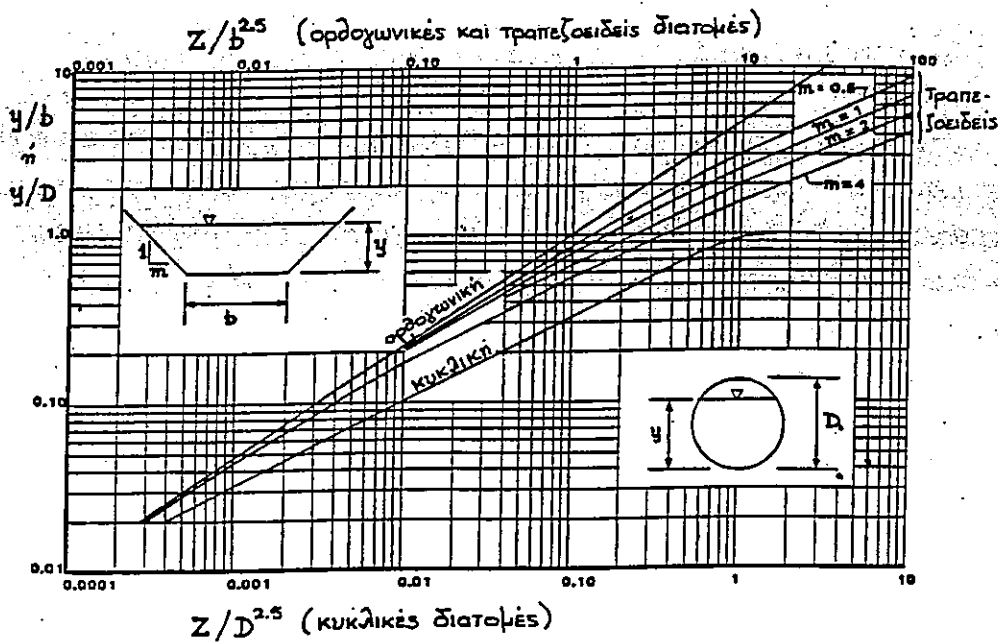
Ο αριθμός Froude μπορεί να γραφεί και με την ακόλουθη μορφή :

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{g Z^2} \quad (4.4)$$

$$\text{όπου : } Z = \sqrt{A^3/B} = Z(y) \quad (4.5)$$

Η ποσότητα  $Z$  ονομάζεται **συντελεστής διατομής** για κρίσιμη ροή και είναι γενικά μια αύξουσα συνάρτηση του βάθους, όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί. Στο σχήμα αυτό έχουν σχεδιαστεί καμπύλες της συνάρτησης  $Z(y)$  σε αδιάστατη μορφή για τραπεζοειδείς και κυκλικούς αγωγούς.





#### 4.1.1 Επίλυση προβλημάτων κρίσιμης ροής

Από το συνδυασμό των εξισώσεων 4.1 και 4.5 με την 4.2 προκύπτει :

$$\frac{Q^2 B_c}{g A_c^3} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{Q}{Z_c \sqrt{g}} = 1 \quad (4.6)$$

όπου :  $A_c = A(y_c)$  ,  $B_c = B(y_c)$  και  $Z_c = Z(y_c)$

Οι εξισώσεις αυτές χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων κρίσιμης ροής. Τέτοιου είδους προβλήματα είναι :

– Ο υπολογισμός της παροχής  $Q$ , όταν είναι γνωστή η γεωμετρία της διατομής και το κρίσιμο βάθος  $y_c$  (π.χ. ειδικές κατασκευές δημιουργίας κρίσιμων συνθηκών ροής για μέτρηση παροχής). Ο υπολογισμός είναι απλός αν η 4.6 γραφεί με τη μορφή :

$$Q = \sqrt{g \frac{A_c^3}{B_c}} \quad \text{ή} \quad Q = \sqrt{g} Z_c$$

– Ο υπολογισμός του κρίσιμου βάθους  $y_c$  όταν είναι γνωστή η παροχή και η γεωμετρία της διατομής (βλ. επόμενο κεφ. 4.1.2). Υπολογισμοί αυτού του είδους είναι απαραίτητοι στην πλειονότητα των προβλημάτων μόνιμης ροής σε ανοικτούς αγωγούς.

– Ο προσδιορισμός κάποιας διάστασης της διατομής σε προβλήματα διαστασιολόγησης (σπανιότερη περίπτωση).

#### 4.1.2 Υπολογισμός κρίσιμου βάθους

Είναι φανερό από τα προηγούμενα, ότι το κρίσιμο βάθος εξαρτάται αποκλειστικά από το μέγεθος της παροχής και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής. Ο υπολογισμός του γίνεται γενικά με τη βοήθεια των σχέσεων 4.6 αν αυτές γραφούν με τη μορφή :

$$Z_c^2 = \frac{A_c^3}{B_c} = \frac{Q^2}{g} \quad (4.7)$$

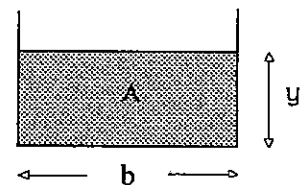
Η εξίσωση αυτή είναι μια εξίσωση της μορφής  $f(y_c) = a$ , όπου  $a$  σταθερά. Προφανώς η μορφή της συνάρτησης  $f(y)$  εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής. Έτσι για κάποιες διατομές δίνει απλές κλειστού τύπου λύσεις. Στις περισσότερες όμως περιπτώσεις, η εξίσωση που προκύπτει μετά την αντικατάσταση των  $A(y)$  και  $B(y)$  στην 4.7, είναι μη γραμμική ως προς  $y$  και λύνεται αριθμητικά με κάποια επαναληπτική μέθοδο. Στη συνέχεια αναπτύσσονται μέθοδοι υπολογισμού του  $y_c$  για τα συνηθέστερα είδη διατομών.

##### α) Ορθογωνική διατομή

$$A(y) = by$$

$$B(y) = b$$

$$Q = bq$$



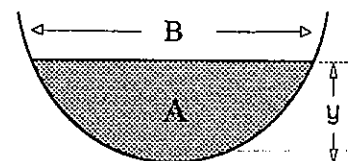
Μετά την αντικατάσταση των μεγεθών αυτών στην εξίσωση 4.7 προκύπτει :

$$Z_c^2 = \frac{(by_c)^3}{b} = \frac{Q^2}{g} \Rightarrow y_c = \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (4.8)$$

##### β) Διατομή εκθετικής μορφής

$$A(y) = my^k$$

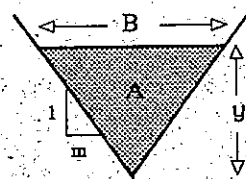
$$B(y) = \frac{dA}{dy} = km y^{k-1}$$



και μετά την αντικατάσταση στην 4.7 :

$$Z_c^2 = \frac{(my_c^k)^3}{kmy_c^{k-1}} = \frac{Q^2}{g} \Rightarrow y_c = \left( \frac{kQ^2}{gm^2} \right)^{1/(2k+1)} \quad (4.9)$$

Αν  $k=2$  τότε η διατομή είναι τριγωνικής μορφής και το  $m$  παριστάνει την κλίση πρανών.



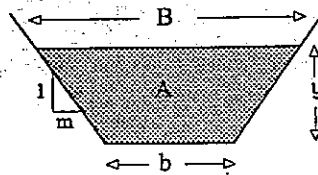
γ) Τραπεζοειδής διατομή

$$A(y) = by + my^2$$

$$B(y) = b + 2my$$

και μετα την αντικατάσταση στην 4.7 :

$$Z_c^2 = \frac{(b + my_c)^3 y_c^3}{b + 2my_c} = \frac{Q^2}{g} \quad (4.10)$$



Η εξίσωση 4.10 είναι μια μη γραμμική εξίσωση ως προς  $y_c$ . Η επίλυσή της μπορεί να γίνει αριθμητικά με διάφορες μεθόδους :

i) Αν τεθεί :  $\omega = my_c/b$  και γίνουν οι απλοποιήσεις, η 4.10 παίρνει την ακόλουθη αδιάστατη μορφή :

$$\frac{\omega^3 (1 + \omega)^3}{1 + 2\omega} = \frac{Q^2 m^3}{g b^5} = a \quad (a = \text{σταθερά}) \quad (4.11)$$

Μετά από πράξεις το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των ριζών του πολυωνύμου :

$$\omega^6 + 3\omega^5 + 3\omega^4 + \omega^3 - 2a\omega - a = 0 \quad (4.12)$$

και μπορούν να εφαρμοστούν γνωστές μέθοδοι αριθμητικής ανάλυσης (βλ. Σημειώσεις αριθμητικής ανάλυσης με χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, Ε.Σιδηρόπουλου, Χ.Φωτιάδη, 1993). Στο παράρτημα Π4 παρατίθεται η λίστα ενός προγράμματος H/Y σε γλώσσα Quick Basic, με το οποίο υπολογίζεται η πραγματική ρίζα του πολυωνύμου με τη μέθοδο Newton-Raphson για έναν τραπεζοειδή αγωγό με γεωμετρικά στοιχεία :  $m=1$  και  $b=1.5$  m, και παροχή :  $Q=12.2$  m<sup>3</sup>/s.

ii) Μια άλλη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης της εξίσ. 4.10 είναι η μέθοδος της συναρτησιακής επανάληψης (βλ. Σημειώσεις αριθμητικής ανάλυσης με χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών, Σιδηρόπουλου, Φωτιάδη, 1993). Η εξίσωση 4.10 μπορεί στην περίπτωση αυτή να γραφεί με τη μορφή :

$$y_c = f(y_c), \quad \text{όπου : } f(y_c) = \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{1/3} \frac{(b + 2my_c)^{1/3}}{b + my_c} \quad (4.13)$$

και να λυθεί με διαδοχικές επαναλήψεις.

iii) Τέλος για τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της τιμής του  $y_c$  δίνεται ο ακόλουθος τύπος :

$$y_c = \left[ \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{-1/3p} + \left( \frac{2Q^2}{gm^2} \right)^{-1/5p} \right]^{-p}, \quad \text{όπου : } p = 0.476 \quad (4.14)$$

Η σχέση αυτή οφείλεται στον P. Swamee (1993) και για την εξαγωγή της ακολουθήθηκε μία διαδικασία ελαχιστοποίησης σφαλμάτων για τον προσδιορισμό της τιμής του εκθέτη  $p$ . Μετά την αντικατάσταση της τιμής του  $p$  η 4.14 γίνεται :

$$y_c = \left[ \left( \frac{gb^2}{Q^2} \right)^{0.7} + \left( \frac{gm^2}{2Q^2} \right)^{0.42} \right]^{-0.476}$$

Από τον έλεγχο ακριβείας του τύπου αυτού προκύπτει ότι το μέγιστο σχετικό σφάλμα στον προσδιορισμό του  $y_c$  είναι μικρότερο του  $\pm 2\%$ .

#### δ) Κυκλική διατομή

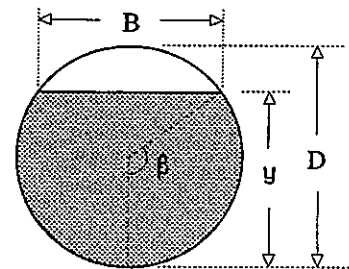
$$B = D \sin \beta$$

$$A = (\beta - \sin \beta \cos \beta) \cdot D^2/4$$

Μετά την αντικατάσταση των μεγεθών αυτών στην εξίσωση 4.7 προκύπτει :

$$\frac{(\beta_c - \sin \beta_c \cos \beta_c)^3}{64 \sin \beta_c} = \frac{Q^2}{gD^5} = a \quad (4.15)$$

$$\text{και : } y_c = (1 - \cos \beta_c) \cdot D/2 \quad (4.16)$$



Η εξίσωση (4.15) μπορεί να λυθεί αριθμητικά ως προς  $\beta_c$  και στη συνέχεια να υπολογιστεί το  $y_c$  από τη σχέση 4.16. Στο παράρτημα Π4 παρατίθεται η λίστα ενός προγράμματος H/Y σε γλώσσα Quick Basic, το οποίο υπολογίζει τη ρίζα  $\beta_c$  με τη μέθοδο της διχοτόμησης για έναν κυκλικό αγωγό με  $a = 0.2$ .

Μια κατά προσέγγιση τιμή του  $y_c$  μπορεί να υπολογιστεί με τον τύπο :

$$\frac{y_c}{D} = \left( 0.77 a^{-3} + 1 \right)^{-0.085} \quad (4.17)$$

Το μέγιστο σφάλμα στην τιμή του  $y_c$ , όταν ο υπολογισμός γίνει με τον τύπο 4.17, είναι μικρότερο από  $\pm 1.25\%$  (Swamee, 1993).

## 4.2 ΕΙΔΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Η ειδική ενέργεια ορίζεται ως το άθροισμα του φορτίου πίεσης ( $y$ ) και του κινητικού φορτίου σε μία διατομή (εξίσ. 3.33, κεφ.3.3.2.δ). Παριστάνει δηλαδή το ολικό φορτίο με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα της διατομής :

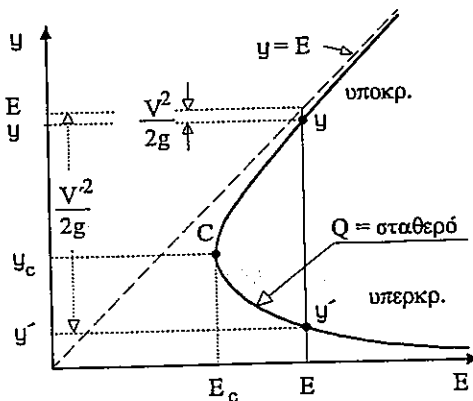
$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (4.18)$$

### 4.2.1. Μελέτη της συνάρτησης $E(y)$

α) Για δεδομένο μέγεθος παροχής η ειδική ενέργεια είναι μια συνάρτηση του βάθους :  $E = E(y)$  και αντιπροσωπεύεται από την καμπύλη του σχήματος.

Παρατηρήσεις :

- i. Η καμπύλη εμφανίζει δύο ασυμπτώτους : τις γραμμές  $y = 0$  και  $y = E$ .
- ii. Η ειδική ενέργεια εμφανίζει ένα ελάχιστο,  $E_{\min}$ , που με τη βοήθεια της σχέσης 3.43, υπολογίζεται ως εξής :



$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dy} &= 1 - Fr^2 \\ \frac{dE}{dy} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Fr = 1$$

Επομένως :  $E_{\min} = E(y_c) = E_c$ . Δηλαδή για κάθε μέγεθος παροχής η ελάχιστη δυνατή τιμή της ειδικής ενέργειας εξασφαλίζεται όταν το βάθος ροής είναι κρίσιμο. Αυτό αποτελεί ένα χαρακτηριστικό του κρίσιμου βάθους.

Από το συνδυασμό των εξισώσεων 4.6 και 4.18 προκύπτει η ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό της τιμής του  $E_c$  :

$$E_c = y_c + \frac{A_c}{2B_c} \quad (4.19)$$

- iii. Σε κάθε  $E > E_c$  αντιστοιχούν δύο βάθη  $y$  και  $y'$  που ονομάζονται **εναλλακτικά βάθη** ροής. Τα δύο αυτά βάθη είναι οι δύο θετικές ρίζες της εξίσωσης  $E(y) = E$  και είναι :  $y > y_c$  (υποκρίσιμη ρίζα) και  $y' < y_c$  (υπερκρίσιμη ρίζα). Δηλαδή, για οποιοδήποτε μέγεθος παροχής  $Q$  και

ειδικής ενέργειας (με τον περιορισμό :  $E > E_{\min}$ ) η ροή σε έναν ανοικτό αγωγό έχει τη δυνατότητα να πραγματοποιείται με βάθος ροής είτε υποκρίσιμο είτε υπερκρίσιμο.

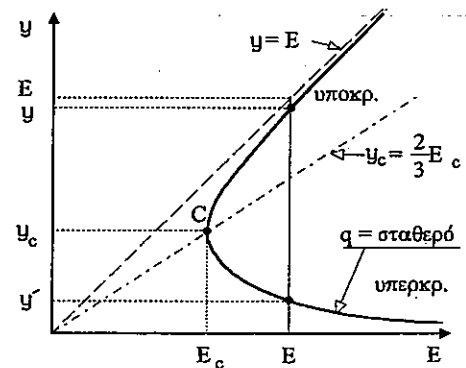
Όσα προαναφέρθηκαν ισχύουν προφανώς για οποιαδήποτε μορφής διατομή. Ειδικά όταν πρόκειται για αγωγό ορθογωνικής διατομής η εξίσωση 4.18, μετά από τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, γίνεται :

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (4.20)$$

και η 4.19 γίνεται :

$$E_c = \frac{3}{2} y_c \quad (4.21)$$

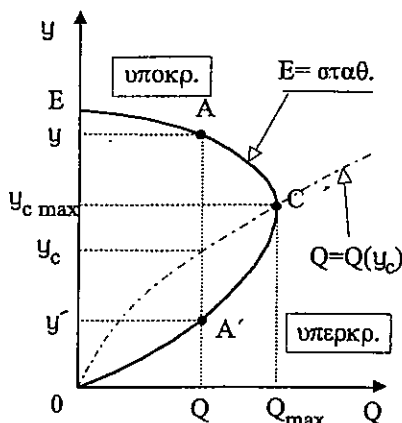
Δηλαδή, όταν η διατομή είναι ορθογωνική, ο λόγος  $y_c/E_c$  είναι ένας σταθερός αριθμός, και το σημείο C στην καμπύλη βρίσκεται πάντα σε μια ευθεία γραμμή με κλίση ίση προς 2/3 ως προς τον άξονα των τετμημένων.



β) Για δεδομένο μέγεθος ειδικής ενέργειας E η εξίσωση 4.18 είναι μια σχέση ανάμεσα στην παροχή Q και στο βάθος y. Μπορεί να γραφεί με τη μορφή :

$$Q = A\sqrt{2g(E - y)} \quad (4.22)$$

και αντιπροσωπεύεται από την καμπύλη y - Q του παρακάτω σχήματος.



Παρατηρήσεις :

- i.  $Q = 0 \Leftrightarrow y = 0$  και  $y = E$
- ii. Η παροχή εμφανίζει μέγιστη τιμή :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dy} &= -\frac{gA^2}{Q} (1 - Fr^2) \\ \frac{dQ}{dy} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Fr = 1$$

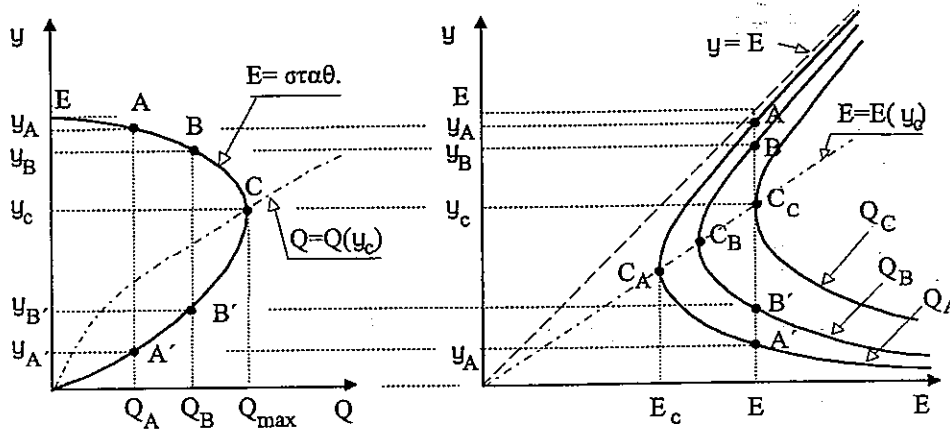
Επομένως :  $Q_{\max} = Q(y_c)$ . Δηλαδή, για κάθε τιμή της ειδικής ενέργειας η παροχή μεγιστοποιείται όταν το βάθος



ροής είναι κρίσιμο. Αυτό αποτελεί ένα ακόμη χαρακτηριστικό του κρίσιμου βάθους.

- iii. Σε κάθε μέγεθος  $Q < Q_{max}$  αντιστοιχούν τα δύο εναλλακτικά βάθη ροής  $y$  και  $y'$ , που είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης 4.22 ή 4.18 για δεδομένη τιμή της  $E$ .

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η συσχέτιση της καμπύλης  $Q - y$  για σταθερό  $E$  και της οικογένειας καμπυλών  $E - y$  για διάφορες τιμές της παροχής  $Q$ .



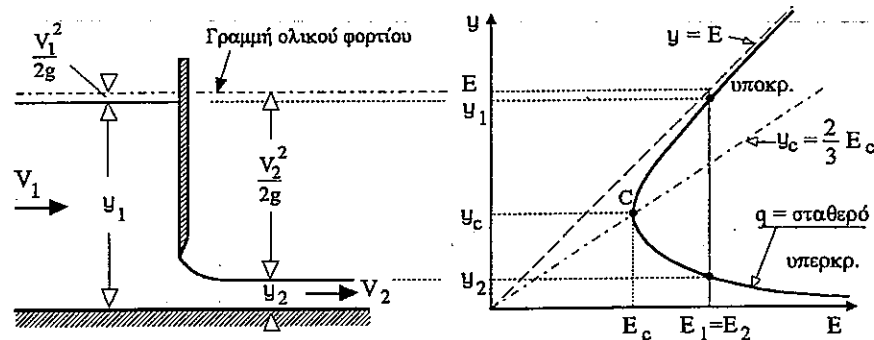
#### 4.2.2. Η έννοια της ειδικής ενέργειας σε ειδικά προβλήματα ροής

Τα όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά ειδικά προβλήματα που αφορούν μεταβατικά τμήματα ροής. Η παρεμβολή μιας θυρίδας στη ροή, ενός αναβαθμού ή καταβαθμού (ανύψωση ή πτώση της στάθμης του πυθμένα), μιας στένωσης ή διεύρυνσης της διατομής (μεταβολή στις διαστάσεις της διατομής), καθώς και η βαθμιαία προσαρμογή από ένα είδος διατομής σε άλλο, αποτελούν μερικά παραδείγματα τέτοιων μεταβατικών τμημάτων. Επειδή τα τμήματα αυτά είναι σχετικά μικρού μήκους είναι δυνατό να δεχτούμε ότι οι απώλειες ενέργειας σ' αυτά είναι αμελητέες ( $\Delta H = 0$ ) ή ότι μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή τοπικών απωλειών ως ποσοστό του κινητικού φορτίου ( $k \cdot V^2/2g$ , όπου  $k$  σταθερά). Έτσι, αν συμβολίσουμε με 1 και 2 τις διατομές που βρίσκονται στην αρχή και στο τέλος του τοπικού μεταβατικού τμήματος, μπορούμε να γράψουμε μια σχέση ανάμεσα στην  $E_1$  και  $E_2$ , και επομένως μια σχέση που να συνδέει τα βάθη ροής και άλλα υδραυλικά μεγέθη των δύο διατομών.

## 1<sup>η</sup> Εφαρμογή : Θυρίδα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα :

Μία θυρίδα παρεμβάλλεται στη ροή ορθογωνικού αγωγού πλάτους  $b$  που μεταφέρει παροχή  $Q$ . Το βάθος ροής κατά την έξοδο του από τη θυρίδα είναι  $y_2$  και προσδιορίζεται από το άνοιγμα της θυρίδας. Οι απώλειες ενέργειας στην περιοχή της θυρίδας θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογιστεί το βάθος ροής  $y_1$ .



Από την εξίσωση της συνέχειας για μόνιμη ροή προκύπτει :

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

Το πλάτος του αγωγού δε μεταβάλλεται κατά μήκος, άρα :

$$q_1 = q_2 = q = Q/b$$

Αφού οι απώλειες ενέργειας μεταξύ των διατομών 1 και 2 είναι αμελητέες :

$$\Delta H = 0 \Rightarrow H_1 = H_2 \Rightarrow E_1 = E_2 = E \quad (4.23)$$

Η τιμή της  $E_2$  υπολογίζεται από την εξίσ. 4.20, αν σ'αυτήν τεθεί :  $y = y_2$  και  $q = Q/b$  :

$$E_2 = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} = E \quad (4.24.α)$$

Αν τώρα στην εξίσ. 4.20 τεθεί  $y = y_1$  και  $E = E_1 = E_2$  προκύπτει :

$$E_1 = E = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} \quad (4.24.β)$$

της οποίας το μόνο άγνωστο μέγεθος είναι το  $y_1$ . Η εξίσωση αυτή είναι μια τριτοβάθμια εξίσωση ως προς  $y_1$ . Οι δύο θετικές ρίζες της είναι η ζητούμενη  $y_1$  και η γνωστή  $y_2$ . Προφανώς :  $y_2 < y_c$ , ενώ η τιμή του  $y_1$  πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα :  $y_c < y_1 < E$ , όπου :  $y_c = \left( q^2/g \right)^{1/3}$ .

**Αριθμητικό παράδειγμα.** Στο προηγούμενο παράδειγμα παρεμβολής θυρίδας στη ροή ορθογωνικού αγωγού δίνονται :  $q = 2\text{m}^2/\text{s}$  και  $y_2 = 0.3\text{m}$ . Να υπολογιστεί το  $y_1$ .

Λύση

Από την εξίσ. (4.24.α) προκύπτει :

$$E = E_2 = 0.3 + \frac{2^2}{2 \cdot 9.81 \cdot 0.3^2} = 2.565\text{m}$$

Έτσι η εξίσ. 4.24.β γίνεται :

$$E_1 = E = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} \Rightarrow y_1 + \frac{2^2}{2 \cdot 9.81 \cdot y_1^2} = 2.565$$

και ζητείται η υποκρίσιμη ρίζα της. Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει με κάποια από τις γνωστές αριθμητικές μεθόδους. Η λύση θα πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα τιμών  $y_c < y_1 < E_1$ , όπου :

$$y_c = \left( q^2 / g \right)^{1/3} = 0.74\text{m}$$

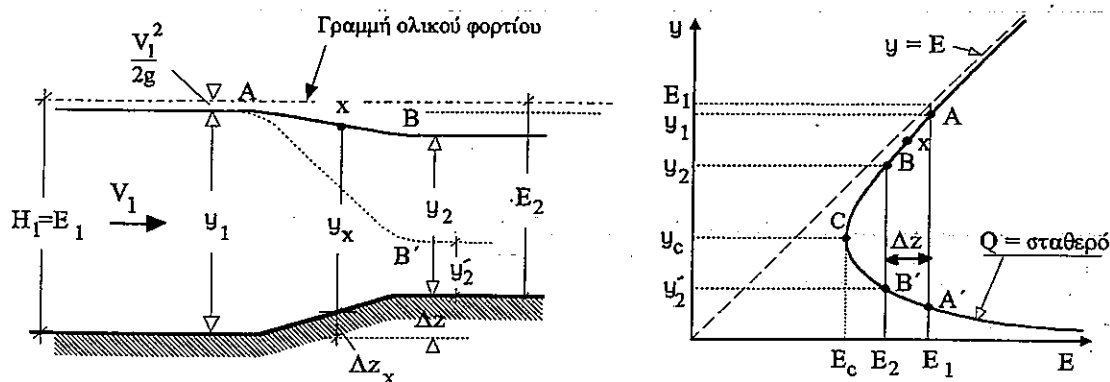
Από την επίλυση προκύπτει :  $y_1 = 2.533\text{m} > y_c$ . Προφανώς η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι ίση με την  $y_2 = 0.3\text{m}$ .

Συμπληρωματικά μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες και τα κινητικά φορτία στις δύο διατομές :  $V_1 = 0.79\text{m/s}$ ,  $V_1^2/2g = E_1 - y_1 = 0.032\text{m}$

$$V_2 = 6.67\text{m/s}, V_2^2/2g = E_2 - y_2 = 2.265\text{m}$$

## 2<sup>η</sup> Εφαρμογή : Αναβαθμός.

Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια θέση κατά μήκος ενός ανοικτού αγωγού κατασκευάζεται αναβαθμός ύψους  $\Delta z$ . Η ανύψωση του πυθμένα γίνεται ομαλά, έτσι που να μην προκαλούνται απώλειες ενέργειας. Ο αγωγός μεταφέρει παροχή  $Q$  με υποκρίσιμο βάθος ροής. Έστω  $y_1$  το βάθος ανάντη του αναβαθμού. Για την πρόβλεψη του βάθους  $y_2$  κατόντη μπορεί να χρησιμοποιηθεί η καμπύλη ειδικής ενέργειας.



Για  $y = y_1$  υπολογίζεται το εμβαδό  $A_1$  και η ειδική ενέργεια  $E_1$  :

$$E = E_1 = y_1 + \frac{Q^2}{2gA_1^2}$$

Το ζεύγος  $(E_1, y_1)$  παριστάνεται στην καμπύλη  $E-y$  με το σημείο  $A$ . Από τη διατήρηση της ολικής ενέργειας προκύπτει :

$$H_1 = H_2 \Rightarrow E_1 = \Delta z + E_2 \Rightarrow E_2 = E_1 - \Delta z \quad (4.25)$$

Στη γνωστή τώρα τιμή  $E_2$  αντιστοιχούν δύο εναλλακτικά σημεία  $B$  και  $B'$ . Τα σημεία αυτά αντιπροσωπεύουν τις δύο πραγματικές λύσεις της εξίσωσης

που προκύπτει αν στην εξίσωση 4.25 τεθεί :  $E_2 = y_2 + \frac{Q^2}{2gA_2^2}$ . Το ερώτημα

τώρα είναι ποιο από τα δύο βάθη  $y_2$  θα πραγματοποιηθεί.

Παρατηρούμε κατ'αρχήν ότι τα σημεία που περιγράφουν την ελεύθερη επιφάνεια στο συγκεκριμένο αγωγό είναι υποχρεωμένα να βρίσκονται πάνω στην καμπύλη που χαρακτηρίζεται από το δεδομένο  $Q$ . Έστω  $x$  ένα τέτοιο σημείο που χαρακτηρίζει τη ροή. Το σημείο  $x$  μεταβαίνει από το  $A$  στο  $B$  ή στο  $B'$  κινούμενο πάντα πάνω στην καμπύλη σταθερού  $Q$ . Σε κάθε θέση του  $x$  αντιστοιχεί μια ανύψωση της στάθμης του πυθμένα  $\Delta z_x$  και ένα μέγεθος

ειδικής ενέργειας  $E_x$  που πρέπει ταυτόχρονα να ικανοποιεί τη σχέση διατήρησης της ενέργειας.

$$\text{Αλλά : } \left. \begin{array}{l} E_x = E_1 - \Delta z_x \\ 0 \leq \Delta z_x \leq \Delta z \end{array} \right\} \Rightarrow E_1 \geq E_x \geq E_2 \quad (4.26)$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο  $x$  κινούμενο πάνω στην καμπύλη σταθερού  $q$  πρέπει να βρίσκεται πάντα μέσα στο διάστημα που προσδιορίζουν οι κατακόρυφες  $E = E_1$  και  $E = E_2$ . Επομένως η μετάβαση γίνεται από το  $A$  στο  $B$ , ή αλλιώς από το υποκρίσιμο βάθος  $y_1$  ανάντη στο επίσης υποκρίσιμο βάθος  $y_2$  κατάντη. Αν η τελική θέση του σημείου  $x$  ήταν το  $B'$ , θα υποχρεώνονταν το  $x$  να διασχίσει μια περιοχή με τιμές  $E_x < E_2$  για να επανέλθει μετά στην  $E_2$ . Για να συμβεί όμως αυτό θα πρέπει :  $E_x = E_1 - \Delta z_x < E_2 \Rightarrow \Delta z_x > E_1 - E_2 = \Delta z$ . Θα έπρεπε δηλαδή ο πυθμένας να σημειώσει μία άνοδο και στη συνέχεια να κατεβεί στο επίπεδο του  $\Delta z$ , πράγμα που δε συμβαίνει.

Τέλος σε σχέση με τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής :

Προφανώς είναι :  $y_1 > y_2$ . Γράφουμε τώρα την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας 4.25 ως εξής :

$$\text{Αλλά : } \left. \begin{array}{l} (y_2 + \Delta z) + \frac{Q^2}{2gA_2^2} = y_1 + \frac{Q^2}{2gA_1^2} \\ y_2 < y_1 \Rightarrow A_2 < A_1 \Rightarrow \frac{Q^2}{2gA_2^2} > \frac{Q^2}{2gA_1^2} \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 + \Delta z < y_1 \quad (4.27)$$

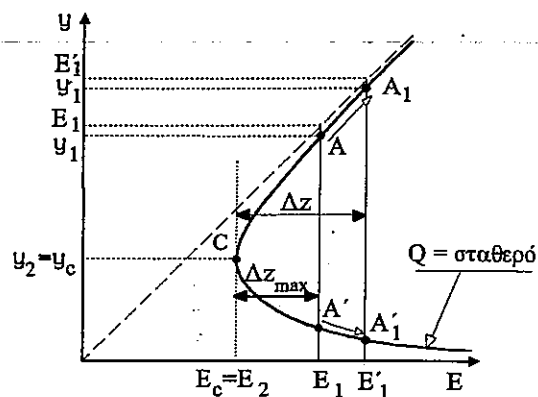
Η τελευταία ανισότητα σημαίνει ότι στη θέση του αναβαθμού παρατηρείται πτώση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας.

**Υπερκρίσιμη ροή :** Όσα προαναφέρθηκαν ισχύουν προφανώς για υποκρίσιμες συνθήκες ροής ανάντη. Αν το βάθος ροής ανάντη είναι υπερκρίσιμο, δηλαδή  $y_1 < y_c$ , τότε το ζεύγος  $(E_1, y_1)$  παριστάνεται στην καμπύλη  $E$ - $y$  με το σημείο  $A'$  στο υπερκρίσιμο σκέλος της καμπύλης. Με συλλογισμούς ανάλογους προς αυτούς που κάναμε για την περίπτωση της υποκρίσιμης ροής, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι το βάθος στη θέση του αναβαθμού θα είναι υπερκρίσιμο (μετάβαση από το  $A'$  στο  $B'$ ) και ότι θα παρατηρηθεί αύξηση του βάθους και ανύψωση της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας.

**Απόπνιξη ροής :** Από την ανάλυση που προηγήθηκε προκύπτει ότι το ύψος του αναβαθμού  $\Delta z$  δεν μπορεί να αυξηθεί πέρα από κάποια οριακή τιμή. Πράγματι, όπως φαίνεται από το σχήμα και την εξίσωση 4.25, η μέγιστη δυνατή τιμή του  $\Delta z$  είναι αυτή για την οποία η ειδική ενέργεια γίνεται ελάχιστη και η ροή πάνω στον αναβαθμό γίνεται κρίσιμη. Δηλαδή :

$$\Delta z_{\max} = E_1 - E_c \quad \text{και} \quad y_2 = y_c \quad (4.28)$$

Αυτή είναι ουσιαστικά η οριακή τιμή του  $\Delta z$  που επιτρέπει στη ροή με τη συγκεκριμένη ενέργεια  $E_1$  που διαθέτει από τα ανάντη να ξεπεράσει το εμπόδιο που βρίσκεται μπροστά της (τον αναβαθμό). Όμως ο αναβαθμός είναι ένα τεχνικό έργο που θα μπορούσε να κατασκευαστεί με ύψος  $\Delta z$  μεγαλύτερο από την οριακή αυτή τιμή. Στην



περίπτωση αυτή, για να είναι δυνατή η ροή, θα πρέπει η ανάντη ειδική ενέργεια να αυξηθεί. Πράγματι, αφού η  $E_2$  δεν μπορεί να μειωθεί περισσότερο από την τιμή  $E_c$  ενώ πρέπει ταυτόχρονα να ισχύει και η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας 4.25, η τιμή της ανάντη ειδικής ενέργειας θα υποχρεωθεί να αυξηθεί από  $E_1$  σε  $E_1'$  έτσι ώστε :  $E_1' - E_c = \Delta z > \Delta z_{\max}$ . Για να συμβεί αυτό θα πρέπει το βάθος ροής ανάντη να αυξηθεί αν είναι υποκρίσιμο ( $A \rightarrow A_1$ ) ή αντίθετα να μειωθεί αν είναι υπερκρίσιμο ( $A' \rightarrow A_1'$ ). Δηλαδή όταν  $\Delta z > \Delta z_{\max}$  η κατασκευή του αναβαθμού επηρεάζει τις ανάντη συνθήκες ροής (όπως π.χ. ένας εκχειλιστής). Το φαινόμενο αυτό λέγεται **απόπνιξη της ροής**.

### Αριθμητικό παράδειγμα

Ένας αναβαθμός ύψους  $\Delta z$  πρόκειται να κατασκευαστεί σε αγωγό τραπεζοειδούς διατομής με πλάτος πυθμένα  $b = 1.5\text{m}$  και κλίση πρανών  $m=1$ , που μεταφέρει παροχή  $Q = 12.2\text{m}^3/\text{s}$  με βάθος ροής  $y_1 = 2\text{m}$ . Ζητούνται : α) το κατάντη βάθος  $y_2$  και η μεταβολή  $\Delta s$  της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας, αν  $\Delta z = 0.2\text{m}$ , β) το μέγιστο  $\Delta z$  ώστε να μην έχουμε απόπνιξη της ανάντη ροής και γ) τι θα συμβεί αν  $\Delta z = 0.5\text{m}$ .

Λύση

α)  $A_1 = by_1 + my_1^2 = 7 \text{ m}^2$

$$E_1 = y_1 + \frac{Q^2}{2gA_1^2} = 2.155 \text{ m}$$

$$E_2 = E_1 - \Delta z = 2.155 - 0.2 = 1.995 \text{ m}$$

Έλεγχος συνθηκών : Υπολογισμός  $y_c$  και  $E_{\min}$

$$(4.10) : \frac{A_c^3}{B_c} = \frac{(b + my_c)^3 y_c^3}{b + 2my_c} = \frac{Q^2}{g} \Rightarrow \frac{(1.5 + y_c)^3 y_c^3}{1.5 + 2y_c} = 15.17$$

$$\Rightarrow y_c = 1.391 \text{ m} < y_1 \rightarrow \text{υποκρίσιμη ροή}$$

$$E_{\min} = E_c = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} = 1.86 \text{ m} < E_2$$

Υπολογισμός υποκρίσιμου βάθους  $y_2$  :

$$E_2 = y_2 + \frac{Q^2}{2gA_2^2} \Rightarrow y_2 + \frac{12.2^2}{2 \cdot 9.81 \cdot [(1.5 + y_2)y_2]^2} = 1.995 \text{ m}$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.698 \text{ m} \approx 1.7 \text{ m} (y_c < y_2 < y_1 - \Delta z)$$

Πτώση της στάθμης :

$$\Delta s = y_1 - (y_2 + \Delta z) = 0.102 \text{ m.}$$

$$\beta) \quad \Delta z_{\max} = E_1 - E_c = 2.155 - 1.86 = 0.295 \text{ m}$$

$\gamma)$  Επειδή  $\Delta z = 0.5 \text{ m} > \Delta z_{\max}$  θα παρατηρηθεί απόπνιξη της ανάντη ροής. Στη διατομή 2 θα είναι :  $E_2 = E_c$  και  $y_2 = y_c$ . Στη διατομή 1 η ειδική ενέργεια  $E_1$  θα αυξηθεί σε  $E_1'$  και το βάθος  $y_1$  σε  $y_1'$ .

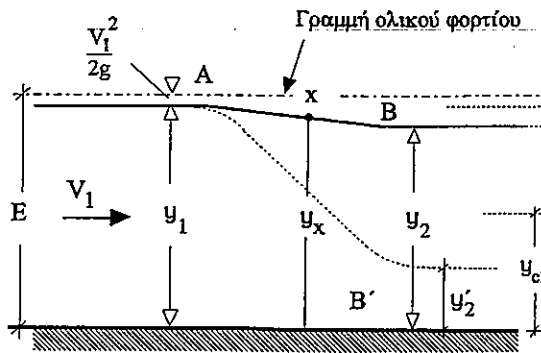
$$E_1' = E_c + \Delta z = 1.86 + 0.5 = 2.36 \text{ m}$$

$$E_1' = y_1' + \frac{Q^2}{2gA_1'^2} \Rightarrow y_1' + \frac{12.2^2}{2 \cdot 9.81 \cdot [(1.5 + y_1')y_1']^2} = 2.36 \text{ m}$$

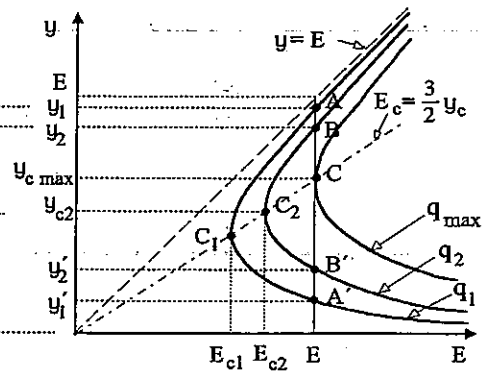
Η εξίσωση λύνεται ως προς  $y_1'$ . Η επίλυση αφήνεται ως άσκηση.

### 3η Εφαρμογή : Στένωση διατομής.

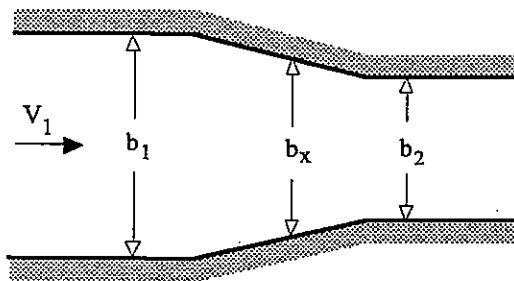
Ας εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα ορθογωνικού αγωγού με βαθμιαία στένωση, δηλαδή με πλάτος που μειώνεται από  $b_1$  σε  $b_2$  χωρίς να παρατηρούνται απώλειες ενέργειας. Ο αγωγός μεταφέρει παροχή  $Q$  και το ανάντη βάθος ροής είναι υποκρίσιμο και ίσο με  $y_1$ . Για την πρόβλεψη του βάθους  $y_2$  κατάντη μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι καμπύλες  $E-y$  και  $q-y$ .



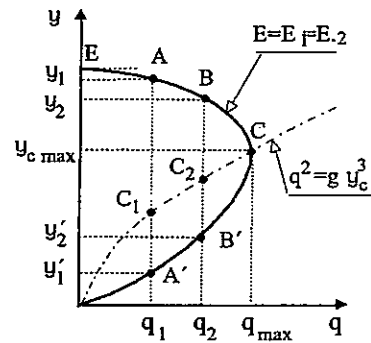
α. Κατά μήκος τομή



γ. Διάγραμμα E - y



β. Κάτοψη



δ. Διάγραμμα q - y

Από την εξίσωση συνέχειας προκύπτει :

$$Q = V_1 \cdot b_1 \cdot y_1 = V_2 \cdot b_2 \cdot y_2 \quad (4.29)$$

Επομένως :  $q_1 = Q / b_1 = V_1 \cdot y_1$  και  $q_2 = Q / b_2 = V_2 \cdot y_2$

Προφανώς για :  $b_2 < b_1 \Rightarrow q_2 > q_1$  (4.30)

Από τη διατήρηση της ενέργειας έχουμε :  $E_1 = E_2 = E$  (4.31)

$$\text{όπου : } E_1 = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_1 + \frac{q_1^2}{2g y_1^2} \quad (4.32.a)$$



$$E_2 = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} = y_2 + \frac{q_2^2}{2gy_2^2} \quad (4.32.\beta)$$

Για το δεδομένο βάθος  $y = y_1$  η τιμή της ειδικής ενέργειας  $E_1$  υπολογίζεται με την εξίσωση 4.32.α. Το ζεύγος  $(E_1, y_1)$  παριστάνεται στο διάγραμμα  $E - y$  του σχήματος με το σημείο Α που βρίσκεται στην καμπύλη παροχής  $q_1$ . Το αντίστοιχο σημείο Α στο διάγραμμα  $q - y$  αντιπροσωπεύει το ζεύγος  $(q_1, y_1)$  στην καμπύλη σταθερής ενέργειας  $E_1$ . Από το συνδυασμό της εξίσωσης 4.31 και 4.32.β σχηματίζεται μία εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς  $y_2$  με δύο πραγματικές λύσεις  $y_2 > y_{c2}$  και  $y_2' < y_{c2}$ . Αυτές αντιστοιχούν στα σημεία Β και Β' των διαγραμμάτων  $\gamma$  και  $\delta$  του σχήματος. Η μετάβαση από το Α στο Β και όχι στο Β' ερμηνεύεται είτε με βάση το διάγραμμα  $E - y$  (κατακόρυφη μετάβαση που ακολουθεί τη γραμμή  $E_1 = E_2 = E$ ), είτε με βάση το διάγραμμα  $q - y$  (μετάβαση κατά μήκος της καμπύλης). Οι λεπτομέρειες της ανάλυσης είναι ανάλογες με εκείνες του προηγούμενου προβλήματος. Προφανώς υπάρχει και εδώ μία μέγιστη τιμή της παροχής  $q$  και ένα αντίστοιχο ελάχιστο πλάτος  $b_{2min}$  πέρα από τα οποία παρατηρείται απόπνιξη της ανάντη ροής.

Αν η στένωση είναι τοπική και ακολουθείται από βαθμιαία διεύρυνση με επαναφορά στο αρχικό πλάτος  $b_1$  και αν οι απώλειες ενέργειας είναι και πάλι αμελητέες, τότε προφανώς η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας θα κατεβεί κατά μήκος της στένωσης και στη συνέχεια θα επανέλθει στο αρχικό της ύψος<sup>1</sup>. Αν όμως το πλάτος  $b_2$  είναι ίσο με  $b_{2min}$  οπότε  $y_2 = y_{cmax}$ , τότε το σημείο που χαρακτηρίζει την ελεύθερη επιφάνεια θα μεταβεί από το Α στο C και στη συνέχεια θα είναι θεωρητικά ελεύθερο ή να επιστρέψει στο Α ή να συνεχίσει να κινείται προς τα κάτω μέχρι το Α'. Επειδή όμως εξαιτίας της στένωσης έχει ήδη προκληθεί σύγκλιση των γραμμών ροής και μεγάλη καμπύλωση της ελεύθερης επιφάνειας προς τα κάτω, η ροή έχει την τάση να συνεχίσει με τον ίδιο ρυθμό και να καταλήξει στο Α'.

<sup>1</sup> Παρατήρηση : Συνήθως μια διεύρυνση της διατομής συνοδεύεται από απώλειες ενέργειας. Επομένως η ελεύθερη επιφάνεια μετά τη στένωση δεν επιστρέφει στην αρχική της στάθμη αλλά σε χαμηλότερη, τέτοια που να αντιστοιχεί στο νέο (μικρότερο) μέγεθος ειδικής ενέργειας.

### Αριθμητικό παράδειγμα (Συνδυασμός στένωσης και αναβαθμού)

Ορθογωνικός αγωγός πλάτους  $b_1 = 4 \text{ m}$  μεταφέρει παροχή  $Q = 16 \text{ m}^3/\text{s}$  με βάθος ροής  $y_1 = 2 \text{ m}$ . Σε κάποια θέση κατά μήκος του αγωγού το πλάτος της διατομής μειώνεται σταδιακά σε  $b_2$  ενώ ταυτόχρονα η στάθμη του πυθμένα ανυψώνεται σταδιακά κατά  $\Delta z = 0.2 \text{ m}$ . Η μορφή αυτού του μεταβατικού τμήματος είναι τέτοια που οι απώλειες ενέργειας να θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογιστούν : α) Το ελάχιστο πλάτος  $b_2$  ώστε να μην παρατηρείται απόπνιξη της ροής ανάντη. β) Το βάθος ροής  $y_2$  αν  $b_2 = 3.5 \text{ m}$ . γ) Τα βάθη ροής  $y_1, y_2$  αν  $b_2 = 3 \text{ m}$ .

#### Λύση

$$\text{Ροή ανάντη : } q_1 = Q/b_1 = 16/4 = 4 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$E_1 = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2} = 2.204 \text{ m}$$

Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας :

$$E_2 = E_1 - \Delta z = 2.204 - 0.2 = 2.004 \text{ m}$$

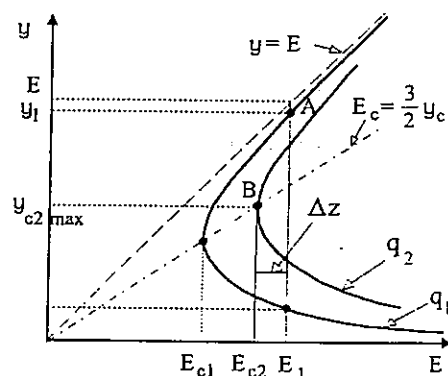
α) Για να μην επηρεάζονται οι συνθήκες ροής ανάντη θα πρέπει  $E_2 \geq E_{c2}$

με οριακή τιμή :  $E_2 = E_{c2} = 2.004 \text{ m}$

$$\text{Αλλά : } E_{c2} = \frac{3}{2}y_{c2} \Rightarrow y_{c2} = 1.336 \text{ m}$$

$$q_2 = \sqrt{gy_{c2}^3} = 4.837 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$b_2 = b_{2\text{min}} = Q/q_2 = 3.308 \text{ m}$$



β)  $b_2 = 3.5 \text{ m} > b_{2\text{min}} \Rightarrow E_{c2} < E_2$

Έλεγχος ροής ανάντη :

$$y_{c1} = \left( \frac{q_1^2}{g} \right)^{1/3} = 1.18 \text{ m} < y_1 (= 2 \text{ m}) \rightarrow \text{υποκρίσιμη ροή}$$

Διατομή 2 :

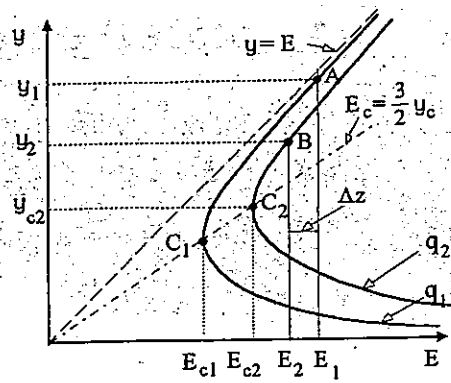
$$q_2 = Q / b_2 = 4.571 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$y_{c2} = \left( q_2^2 / g \right)^{1/3} = 1.287 \text{ m}$$

$$E_2 = y_2 + \frac{q_2^2}{2g y_2^2}$$

$$\Rightarrow y_2 + \frac{4.571^2}{2g y_2^2} = 2.004 \text{ m}$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.575 \text{ m} \quad (y_{c2} < y_2 < y_1 - \Delta z)$$



γ)  $b_2 = 3 \text{ m} < b_{2 \text{ min}} \Rightarrow E_{c2} > E_2 \Rightarrow$  απόπνιξη της ροής ανάντη.

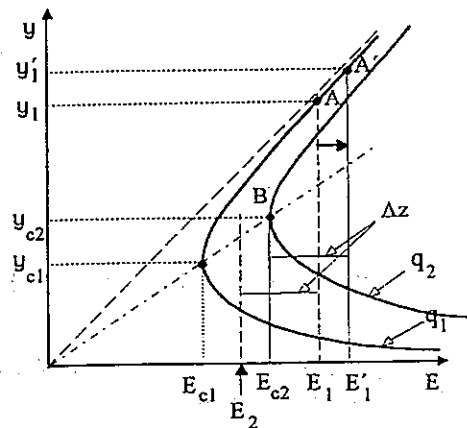
Διατομή 2 :

$$q_2 = Q / b_2 = 5.333 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$y_2 = y_{c2} = \left( q_2^2 / g \right)^{1/3} = 1.426 \text{ m}$$

$$E'_2 = E_{c2} = (3/2) y_{c2} = 2.139 \text{ m}$$

$$(E'_2 > E_2 = 2.004 \text{ m})$$



Διατομή 1 :

$$E'_1 = E'_2 + \Delta z = E_{c2} + \Delta z = 2.339 \text{ m}$$

$$E'_1 = y'_1 + \frac{q_1^2}{2g y'_1{}^2} \Rightarrow y'_1 + \frac{4^2}{2g y'_1{}^2} = 2.339 \text{ m}$$

$$y'_1 = 2.165 \text{ m} > y_1$$

### 4.3 ΕΙΔΙΚΗ ΟΡΜΗ

Η ειδική ορμή ή συνάρτηση ορμής ή ειδική δύναμη έχει οριστεί στο κεφάλαιο 3.3.2 και εκφράζεται με τη σχέση :

$$M = \frac{Q^2}{gA} + \bar{y}A \quad (4.33)$$

όπου :  $\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_A (y - \xi) dA$  είναι η απόσταση του κέντρου βάρους της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια. Επίσης εύκολα αποδεικνύεται (βλ. εξίσ. 3.23) ότι :

$$\frac{d}{dy}(\bar{y}A) = A \quad \text{και} \quad \bar{y}A = \int A dy \quad (4.34)$$

Ειδικά όταν πρόκειται για αγωγό ορθογωνικής διατομής, αντί της  $M$  χρησιμοποιείται συνήθως η ειδική ορμή ανά μονάδα πλάτους :  $m = M/b$  κατ' αντιστοιχία προς την παροχή ανά μονάδα πλάτους  $q$ . Αν στην εξίσωση 4.33 τεθεί :  $\bar{y} = y/2$  τότε :

$$m = m(y) = \frac{q^2}{gy} + \frac{y^2}{2} \quad (4.35)$$

όπου :  $m = M/b$  ,  $q = Q/b$

Για δεδομένο μέγεθος παροχής η ειδική ορμή είναι μια συνάρτηση του βάθους :  $M = M(y)$  και  $m = m(y)$ . Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η συνάρτηση αυτή έχει κάποια χαρακτηριστικά που εμφανίζουν ομοιότητα με αντίστοιχα χαρακτηριστικά της συνάρτησης  $E(y)$ .

#### 4.3.1. Μελέτη της συνάρτησης $M(y)$

Για δεδομένο μέγεθος παροχής η συνάρτηση :  $M = M(y)$  αντιπροσωπεύεται από την καμπύλη του σχήματος.

Παρατηρήσεις :

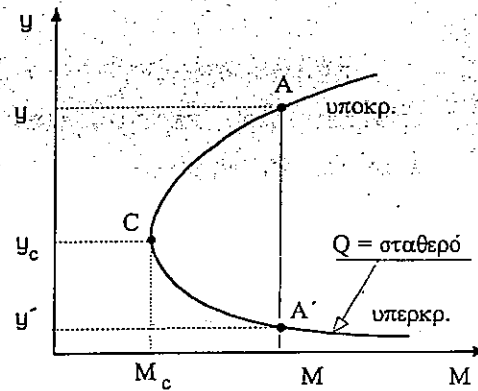
- i. Για  $y \rightarrow 0$  και  $y \rightarrow \infty$  :  $M \rightarrow \infty$ .
- ii. Η ειδική ορμή εμφανίζει ένα ελάχιστο,  $M_{\min}$ , που υπολογίζεται ως εξής :

$$\frac{dM}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy} + \frac{d}{dy}(\bar{y}A)$$

Αλλά :  $\frac{dA}{dy} = B$  και :  $\frac{d}{dy}(\bar{y}A) = A$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dy} = -\frac{Q^2 B}{gA^2} + A = A(1 - Fr^2)$$

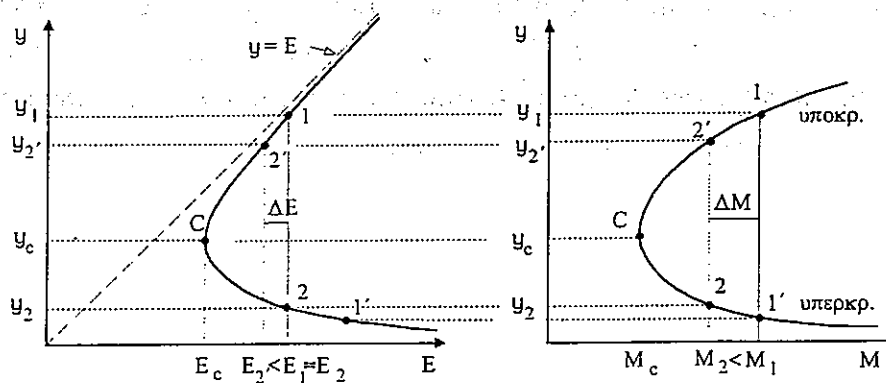
και :  $\frac{dM}{dy} = 0 \Rightarrow Fr = 1$



Επομένως :  $M_{\min} = M(y_c) = M_c$ .

Δηλαδή για κάθε μέγεθος παροχής το κρίσιμο βάθος εξασφαλίζει την ελάχιστη δυνατή τιμή τόσο της ειδικής ενέργειας όσο και της ειδικής ορμής.

- iii. Σε κάθε  $M > M_c$  αντιστοιχούν δύο βάθη  $y$  και  $y'$  που ονομάζονται συζυγή. Τα δύο αυτά βάθη είναι οι δύο θετικές ρίζες της εξίσωσης  $M(y) = M$  και είναι :  $y > y_c$  (υποκρίσιμη ρίζα) και  $y' < y_c$  (υπερκρίσιμη ρίζα). Η διάκριση των συζυγών βαθών από τα εναλλακτικά βάθη ροής γίνεται περισσότερο κατανοητή με τη βοήθεια του σχήματος που ακολουθεί.



Από το σχήμα φαίνεται ότι τα εναλλακτικά βάθη  $y_1$  και  $y_2$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $E_1 = E_2$  αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της ειδικής ορμής :  $M_1 > M_2$ . Τα συζυγή βάθη  $y_2$  και  $y_2'$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $M_2 = M_2'$  αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της ειδικής ενέργειας :  $E_2 > E_2'$ . Η έννοια αυτής της σύγκρισης θα διευκρινιστεί μέσα από παραδείγματα στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο.

### 4.3.2. Η έννοια της ειδικής ορμής σε προβλήματα απότομα μεταβαλλόμενης ροής.

Είδαμε στο κεφάλαιο 3.4.3 ότι η συνάρτηση  $M(y)$  εμφανίζεται στις εξισώσεις που περιγράφουν τμήματα απότομα μεταβαλλόμενης ροής. Οι εξισώσεις αυτές είναι :

Εξίσ. συνέχειας :  $Q_1 = Q_2 = Q$

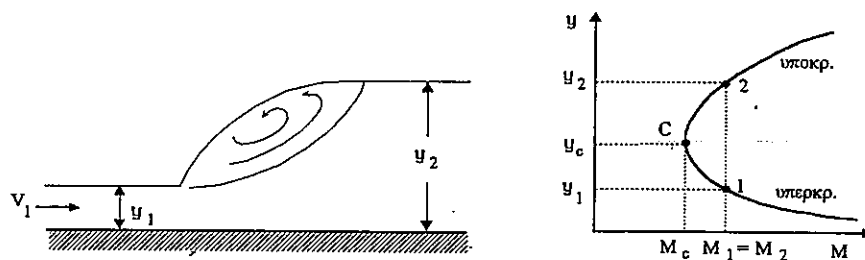
Εξίσ. γραμμικής ορμής :  $\Delta M = M_2 - M_1 = F/\rho g$

όπου  $F$  η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο ρευστό από κάποιο τεχνικό έργο που μπορεί να παρεμβάλλεται στη ροή.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις αυτές σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της συνάρτησης ορμής για να επιλυθούν ειδικά προβλήματα ροής.

#### α. Το απλό υδραυλικό άλμα

Με τον όρο υδραυλικό άλμα εννοούμε την απότομη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας η οποία συνοδεύεται από έντονους στροβιλισμούς και απώλεια ενέργειας με τη μορφή θερμότητας. Υδραυλικό άλμα σχηματίζεται κατά τη μετάβαση της ροής από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη κατάσταση. Αν τώρα στη θέση του υδραυλικού άλματος και κατά συνέπεια στον υλικό όγκο που το περικλείει, δεν υπάρχει κάποιο τεχνικό έργο που να ασκεί δύναμη στο ρευστό, τότε το άλμα χαρακτηρίζεται ως απλό.



Το απλό υδραυλικό άλμα σε μόνιμη ροή περιγράφεται από την εξίσωση συνέχειας ( $Q = \text{σταθερό}$ ) και την εξίσωση γραμμικής ορμής, αν σ' αυτή τεθεί  $F = 0$  :

$$M_1 = M_2 \quad \text{ή αλλιώς :} \quad M(y_1) = M(y_2) = M \quad (4.36)$$

Επομένως τα βάθη  $y_1$  και  $y_2$  στην αρχή και στο τέλος του άλματος είναι τα συζυγή βάθη ροής. Αν είναι γνωστό το ένα από τα δύο αυτά βάθη, τότε μπορεί να υπολογιστεί το άλλο με τη βοήθεια της σχέσης 4.36, η οποία μπορεί να επιλυθεί ως προς το άγνωστο μέγεθος. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το σχηματισμό υδραυλικού άλματος σε αγωγούς διαφόρων μορφών διατομής και θα αναπτύξουμε τους τρόπους υπολογισμού του.

### Απλό υδραυλικό άλμα σε ορθογωνικό αγωγό.

Στην περίπτωση ορθογωνικού αγωγού με σταθερό πλάτος  $b$  διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης 4.36 με το πλάτος  $b$  του αγωγού και προκύπτει:

$$m_1 = m_2 \quad \text{ή} \quad m(y_1) = m(y_2) \quad (4.37)$$

όπου:  $m(y_1)$  η ειδική ορμή ανά μονάδα πλάτους. Αν στην εξίσωση αυτή χρησιμοποιηθεί η σχέση 4.35 που εκφράζει το  $m$  ως συνάρτηση των  $q$  και  $y$ , τότε:

$$\frac{q^2}{gy_1} + \frac{y_1^2}{2} = \frac{q^2}{gy_2} + \frac{y_2^2}{2} \quad (4.38)$$

Η εξίσωση 4.38 με την εισαγωγή του αριθμού Froude για ορθογωνικό αγωγό:

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{q^2}{gy^3} \quad \text{και την εκτέλεση των πράξεων, παίρνει την ακόλουθη}$$

αδιαστατοποιημένη μορφή:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right] \quad (4.39\alpha)$$

$$\text{ή:} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_2^2} \right] \quad (4.39\beta)$$

όπου:  $Fr_1 = Fr(y_1)$  και  $Fr_2 = Fr(y_2)$

Οι εξισώσεις 4.39 είναι δύο απλές εύχρηστες σχέσεις που συνδέουν τα συζυγή βάθη  $y_1, y_2$  ως συνάρτηση του αριθμού  $Fr$  για ορθογωνικούς αγωγούς.

Το υδραυλικό άλμα, εκτός από τα βάθη στην αρχή και στο τέλος του, χαρακτηρίζεται και από ένα άλλο μέγεθος, το μήκος του. Το μήκος αυτό προσδιορίζεται με τρόπο καθαρά εμπειρικό. Στη βιβλιογραφία υπάρχει

πλήθος εμπειρικών σχέσεων που έχουν προταθεί από διάφορους ερευνητές. Μερικές από τις σχέσεις αυτές δίνονται παρακάτω:

$$\text{για } Fr_1 \leq 4 : L/y_1 = 8.75 \cdot (Fr_1 - 1) \quad (4.40)$$

$$\text{για } Fr_1 > 4 : L/y_2 = 5.7 - 0.15 \cdot Fr_1$$

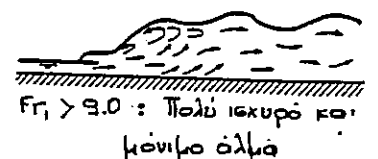
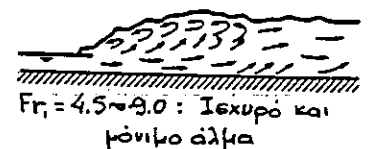
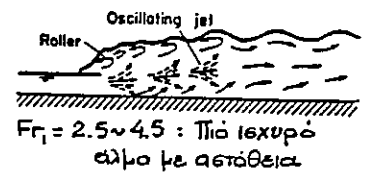
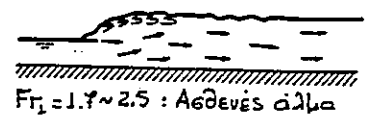
Όταν  $4.5 < Fr_1 < 13$ , συνιστάται η χρήση της απλής σχέσης:

$$L/y_2 = 6 \quad (4.41)$$

Τέλος η απώλεια ενέργειας που συνοδεύει το άλμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} \quad (4.42)$$

Μπορούμε εδώ με βάση τη μορφή της καμπύλης  $M(y)$  και το αντίστοιχο σχήμα να κάνουμε μια γενική παρατήρηση. Όταν ο αριθμός  $Fr \rightarrow 1$  τότε  $y_2, y_1 \rightarrow y_c$  και ο λόγος  $y_2 / y_1 \rightarrow 1$ . Έτσι όσο πλησιάζουμε στην κρίσιμη κατάσταση η διαφορά ανάμεσα στα δύο βάθη γίνεται μικρή, το άλμα είναι πολύ ασθενές και γίνεται αισθητό από την κυματοειδή μορφή της ελεύθερης επιφάνειας, ενώ η απώλεια ενέργειας είναι μικρή. Όσο ο αριθμός  $Fr$  απομακρύνεται από τη μονάδα, η διαφορά ανάμεσα στα δύο βάθη μεγαλώνει και ταυτόχρονα μεγαλώνει και η απώλεια ενέργειας. Στην ελεύθερη επιφάνεια σχηματίζεται αρχικά ένα διακριτό μέτωπο με μικρούς στροβιλισμούς (ασθενές άλμα). Όσο μεγαλώνει ο αριθμός  $Fr_1$  (ή μικραίνει ο  $Fr_2$ ) το άλμα γίνεται όλο και πιο απότομο και ισχυρό με έντονους στροβιλισμούς που καταλαμβάνουν όλο το σώμα της ροής. Στο τελευταίο αυτό στάδιο παρατηρείται έντονη ανάμειξη της ροής με φυσαλίδες αέρα και μεγάλη απώλεια ενέργειας. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι για  $4.5 < Fr_1 \leq 9$  η  $\Delta E$  είναι της τάξης του 45 ~ 70% και είναι ακόμη μεγαλύτερη για μεγαλύτερους





αριθμούς  $Fr_1$ . Για το λόγο αυτό ο σχηματισμός υδραυλικού άλματος συχνά χρησιμοποιείται και ως μέσο καταστροφής τμήματος του μεγάλου κινητικού φορτίου υπερκρίσιμων ροών.

### Απλό υδραυλικό άλμα σε τραπεζοειδή αγωγό:

Για τον υπολογισμό του απλού υδραυλικού άλματος σε τραπεζοειδή πρισματικό αγωγό χρησιμοποιείται η εξίσωση 4.36 σε συνδυασμό με την 4.33 :

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \frac{Q^2}{gA_1} + \bar{y}_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2 A_2 \quad (4.43)$$

Τα γεωμετρικά μεγέθη της διατομής εκφράζονται με τις σχέσεις :

$$A = by + my^2$$

$$A\bar{y} = \int_0^y A dy = \frac{by^2}{2} + \frac{my^3}{3}$$

Αν είναι γνωστή η παροχή και το ένα από τα δύο βάθη, έστω το  $y_1$ , τότε εύκολα υπολογίζεται το μέγεθος της ειδικής ορμής  $M_1$ . Από την εξίσωση των ειδικών ορμών 4.43 προκύπτει :

$$M_1 = M_2 = \frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2 A_2 \quad (4.44)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί ως προς  $y_2$  με κάποια από τις γνωστές αριθμητικές μεθόδους.

Το πρόβλημα μπορεί επίσης να επιλυθεί αν, όπως και στην περίπτωση του ορθογωνικού αγωγού, χρησιμοποιηθεί ο αριθμός Froude στην εξίσωση 4.33 και γίνει κατάλληλη αδιαστατοποίηση :

$$Fr^2 = \frac{Q^2 B}{gA^3} = \frac{Q^2 (b + 2my)}{g(b y + m y^2)^3} = \frac{Q^2 m^3 (1 + 2\omega)}{g b^5 (1 + \omega)^3 \omega^3}, \quad \omega = \frac{my}{b}$$

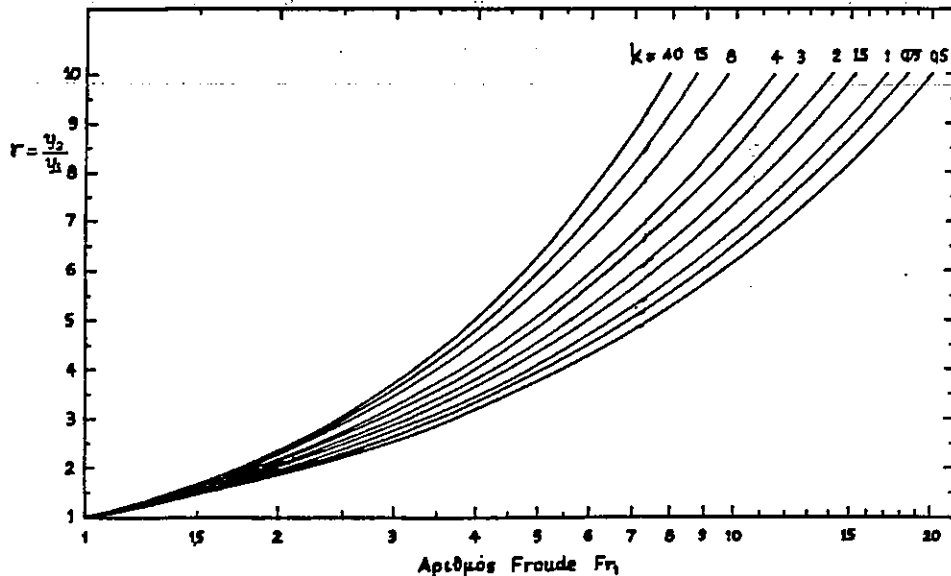
Μετά την αντικατάσταση στη 4.33 προκύπτει η εξίσωση απλού υδραυλικού άλματος σε τραπεζοειδή αγωγό :

$$Fr_1^2 = \frac{(k+2)r}{3(k+1)^2(k+1+r)} \left[ r^3 + (2.5k+1)r^2 + (1.5k+1)(k+1)r + (1.5k+1)k \right] \quad (4.45)$$

όπου:  $r = y_2/y_1$ ,  $k = 1/\omega_1 = b/m y_1$ .

Η εξίσωση 4.45 μπορεί να λυθεί αριθμητικά με κάποια μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων. Στο παράρτημα Π5 παρατίθεται πρόγραμμα Η.Υ. που λύνει την εξίσ. 4.45 με τη μέθοδο της διχοτόμησης.

Η λύση της 4.45 δίνεται επίσης με τη μορφή του ακόλουθου νομογραφήματος.



### Απλό υδραυλικό άλμα σε κυκλικό αγωγό

Για τον υπολογισμό του υδραυλικού άλματος σε κυκλικό αγωγό χρησιμοποιείται και πάλι η εξίσωση 4.43 σε συνδυασμό με τα ακόλουθα γεωμετρικά μεγέθη της διατομής :

$$y = (1 - \cos \beta) \cdot D/2 \quad \text{ή} \quad \beta = \arccos(1 - 2y/\beta)$$

$$A = (\beta - \sin \beta \cos \beta) \cdot D^2/4$$

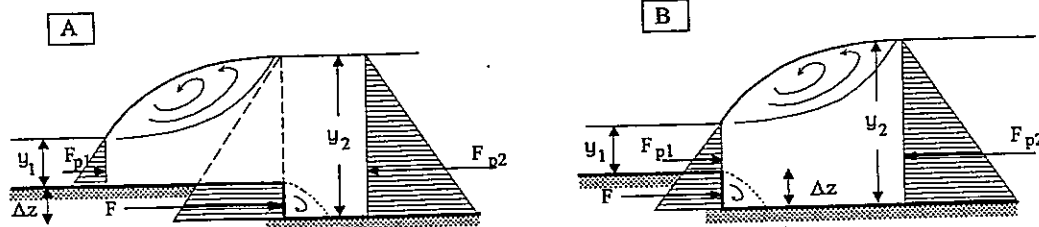
$$A\bar{y} = \int_0^y A dy = \frac{D^3}{24} (-3\beta \cos \beta - \sin^3 \beta + 3 \sin \beta)$$

Αν είναι γνωστά η πάροχή  $Q$  και το βάθος  $y_1$ , το συζυγές βάθος  $y_2$  μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά με κάποια επαναληπτική διαδικασία, έτσι που τελικά να ισχύει η σχέση  $M_1 = M_2$ . Στο παράρτημα Π5 παρατίθεται η λίστα ενός προγράμματος Η.Υ. που λύνει την εξίσωση αυτή με τη μέθοδο της διχοτόμησης.

Με όμοιο τρόπο αντιμετωπίζονται τα υδραυλικά άλματα σε αγωγούς οποιασδήποτε διατομής.

## β. Υδραυλικό άλμα σε αγωγό με απότομο καταβαθμό

Τεχνικά έργα όπως μικρού ύψους απότομοι καταβαθμοί και αναβαθμοί χρησιμοποιούνται συχνά για τον έλεγχο της θέσης σχηματισμού του άλματος. Έτσι με τέτοιες κατασκευές μπορούμε να πετύχουμε τη σταθεροποίηση ή το σχηματισμό του άλματος σε συγκεκριμένη θέση κατά μήκος του αγωγού. Στην περίπτωση μικρού καταβαθμού οι υπολογισμοί (και ο σχεδιασμός του έργου) μπορεί να γίνουν για δύο δυνατές θέσεις του άλματος, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Οι σχέσεις ανάμεσα στα υδραυλικά μεγέθη και το ύψος του καταβαθμού προκύπτουν από την εξίσωση γραμμικής ορμής. Ας σημειωθεί ότι η δύναμη  $F$ , που ασκεί το μέτωπο του καταβαθμού στη ροή, μπορεί με ικανοποιητική ακρίβεια να θεωρηθεί ως υδροστατική.

Για ορθογωνικό αγωγό σταθερού πλάτους η εξίσωση γραμμικής ορμής γίνεται :

$$m_2 - m_1 = \frac{f}{\rho g} \Rightarrow \left[ \frac{q^2}{gy_2} + \frac{y_2^2}{2} \right] - \left[ \frac{q^2}{gy_1} + \frac{y_1^2}{2} \right] = \frac{f}{\rho g} \quad (4.45)$$

όπου :  $f = F/b$  η δύναμη ανά μονάδα πλάτους της διατομής. Με βάση την κατανομή των πιέσεων που φαίνεται στο σχήμα, η δύναμη αυτή είναι :

$$\frac{f}{\rho g} = \frac{y_2^2}{2} - \frac{[y_2 - \Delta z]^2}{2} \quad \text{για την περίπτωση A} \quad (4.46.a)$$

$$\text{και : } \frac{f}{\rho g} = \frac{[y_1 + \Delta z]^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} \quad \text{για την περίπτωση B} \quad (4.46.b)$$

Από το συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων προκύπτει :

**Περίπτωση Α :**

$$\frac{q^2}{gy_2} + \frac{(y_2 - \Delta z)^2}{2} = \frac{q^2}{gy_1} + \frac{y_1^2}{2} \quad (4.47)$$

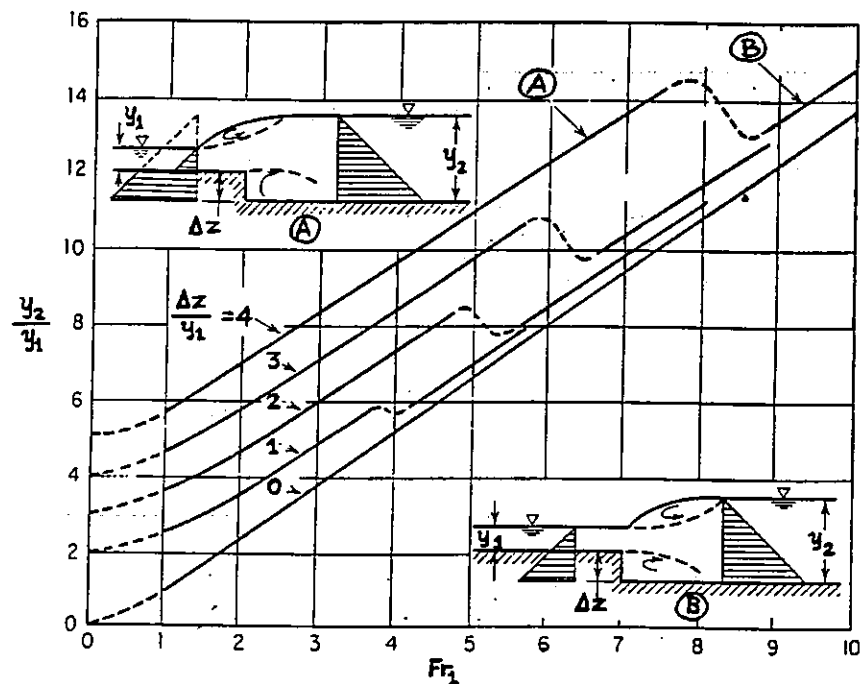
ή 
$$Fr_1^2 = \frac{r}{2(r-1)} \left[ \left( r - \frac{\Delta z}{y_1} \right) - 1 \right], \quad r = \frac{y_2}{y_1} \quad (4.48)$$

**Περίπτωση Β :**

$$\frac{q^2}{gy_2} + \frac{y_2^2}{2} = \frac{q^2}{gy_1} + \frac{(y_1 + \Delta z)^2}{2} \quad (4.49)$$

ή 
$$Fr_1^2 = \frac{r}{2(r-1)} \left[ r^2 - \left( 1 + \frac{\Delta z}{y_1} \right)^2 \right], \quad r = \frac{y_2}{y_1} \quad (4.48)$$

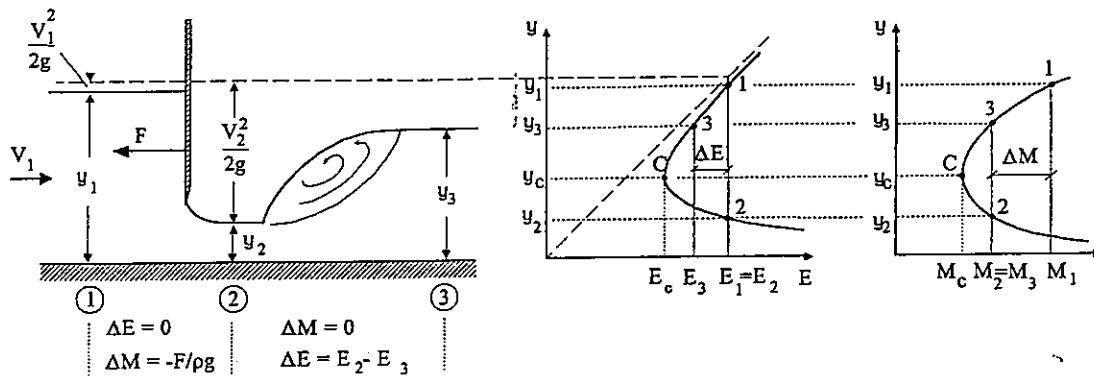
Οι σχέσεις 4.48 και 4.50 δίνονται υπό μορφή καμπυλών  $r - Fr_1$  για διάφορες τιμές του λόγου  $\Delta z/y_1$  στο παρακάτω διάγραμμα.



Ο τρόπος υπολογισμού υδραυλικών αλμάτων που σχηματίζονται σε άλλου είδους κατασκευές, όπως είναι ένας απότομος μικρός αναβαθμός, μία απότομη διεύρυνση της διατομής, μία λεκάνη ηρεμίας που ακολουθεί έναν εκχειλιστή, θα αναπτυχθεί χωριστά σε ειδικό κεφάλαιο.

### γ. Παρεμβολή θυρίδας

Οι έννοιες των συναρτήσεων ειδικής ορμής και ειδικής ενέργειας και τα πεδία εφαρμογής τους γίνονται κατανοητά με το ακόλουθο παράδειγμα : Ας εξετάσουμε την περίπτωση ενός αγωγού που μεταφέρει παροχή  $Q$ . Με την παρεμβολή μιας θυρίδας παρατηρείται ανύψωση της στάθμης ανάντη της θυρίδας (απόπνιξη της ανάντη ροής), ενώ το βάθος του νερού κατά την έξοδο του από τη θυρίδα υποχρεώνεται να γίνει υπερκρίσιμο. Οι κατάντη συνθήκες όμως επιβάλλουν την επάνοδο της ροής σε υποκρίσιμα βάθη. Έτσι σε μικρή απόσταση από τη θυρίδα σχηματίζεται υδραυλικό άλμα. Στο σχήμα που ακολουθεί έχει σχεδιαστεί το προφίλ της ροής που περιγράψαμε.



Στο τμήμα ανάμεσα στις διατομές 1 και 2 οι απώλειες ενέργειας θεωρούνται αμελητέες (βλ. κεφ.4.2.2). Έτσι ισχύει :  $E_1 = E_2$ . Η εξίσωση αυτή για γνωστή παροχή : δίνει μια σχέση ανάμεσα στα βάθη  $y_1$  και  $y_2$  ανάντη και κατάντη της θυρίδας. Στο διάγραμμα  $E-y$  τα βάθη αυτά αντιπροσωπεύονται από τα σημεία 1 και 2 της καμπύλης που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο (εναλλακτικά βάθη για  $E = E_1 = E_2$ ). Τα ίδια βάθη στην καμπύλη  $M - y$  αντιστοιχούν σε δύο τιμές  $M_1$  και  $M_2$  της ειδικής ορμής, που συνδέονται μεταξύ τους με την εξίσωση της γραμμικής ορμής  $M_2 - M_1 = -F/\rho g$ . Από τη σχέση αυτή μπορεί να υπολογιστεί η δύναμη  $F$  που ασκείται στο ρευστό από τη θυρίδα.

Στο τμήμα μεταξύ των διατομών 2 και 3 δημιουργείται απλό υδραυλικό άλμα και έχουμε απώλειες ενέργειας. Από την εφαρμογή της εξίσωσης γραμμικής ορμής :  $M_3 - M_2 = 0$ , προκύπτει η σχέση που συνδέει τα βάθη  $y_2$  και  $y_3$  (εξίσωση απλού υδραυλικού άλματος). Τα βάθη αυτά αντιπροσωπεύονται από τα σημεία 2 και 3 που στην καμπύλη  $M - y$  βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Στο διάγραμμα  $E - y$  τα σημεία 2 και 3 αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της  $E$ . Η διαφορά  $\Delta E = E_2 - E_3$  παριστάνει την απώλεια ενέργειας κατά μήκος του υδραυλικού άλματος.

## 4.4 ΚΛΙΣΗ ΤΡΙΒΗΣ

Ο συντελεστής ή κλίση τριβής  $S_f$  είναι ένας συντελεστής, που υπεισέρχεται στις εξισώσεις της ροής και αντιπροσωπεύει την αντίσταση τριβής, δηλαδή τη δύναμη που ασκείται στο ρευστό από τα τοιχώματα του αγωγού και αντιτίθεται στην κίνησή του. Όπως έχει ήδη αποδειχτεί στο κεφάλαιο 3.4.1, ο συντελεστής  $S_f$  εκφράζει την κλίση της γραμμής ολικού φορτίου  $H$  ή αλλιώς τις απώλειες φορτίου ανά μονάδα μήκους του αγωγού (εξίσ. 3.42). Συνδέεται με τα υδραυλικά και γεωμετρικά μεγέθη της διατομής καθώς και με την τραχύτητα των τοιχωμάτων του αγωγού με εμπειρικούς ή ημιεμπειρικούς τύπους και συνήθως με τις εξισώσεις του Manning ή του Chezy, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3.3.2.β. Η ανάπτυξη των εξισώσεων αυτών γίνεται στα ακόλουθα κεφάλαια.

### 4.4.1 Η εξίσωση του Chezy

#### α. Εξαγωγή της εξίσωσης Chezy

Η αντίσταση τριβής σε ένα μήκος  $\Delta x$  του αγωγού δίνεται από τη σχέση 3.16 :  $F_\tau = \rho \cdot g \cdot A \cdot S_f \cdot \Delta x$ . Η δύναμη αυτή μεταβιβάζεται στο ρευστό μέσω διάτμησης κατά μήκος της περιμέτρου του. Αν  $\tau_0$  είναι η διατμητική τάση στο τοίχωμα (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας του στερεού ορίου) και  $P$  η βρεχόμενη περίμετρος της διατομής, τότε :  $F_\tau = \tau_0 \cdot P \cdot \Delta x$ . Από το συνδυασμό των δύο αυτών σχέσεων συνάγεται :

$$\tau_0 = \rho \cdot g \cdot R \cdot S_f \quad (4.49)$$

όπου :  $R = A/P$  η υδραυλική ακτίνα.

Όπως και στην περίπτωση ροής σε σωλήνα (Σημειώσεις Εφαρμοσμένης Υδραυλικής, Π. Τολικά, Χ. Φωτιάδη, κεφ. 8.4 και 8.5), εύκολα αποδεικνύεται με βάση τις αρχές της διαστατικής ανάλυσης, ότι η διατμητική τάση  $\tau_0$  που αναπτύσσεται στη στρωτή υποστιβάδα της ροής μπορεί να συνδεθεί με την ταχύτητα  $V$  με τη σχέση :

$$\tau_0 = c \cdot \rho \cdot V^2 \quad (4.50)$$

όπου  $c$  ένας συντελεστής που εξαρτάται από τη φύση του τοιχώματος και τις παραμέτρους της ροής. Από το συνδυασμό των εξισώσεων 4.49 και 4.50 προκύπτει :

$$S_f = \frac{c}{gR} \cdot V^2 \quad (4.51)$$

Αν τώρα τεθεί :  $C = \sqrt{g/c}$  και γίνει αναδιάταξη των όρων της εξίσ. 4.51 προκύπτει :

$$\boxed{V = C \cdot \sqrt{RS_f}} \quad \text{και} \quad \boxed{Q = C \cdot A \cdot \sqrt{RS_f}} \quad (4.52)$$

Η εξίσωση αυτή προτάθηκε από τον Chezy το 1769 και έχει καθιερωθεί από τότε διεθνώς ως εξίσωση του Chezy. Συνδέει την κλίση τριβής  $S_f$  με την παροχή  $Q$  (ή την ταχύτητα  $V$ ), το βάθος ροής  $y$  [ $A=A(y)$ ,  $R=R(y)$ ], τη γεωμετρία της διατομής και την τραχύτητα των παρειών. Ο συντελεστής  $C$  ονομάζεται **συντελεστής τριβής του Chezy**, εξαρτάται από τη φύση του στερεού ορίου και τις παραμέτρους της ροής και έχει διαστάσεις [ $L^{1/2}/T$ ].

### β. Υπολογισμός του συντελεστή τριβής $C$

Η εξίσωση Chezy έχει απλή και εύχρηστη μορφή. Η ακρίβειά της βέβαια εξαρτάται από την ακρίβεια προσδιορισμού του συντελεστή  $C$ . Ως προς αυτό έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής :

Σε συνδυασμό με τη σχέση 3.42 η εξίσωση 4.52 μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή :

$$S_f = -\frac{dH}{dx} = \frac{V^2}{C^2 R} = \frac{8g}{C^2 4R} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.53)$$

Είναι φανερό ότι η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την εξίσωση απωλειών των Darcy - Weisbach για ροή σε σωλήνες :

$$S_f = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.54)$$

αν η διάμετρος  $D$  αντικατασταθεί από την υδραυλική ακτίνα του σωλήνα (για κυκλικό αγωγό είναι :  $D = 4R$ ) και αν ισχύει η σχέση :

$$C = \sqrt{8g/f} \quad (4.55)$$

Ο συντελεστής του Chezy  $C$ , όπως και ο συντελεστής τριβής  $f$  του Darcy, είναι λογικό να εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds της ροής, από την

τραχύτητα του τοιχώματος και πιθανόν από το σχήμα της διατομής. Ενώ όμως η συμπεριφορά του  $f$  σε κυκλικούς αγωγούς έχει ερευνηθεί σε βάθος, ανάλογες έρευνες για ανοικτούς αγωγούς δεν μπορούν να θεωρηθούν ως πλήρεις. Αυτό οφείλεται κυρίως στην εξαιρετικά μεγάλη μεταβλητότητα της επιφανειακής τραχύτητας και στην ποικιλία σχημάτων διατομής στη φύση. Στα εμπόδια αυτά προστίθεται η πολύ μεγαλύτερη δυσκολία ελέγχου και ακριβούς μέτρησης των παραμέτρων της ροής έξω από το περιβάλλον ενός εργαστηρίου, καθώς και το γεγονός ότι η ύπαρξη ελεύθερης επιφάνειας συνεπάγεται την εμφάνιση περισσότερων μεταβλητών.

Παρόλα αυτά, επειδή ο μηχανισμός ανάπτυξης των τριβών είναι όμοιος στα δύο είδη ροής, η σύνδεση του  $C$  με το  $f$  μέσω της σχέσης 4.55 θεωρείται αποδεκτή και συμφωνεί με τα υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα, τουλάχιστον για αγωγούς όχι πολύ μεγάλων διαστάσεων με σχετικά ομαλές επιφάνειες και με απλό σχήμα διατομής (όπως η ημικυκλική, η τραπεζοειδής ή η ορθογωνική με πλάτος όχι πολύ διαφορετικό από το βάθος ροής).

Στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής  $f$  υπολογίζεται με τη βοήθεια του γνωστού διαγράμματος του Moody ή από τις αντίστοιχες εμπειρικές σχέσεις, αρκεί η διάμετρος  $D$  να αντικατασταθεί παντού με την ισοδύναμη έκφραση  $4R$ . Έτσι για τυρβώδη ροή ( $Re = 4R \cdot V/v > 10^5$ ), που συνήθως παρατηρείται στους ανοικτούς αγωγούς, οι εξισώσεις είναι :

$$\text{λεία τοιχώματα : } \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re \sqrt{f}) - 0.8 \quad (4.56\alpha)$$

$$\text{ενδιάμεσο τοίχωμα : } \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{1}{3.7} \left( \frac{k_s}{4R} \right) + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right] \quad (4.56\beta)$$

$$\text{τραχιά τοιχώματα : } \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{4R}{k_s} \right) + 1.14 \quad (4.56\gamma)$$

Σύμφωνα με τον Jain (1976), αντί των σχέσεων 4.56α και 4.56β που έχουν πεπλεγμένη μορφή, μπορούν να χρησιμοποιηθούν με ικανοποιητική για πρακτικούς σκοπούς ακρίβεια οι ακόλουθες απλουστευμένες εκφράσεις :

$$\text{λεία τοιχώματα : } \frac{1}{\sqrt{f}} = 1.8 \log(Re) - 1.5146 \quad (4.57\alpha)$$

$$\text{ενδιάμεσο τοίχωμα : } \frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[ \frac{1}{3.7} \left( \frac{k_s}{4R} \right) + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right] \quad (4.57\beta)$$



Τέλος σχετικά με την τραχύτητα  $k_s$ , η τιμή που θα επιλεγεί πρέπει να είναι αντιπροσωπευτική της πραγματικής τραχύτητας του αγωγού, η οποία συνήθως δεν είναι σταθερή ούτε στην περίμετρο ούτε και κατά μήκος. Οι τιμές του  $k_s$  για διάφορα υλικά επιφάνειας δεν μπορούν να τυποποιηθούν στον ίδιο βαθμό που αυτό έχει επιτευχθεί για τα υλικά των σωλήνων εμπορίου. Στη συνέχεια παρατίθεται πίνακας με ενδεικτικές τιμές ισοδύναμης τραχύτητας για μερικές συνήθεις επιφάνειες ανοικτών αγωγών. Πάντως η τιμή του  $C$  δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη ευαισθησία σε μικρά σφάλματα προσδιορισμού του  $k_s$ .

Ενδεικτικές τιμές της ισοδύναμης τραχύτητας  $k_s$

Υλικό	$k_s$ (mm)
Γυαλί, πλαστικό, λείο μέταλλο	0.0003
Πολύ λείο σκυρόδεμα	0.15 ~ 0.3
Επιωαλωμένη επιφάνεια αποχετευτικού αγωγού	0.6
Λεία εκτοξευμένη τσιμεντοκονία (Gunitite)	0.5 ~ 1.5
Τραχύ σκυρόδεμα	3.0 ~ 4.5
Χωμάτινες διώρυγες (ομαλές, ευθύγραμμες)	3.0
Λιθοδομή	6.0
Μη επεξεργασμένη εκτοξευμένη τσιμεντοκονία	3.0 ~ 10.0

#### 4.4.2 Η εξίσωση του Manning

##### α. Η εμπειρική εξίσωση Manning

Το 1889, έναν αιώνα περίπου μετά τον Chezy, ο Manning βασιζόμενος σε μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων σε φυσικούς και τεχνητούς αγωγούς, παρουσίασε μια καθαρά εμπειρική σχέση, η οποία με τις μεταγενέστερες τροποποιήσεις πήρε την ακόλουθη μορφή :

$$\boxed{V = \frac{1}{n} \cdot R^{2/3} \cdot S_f^{1/2}} \quad \text{και} \quad \boxed{Q = \frac{1}{n} \cdot A \cdot R^{2/3} \cdot S_f^{1/2}} \quad (4.58)$$

όπου :  $n$  συντελεστής τραχύτητας, που ονομάζεται **συντελεστής του Manning**. Η εξίσωση 4.54 είναι γνωστή ως **εξίσωση του Manning** και η αξιοπιστία της, κυρίως σε τραχείς αγωγούς, έχει εξακριβωθεί σε ευρύ φάσμα

ροών. Για το λόγο αυτό καθώς και εξαιτίας της απλής μορφής της, η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται ευρύτατα στους υπολογισμούς ανοικτών αγωγών.

Ο συντελεστής  $n$  είναι ένας συντελεστής που εκφράζει την τραχύτητα του αγωγού. Από την εξίσωση όμως 4.54 προκύπτει ότι ο  $n$  έχει διαστάσεις  $[T \cdot L^{-1/3}]$ . Επειδή δεν είναι λογικό ένας συντελεστής τραχύτητας να έχει διαστάσεις χρόνου και για να είναι δυνατό η τιμή του να μην εξαρτάται από το σύστημα μονάδων που χρησιμοποιείται, έχει επικρατήσει να θεωρείται το  $n$  ως αδιάστατος αριθμός και οι διαστάσεις του να απορροφώνται από τον αριθμητή του κλάσματος <sup>1</sup>.

### β. Ο συντελεστής τριβής $n$

Από τις εξισώσεις 4.52, 4.55 και 4.58 προκύπτουν οι σχέσεις που συνδέουν το συντελεστή  $n$  με τα  $C$  και  $f$ :

$$n = R^{1/6}/C \quad \text{και} \quad n = R^{1/6} \sqrt{f/8g} \quad (4.59)$$

Πειραματικές μετρήσεις σε φυσικούς και τεχνητούς αγωγούς οδήγησαν στην ακόλουθη εμπειρική σχέση ανάμεσα στο  $n$  την τραχύτητα  $k_s$ , που είναι γνωστή ως τροποποιημένη εξίσωση του Strickler <sup>2</sup>:

$$n = 0.038 \cdot k_s^{1/6} \quad (\text{για } k_s \text{ σε m}) \quad (4.60)$$

Αν τώρα η σχέση αυτή συνδυαστεί με την 4.59 προκύπτει η σχέση ανάμεσα στα  $k_s$  και  $f$ :

$$f = \frac{8g}{C^2} = 0.113 \cdot \left( \frac{k_s}{R} \right)^{1/3} \quad (4.61)$$

Επειδή η σχέση αυτή δεν περιέχει όρους ταχύτητας (άρα και  $Re$ ), ισχύει προφανώς για αγωγούς με τραχιά τοιχώματα και είναι συγκρίσιμη με την εξίσωση 4.56β. Πράγματι σε τραχείς αγωγούς οι δύο αυτές σχέσεις δίνουν τιμές του  $f$  που συμφωνούν τόσο μεταξύ τους όσο και με πειραματικά αποτελέσματα.

1. Με το σκεπτικό αυτό μπορεί η μονάδα στον αριθμητή του κλάσματος  $1/n$  στη σχέση 4.54 να αντικατασταθεί από ένα συντελεστή  $\phi$ , ο οποίος είναι  $\phi = 1$  ( $m^{1/3}/s$ ) στο μετρικό σύστημα και  $\phi = 1.486$  ( $ft^{1/3}/s$ ) στο αγγλοσαξονικό σύστημα μονάδων.
2. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται αρκετές τέτοιες εμπειρικές σχέσεις, που συνδέουν το  $n$  με το  $k_s^{1/6}$ , οι οποίες διαφέρουν ως προς το συντελεστή αναλογίας και τον τρόπο με τον οποίο προσδιορίζεται το μέγεθος  $k_s$ .

Έτσι αποδεικνύεται η ακρίβεια των εξισώσεων Manning - Strickler για τέτοιες ροές. Επιπλέον, με βάση πλήθος πραγματικών παρατηρήσεων έχουν καταρτιστεί πολύ λεπτομερείς πίνακες τιμών του  $n$  [βλ. Chow (1959), French (1987)], γεγονός που διευκολύνει τη χρήση της εξίσωσης του Manning. Για τους λόγους αυτούς η εξίσωση του Manning χρησιμοποιείται πια σχεδόν αποκλειστικά στους σχετικούς υπολογισμούς ροής.

Για αγωγούς με υδραυλικά λείες ή ενδιάμεσες επιφάνειες ενδείκνυται η χρησιμοποίηση της εξίσωσης του Chezy σε συνδυασμό με τις εξισώσεις 4.56α,γ για τον υπολογισμό του  $f$ . Όμως, παρόλο που δεν είναι θεωρητικά όρθο, η εξίσωση του Manning χρησιμοποιείται στην πράξη ακόμη και για λείους αγωγούς με ικανοποιητική ακρίβεια, γι' αυτό και οι πίνακες τιμών του  $n$  περιλαμβάνουν και λείες επιφάνειες από υλικά όπως γυαλί, πλαστικό και μέταλλο. Τυπικές τιμές του συντελεστή  $n$  για συνήθεις επιφάνειες αγωγών δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

#### Τυπικές τιμές του συντελεστή $n$

Περιγραφή επιφάνειας αγωγού	$n$
Γυαλί, πλαστικό, λείο μέταλλο	0.009 ~ 0.010
Εύλο κατεργασμένο μέχρι ακατέργαστο	0.011 ~ 0.014
Επίχρισμα τσιμεντοκονίας (λείο) *	0.011
Σκυρόδεμα λείο μέχρι τραχύ	0.012 ~ 0.015
Εκτοξευμένο σκυρόδεμα (Gunitite) λείο μέχρι κοματοειδές ακατέργαστο	0.015 ~ 0.022
Ασφαλτικό	0.013 ~ 0.016
Πλινθοδομή	0.014 ~ 0.017
Χωμάτινη διώρυγα ευθύγραμμη, ομαλή, χωρίς βλάστηση	0.018 ~ 0.022
>> >> >> με μερικές πέτρες και χαμηλή βλάστηση	0.022 ~ 0.033
Διώρυγα με λεπτό αμμοχάλικο	0.024
>> με χοντρό αμμοχάλικο	0.028
>> διανοιγμένη σε βράχο	0.025 ~ 0.045
Φυσικά υδατορεύματα καθαρά και ευθύγραμμη	0.025 ~ 0.030
>> >> ελικοειδή με τοπικές εκβαθύνσεις	0.033 ~ 0.040
>> >> με βλάστηση και ανώμαλες επιφάνειες	0.075 ~ 0.150

### γ. Ισοδύναμος συντελεστής Manning

Σε πολλές περιπτώσεις αγωγών η τραχύτητα του αγωγού ποικίλλει κατά μήκος της περιμέτρου της διατομής (π.χ. διαφορετικό υλικό επίστρωσης πυθμένα και παρειών). Οι αγωγοί αυτοί ονομάζονται **αγωγοί σύνθετης τραχύτητας** και στους υπολογισμούς χρησιμοποιείται ο λεγόμενος **ισοδύναμος συντελεστής Manning**  $n_e$ , που αντιπροσωπεύει τη συνολική τραχύτητα της διατομής. Ο συντελεστής αυτός μπορεί να υπολογιστεί με βάση το ακόλουθο σκεπτικό :

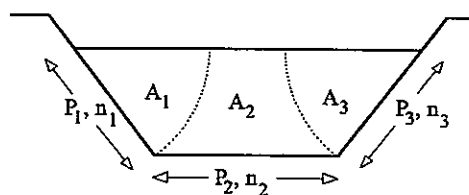
Διαιρούμε τη διατομή σε  $N$  υποδιατομές και θεωρούμε ότι κατά μήκος των νοητών διαχωριστικών γραμμών δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις. Ακόμη δεχόμαστε ότι η μέση ταχύτητα  $V$  είναι η ίδια σε όλες τις υποδιατομές και ότι η κλίση  $S_f$  παραμένει σταθερή κατά πλάτος. Τότε :

$$V = V_i, \quad S_f = S_{fi}, \quad i = 1, \dots, N$$

Από την εξίσωση του Manning και από την παραπάνω υπόθεση προκύπτει ότι

$$A = P \cdot R = P \cdot \left( V / S_f^{1/2} \right)^{3/2} \cdot n_e^{3/2}$$

$$A_i = P_i \cdot R_i = P_i \cdot \left( V / S_f^{1/2} \right)^{3/2} \cdot n_i^{3/2}$$



Αλλά :

$$A = \sum_{i=1}^N A_i$$

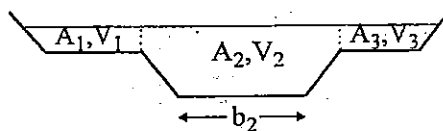
Με απλή αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση, προκύπτει η τιμή του ισοδύναμου συντελεστή  $n_e$  :

$$n_e = \left[ \frac{1}{P} \cdot \sum_{i=1}^N P_i \cdot n_i^{3/2} \right]^{2/3} \quad (4.62)$$

### δ. Η εξίσωση Manning σε αγωγούς σύνθετης διατομής

Στην ειδική περίπτωση **αγωγού σύνθετης διατομής**, όπως αυτή του σχήματος, με μικρό βάθος ροής στα πλαϊνά τμήματα του αγωγού (πλημμυρική κοίτη), η μέση ταχύτητα στα τμήματα αυτά είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα στο κεντρικό τμήμα (βαθεία κοίτη). Θεωρούμε τότε ότι η διατομή διαιρείται σε υποδιατομές με νοητές διαχωριστικές γραμμές κατά μήκος των οποίων γίνεται συνήθως η παραδοχή αμελητέων τριβών. Η γραμμή της

ελεύθερης επιφάνειας θεωρείται οριζόντια και η κατά μήκος κλίση της κοινή σε όλες τις υποδιατομές. Η συνολική παροχή υπολογίζεται ως άθροισμα των παροχών των επιμέρους τμημάτων :



$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i \left[ \frac{1}{n_i} A_i R_i^{2/3} \right] \cdot \sqrt{S_f} \quad (4.63)$$

### 4.4.3 Αγωγιμότητα

Οι εξισώσεις Manning και Chezy (4.58 και 4.52) μπορούν να γραφούν με την ακόλουθη ενιαία μορφή :

$$Q = K \cdot \sqrt{S_f} \quad (4.64)$$

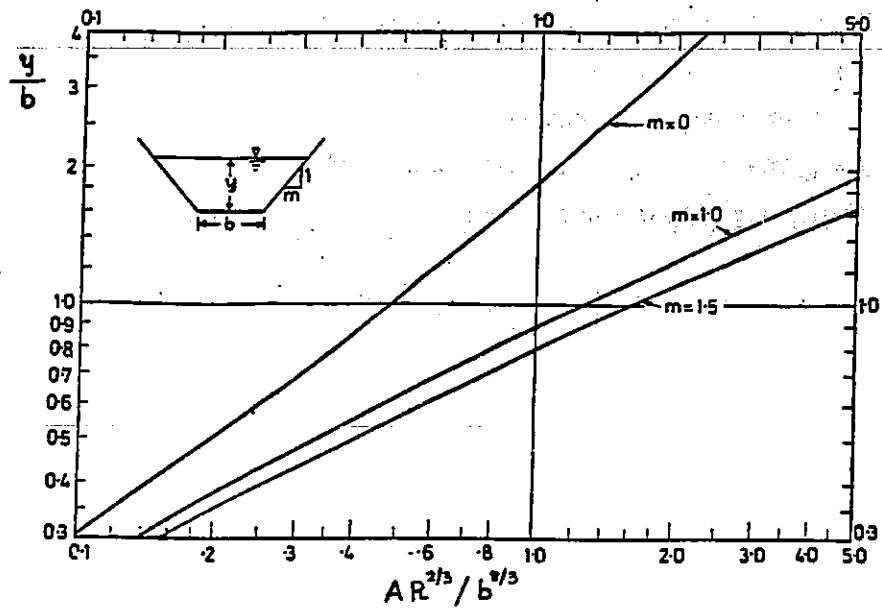
$$\text{όπου : } K = \begin{cases} \frac{1}{n} AR^{2/3} & \text{(Manning)} \\ CAR^{1/2} & \text{(Chezy)} \end{cases} \quad (4.65. \alpha)$$

$$(4.65. \beta)$$

Η ποσότητα  $K$  ονομάζεται **αγωγιμότητα** και εκφράζει την παροχευτική ικανότητα του αγωγού. Για δεδομένο αγωγό η αγωγιμότητα είναι συνάρτηση του βάθους  $y$  :  $K = K(y)$ . Προφανώς η μορφή της συνάρτησης εξαρτάται από το σχήμα της διατομής. Σε σχέση με αυτό κατατάσσουμε τους αγωγούς σε δύο κατηγορίες : Στους αγωγούς 1<sup>ου</sup> είδους ή αγωγούς ανοικτής διατομής και στους αγωγούς 2<sup>ου</sup> είδους ή αγωγούς κλειστής διατομής.

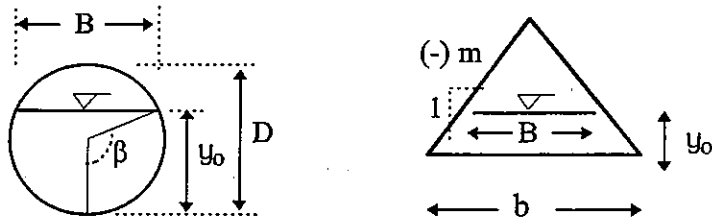
#### α. Αγωγοί 1<sup>ου</sup> είδους ή αγωγοί ανοικτής διατομής

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι αγωγοί, των οποίων το πλάτος  $B$  είναι σταθερό ή αυξάνει συνεχώς καθ' ύψος. Τέτοιοι είναι π.χ. οι ορθογωνικοί, οι τριγωνικοί, οι τραπεζοειδείς αγωγοί. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται σε αδιάστατη μορφή η σχέση  $y \leftrightarrow K(y)$  της εξίσωσης Manning για αγωγούς ορθογωνικής και τραπεζοειδούς διατομής. Είναι εμφανής η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ  $y$  και  $K$ . Επιπλέον, η αγωγιμότητα  $K$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση του βάθους.



**β. Αγωγοί 2<sup>ου</sup> είδους ή αγωγοί κλειστής διατομής**

Στους αγωγούς αυτούς υπάγονται οι κυκλικοί αγωγοί, οι ωσειδείς, οι τραπεζοειδείς με αρνητική κλίση πρανών.



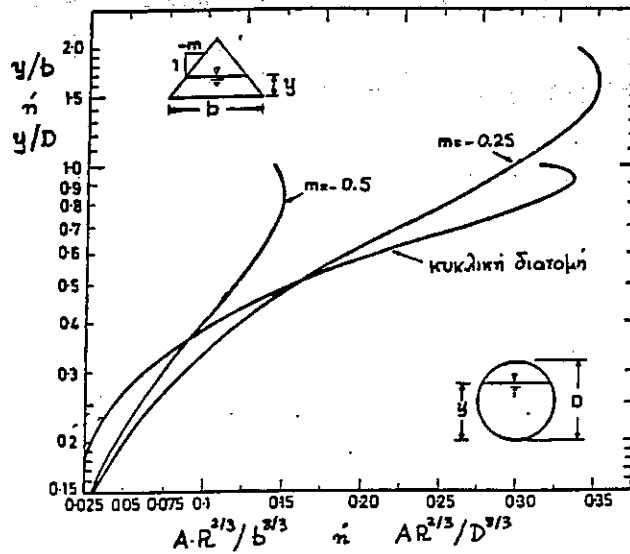
Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται γραφικά οι σχέσεις  $y \leftrightarrow K(y)$  της εξίσωσης Manning για κυκλικούς και τραπεζοειδείς αγωγούς. Ανάλογη μορφή έχουν και οι καμπύλες  $K(y)$  της εξίσωσης Chezy. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι για τιμές του βάθους  $y$  λίγο μικρότερες από το μέγιστο δυνατό βάθος η καμπύλη  $K(y)$  εμφανίζει μέγιστο. Η συνθήκη για μέγιστο  $K$  σε δεδομένο αγωγό είναι :

$$dK/dy = 0 \quad (4.66)$$

και με βάση την 4.65.α είναι :

$$\frac{d}{dy} (AR^{2/3}) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d}{dy} (A^5/P^2) = 0 \quad \text{για τραπεζοειδή με } m < 0$$

και  $\frac{d}{d\beta}(AR^{2/3}) = 0$  ή  $\frac{d}{d\beta}(A^5/P^2) = 0$  για κυκλικό αγωγό.



Στο παραπάνω σχήμα παρατηρεί ακόμη κανείς ότι η αντιστοιχία  $y \leftrightarrow K$  (ή  $y \leftrightarrow AR^{2/3}$ ) παύει να είναι αμφιμονοσήμαντη από κάποια τιμή του λόγου  $y/b$  ή  $y/D$  και πάνω. Ειδικότερα, για τιμές του βάθους στην περιοχή :

- (α)  $0.82 < y/D \leq 1$  για κυκλικό αγωγό,
- (β)  $0.71 < y/b \leq 1$  για τραπεζοειδή με  $m = -0.5$ ,
- (γ)  $1.3 < y/b \leq 2$  για τραπεζοειδή με  $m = -0.25$ ,

σε κάθε τιμή του  $K$  αντιστοιχούν δύο τιμές του βάθους  $y$ . Επομένως στις περιοχές αυτές δύο βάθη είναι δυνατά για κάθε τιμή του  $K$ .

Στην πράξη, κατά το σχεδιασμό ενός αγωγού αυτού του είδους τίθεται συνήθως ανώτατο επιτρεπτό όριο στο λόγο  $y/b$  ή  $y/D$ , ώστε να αποφεύγεται η περιοχή διπλού βάθους. Στην περιοχή αυτή μια μικρή διαταραχή στην ελεύθερη επιφάνεια μπορεί εύκολα να προκαλέσει συνεχή μεταπήδηση από το ένα βάθος στο άλλο και επομένως αστάθεια στην ελεύθερη επιφάνεια.

#### 4.4.4 Η κλίση τριβής σε ομοιόμορφη ροή

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την ομοιόμορφη ροή είναι (βλ. κεφ. 3.4.2) :

$$\text{εξίσ. συνέχειας} \Rightarrow Q(x) = Q = \text{σταθ.} \quad (3.45)$$

η οποία για πρισματικό αγωγό μετατρέπεται σε :  $y = y_0 = \text{σταθ.}$

$$\text{εξίσ. κίνησης} \Rightarrow S_f = S_0 \quad (3.46)$$

όπου  $S_0$  η κατά μήκος κλίση του πυθμένα. Δηλαδή, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 3.4.2, στην ομοιόμορφη ροή η κλίση τριβής  $S_f$  ταυτίζεται με την κλίση του πυθμένα και οι γραμμές ολικού φορτίου, ελεύθερης επιφάνειας και πυθμένα είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Η κλίση τριβής  $S_f$  εκφράζεται από τις εξισώσεις του Manning ή του Chezy (εξισώσεις 4.64, 4.65). Για αγωγό δεδομένης γεωμετρίας διατομής και τραχύτητας και με δεδομένη παροχή, η κλίση  $S_f$  είναι :

$$S_f = [Q/K(y)]^2 = S_f(y)$$

Ο συνδυασμός με την 3.46 οδηγεί στην εξίσωση :

$$S_0 = S_f(y_0) = \left( \frac{Q}{K_0} \right)^2 \quad \text{ή} \quad Q = K_0 \sqrt{S_0} \quad (4.67)$$

$$\text{όπου : } K_0 = K(y_0) = \begin{cases} \frac{1}{n} A_0 R_0^{2/3} & \text{(Manning)} \\ CA_0 R_0^{1/2} & \text{(Chezy)} \end{cases} \quad (4.68. \alpha)$$

$$(4.68. \beta)$$

και  $A_0 = A(y_0)$  και  $R_0 = R(y_0)$ .

Έτσι, η ομοιόμορφη ροή περιγράφεται από τις εξισώσεις Manning και Chezy, αρκεί να γίνουν σ' αυτές οι αντικαταστάσεις  $y = y_0$  και  $S_f = S_0$ .

#### 4.4.5 Κλίση τριβής – Κρίσιμη κλίση – Ορισμοί

Σύμφωνα με τα προηγούμενα (κεφ. 4.4.3 και 4.4.4), για δεδομένο αγωγό με δεδομένη παροχή  $Q$  ισχύουν οι σχέσεις :



$$S_f = (Q/K)^2, \quad \text{όπου} \quad K = K(y) \quad (4.69)$$

$$\text{και} \quad S_o = S_f(y_o) = (Q/K_o)^2, \quad \text{όπου} \quad K_o = K(y_o) \quad (4.70)$$

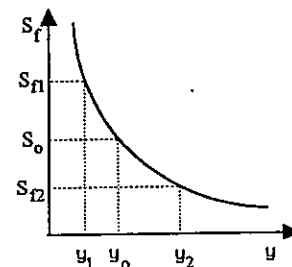
Η αγωγιμότητα του αγωγού  $K$ , που υπολογίζεται από τις σχέσεις 4.65.α,β, είναι γενικά μια αύξουσα συνάρτηση του βάθους  $y$  (με εξαίρεση την περιοχή διπλού βάθους στους αγωγούς 2<sup>ου</sup> είδους, βλ. κεφ. 4.4.3). Κατά συνέπεια η κλίση τριβής  $S_f = S_f(y)$  είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του  $y$ .

Έτσι, αν το βάθος ροής  $y$  είναι :

$$y > y_o \quad \text{τότε} \quad : \quad S_f < S_o$$

$$y = y_o \quad \text{τότε} \quad : \quad S_f = S_o$$

$$y < y_o \quad \text{τότε} \quad : \quad S_f > S_o$$



Κατ' αντιστοιχία προς τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Manning ή Chezy, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγεθος της κλίσης  $S_f$  που αντιστοιχεί σε βάθος ίσο με το κρίσιμο, δηλαδή :

$$S_c = S_f(y_c) = (Q/K_c)^2 \quad \text{και} \quad K_c = K(y_c) \quad (4.71)$$

Την κλίση  $S_c$  την ονομάζουμε **κρίσιμη κλίση**.

Συγκρίνοντας τώρα την κλίση του πυθμένα  $S_o$  με το μέγεθος  $S_c$  κατατάσσουμε τους αγωγούς στις ακόλουθες κατηγορίες :

- α)  $S_o < S_c \quad \Leftrightarrow \quad y_o > y_c \quad \rightarrow \quad \text{ήπια κλίση πυθμένα}$
- β)  $S_o = S_c \quad \Leftrightarrow \quad y_o = y_c \quad \rightarrow \quad \text{κρίσιμη κλίση πυθμένα}$
- γ)  $S_o > S_c \quad \Leftrightarrow \quad y_o < y_c \quad \rightarrow \quad \text{απότομη κλίση πυθμένα}$

Στις κατηγορίες αυτές πρέπει να προστεθούν και οι αγωγοί με **οριζόντιο πυθμένα**  $S_o = 0$ , όπου  $y_o \rightarrow \infty$ , καθώς και οι αγωγοί με **αρνητική κλίση πυθμένα**  $S_o < 0$ , στους οποίους το  $y_o$  δεν ορίζεται. Δηλαδή στους αγωγούς αυτούς δεν μπορεί να υπάρξει ομοιόμορφη ροή. Η κατάταξη αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής.

### Παράδειγμα

Αγωγός τριγωνικής διατομής με κλίση πρανών  $m = 1$  και συντελεστή τριβής  $n = 0.015$  μεταφέρει παροχή  $Q = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$  με ομοιόμορφο βάθος ροής  $y_0 = 1.14 \text{ m}$ . Να υπολογιστούν : η κατά μήκος κλίση πυθμένα  $S_0$ , το κρίσιμο βάθος  $y_c$  και η κρίσιμη κλίση  $S_c$ . Να χαρακτηριστεί το είδος κλίσης του πυθμένα.

Λύση

$$\text{Εξίσ. 4.65.α} \Rightarrow K = \frac{1}{n} \cdot A \cdot R^{2/3} = \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{A^5}{P^2} \right)^{1/3}$$

Για τριγωνικό αγωγό :  $A = m \cdot y^2$  και  $P = 2\sqrt{1+m^2} \cdot y$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{n} \cdot \left[ \frac{m^5 \cdot y^{10}}{4(1+m^2) \cdot y^2} \right]^{1/3} = \frac{1}{n} \cdot \alpha_1 \cdot y^{8/3}$$

$$\text{όπου :} \quad \alpha_1 = \left[ \frac{m^5}{4(1+m^2)} \right]^{1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Επομένως :} \quad K_0 = K(y_0) = \frac{1}{n} \cdot \alpha_1 \cdot y_0^{8/3} = 47.274 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{και :} \quad S_0 = (Q/K_0)^2 = 1 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{εξίσ. 4.9} \Rightarrow y_c = \left( \frac{2Q^2}{gm^2} \right)^{1/5} = 0.856 \text{ m}$$

$$\text{Επομένως :} \quad K_c = K(y_c) = \frac{1}{n} \cdot \alpha_1 \cdot y_c^{8/3} = 21.997 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{και :} \quad S_c = \left( \frac{Q}{K_c} \right)^2 = \left( \frac{nQ}{\alpha_1 y_c^{8/3}} \right)^2 = 4.65 \cdot 10^{-3}$$

Είναι προφανές ότι :  $S_0 < S_c$  και  $y_0 > y_c$ . Άρα η κλίση του πυθμένα είναι ήπια.

## 5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ

### 5.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ

Όπως είναι ήδη γνωστό από το κεφάλαιο 3.4.2, η ομοιόμορφη ροή χαρακτηρίζεται από σταθερότητα των διάφορων μεγεθών της κατά μήκος του αγωγού· δηλαδή, από σταθερό μέγεθος ταχύτητας  $V$ , βάθους ροής  $y_0$  που ονομάζεται ομοιόμορφο ή κανονικό βάθος, εμβαδού  $A$ , ειδικής ενέργειας  $E$ , και όλων των υπόλοιπων παράγωγων μεγεθών της ροής. Αυτό σημαίνει ότι οι επιταχύνσεις και προφανώς η συνισταμένη όλων εξωτερικών δυνάμεων είναι ίσες με το μηδέν.

Γενικά, ομοιόμορφη ροή μπορεί να υπάρξει μόνο σε έναν ευθύγραμμο πρισματικό αγωγό πολύ μεγάλου μήκους, χωρίς ενδιάμεσα τεχνικά έργα και με συνθήκες εισόδου και εξόδου που επηρεάζουν ελάχιστα τη ροή. Επειδή οι προϋποθέσεις αυτές σπάνια υπάρχουν, σπάνια πραγματοποιείται ομοιόμορφη ροή. Όμως η έννοια της ομοιόμορφης ροής είναι πολύ βασική στην κατανόηση και επίλυση των περισσότερων προβλημάτων ροής σε ανοικτούς αγωγούς. Θα έλεγε κανείς ότι η ομοιόμορφη ροή είναι η ιδανική εκείνη κατάσταση προς την οποία τείνει η πραγματική ροή, όταν της το επιτρέπουν οι οριακές συνθήκες και η μορφή του αγωγού.

### 5.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ

Σύμφωνα με τα όσα προαναφέρθηκαν στο κεφ. 4.4.4, η βασική εξίσωση της ομοιόμορφης ροής είναι η ακόλουθη :

$$Q = K_0 \sqrt{S_0} = \begin{cases} \frac{1}{n} A_0 R_0^{2/3} \sqrt{S_0} & \text{(Manning)} & (5.1. \alpha) \\ CA_0 \sqrt{R_0 S_0} & \text{(Chezy)} & (5.1. \beta) \end{cases}$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης αυτής λύνονται όλα τα προβλήματα ομοιόμορφης ροής. Στην ανάπτυξη που ακολουθεί, γίνεται κυρίως χρήση της εξίσωσης του Manning, η οποία είναι η περισσότερο διαδεδομένη εξίσωση ομοιόμορφης ροής. Προφανώς ανάλογη είναι και η διαδικασία επίλυσης στην περίπτωση χρησιμοποίησης της εξίσωσης του Chezy.

Από την εξίσωση 5.1 γίνεται φανερό, ότι τα μεγέθη που υπεισέρχονται σε προβλήματα ομοιόμορφης ροής είναι τα ακόλουθα :

$Q$  (ή  $V$ ),  $n$  (ή  $C$ ),  $y_0$ ,  $S_0$  και τα γεωμετρικά μεγέθη της διατομής.

Επομένως πέντε είναι τα είδη προβλημάτων που μπορεί να εμφανιστούν, ανάλογα με το ποιο από τα παραπάνω μεγέθη είναι άγνωστο και ζητείται να υπολογιστεί. Η διαδικασία επίλυσης είναι απλή αν το ζητούμενο είναι η παροχή  $Q$  ή ο συντελεστής τριβής  $n$  ή η κατά μήκος κλίση  $S_0$ , όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα που ακολουθούν. Αν το μέγεθος που ζητείται να υπολογιστεί είναι το βάθος  $y_0$  ή κάποιο γεωμετρικό μέγεθος της διατομής (έστω  $\chi$ ), τότε οι εξισώσεις Manning (και Chezy) μετατρέπονται σε εξισώσεις της μορφής :

$$nK_0 = A_0 R_0^{2/3} = \frac{A_0^{5/3}}{P_0^{2/3}} = \frac{nQ}{\sqrt{S_0}} \quad (5.2)$$

δηλαδή:  $f(y_0) = a$  ή  $f(\chi) = a$ , όπου  $a = \text{σταθερά}$ .

Για ορισμένα σχήματα διατομών η εξίσωση αυτή έχει απλή μορφή και λύνεται απευθείας ως προς  $y_0$  ή  $\chi$  αντίστοιχα. Συνήθως όμως είναι μια μη γραμμική εξίσωση ως προς  $y_0$  ή  $\chi$  και για την επίλυσή της απαιτείται κάποια επαναληπτική αριθμητική διαδικασία. Επειδή ο υπολογισμός του ομοιόμορφου βάθους έχει ιδιαίτερη σημασία, εξετάζεται σε χωριστή παράγραφο. Στη συνέχεια δίνονται αριθμητικά παραδείγματα για τα άλλα τέσσερα είδη προβλημάτων.

### Παράδειγμα 1

Αγωγός τραπεζοειδούς διατομής έχει πλάτος πυθμένα  $b = 10\text{m}$ , κλίση πρανών  $m = 1.5$  και κατά μήκος κλίση πυθμένα  $S_0 = 0.0003$ . Ο αγωγός είναι επενδυμένος με λείο σκυρόδεμα συντελεστή τριβής  $n = 0.012$ . Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα  $V$  και η παροχή  $Q$ , αν το βάθος ροής είναι:  $y_0 = 3\text{m}$ .

Λύση

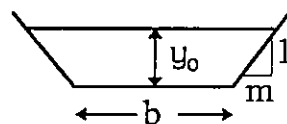
$$A_0 = by_0 + my_0^2 = 43.5\text{m}^2$$

$$P_0 = b + 2\sqrt{1+m^2} \cdot y_0 = 20.817\text{m}$$

$$R_0 = A_0/P_0 = 2.090\text{m}$$

$$V = \frac{1}{n} R_0^{2/3} S_0^{1/2} = 2.36\text{m/s}$$

$$Q = A_0 \cdot V = 102.66 \text{ m}^3/\text{s}$$



## Παράδειγμα 2

Για τον αγωγό του προηγούμενου παραδείγματος να βρεθεί η κλίση του πυθμένα  $S_o$  που απαιτείται για τη μεταφορά  $50 \text{ m}^3/\text{s}$  παροχής με ομοιόμορφο βάθος  $y_o = 3\text{m}$ .

Λύση

$$A_o = 43.5 \text{ m}^2, P_o = 20.817\text{m}, R_o = 2.09\text{m}$$

$$S_o = \left( \frac{nQ}{A_o R_o^{2/3}} \right)^2 = 0.712 \cdot 10^{-4}$$

## Παράδειγμα 3

Τριγωνικός αγωγός με εσωτερική γωνία  $75^\circ$  μεταφέρει παροχή  $Q = 1.2\text{m}^3/\text{s}$  με βάθος  $y_o = 0.8\text{m}$ . Αν η κλίση του πυθμένα είναι  $S_o = 0.009$ , να βρεθεί ο συντελεστής τριβής  $n$  του αγωγού.

Λύση

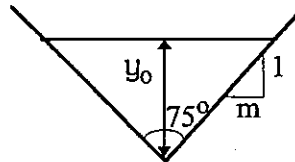
$$m = \tan(75^\circ/2) = 0.7673$$

$$A_o = m y_o^2 = 0.491\text{m}^2$$

$$P_o = 2\sqrt{1+m^2} \cdot y_o = 2.017\text{m}$$

$$R_o = A_o/P_o = 0.243\text{m}$$

$$n = A_o R_o^{2/3} S_o^{1/2} / Q = 0.0151$$



## Παράδειγμα 4

Τραπεζοειδής αγωγός με συντελεστή τριβής  $n = 0.015$  και κατά μήκος κλίση  $S_o = 0.0004$  πρόκειται να κατασκευαστεί για να παροχετεύει  $100\text{m}^3/\text{s}$  με βάθος ροής  $y_o = 2.5\text{m}$ . Αν η κλίση των πρανών είναι 1:1, να υπολογιστεί το απαιτούμενο πλάτος  $b$  του πυθμένα.

Λύση

$$A_o = b y_o + m y_o^2 = (b + 2.5) \cdot 2.5$$

$$P_o = b + 2\sqrt{1+m^2} \cdot y_o = b + 2\sqrt{2} \cdot 2.5 = b + 7.071$$

$$R_o = A_o/P_o$$

$$A_o R_o^{2/3} = n K_o = \frac{nQ}{\sqrt{S_o}} = 75$$

$$\Rightarrow \frac{[(b+2.5) \cdot 2.5]^{5/3}}{(b+7.071)^{2/3}} = 75$$

Με αριθμητική διαδικασία διαδοχικών επαναλήψεων προκύπτει :

$$b = 16.33\text{m.}$$

### 5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΒΑΘΟΥΣ

Ο υπολογισμός ομοιόμορφου βάθους είναι απαραίτητος σε όλα σχεδόν τα προβλήματα ροής σε ανοικτούς αγωγούς και γίνεται με τη βοήθεια της εξίσωσης 5.1 ή 5.2.

Όπως προαναφέρθηκε στο κεφ. 4.4.3, για αγωγούς ανοικτής διατομής η  $f(y)$  ( $= nK$ ) είναι μια αύξουσα συνάρτηση του βάθους. Σε κάθε τιμή του όρου  $nQ/\sqrt{S_0}$  αντιστοιχεί μία και μόνο τιμή του βάθους  $y_0$ . Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση των αγωγών κλειστής διατομής εφόσον η τιμή του  $nQ/\sqrt{S_0}$  δεν βρίσκεται στην περιοχή τιμών διπλού βάθους. Στη συνέχεια εξετάζονται διάφορες μορφές διατομής από την άποψη υπολογισμού του ομοιόμορφου βάθους.

#### α. Τριγωνικός αγωγός

Σε τριγωνικό αγωγό έχουμε :

$$A = my^2, \quad P = 2\sqrt{1+m^2} \cdot y, \quad R = A/P$$

Μετά τις αντικαταστάσεις οι εξισώσεις 4.65 γίνονται :

$$K = \frac{1}{n} AR^{2/3} = \frac{1}{n} \cdot \alpha_1 \cdot y^{8/3} \quad (\text{Manning})$$

$$\text{ή} \quad K = CAR^{1/2} = C \cdot \alpha_2 \cdot y^{5/2} \quad (\text{Chezy})$$

$$\text{όπου :} \quad \alpha_1 = \left[ \frac{m^5}{4(1+m^2)} \right]^{1/3} \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \left[ \frac{m^3}{2\sqrt{1+m^2}} \right]^{1/2}$$

Από το συνδυασμό των εξισώσεων αυτών με την 5.1 προκύπτει η μορφή των εξισώσεων Manning και Chezy για τριγωνικό αγωγό :

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \alpha_1 \cdot y_0^{8/3} \sqrt{S_0} \quad \text{και} \quad Q = C \cdot \alpha_2 \cdot y_0^{5/2} \sqrt{S_0} \quad (5.3)$$

Η επίλυση ως προς  $y_0$  της εξίσωσης Manning δίνει :

$$y_0 = \left( \frac{nQ}{\alpha_1 \sqrt{S_0}} \right)^{3/8} = \left( \frac{nQ}{\sqrt{S_0}} \right)^{3/8} \cdot \left[ \frac{4}{m^5} (1+m^2) \right]^{1/8} \quad (5.4.a)$$

και της εξίσωσης Chezy δίνει :

$$y_0 = \left( \frac{Q}{\alpha_2 C \sqrt{S_0}} \right)^{2/5} = \left( \frac{Q}{C \sqrt{S_0}} \right)^{2/5} \cdot \left[ \frac{2}{m^3} \sqrt{1+m^2} \right]^{1/5} \quad (5.4.β)$$

### β. Ορθογωνικός αγωγός μεγάλου πλάτους

Με τον όρο αυτόν ονομάζουμε τους πολύ αβαθείς ορθογωνικούς αγωγούς με μικρό λόγο  $y/b$ . Συγκεκριμένα, αν  $y/b < 0.02$  μπορεί με ικανοποιητική ακρίβεια να θεωρηθεί ότι :  $R \approx y$ . Πράγματι για ορθογωνικό αγωγό έχουμε :

$$A = by, \quad P = b + 2y, \quad R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/b}$$

και :  $y/b \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow y$ .

Στην περίπτωση αυτή :

$$K = \frac{1}{n} \cdot b \cdot y^{5/3} \quad \text{ή} \quad K = C \cdot b \cdot y^{3/2}$$

και σε συνδυασμό με την 5.1 προκύπτει η μορφή των εξισώσεων Manning και Chezy για ορθογωνικό αγωγό μεγάλου πλάτους :

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{1}{n} \cdot y_0^{5/3} \cdot S_0^{1/2} \quad \text{ή} \quad q = \frac{Q}{b} = C \cdot y_0^{3/2} \cdot S_0^{1/2} \quad (5.5)$$

Η επίλυση ως προς  $y_0$  δίνει :

$$y_0 = \left[ \frac{nq}{\sqrt{S_0}} \right]^{3/5} \quad \text{ή} \quad y_0 = \left[ \frac{q}{C \sqrt{S_0}} \right]^{2/3} \quad (5.6)$$

### γ. Ορθογωνικός αγωγός

Σε ορθογωνικό αγωγό η εξίσωση 4.65.α γίνεται :

$$K = \frac{1}{n} AR^{2/3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(by)^{5/3}}{(b+2y)^{2/3}}$$

Όμοια προσδιορίζεται η έκφραση του  $K$  για την εξίσωση Chezy.

Σε συνδυασμό με την 5.2 έχουμε :

$$\boxed{\frac{(by_0)^{5/3}}{(b+2y_0)^{2/3}} = \frac{nQ}{\sqrt{S_0}}} \quad (5.7)$$

ή σε αδιαστατοποιημένη μορφή :

$$\frac{\omega_0^{5/3}}{(1+2\omega_0)^{2/3}} = \frac{nQ}{b^{8/3}\sqrt{S_0}}, \quad \text{όπου : } \omega_0 = y_0/b \quad (5.8)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια μη γραμμική εξίσωση ως προς  $y_0$  ή  $\omega_0$ , έχει μία μόνο πραγματική ρίζα (βλ. σχήμα κεφαλαίου 4.4.3.α) και μπορεί να λυθεί με κάποια από τις γνωστές μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης. Έτσι μπορεί να μετατραπεί σε πολυώνυμο 5<sup>ου</sup> βαθμού και να βρεθεί η ρίζα του (βλ. ανάλογη αντιμετώπιση στον υπολογισμό κρίσιμου βάθους σε τραπεζοειδή αγωγό, εξισ. 4.11, 4.12). Μπορεί ακόμη να λυθεί με τη μέθοδο της συναρτησιακής επανάληψης, αν τεθεί με τη μορφή  $\omega_0 = f(\omega_0)$ , ή με δοκιμές.

#### Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το βάθος  $y_0$  σε αγωγό ορθογωνικής διατομής με πλάτος  $b = 4\text{m}$ , συντελεστή τριβής  $n = 0.015$ , κατά μήκος κλίση  $S_0 = 0.0001$  και παροχή  $Q = 10\text{m}^3/\text{s}$ .

Λύση :

Μετά την αντικατάσταση των δεδομένων στην εξίσωση 5.7 και την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει :

$$y_0 \left( \frac{2y_0}{2+y_0} \right)^{2/3} = 3.5$$

Αν η σχέση αυτή γραφεί με τη μορφή :



$$y_0 = 3.5 \cdot \left( \frac{2 + y_0}{2y_0} \right)^{2/3} = 3.5 \cdot (0.5 + 1/y_0)^{2/3}$$

μπορεί εύκολα να λυθεί με τη μέθοδο της συναρτησιακής επανάληψης. Είναι :  
 $y_0 = 3.08\text{m}$ .

#### δ. Τραπεζοειδής αγωγός

Για τραπεζοειδή αγωγό έχουμε :

$$A = by + my^2, \quad P = b + 2\sqrt{1 + m^2} \cdot y$$

και η εξίσωση 4.65.α γράφεται :

$$K = \frac{1}{n} \cdot \frac{[(b + my) \cdot y]^{5/3}}{[b + 2\sqrt{1 + m^2} \cdot y]^{2/3}}$$

Όμοια προσδιορίζεται η έκφραση του  $K$  για την εξίσωση Chezy.

Σε συνδυασμό με την 5.2 έχουμε :

$$\frac{[(b + my_0) \cdot y_0]^{5/3}}{[b + 2\sqrt{1 + m^2} \cdot y_0]^{2/3}} = \frac{nQ}{\sqrt{S_0}} \quad (5.9)$$

ή σε αδιαστατοποιημένη μορφή :

$$\frac{[(1 + m \cdot \omega_0) \cdot \omega_0]^{5/3}}{[1 + 2\sqrt{1 + m^2} \cdot \omega_0]^{2/3}} = \frac{nQ}{b^{8/3} \cdot S_0^{1/2}}, \quad \text{όπου : } \omega_0 = y_0 / b \quad (5.10)$$

Για την επίλυσή της ισχύουν όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως για την περίπτωση ορθογωνικού αγωγού με τη διαφορά ότι η μετατροπή σε πολυώνυμο θα δώσει τώρα ένα πολυώνυμο 10<sup>ου</sup> βαθμού.

#### Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το βάθος  $y_0$  σε αγωγό τραπεζοειδούς διατομής με στοιχεία :  $b = 2\text{m}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 0.012$ ,  $S_0 = 0.0009$  και  $Q = 11.7\text{m}^3/\text{s}$ .

Λύση

Μετά την αντικατάσταση των δεδομένων στην εξίσωση 5.9 προκύπτει :

$$y_0^{5/3}(2+y_0)^{5/3} / (1+\sqrt{2}\cdot y_0)^{2/3} = 7.43$$

Από την επίλυση προκύπτει :  $y_0 = 1.5\text{m}$ . Η διαδικασία επίλυσης αφήνεται ως άσκηση.

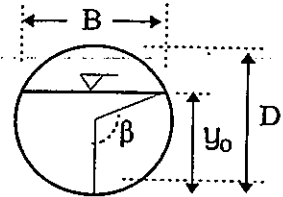
**ε. Κυκλικός αγωγός**

Για κυκλικό αγωγό έχουμε :

$$y = \frac{D}{2}(1 - \cos \beta), \quad B = D \sin \beta, \quad P = D \cdot \beta$$

$$A = \frac{D^2}{4}(\beta - \sin \beta \cdot \cos \beta) = \frac{D^2}{8}(2\beta - \sin 2\beta)$$

και 
$$K = \frac{D^{8/3}}{32 \cdot n} \cdot \left[ (2\beta - \sin 2\beta)^5 / \beta^2 \right]^{1/3}$$



Έτσι σε συνδυασμό με την 5.2 έχουμε :

$$\boxed{\left[ (2\beta_0 - \sin 2\beta_0)^5 / \beta_0^2 \right]^{1/3} = \frac{32 \cdot nQ}{D^{8/3} \sqrt{S_0}}} \quad (5.11)$$

και 
$$y_0 = \frac{D}{2}(1 - \cos \beta_0) \quad (5.12)$$

Η εξίσωση 5.11 είναι μια εξίσωση της μορφής  $f(\beta_0) = \text{σταθ}$ . Η εύρεση της ρίζας  $\beta_0$  μπορεί να γίνει με επαναληπτική διαδικασία, π.χ. με τη μέθοδο της διχοτόμησης. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο 4.4.3.β, η εξίσωση 5.11 έχει μία μόνο ρίζα για το διάστημα τιμών του  $y_0/D : [0, 0.82]$ . Αν  $y_0/D > 0.82$ , τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες. Στην περιοχή αυτή δύο ομοιόμορφα βάθη είναι δυνατά για κάθε τιμή της παροχής  $Q$ . (Έχουμε αναφέρει, ότι η περιοχή διπλού ομοιόμορφου βάθους κατά κανόνα αποφεύγεται κατά το σχεδιασμό έργων αυτής της μορφής ώστε να αποφεύγεται η αστάθεια της ελεύθερης επιφάνειας).

Ακόμη υπάρχει μία τιμή του λόγου  $y_0/D$  (ή του  $\beta_0$ ) στην περιοχή διπλού βάθους για την οποία μεγιστοποιείται η αγωγιμότητα  $K$  (βλ. εξίσ. 4.66). Επομένως σύμφωνα με την εξίσωση 5.1 μεγιστοποιείται και η παροχή  $Q$  την οποία ο συγκεκριμένος αγωγός μπορεί να μεταφέρει, αν  $S_0$  είναι δεδομένη. Δηλαδή :

$$Q_{\max} \Leftrightarrow K_{\max} \quad (5.13)$$

**Παράδειγμα :** Υπολογισμός ομοιόμορφου βάθους σε κυκλικό αγωγό

Αποχετευτικός αγωγός κυκλικής διατομής έχει διάμετρο  $D = 2.0\text{m}$ , κατά μήκος κλίση  $S_0 = 0.0004$  και συντελεστή τριβής  $n = 0.014$ . Να υπολογιστεί το ομοιόμορφο βάθος αν  $Q = 2.0\text{m}^3/\text{s}$ .

Λύση

Μετά την αντικατάσταση των δεδομένων στην 5.11 έχουμε :

$$\Rightarrow \frac{(2\beta_0 - \sin 2\beta_0)^{5/3}}{\beta_0^{2/3}} = 7.0555$$

Με τη μέθοδο της διχοτόμησης προκύπτει :  $\beta = 1.815\text{rad}$  ( $\approx 104^\circ$ ). Τότε :

$$\frac{y_0}{D} = \frac{1}{2}(1 - \cos \beta_0) = 0.6209$$

και  $y_0 = 1.242\text{m}$ .

**Παράδειγμα :** Υπολογισμός μέγιστης παροχής σε κυκλικό αγωγό

Σε κυκλικό αγωγό με δεδομένα  $D$ ,  $S_0$  και  $n$  να υπολογιστούν : α) ο λόγος  $y/D$  για τον οποίο η παροχή γίνεται μέγιστη και β) ο λόγος  $Q_m/Q_f$ , αν  $Q_m$  είναι η μέγιστη παροχή και  $Q_f$  η παροχή που αντιστοιχεί σε πλήρη διατομή.

Λύση

α) Σύμφωνα με τις σχέσεις 5.13 και 4.66 έχουμε :

$$\frac{dQ}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}(AR^{2/3}) = \frac{d}{dy}(A^{5/3}/P^{2/3}) = 0$$

επειδή :  $y = y(\beta)$ ,  $A = A(\beta)$  και  $P = P(\beta)$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\beta}(A^5/P^2) = 0$$

$$\Rightarrow 5P \frac{dA}{d\beta} - 2A \frac{dP}{d\beta} = 0$$

όπου :  $P = D \cdot \beta$ ,  $A = \frac{D^2}{8}(2\beta - \sin 2\beta)$

$$\frac{dA}{d\beta} = \frac{D^2}{4}(1 - \cos 2\beta) \quad \text{και} \quad \frac{dP}{d\beta} = D$$

$$\Rightarrow 3\beta - 5\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 2.639 \text{ rad } (= 151.2^\circ)$$

$$\Rightarrow y / D = (1 - \cos \beta) / 2 = 0.938$$

$$\beta) \quad \frac{Q_m}{Q_f} = \frac{A_m R_m^{2/3}}{A_f R_f^{2/3}} = \left( \frac{A_m}{A_f} \right)^{5/3} \cdot \left( \frac{P_f}{P_m} \right)^{2/3}$$

$$\text{όπου : } A_m = \frac{D^2}{8}(2\beta - \sin 2\beta) = \frac{D^2}{8} [2 \cdot 2.639 - \sin(2 \cdot 2.639)]$$

$$P_m = D \cdot \beta = D \cdot 2.639$$

$$A_f = \pi \cdot D^2 / 4 \quad \text{και} \quad P_f = \pi \cdot D$$

$$\frac{Q_m}{Q_f} = \left( \frac{2 \cdot 2.639 - \sin(2 \cdot 2.639)}{2 \cdot \pi} \right)^{5/3} \cdot \left( \frac{\pi}{2.639} \right)^{2/3} = 1.0757$$

Επομένως η μέγιστη παροχή είναι κατά 7.6% μεγαλύτερη από την παροχή που αντιστοιχεί σε πλήρη διατομή.

## 5.4 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΣΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

Κατά το σχεδιασμό ενός ανοικτού αγωγού ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο υδραυλικός μηχανικός είναι το πρόβλημα επιλογής του σχήματος και των διαστάσεων της διατομής του αγωγού, ο οποίος θα μεταφέρει την απαιτούμενη παροχή με τη διαθέσιμη διαφορά ολικού φορτίου (υψομετρική διαφορά αρχής και τέλους). Στην προσπάθεια διαστασιολόγησης της διατομής χρήσιμη είναι η έννοια της λεγόμενης οικονομικής διατομής, η οποία στηρίζεται στην έννοια της οικονομικής απόδοσης ενός αγωγού. Πράγματι, όπως θα δούμε στη συνέχεια όλες οι διατομές δεν έχουν την ίδια απόδοση. Αν η εξίσωση του Manning γραφεί με τη μορφή :

$$Q = \frac{S_0^{1/2}}{n} \cdot \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}$$

γίνεται φανερό ότι, για δεδομένες τιμές των  $n$  και  $S_0$  (που καθορίζονται από άλλα κριτήρια), και για δεδομένο εμβαδό διατομής  $A$  η παροχή  $Q$  γίνεται μέγιστη όταν η βρεχόμενη περίμετρος  $P$  γίνεται ελάχιστη. Μια τέτοια διατομή ονομάζεται **διατομή μέγιστης απόδοσης** ή **οικονομική διατομή**. Προφανώς με βάση γεωμετρικά κριτήρια η κυκλική είναι η πιο οικονομική μορφή διατομής, αφού ο κύκλος έχει την ελάχιστη περίμετρο από όλα τα γεωμετρικά επίπεδα σχήματα ίδιου εμβαδού. Αν όμως το σχήμα της διατομής καθοριστεί με άλλα κριτήρια, τότε το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα επιλογής διαστάσεων για το συγκεκριμένο κάθε φορά σχήμα διατομής. Όπως θα αποδειχτεί στη συνέχεια η οικονομικότητα για κάθε σχήμα διατομής εξασφαλίζεται όταν το σχήμα είναι περιγεγραμμένο σε ημικόκλιο.

Ας σημειωθεί ότι για δεδομένο μέγεθος παροχής  $Q$  (και δεδομένα  $S_0$  και  $n$ ) ελαχιστοποίηση της περιμέτρου σημαίνει ταυτόχρονα και ελαχιστοποίηση του εμβαδού  $A$ . Πράγματι, από την εξίσωση του Manning για δεδομένο μέγεθος παροχής  $Q$  και δεδομένα  $n$  και  $S_0$ , προκύπτει :

$$A = c \cdot P^{2/5} \quad \text{όπου :} \quad c = \left( \frac{nQ}{\sqrt{S_0}} \right)^{3/5} = \text{σταθ.} \quad (5.14)$$

$$\text{Αν :} \quad dP/dy = 0 \Leftrightarrow dA/dy = 0 \quad (5.15)$$

$$\text{και :} \quad P_{\min} \Leftrightarrow A_{\min}$$

Με βάση τις εξισώσεις αυτές μπορούν να προκύψουν σχέσεις ανάμεσα στα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής και στο βάθος  $y$ , για να χρησιμοποιηθούν στη διαστασιολόγηση μιας διατομής και να εξασφαλίσουν παράλληλα την ελαχιστοποίηση του κόστους εκκαφών και επίστρωσης<sup>1</sup>.

Για παράδειγμα, έστω ορθογωνικός αγωγός.

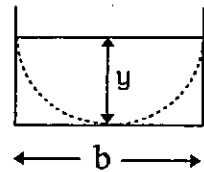
Το μέγεθος που χρειάζεται να προσδιοριστεί είναι το πλάτος  $b$  ως συνάρτηση του βάθους  $y$ . Σύμφωνα με τις σχέσεις 5.15 είναι :

$$\left. \begin{aligned} P = b + 2y &\Rightarrow \frac{dP}{dy} = \frac{db}{dy} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{db}{dy} = -2 \\ A = b \cdot y &\Rightarrow \frac{dA}{dy} = y \cdot \frac{db}{dy} + b = 0 \Rightarrow \frac{db}{dy} = -\frac{b}{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{b}{y} = 2$$

Έτσι τα γεωμετρικά μεγέθη μιας οικονομικής ορθογωνικής διατομής είναι :

$$b = 2y, \quad P = 4y, \quad A = 2y^2,$$

$$R = A/P = y/2$$



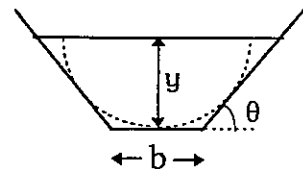
Με αντίστοιχη διαδικασία προσδιορίζονται τα γεωμετρικά μεγέθη για άλλα σχήματα διατομής.

Έτσι μια τριγωνική διατομή είναι οικονομική όταν η κλίση πρανών είναι :  $m = 1$ .

Μια τραπεζοειδής διατομή με δεδομένο  $m$  είναι οικονομική, όταν :

$$b = 2(\sqrt{1+m^2} - m) \cdot y$$

τότε :  $P = 2(2\sqrt{1+m^2} - m) \cdot y$



1. Στην πραγματικότητα ένας αγωγός σχεδιάζεται και κατασκευάζεται με πρανή που ξεπερνούν στο ύψος τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας. Επομένως ελαχιστοποίηση της βρεχόμενης περιμέτρου και του εμβαδού δε σημαίνει απαραίτητα και ελαχιστοποίηση εκκαφών και εμβαδού επίστρωσης. Το κριτήριο όμως της οικονομικής διατομής είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στην κατ'αρχήν διαστασιολόγηση της διατομής. Περισσότερα στοιχεία για το σχεδιασμό (αρδευτικών κυρίως) διωρύγων δίνονται σε ειδικό κεφάλαιο.

$$A = (2\sqrt{1+m^2} - m) \cdot y^2$$

και :  $R = A/P = y/2$

Στην προηγούμενη ανάλυση τραπεζοειδούς αγωγού η κλίση πρανών  $m$  θεωρήθηκε σταθερή. Αν όμως το  $m$  δεν είναι δεδομένο, αλλά ζητείται η βέλτιστη τιμή του ώστε η περίμετρος να ελαχιστοποιείται και ως προς  $m$ , τότε θέτουμε και :  $dP/dm=0$ . Μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει :

$$m = 1/\sqrt{3} \text{ ή } \theta = 60^\circ, \quad b = 2y/\sqrt{3}, \quad A = \sqrt{3} \cdot y^2, \quad P = 2\sqrt{3} \cdot y \text{ και } R = y/2$$

Στην περίπτωση αυτή επομένως, η οικονομική διατομή τραπεζοειδούς μορφής έχει το σχήμα του μισού ενός κανονικού εξαγώνου.

### Παράδειγμα

Ορθογωνικός αγωγός με κατά μήκος κλίση  $S_0 = 0.00085$  και συντελεστή  $n = 0.014$  έχει σχεδιαστεί με το κριτήριο της οικονομικής διατομής για να μεταφέρει παροχή  $Q = 7.75 \text{ m}^3/\text{s}$  με ομοιόμορφο βάθος ροής. Να υπολογιστούν το πλάτος  $b$  και το βάθος  $y_0$ .

Λύση

$$b = 2y_0$$

$$A = b y_0 = 2y_0^2$$

$$R = y_0/2$$

$$\left. \begin{aligned} AR^{2/3} &= 2y_0^2 \cdot (y_0/2)^{2/3} = 2^{1/3} \cdot y_0^{8/3} \\ \frac{nQ}{\sqrt{S_0}} &= 3.72 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_0 = 1.5\text{m}$$

και  $b = 2y_0 = 3\text{m}$

## 6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΡΟΗΣ

Η ροή σε έναν ανοικτό αγωγό είναι συνήθως ανομοιόμορφη. Η ανομοιομορφία προκαλείται από την ύπαρξη τεχνικών έργων στον αγωγό, από αλλαγές στην κλίση, στη διατομή ή στην τραχύτητα του αγωγού και από τις συνθήκες στην είσοδο και στην έξοδο του νερού από τον αγωγό. Όλες αυτές οι παρεμβάσεις στη ροή επιβάλλουν σε συγκεκριμένες διατομές βάθη ροής  $y \neq y_0$  και λειτουργούν έτσι ως οριακές συνθήκες ανομοιομορφίας. Μακριά από τις διατομές αυτές η ροή τείνει προς την ομοιόμορφη.

Στο μεγαλύτερο μήκος της η ανομοιόμορφη ροή είναι βαθμιαία μεταβαλλόμενη. Μπορεί όμως να διακόπτεται σε ορισμένες θέσεις από μικρά τμήματα απότομα μεταβαλλόμενης ροής. Τα τμήματα αυτά εντοπίζονται γενικά στις περιοχές ύπαρξης τεχνικών έργων ή απότομων μεταβολών στη διατομή ή τέλος στις θέσεις όπου η ροή υποχρεώνεται να μεταβεί από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη κατάσταση (σχηματισμός υδραυλικού άλματος). Ο τρόπος υπολογισμού των υδραυλικών μεγεθών στα τμήματα αυτά είναι γνωστός από προηγούμενες ενότητες (κεφ. 4.2, 4.3). Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με την επίλυση της βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής σε απλά προβλήματα ροής σε πρισματικούς αγωγούς, καθώς και με τον πλήρη υπολογισμό των χαρακτηριστικών της ροής σε σύνθετες ροές.

### 6.1 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Η μεταβολή του βάθους ροής  $y$  κατά μήκος του αγωγού σε βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή περιγράφεται από τη γνωστή από το κεφάλαιο 3.4.1 διαφορική εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (3.44)$$

όπου ως γνωστό :  $S_0$  είναι η κατά μήκος κλίση του αγωγού,  $S_f$  η κλίση τριβής που εκφράζεται από την εξίσωση του Manning ή του Chezy (βλ. κεφ. 4.4) και  $Fr$  είναι ο αριθμός Froude (βλ. κεφ. 4.1). Για δεδομένο αγωγό και μέγεθος παροχής η κλίση τριβής  $S_f$  και ο αριθμός  $Fr$  είναι συναρτήσεις του βάθους  $y$ . Επομένως η εξίσωση 3.44 είναι στη γενική περίπτωση μια διαφορική εξίσωση της μορφής :  $dy/dx=f(x,y)$ . Για την επίλυσή της απαιτείται μία οριακή συνθήκη της μορφής  $y_* = y(x_*)$ , όπου  $y_*$  γνωστή τιμή του βάθους σε συγκεκριμένη θέση  $x_*$ .



### 6.1.1. Ποιοτική ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης

Η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας στη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το πρόσημο της παραγώγου  $dy/dx$  στην εξίσωση 3.44.

Πράγματι, αν  $dy/dx > 0$  τότε το βάθος  $y$  αυξάνει κατά τη διεύθυνση της ροής και η ελεύθερη επιφάνεια έχει τη μορφή καμπύλης ανύψωσης. Αυτό συμβαίνει όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος στο δεξιό μέλος της εξίσωσης 3.44 είναι ομόσημοι, δηλαδή όταν ισχύει μία από τις ακόλουθες δύο συνθήκες :

$$(i) S_f < S_o \text{ και } Fr^2 < 1 \quad \text{ή} \quad (ii) S_f > S_o \text{ και } Fr^2 > 1$$

Αντίθετα, αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος είναι ετερόσημοι, δηλαδή αν :

$$(iii) S_f < S_o \text{ και } Fr^2 > 1 \quad \text{ή} \quad (iv) S_f > S_o \text{ και } Fr^2 < 1$$

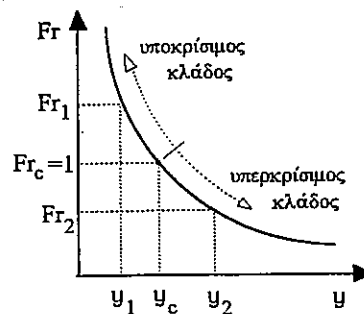
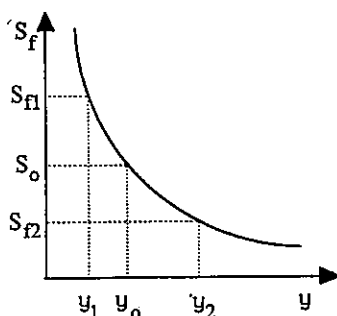
τότε  $dy/dx < 0$ , το βάθος  $y$  μικραίνει κατά τη διεύθυνση της ροής και η ελεύθερη επιφάνεια έχει τη μορφή καμπύλης κατάπτωσης.

Είναι γνωστό από τα προηγούμενα (βλ. κεφ. 4.1 και 4.4.5), ότι τόσο ο αριθμός Froude όσο και η κλίση τριβής είναι στη γενική περίπτωση φθίνουσες συναρτήσεις του βάθους  $y^1$ . Έτσι, με βάση τις παραπάνω συνθήκες και όπως ενδεικτικά φαίνεται στο σχήμα, θα είναι :

$$dy/dx > 0 \quad \text{αν :} \quad (i) \quad y > y_o \text{ και } y > y_c \quad \text{ή} \quad (ii) \quad y < y_o \text{ και } y < y_c$$

και :

$$dy/dx < 0 \quad \text{αν :} \quad (iii) \quad y_o < y < y_c \quad \text{ή} \quad (iv) \quad y_c < y < y_o$$



1. Η παρατήρηση αυτή ισχύει στις περισσότερες περιπτώσεις αγωγών εκτός από τους αγωγούς 2<sup>ου</sup> είδους με βάρη στην περιοχή διπλής ρίζας της  $K(y)$  (βλ. κεφ. 4.4.3).

Ακόμη, με βάση την εξίσωση 3.44 μπορεί κανείς να διαπιστώσει τη μορφή της καμπύλης κοντά σε συγκεκριμένα όρια. Έτσι :

- Για  $y \rightarrow y_0 \Rightarrow S_f \rightarrow S_0 \Rightarrow dy/dx \rightarrow 0$  : η ελεύθερη επιφάνεια τείνει να γίνει παράλληλη προς τον πυθμένα σε απόσταση  $y = y_0$ .
- Για  $y \rightarrow y_c \Rightarrow Fr \rightarrow 1 \Rightarrow dy/dx \rightarrow \infty$  : κοντά στην περιοχή κρίσιμου βάθους η ελεύθερη επιφάνεια εμφανίζει θεωρητικά άπειρη κλίση<sup>2</sup>.
- Για  $y \rightarrow 0 \Rightarrow S_f \rightarrow \infty, Fr \rightarrow \infty \Rightarrow dy/dx \rightarrow$  πεπερασμένο όριο : η ελεύθερη επιφάνεια πλησιάζει τον πυθμένα με συγκεκριμένη κλίση<sup>3</sup>.
- Για  $y \rightarrow \infty \Rightarrow S_f \rightarrow 0, Fr \rightarrow 0 \Rightarrow dy/dx \rightarrow S_0$  : σε μεγάλα βάθη η ελεύθερη επιφάνεια τείνει προς κάποιο οριζόντιο επίπεδο.

Από την παραπάνω ανάλυση βγαίνει το συμπέρασμα, ότι τελικά η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας εξαρτάται από τη σχέση που έχουν μεταξύ τους τα μεγέθη των τριών βαθών :  $y_0$ ,  $y_c$  και  $y$ .

### 6.1.2. Ταξινόμηση των καμπυλών ελεύθερης επιφάνειας

Για έναν αγωγό με δεδομένη παροχή  $Q$ , κλίση  $S_0$  και συντελεστή τριβής  $n$ , τα βάθη  $y_0$  και  $y_c$  είναι δύο συγκεκριμένα χαρακτηριστικά μεγέθη. Από τη σύγκριση μεταξύ τους μπορούμε να διακρίνουμε τρεις πιθανές περιπτώσεις :  $y_0 > y_c$ ,  $y_0 < y_c$  και  $y_0 = y_c$ . Έτσι, σύμφωνα με τους ορισμούς του κεφαλαίου 4.4.5 οι αγωγοί κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες, δηλαδή σε αγωγούς με : ήπια κλίση πυθμένα (mild slope), απότομη κλίση πυθμένα (steep slope) και κρίσιμη κλίση πυθμένα (critical slope) αντίστοιχα. Υπάρχουν δύο ακόμη ειδικές περιπτώσεις αγωγών, όπου το  $y_0$  πρακτικά δεν υπάρχει : είναι οι αγωγοί με οριζόντιο πυθμένα (horizontal bed), όπου  $y_0 \rightarrow \infty$ , και οι αγωγοί με αρνητική κλίση πυθμένα (adverse slope), όπου το  $y_0$  δεν είναι πραγματικός αριθμός. Η κάθε μία από τις πέντε αυτές κατηγορίες συμβολίζεται με τα αρχικά της αγγλικής ονομασίας των αγωγών, δηλαδή με τα γράμματα : M, S, C, H και A αντίστοιχα.

2. Στην πραγματικότητα η κλίση είναι βέβαια μεγάλη, αλλά πεπερασμένη. Πράγματι, καθώς η ελεύθερη επιφάνεια πλησιάζει την περιοχή του κρίσιμου βάθους, εμφανίζει μεγάλη καμπυλότητα, στο πεδίο ροής δημιουργούνται σημαντικές κατακόρυφες επιταχύνσεις και η κατανομή της πίεσης αποκλίνει από την υδροστατική κατανομή. Επομένως παύουν να ισχύουν οι παραδοχές στις οποίες βασιστήκαμε για την εξαγωγή της εξίσωσης ελεύθερης επιφάνειας 3.44 και η εξίσωση αυτή δεν περιγράφει πια με ακρίβεια τη ροή στη συγκεκριμένη περιοχή.
3. Το όριο αυτό δεν έχει πρακτική σημασία, γιατί αν  $y \rightarrow 0$  δεν υπάρχει πια πρακτικά ροή.

Για κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες μπορούμε σε κατά μήκος τομή να χαράξουμε δύο γραμμές (εφόσον υπάρχουν), οι οποίες αντιπροσωπεύουν τα δύο βάρη  $y_0$  και  $y_c$ . Σε πρισματικό αγωγό οι γραμμές αυτές είναι παράλληλες προς τον πυθμένα και χωρίζουν την επιφάνεια πάνω από τον πυθμένα σε τρεις περιοχές. Τις περιοχές αυτές τις συμβολίζουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο επόμενο σχήμα.

Το βάθος  $y$  σε κάποια θέση  $x$  κατά μήκος του αγωγού, αν συγκριθεί με τα  $y_0$  και  $y_c$ , προσδιορίζει ουσιαστικά την περιοχή μέσα στην οποία βρίσκεται η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας. Κάθε καμπύλη ελεύθερης επιφάνειας μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα γράμμα, που συμβολίζει το είδος κλίσης του αγωγού και έναν αριθμό που προσδιορίζει την περιοχή μέσα στην οποία βρίσκεται η καμπύλη. Έτσι έχουμε καμπύλες τύπου M1, M2, M3, S1, S2, S3 κλπ. Με αυτόν τον τρόπο όλες οι δυνατές καμπύλες ελεύθερης επιφάνειας ομαδοποιούνται σε 13 τύπους καμπυλών, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα και στα σχήματα που ακολουθούν.

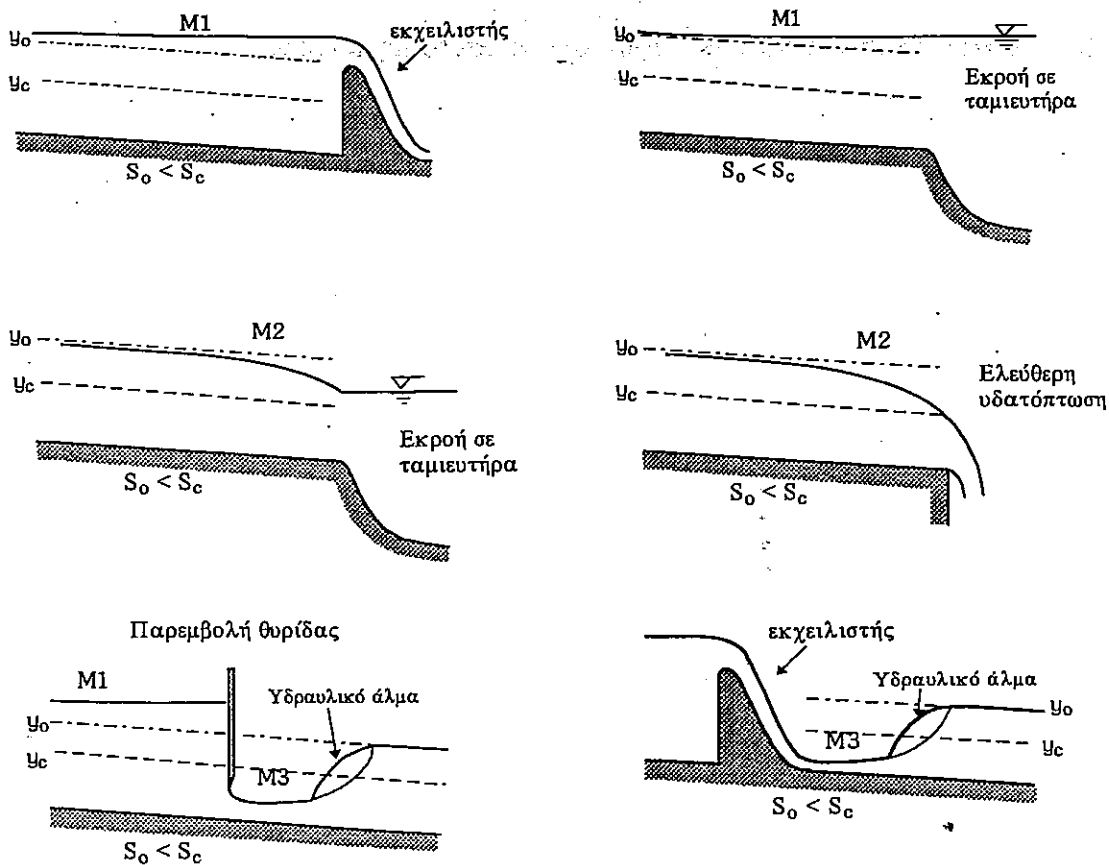
Περιοχή	Κλίση αγωγού	Σχέση $y - y_0 - y_c$	$\frac{dy}{dx}$	Τύπος καμπύλης	Είδος καμπύλης	Είδος καμπυλότητας	Είδος ροής
1	απότομη	$y > y_c > y_0$	$> 0$	S1	κ. ανύψωσης	κυρτή	υποκρίσιμη
	κρίσιμη	$y > y_0 = y_c$		C1		κυρτή-οριζόντια	
	ήπια	$y > y_0 > y_c$		M1		κοίλη	
	μηδενική	$y > (y_0 \rightarrow \infty)$	-	-	-	-	
	αρνητική	$y_0$ φανταστικό	-	-	-	-	
2	απότομη	$y_c > y > y_0$	$< 0$	S2	κ. κατάπτωσης	κοίλη	υπερκρίσιμη
	κρίσιμη	$y_0 = y = y_c$	$= 0$	C2	παράλληλη προς πυθμένα	ευθύγραμμη	κρίσιμη ομοιόμορφη
	ήπια	$y_0 > y > y_c$	$< 0$	M2	κ. κατάπτωσης	κυρτή	υποκρίσιμη
	μηδενική	$y > y_c$		H2			
	αρνητική	$y > y_c$		A2			
3	απότομη	$y_c > y_0 > y$	$> 0$	S3	κ. ανύψωσης	κυρτή	υπερκρίσιμη
	κρίσιμη	$y_0 = y_c > y$		C3		κυρτή-οριζόντια	
	ήπια	$y_0 > y_c > y$		M3		κοίλη	
	μηδενική	$y_c > y$		H3			
	αρνητική	$y_c > y$		A3			

## Ταξινόμηση καμπυλών ελεύθερης επιφάνειας

Κλίση	Καμπύλες στη ζώνη 1	Καμπύλες στη ζώνη 2	Καμπύλες στη ζώνη 3
ΑΠΟΤΟΜΗ	<p><math>S_0 &gt; S_c</math></p>	<p><math>S_0 &gt; S_c</math></p>	<p><math>S_0 &gt; S_c</math></p>
ΚΡΙΣΙΜΗ	<p><math>S_0 = S_c</math></p>	<p><math>S_0 = S_c</math></p>	<p><math>S_0 = S_c</math></p>
ΗΠΙΑ	<p><math>S_0 &lt; S_c</math></p>	<p><math>S_0 &lt; S_c</math></p>	<p><math>S_0 &lt; S_c</math></p>
ΜΗΔΕΝΙΚΗ	<p><math>S_0 = 0</math></p>	<p><math>S_0 = 0</math></p>	<p><math>S_0 = 0</math></p>
ΑΡΡΗΤΙΚΗ	<p><math>y_0</math> δεν ορίζεται</p> <p><math>S_0 &lt; 0</math></p>	<p><math>y_0</math> δεν ορίζεται</p> <p><math>S_0 &lt; 0</math></p>	<p><math>y_0</math> δεν ορίζεται</p> <p><math>S_0 &lt; 0</math></p>

### 6.1.3. Παραδείγματα καμπυλών σε πρισματικούς αγωγούς

#### α. Καμπύλες τύπου M σε αγωγούς ήπιας κλίσης

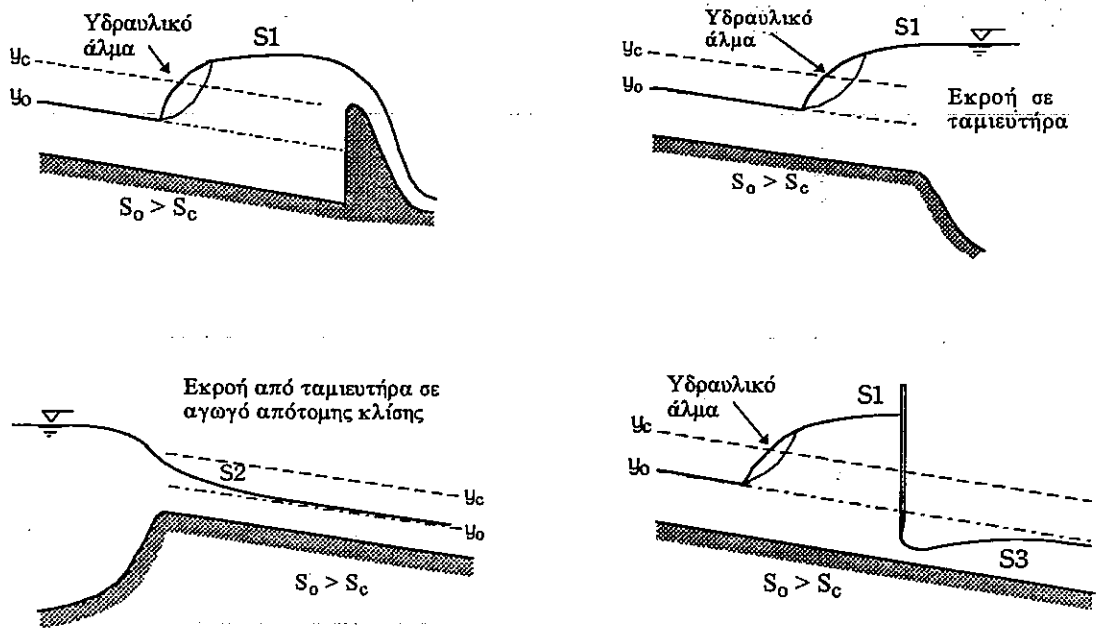


#### Παρατηρήσεις

- Σε αγωγούς ήπιας κλίσης το ομοιόμορφο βάθος είναι υποκρίσιμο ( $y_0 > y_c$ ).
- Η καμπύλη τύπου **M1** είναι η συνηθέστερη μορφή καμπύλης. Εκτείνεται γενικά σε μεγάλη απόσταση με μήκος της τάξης μερικών χιλιομέτρων. Σχηματίζεται όταν η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας στο κατάντη άκρο του αγωγού βρίσκεται ψηλότερα από τη θέση της γραμμής ομοιόμορφου βάθους : εκροή σε λίμνη υψηλής στάθμης, ύπαρξη τεχνικού έργου (εκχειλιστής, θυρόφραγμα) κ.λ.π. Γενικά σ' αυτές τις περιπτώσεις η ανάντη ροή επηρεάζεται σε μεγάλο μήκος.
- Η καμπύλη τύπου **M2** είναι καμπύλη κατάπτωσης και σχηματίζεται, όταν η στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας στο κατάντη άκρο του αγωγού βρίσκεται χαμηλότερα από τη θέση της γραμμής ομοιόμορφου βάθους (π.χ. εκροή σε λίμνη χαμηλής στάθμης, ελεύθερη υδατόπτωση, κ.λ.π.).
- Η καμπύλη τύπου **M3** είναι καμπύλη ανύψωσης και σχηματίζεται, όταν το νερό εισέρχεται σε αγωγό ήπιας κλίσης με υπερκρίσιμες συνθήκες ροής (π.χ. μετά την έξοδο του νερού από θυρίδα ή στο πόδι ενός εκχειλιστή). Επειδή το καταληκτικό βάθος της ροής είναι συνήθως υποκρίσιμο, η ροή είναι υποχρεωμένη να μεταβεί από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη κατάσταση διασχίζοντας τη γραμμή κρίσιμου βάθους από κάτω προς τα πάνω. Η μετάβαση αυτή μπορεί να γίνει μόνο μέσω απότομης ανύψωσης (ασυνέχειας) της ελεύθερης επιφάνειας με σχηματισμό υδραυλικού άλματος ( βλ. κεφ.4.3.2 ). Πράγματι, για

να ανυψωθεί η ελεύθερη επιφάνεια σταδιακά και να καταλήξει σε βάθος ροής  $y > y_c$ , θα πρέπει να διασχίσει την περιοχή 2 με καμπύλη ανύψωσης, πράγμα αδύνατο. Έτσι οι καμπύλες τύπου M3 καταλήγουν γενικά σε άλμα και είναι σχετικά μικρού μήκους.

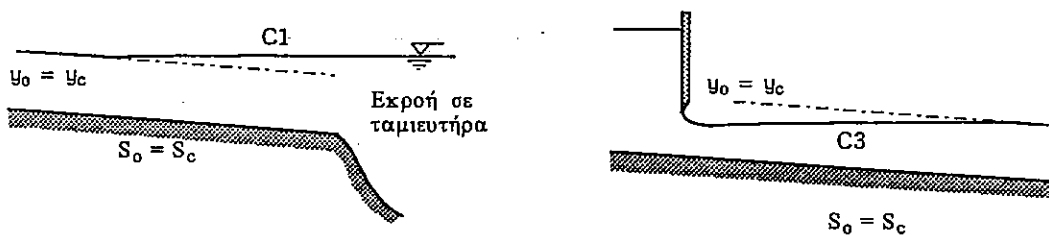
### β. Καμπύλες τύπου S σε αγωγούς απότομης κλίσης



#### Παρατηρήσεις

- Στους αγωγούς απότομης κλίσης το ομοιόμορφο βάθος είναι υπερκρίσιμο ( $y_0 < y_c$ ).
- Οι καμπύλες τύπου S1 είναι μικρού σχετικά μήκους και σχηματίζονται όταν το καταληκτικό βάθος είναι μεγαλύτερο του κρίσιμου. Συνήθως η ανάντη ροή είναι υπερκρίσιμη και κατά τη μετάβασή της σε υποκρίσιμη κατάσταση σχηματίζεται υδραυλικό άλμα, το οποίο προηγείται της καμπύλης S1.
- Καμπύλες τύπου S2 σχηματίζονται, όταν το νερό εισέρχεται σε αγωγό απότομης κλίσης με βάθος ροής μεγαλύτερο από το ομοιόμορφο.
- Καμπύλες τύπου S3 σχηματίζονται, όταν το νερό εισέρχεται σε αγωγό απότομης κλίσης με βάθος ροής μικρότερο από το ομοιόμορφο.

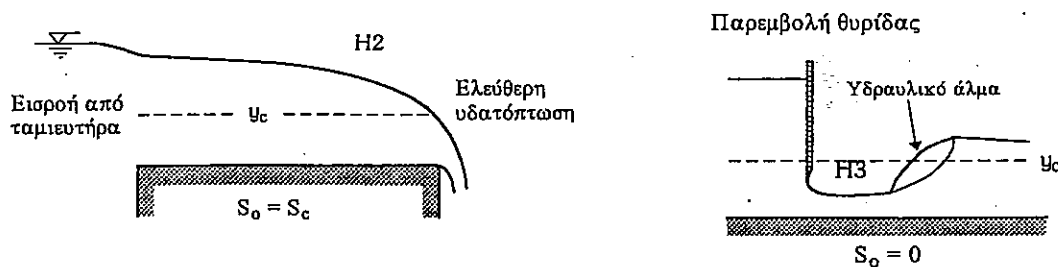
### γ. Καμπύλες τύπου C σε αγωγούς κρίσιμης κλίσης



## Παρατηρήσεις

- Στους αγωγούς κρίσιμης κλίσης το ομοιόμορφο βάθος είναι συγχρόνως και κρίσιμο.
- Οι καμπύλες τύπου C είναι πολύ σπάνιες και ασταθείς. Μπορούν να θεωρηθούν ως το όριο ανάμεσα στις αντίστοιχες καμπύλες M και S. Οι C1 και C3 είναι πρακτικά ευθύγραμμες και οριζόντιες. Η C2 είναι καμπύλη εκφυλισμένη στην ευθεία γραμμή  $y=y_0=y_c$ .

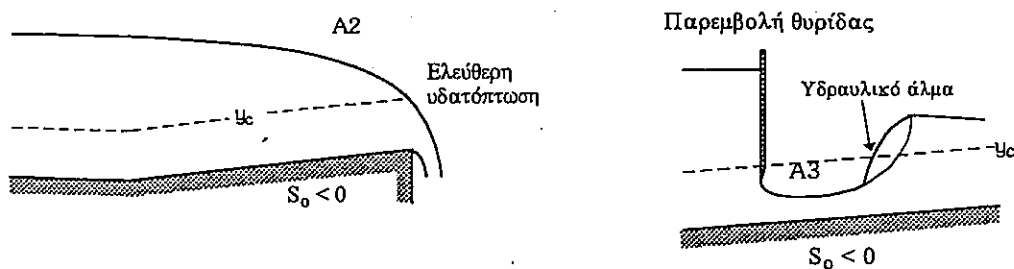
## δ. Καμπύλες τύπου H σε οριζόντιους αγωγούς



## Παρατηρήσεις

- Στους οριζόντιους αγωγούς το ομοιόμορφο βάθος τείνει στο άπειρο. Έτσι, δεν μπορεί να υπάρξει ομοιόμορφη ροή, ούτε να σχηματιστεί καμπύλη H1.
- Οι οριζόντιοι αγωγοί μπορούν να θεωρηθούν ως η οριακή περίπτωση των αγωγών ήπιας κλίσης, αν φανταστούμε την κλίση του αγωγού να μειώνεται συνεχώς μέχρις ότου μηδενιστεί. Η μορφή των καμπυλών H2 και H3 είναι όμοια με τη μορφή των καμπυλών M2 και M3 αντίστοιχα.
- Τα τμήματα των αγωγών με οριζόντιο πυθμένα είναι πάντα μικρού μήκους και έτσι οι καμπύλες τύπου H έχουν κατ'ανάγκη πεπερασμένο μήκος. Ειδικότερα η καμπύλη τύπου H3, όπως και η καμπύλη τύπου M3, είναι καμπύλες μικρού μήκους και καταλήγουν συνήθως σε υδραυλικό άλμα.

## ε. Καμπύλες τύπου A σε αγωγούς με αρνητική κλίση



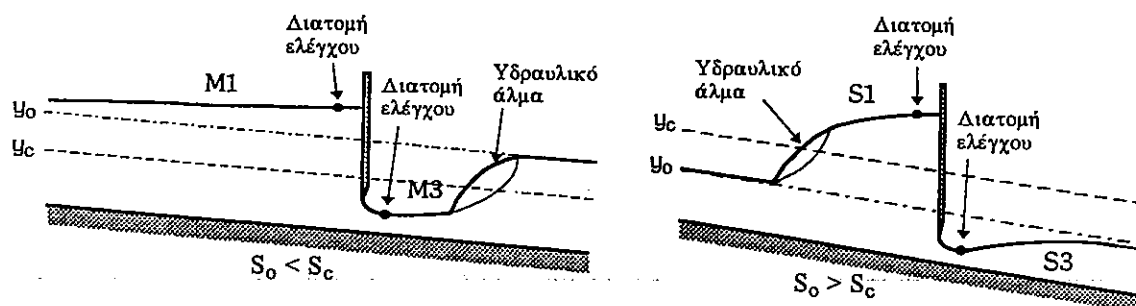
- Στους αγωγούς με αρνητική κλίση πυθμένα το ομοιόμορφο βάθος δεν έχει έννοια και ομοιόμορφη ροή δεν μπορεί να υπάρξει.
- Για τις καμπύλες τύπου A ισχύουν όσα αναφέρθηκαν για τις καμπύλες τύπου H.

## 6.2 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ - ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ

### 6.2.1 Διατομές ελέγχου

Διατομή ελέγχου ονομάζεται η διατομή, στην οποία είναι γνωστή η σχέση ανάμεσα στην παροχή και στο βάθος ροής. Μια δεδομένη λοιπόν παροχή επιβάλλει μια ορισμένη τιμή του βάθους ροής στη διατομή ελέγχου. Αυτό αποτελεί οριακή συνθήκη για τη διαφορική εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας (3.44).

Διατομές ελέγχου δημιουργούνται για παράδειγμα στις θέσεις τεχνικών έργων, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Για τεχνικά έργα όπως θυρίδες, εκχειλιστές κ.λ.π., οι σχέσεις που συνδέουν την παροχή, το βάθος και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του τεχνικού έργου είναι γνωστές (βλ. κεφ.7).



Στα σχήματα αυτά, καθώς και στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται ότι όταν το βάθος ροής είναι  $y > y_c$ , δηλαδή όταν η ροή είναι υποκρίσιμη, τότε η διατομή ελέγχου βρίσκεται στο κατάντη άκρο του συγκεκριμένου τμήματος ροής. Αντίθετα, όταν η ροή είναι υπερκρίσιμη ( $y < y_c$ ), η διατομή ελέγχου βρίσκεται στο ανάντη άκρο της. Ή αλλιώς, η υποκρίσιμη ροή ελέγχεται από τα κατάντη, ενώ η υπερκρίσιμη από τα ανάντη.

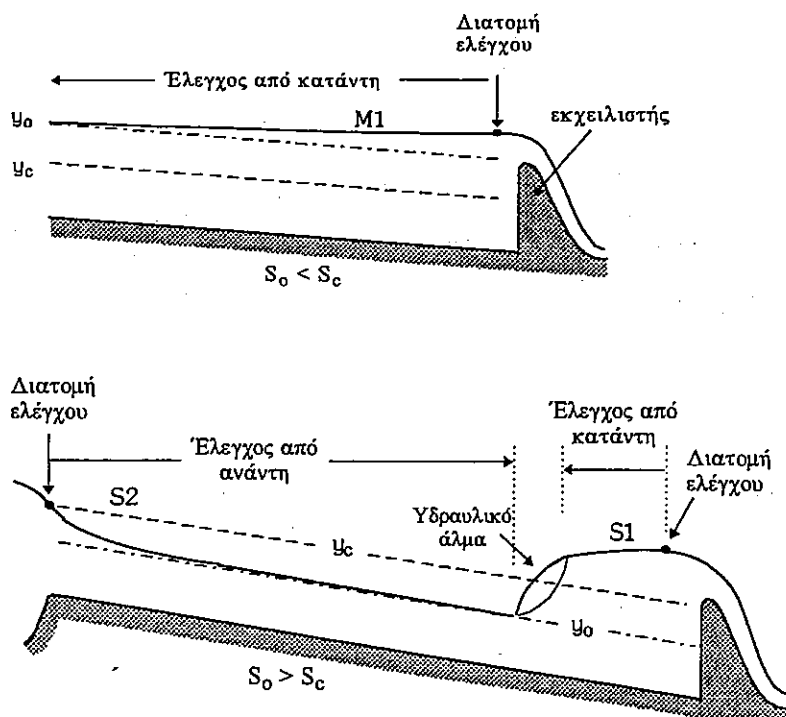
Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό, αν θυμηθούμε ότι ο αριθμός Froude είναι ίσος με το λόγο της ταχύτητας ροής  $V$  προς την ταχύτητα μετάδοσης μικρών κυμάτων βαρύτητας ( $|C| = \sqrt{gy_b}$ ). Σύμφωνα λοιπόν με τη σχετική παρατήρηση του κεφαλαίου 1.5 ένας κυματισμός ή μια διαταραχή στην ελεύθερη επιφάνεια μπορεί να μεταδοθεί προς τα ανάντη όταν η ροή είναι υποκρίσιμη (οπότε:  $Fr < 1 \Rightarrow V < |C|$ ). Αυτό πρακτικά σημαίνει, ότι ένας μηχανισμός ελέγχου, όπως για παράδειγμα μια θυρίδα, μπορεί να κάνει αισθητή την παρουσία του στην ανάντη ροή. Έτσι, η υποκρίσιμη ροή υπόκειται σε κατάντη έλεγχο. Αντίθετα, η υπερκρίσιμη ροή δεν μπορεί να επηρεαστεί από κατάντη συνθήκες, αφού η οποιαδήποτε διαταραχή



παρασύρεται προς τα κατάντη. Έτσι, η υπερκρίσιμη ροή ελέγχεται μόνο από συνθήκες στην αρχή της.

Το απλό παράδειγμα της θυρίδας εξηγεί πολύ παραστατικά αυτή τη συμπεριφορά της ροής. Το άνοιγμα της θυρίδας προσδιορίζει τη σχέση βάθους-παροχής στις διατομές που η μία προηγείται και η άλλη έπεται της θυρίδας. Δημιουργεί επόμενως δύο διατομές ελέγχου, στην πρώτη από τις οποίες το βάθος είναι  $y > y_c$ , ενώ στη δεύτερη  $y < y_c$ . Ανεξάρτητα από το αν η ροή θα ήταν υπο- ή υπερ-κρίσιμη χωρίς την παρουσία της θυρίδας, η παρεμβολή της θυρίδας δημιουργεί δύο τμήματα ροής, που το ένα προς τα ανάντη είναι υποκρίσιμο (καμπύλη M1 ή S1) και το άλλο προς τα κατάντη είναι υπερκρίσιμο (καμπύλη M3 ή S3). Και τα δύο τμήματα ροής ελέγχονται από τις συνθήκες στη θέση της θυρίδας, η οποία σηματοδοτεί το τέλος της υποκρίσιμης και την αρχή της υπερκρίσιμης ροής.

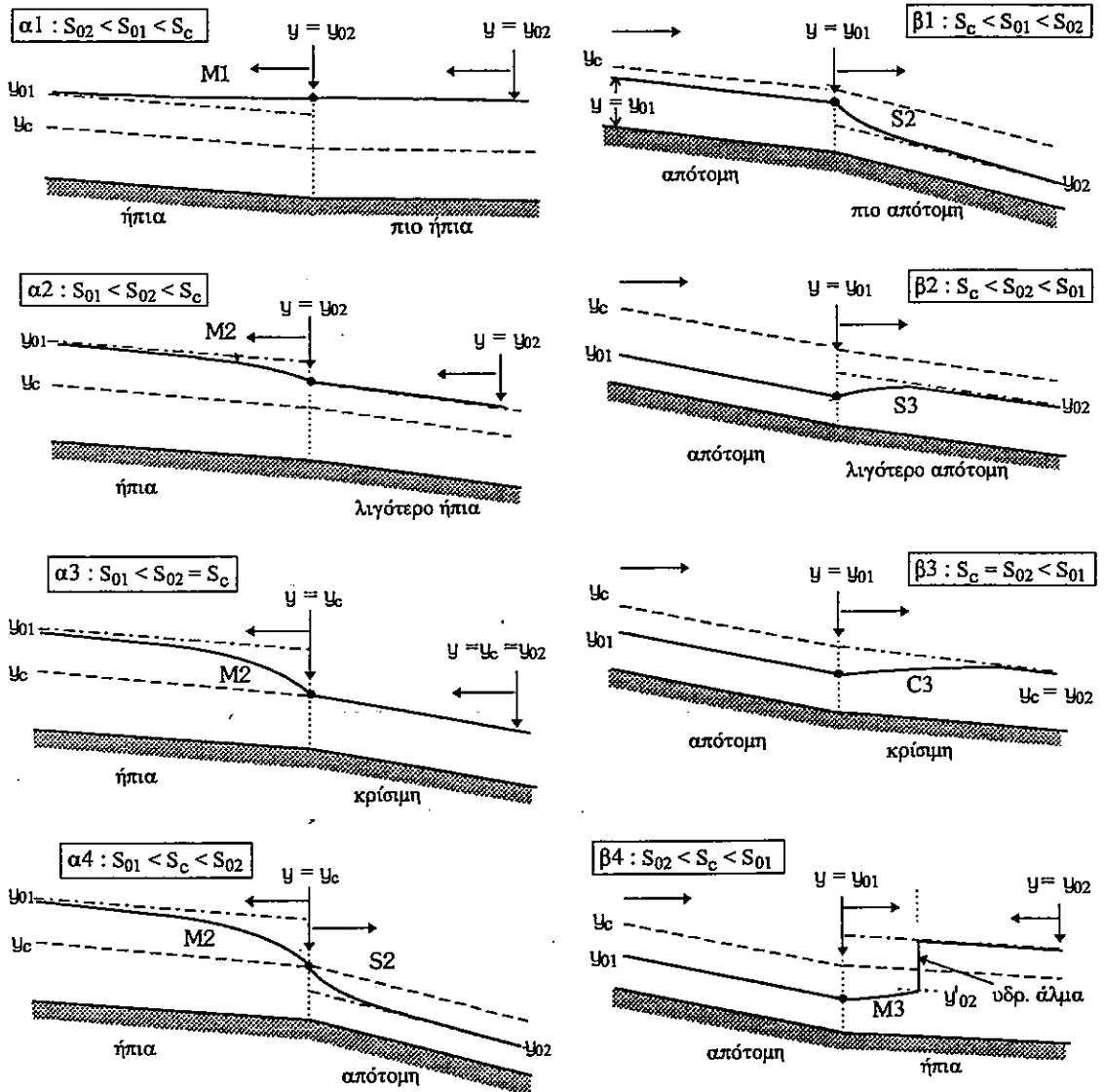
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο παραδείγματα αγωγών που καταλήγουν σε εκχειλιστή.

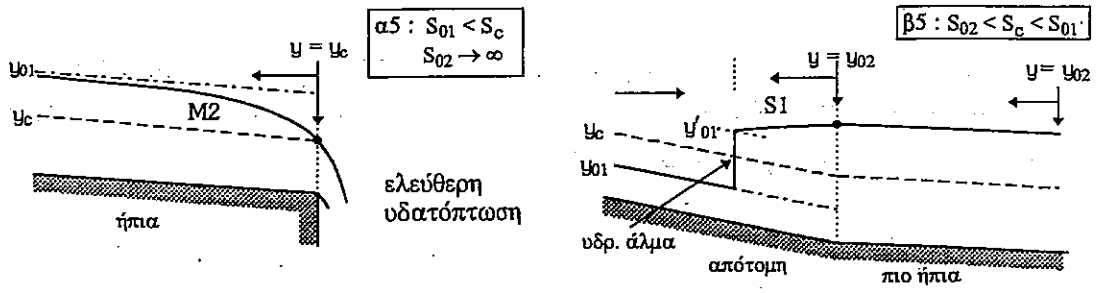


Διατομές ελέγχου δημιουργούνται ακόμη στις θέσεις εισόδου και εξόδου του νερού από τον αγωγό, καθώς και σε θέσεις αλλαγής στην κατά μήκος κλίση του πυθμένα ή στη μορφή της διατομής, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

## 6.2.2 Οριακή συνθήκη ομοιόμορφου βάθους και αλλαγή κατά μήκος κλίσης

Η ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου αφορούσε πρισματικούς αγωγούς. Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός αγωγού, που αποτελείται από δύο ευθυγραμμίες με διαφορετικές κλίσεις, δηλαδή την περίπτωση ενός αγωγού κατά τμήματα πρισματικού. Κάθε μία από τις ευθυγραμμίες εκτείνεται σε μεγάλο μήκος και έτσι το βάθος ροής τόσο προς το ανάντη άκρο του αγωγού, όσο και προς το κατόντη, γίνεται πρακτικά ίσο με το ομοιόμορφο. Για τους διάφορους δυνατούς συνδυασμούς κλίσεων προκύπτουν και διάφορα σύνθετα προφίλ για ολόκληρο τον αγωγό, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.





Στα παραπάνω σχήματα δείχνεται με βέλη η κατεύθυνση προς την οποία αναπτύσσονται οι επιμέρους καμπύλες βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής, καθώς και τα βάθη στις διατομές ελέγχου.

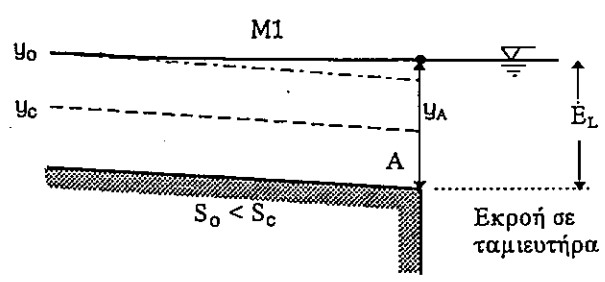
Στην περίπτωση μετάβασης από ήπια σε απότομη κλίση πυθμένα, στη θέση αλλαγής της κλίσης δημιουργείται διατομή ελέγχου κρίσιμου βάθους, η οποία είναι κοινή τόσο για το ανάντη όσο και για το κατάντη τμήμα ροής.

Στην περίπτωση αλλαγής κλίσης από απότομη σε ήπια, η ροή είναι υποχρεωμένη να μεταβεί από την ανάντη υπερκρίσιμη στην κατάντη υποκρίσιμη κατάσταση. Έτσι σε κάποια θέση κατά μήκος του αγωγού σχηματίζεται υδραυλικό άλμα. Η θέση σχηματισμού του άλματος μετατοπίζεται προς τα ανάντη, καθώς η κλίση της δεύτερης ευθυγραμμίας μειώνεται. Με την ακριβή τοποθέτηση του άλματος θα ασχοληθούμε σε ιδιαίτερο κεφάλαιο. Σημειώνεται, ότι για λόγους απλότητας τα άλματα εμφανίζονται στα παραπάνω σχήματα με τη μορφή κατακόρυφου μετώπου.

### 6.2.3 Οριακές συνθήκες εξόδου

#### α. Εκβολή σε λίμνη

Στη παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την περίπτωση ενός αγωγού ήπιας κατά μήκος κλίσης και μεγάλου μήκους (ανάντη οριακή συνθήκη :  $y \rightarrow y_0$ ), ο οποίος εκβάλλει σε ταμιευτήρα ή λίμνη σταθερής στάθμης, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Κατά την είσοδο του νερού στον ταμιευτήρα (απότομη διεύρυνση της διατομής) χάνεται σε στροβιλισμούς όλο το κινητικό φορτίο της ροής και η απώλεια αυτή εκφράζεται ως τοπική απώλεια φορτίου. Έτσι μεταξύ των θέσεων A και L θα ισχύει η εξίσωση :

$$E_A - E_L = \Delta E$$

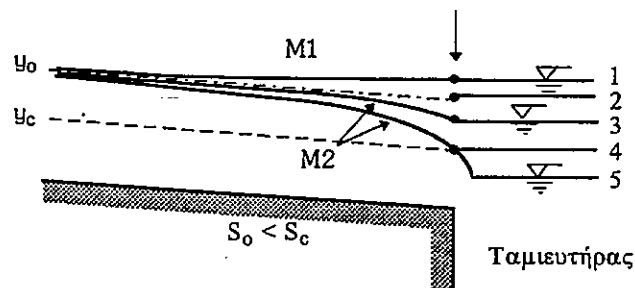
$$\text{όπου : } E_A = y_A + \frac{Q^2}{2gA_A^2}, \quad E_L = y_L \quad (\text{κινητικό φορτίο στη λίμνη} = 0)$$

$$\text{και : } \Delta E = \frac{Q^2}{2gA_A^2}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων αυτών προκύπτει ότι :  $y_A = y_L = E_L$ .

Δηλαδή, η ελεύθερη επιφάνεια στη διατομή εξόδου A συμπίπτει με τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας στη λίμνη. Έτσι, η στάθμη της λίμνης επηρεάζει την ανάντη υποκρίσιμη ροή του αγωγού. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις σε σχέση με το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας στη λίμνη :

1.  $y_L > y_0$  :  $y_A = y_L$  : σχηματισμός καμπύλης τύπου M1.
2.  $y_L = y_0$  :  $y_A = y_0$  : παντού ομοιόμορφη ροή.
3.  $y_c < y_L < y_0$  :  $y_A = y_L$  : σχηματισμός καμπύλης τύπου M2.
4.  $y_L = y_c$  :  $y_A = y_c$  : πλήρης ανάπτυξη της M2 μέχρι το κάτω όριό της.
5.  $y_L < y_c$  :  $y_A = y_c$  : πλήρης ανάπτυξη της M2 και ελεύθερη πτώση προς τη λίμνη στη συνέχεια. Στην περίπτωση αυτή η ελεύθερη επιφάνεια της ροής στον αγωγό δεν μπορεί να διασχίσει τη γραμμή κρίσιμου βάθους σε άλλη θέση εκτός από τη θέση A. Κατά συνέπεια η περαιτέρω πτώση της στάθμης στη λίμνη δεν έχει καμία επίδραση στην ανάντη ροή. Μικρή διαφοροποίηση παρατηρείται, όταν η στάθμη βρίσκεται τόσο χαμηλά, ώστε οι συνθήκες εκβολής να αντιστοιχούν σε συνθήκες ελεύθερης υδατόπτωσης, όπως εξηγείται στην επόμενη παράγραφο.

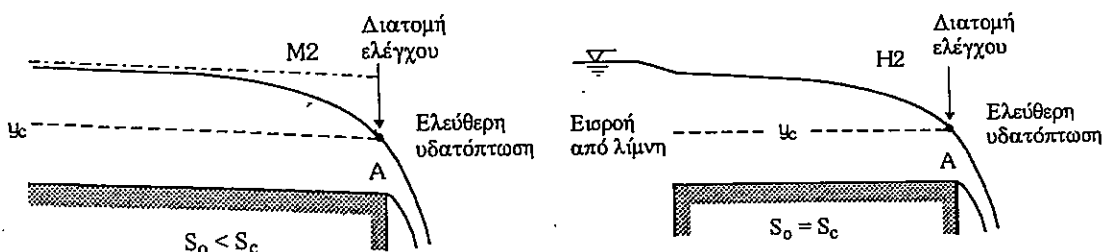


Τέλος στην περίπτωση αγωγού απότομης κατά μήκος κλίσης και μεγάλου μήκους (ανάντη οριακή συνθήκη :  $y \rightarrow y_0 < y_c$ ), η ροή είναι υπερκρίσιμη και ελέγχεται από το ανάντη άκρο της. Αν όμως η στάθμη της λίμνης βρίσκεται ψηλότερα από το γραμμή κρίσιμου βάθους στη θέση εξόδου Α, τότε προφανώς δημιουργείται η συνθήκη :  $y_A = y_L > y_c$ . Έτσι θα σχηματιστεί υδραυλικό άλμα κατά τη μετάβαση της ροής από υπερ- σε υποκρίσιμη και στη συνέχεια καμπύλη τύπου S1 (με την προϋπόθεση βέβαια ότι  $y_A > y_0'$ , όπου  $y_0'$  συζυγές του  $y_0$ ).

### β. Ελεύθερη υδατόπτωση

Στο κεφάλαιο 6.2.2 αποδείχτηκε, ότι κατά τη μετάβαση από ήπια σε απότομη κλίση πυθμένα η ελεύθερη επιφάνεια περνάει από το κρίσιμο βάθος στη θέση αλλαγής κλίσης (σχήμα α4 του κεφ. 6.2.2). Αν τώρα η απότομη κλίση αυξηθεί προοδευτικά μέχρις ότου ο πυθμένας της δεύτερης ευθυγραμμίας γίνει κατακόρυφος ( $\theta = 90^\circ$ ), τότε παρατηρείται αποκόλληση της υγρής φλέβας από τον πυθμένα και ελεύθερη υδατόπτωση. Με την αποκόλληση της υγρής φλέβας παρατηρείται ταυτόχρονη μετατόπιση προς τα ανάντη του σημείου όπου  $y = y_c$  κατά  $\Delta x \approx (3\sim 4) y_c$ , ενώ το βάθος στη διατομή εξόδου είναι μικρότερο από κρίσιμο. Αυτό οφείλεται στο ότι η αποκόλληση της υγρής φλέβας συμβάλλει στη διαφοροποίηση του πεδίου πιέσεων κοντά στο χείλος του καταβαθμού, όπως εξηγείται εκτενέστερα στο ειδικό κεφάλαιο 7.3.

Επειδή όμως η μετατόπιση της διατομής κρίσιμου βάθους είναι μικρή σε σύγκριση με τα μήκη των καμπυλών της ελεύθερης επιφάνειας, γι' αυτό συνήθως αγνοείται. Έτσι η χάραξη και οι υπολογισμοί της βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής γίνονται με την παραδοχή, ότι το βάθος στο χείλος του καταβαθμού παραμένει κατά προσέγγιση ίσο με το κρίσιμο, δηλαδή :  $y_L = y_c$ .

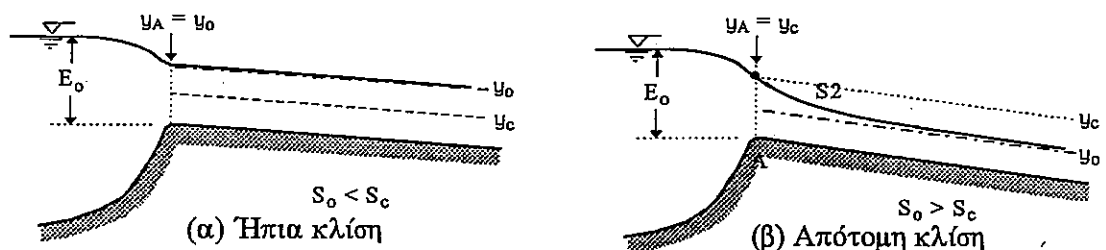


### 6.2.4 Συνθήκες εισόδου - Εκροή από λίμνη

Η εκροή από λίμνη συνιστά ειδική περίπτωση οριακής συνθήκης. Ο αγωγός υποτίθεται μεγάλου μήκους (κατάντη συνθήκη :  $y \rightarrow y_0$ ) και τροφοδοτείται από τη λίμνη, της οποίας η στάθμη είναι σταθερή και δεδομένη. Επομένως σταθερή είναι η ειδική ενέργεια  $E_0$  που παρέχεται από τη τη λίμνη. Άγνωστα μεγέθη είναι η παροχή και το βάθος ροής στην είσοδο του αγωγού. Κατά συνέπεια είναι άγνωστα το ομοιόμορφο και κρίσιμο βάθος, καθώς και το είδος της κατά μήκος κλίσης  $S_0$  του αγωγού, αν δηλαδή η κλίση είναι ήπια ή απότομη.

Αν η κλίση είναι ήπια με κατάντη οριακή συνθήκη είναι:  $y=y_0 > y_c$ , τότε η ροή είναι υποκρίσιμη και ελέγχεται από κατάντη. Έτσι, σε όλο το μήκος του αγωγού η ροή θα είναι ομοιόμορφη και στη διατομή εισόδου το βάθος του νερού θα είναι :  $y_A = y_0$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν η κλίση είναι απότομη με κατάντη οριακή συνθήκη είναι:  $y=y_0 < y_c$ , τότε η ελεύθερη επιφάνεια θα περάσει αναγκαστικά από το σημείο κρίσιμου βάθους στη θέση εισόδου και στη συνέχεια θα σχηματίσει καμπύλη τύπου S2 για να καταλήξει στη γραμμή ομοιόμορφου υπερκρίσιμου βάθους σε κάποια θέση προς τα κατάντη. Στη περίπτωση αυτή η διατομή εισόδου αποτελεί διατομή ελέγχου.

Και στις δύο περιπτώσεις η στάθμη της επιφάνειας της λίμνης εμφανίζει μικρή πτώση καθώς πλησιάζει την είσοδο του αγωγού ως αποτέλεσμα της σταδιακής ανάπτυξης ταχυτήτων.



Ας υποθέσουμε ότι κατά την είσοδο του νερού από τη λίμνη στον αγωγό δεν παρατηρούνται τοπικές απώλειες. Τότε :

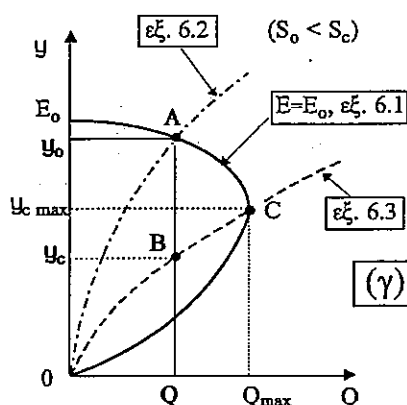
$$E_A = E_0 \Rightarrow E_0 = y_A + \frac{Q^2}{2gA_A^2} \quad (6.1)$$

οπότε για σταθερό  $E_0$  προκύπτει μια καμπύλη  $Q - y$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η κλίση του αγωγού είναι ήπια. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα το βάθος γίνεται αμέσως ομοιόμορφο :  $y_A = y_0$  (σχήμα α) και άρα ισχύει συγχρόνως η εξίσωση ομοιόμορφης ροής του Manning ( ή του Chezy ) :

$$Q = \frac{1}{n} \cdot A_0 \cdot R_0^{2/3} \cdot \sqrt{S_0} \quad (6.2)$$

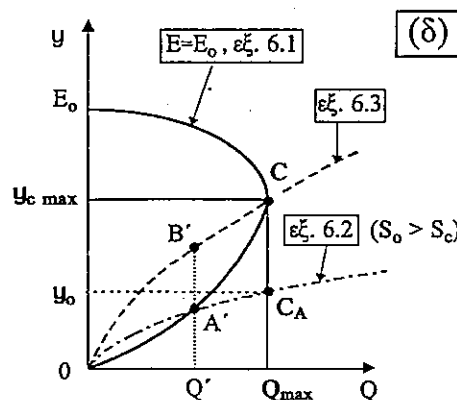
η οποία έχει σχεδιαστεί στο σχήμα (γ) με τη μορφή καμπύλης  $Q - y_0$ . Οι εξισώσεις 6.1 και 6.2 αποτελούν ένα σύστημα με αγνώστους τα  $Q$  και  $y_0$ . Το ζεύγος τιμών  $(Q, y_0)$ , που προκύπτει από την επίλυση του συστήματος, παριστάνεται από το σημείο τομής A των αντίστοιχων καμπυλών του σχήματος. Στη συνέχεια για το γνωστό πια μέγεθος της παροχής μπορεί να υπολογιστεί το κρίσιμο βάθος  $y_c$  της ροής με τη βοήθεια της εξίσωσης :  $Fr = 1$ . Για ήπια κλίση πυθμένα θα είναι :  $y_c < y_0$  (σημείο B του σχήματος).



Αν φανταστούμε τώρα την κλίση  $S_0$  του αγωγού να μεγαλώνει, τότε το σημείο A μετατοπίζεται κατά μήκος της καμπύλης  $E = σταθ.$  με φορά προς το σημείο C ακολουθώντας τη μετακίνηση της καμπύλης  $Q - y_0$ . Αντίστοιχα το σημείο B κινείται και αυτό προς το C κατά μήκος της καμπύλης  $Q - y_c$ . Τα A και B ταυτίζονται με το C όταν  $y_A = y_0 = y_c$ , δηλαδή μόλις η κλίση του αγωγού γίνει κρίσιμη ( $S_0 = S_c$ ).

Αν η κλίση του αγωγού μεγαλώσει ακόμη περισσότερο, τότε η αντίστοιχη καμπύλη  $Q - y_0$  μετατοπίζεται προς τα κάτω και τέμνει την καμπύλη  $E = σταθ.$  σε σημείο (έστω  $A'$ ), που βρίσκεται στον κάτω κλάδο της καμπύλης (OC). Στο σημείο αυτό αντιστοιχεί μία παροχή  $Q'$ , ένα ομοιόμορφο βάθος  $y_0 = y_{A'}$  και ένα κρίσιμο βάθος  $y_c = y_{B'}$ , όπου όμως:  $y_0 < y_c$ . Επομένως η κλίση  $S_0$  είναι απότομη και

το ομοιόμορφο βάθος δεν πραγματοποιείται στην είσοδο του αγωγού (άρα δεν πραγματοποιούνται τα σημεία  $A'$  και  $B'$ ). Αντίθετα, όπως φαίνεται στο σχήμα (β) η ελεύθερη επιφάνεια περνάει από τη γραμμή κρίσιμου βάθους στη



θέση εισόδου. Έτσι ανεξάρτητα από το μέγεθος της απότομης κλίσης, η λύση θα αντιπροσωπεύεται από το σημείο C και αντί της εξίσωσης 6.2, το βάθος στη διατομή εισόδου θα ικανοποιεί την εξίσωση :

$$Fr = 1 \quad \text{ή} \quad A_c^3/B_c = Q^2/g \quad (6.3)$$

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 6.1 και 6.3 δίνει το ζεύγος τιμών  $Q = Q_{\max}$  και  $y_c = y_{c \max}$ . Το ομοιόμορφο βάθος  $y_0$  της ροής υπολογίζεται στη συνέχεια και αντιστοιχεί στο σημείο  $C_A$  του σχήματος (δ).

Από την ανάλυση που προηγήθηκε γίνεται φανερό, ότι αν το είδος της κλίσης του πυθμένα δεν είναι εξ αρχής γνωστό, μπορούμε να υποθέσουμε ένα είδος κλίσης και με βάση την υπόθεση αυτή να υπολογίσουμε τα  $Q$ ,  $y_0$  και  $y_c$ . Από τη σύγκριση του  $y_0$  με το  $y_c$  αποδεικνύεται η ορθότητα ή μη της αρχικής υπόθεσης.

Τέλος στην περίπτωση που κατά την είσοδο του από τη λίμνη στον αγωγό παρατηρούνται τοπικές απώλειες, τότε οι απώλειες αυτές εκφράζονται συνήθως ως ποσοστό του κινητικού φορτίου στη διατομή εισόδου και η εξίσωση 6.1 γίνεται :

$$E_A = E_0 + \Delta E \Rightarrow E_0 = y_A + (1+k) \frac{Q^2}{2gA_A^2} \quad (6.1')$$

όπου :  $k$  ο συντελεστής τοπικών απωλειών.

### 6.2.5 Χάραξη σύνθετων προφίλ

Έστω ότι δίνεται η κατά μήκος τομή αγωγού, ο οποίος αποτελείται από τμήματα διαφορετικών κλίσεων, καθώς και τα τεχνικά έργα που παρεμβάλλονται στη ροή. Είναι ακόμη γνωστές οι οριακές συνθήκες στο ανάντη και στο κατάντη άκρο του αγωγού. Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, μπορούμε να χαράξουμε κατά προσέγγιση το προφίλ ροής (δηλαδή την κατά μήκος τομή της ελεύθερης επιφάνειας) σε όλο το μήκος του αγωγού, χωρίς προηγουμένα να γίνει ο ακριβής υπολογισμός του μέσω της εξίσωσης βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής :

Με βάση το γνωστό μέγεθος παροχής υπολογίζονται για κάθε ευθυγραμμία τα  $y_0$  και  $y_c$  και σχεδιάζονται οι γραμμές ομοιόμορφου και κρίσιμου βάθους. Στη συνέχεια γίνεται ο χαρακτηρισμός του είδους κλίσης





## 6.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας 3.44 είναι μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Για ροή σε πρισματικούς αγωγούς η εξίσωση γράφεται με τη μορφή :  $dy/dx = f(y)$ . Η εξίσωση αυτή για ορισμένα είδη διατομών επιδέχεται αναλυτική λύση. Στη γενική περίπτωση λύνεται με αριθμητικές μεθόδους.

### 6.3.1 Αναλυτική επίλυση

Η διαφορική εξίσωση 3.44 μπορεί να γραφεί ως :

$$\frac{dy}{dx} = S_o \cdot \frac{1 - S_f/S_o}{1 - Fr^2} \quad (6.4)$$

Η κλίση τριβής  $S_f$  και η κλίση του πυθμένα  $S_o$  συνδέονται με την αγωγιμότητα  $K$  (κεφ.4.4.5) ως εξής :

$$S_f = S_f(y) = (Q/K)^2 \quad (4.69)$$

$$\text{και } S_o = S_f(y_o) = (Q/K_o)^2 \quad (4.70)$$

$$\text{όπου : } K = K(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} A R^{2/3} & \text{(Manning)} \\ C A R^{1/2} & \text{(Chezy)} \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\text{και } K_o = K(y_o).$$

Έτσι ο λόγος των δύο κλίσεων εκφράζεται ως :

$$S_f/S_o = (K_o/K)^2 \quad (6.5)$$

Με ανάλογο τρόπο ο αριθμός Froude εκφράζεται ως συνάρτηση του συντελεστή διατομής  $Z$  (κεφ. 4.1) :

$$Fr^2 = \left( \frac{Q}{Z\sqrt{g}} \right)^2 \quad (4.4)$$

$$\text{και : } Fr_c^2 = \left( \frac{Q}{Z_c\sqrt{g}} \right)^2 = 1 \quad (4.6)$$

$$\text{όπου : } Z = Z(y) = \sqrt{A^3/B} \quad \text{και} \quad Z_c = Z(y_c) \quad (4.5)$$

Επομένως ο αριθμός Froude στην εξίσωση 6.4 μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$Fr^2 = (Fr/Fr_c)^2 = (Z_c/Z)^2 \quad (6.6)$$

Με την ενσωμάτωση των σχέσεων 6.5 και 6.6 στην 6.4 η διαφορική εξίσωση παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\frac{dy}{dx} = S_o \cdot \frac{1 - (K_o/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2} \quad (6.7)$$

### α. Υδραυλικοί εκθέτες

Για να επιλυθεί η εξίσωση 6.7 θα πρέπει οι ποσότητες  $(K_o/K)^2$  και  $(Z_c/Z)^2$  να εκφραστούν ως συναρτήσεις του  $y$ . Τόσο ο συντελεστής διατομής  $Z$  όσο και η αγωγιμότητα  $K$  εξαρτώνται αποκλειστικά από τα χαρακτηριστικά της διατομής και το βάθος. Ας υποθέσουμε λοιπόν, ότι οι συναρτήσεις  $K$  και  $Z$  μπορούν να γραφούν με τη μορφή εκθετικών συναρτήσεων του βάθους  $y$ , δηλαδή :

$$K^2 = c_1 \cdot y^N \quad (6.8)$$

$$\text{και} \quad Z^2 = c_2 \cdot y^M \quad (6.9)$$

όπου :  $c_1, c_2$  σταθεροί συντελεστές και  $M, N$  σταθεροί εκθέτες.

Στην επόμενη ενότητα θα αποδειχτεί ότι υπάρχουν διατομές για τις οποίες ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις. Με τη χρησιμοποίηση των σχέσεων 6.8 και 6.9 η διαφορική εξίσωση 6.7 γράφεται :

$$\frac{dy}{dx} = S_o \cdot \frac{1 - (y_o/y)^N}{1 - (y_c/y)^M} \quad (6.10)$$

Στην εξίσωση αυτή εισάγεται τώρα νέα αδιάστατη μεταβλητή :  $u = y/y_o$  και γίνεται χωρισμός μεταβλητών :

$$dx = \frac{y_o}{S_o} \left[ 1 - \frac{1}{1 - u^N} + \left( \frac{y_c}{y_o} \right)^M \cdot \frac{u^{N-M}}{1 - u^N} \right] du$$

Έπειτα από ολοκλήρωση προκύπτει :

$$x = \frac{y_0}{S_0} \left[ u - \int_0^u \frac{du}{1-u^N} + \left( \frac{y_c}{y_0} \right)^M \cdot \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N} du \right] + c \quad (6.11)$$

Συμβολίζουμε το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης με  $F(u, N)$  :

$$F(u, N) = \int_0^u \frac{du}{1-u^N} \quad (6.12)$$

Το ολοκλήρωμα  $F(u, N)$  ονομάζεται **συνάρτηση μεταβαλλόμενης ροής** και η τιμή του εξαρτάται από το όριο ολοκλήρωσης  $u$  και τον εκθέτη  $N$ . Ο τρόπος υπολογισμού της τιμής του  $F$  αναπτύσσεται στην επόμενη ενότητα.

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της 6.11 ανάγεται και αυτό στη μορφή 6.12. Πράγματι, αν θέσουμε :  $u^N = v^J$ , με :  $J = N / (N-M+1)$ , τότε μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει :

$$\int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N} du = \frac{J}{N} \cdot \int_0^v \frac{dv}{1-v^J} = \frac{J}{N} \cdot F(v, J)$$

Η εξίσωση 6.11 μετά τις αντικαταστάσεις παίρνει τη μορφή :

$$x = \frac{y_0}{S_0} \left[ u - F(u, N) + \left( \frac{y_c}{y_0} \right)^M \cdot \frac{J}{N} \cdot F(v, J) \right] + c \quad (6.13)$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης μπορεί να εξαλειφθεί αν η ολοκλήρωση γίνει μεταξύ δύο διατομών :

$$\boxed{x_2 - x_1 = \frac{y_0}{S_0} \cdot \left\{ (u_2 - u_1) - [F(u_2, N) - F(u_1, N)] + \left( \frac{y_c}{y_0} \right)^M \cdot \frac{J}{N} \cdot [F(v_2, J) - F(v_1, J)] \right\}} \quad (6.14)$$

όπου :  $u_1 = y_1/y_0$ ,  $u_2 = y_2/y_0$

$v_1 = u_1^{N/J}$ ,  $v_2 = u_2^{N/J}$

και  $J = N / (N-M+1)$ .

Αν συνεπώς είναι γνωστό το βάθος  $y_1$  στη θέση  $x_1$ , τότε μπορεί να βρεθεί η θέση  $x_2$  για την οποία το βάθος θα είναι  $y_2$ . Από την ποιοτική χάραξη του προφίλ, που προηγείται του ακριβούς υπολογισμού του, είναι γνωστό το εύρος τιμών του βάθους  $y$ . Έτσι με την εξίσωση 6.14 και μια γνωστή οριακή συνθήκη υπολογίζονται οι θέσεις  $x_i$  για διάφορες τιμές του βάθους  $y_i$  κατά μήκος της καμπύλης. Μπορεί ακόμη να υπολογιστεί το συνολικό μήκος της καμπύλης της ελεύθερης επιφάνειας. Για καμπύλες που τείνουν ασυμπτωτικά προς τη γραμμή ομοιόμορφου βάθους, οι υπολογισμοί σταματούν σε βάθος  $y = (1 \pm \alpha) \cdot y_0$ , όπου  $\alpha = 0.01 \sim 0.1$  (το  $\alpha$  εξαρτάται από την επιδιωκόμενη ακρίβεια).

## β. Η συνάρτηση μεταβαλλόμενης ροής

Η συνάρτηση  $F(u, N)$  μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια πινάκων που έχουν συνταχθεί για διάφορες τιμές των  $u$  και  $N$ . Στο παράρτημα Π6 δίνεται ένας τέτοιος συνοπτικός πίνακας τιμών του  $F$ . Περισσότερο λεπτομερείς πίνακες δίνονται στη σχετική βιβλιογραφία\*.

Κατά τη χρήση των πινάκων θα χρειαστούν ενδεχόμενα παρεμβολές και τότε η μέθοδος χάνει την αξία της ως ακριβής αναλυτική. Ακριβή αποτελέσματα μπορούν να επιτευχθούν αν η  $F(u, N)$  γραφεί με τη μορφή σειράς :

$$\text{για } u < 1 : F(u, N) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{(k-1)N+1}}{(k-1)N+1} \quad (6.15\alpha)$$

που συγκλίνει ταχύτατα για  $u < 0.7$  και αποκλίνει για  $u = 1$ ,

$$\text{για } u > 1 : F(u, N) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(kN-1) \cdot u^{kN-1}} \quad (6.15\beta)$$

που συγκλίνει ταχύτατα για  $u > 1.5$  και αποκλίνει για  $u = 1$ .

Στην ειδική περίπτωση  $N = 3$  η συνάρτηση  $F(u, 3)$  μπορεί να υπολογιστεί με την ακόλουθη σχέση :

---

\* Η πρώτη σύνταξη πινάκων του  $F$  έγινε κατά τα έτη 1914-15 από ομάδα ερευνητών με επιβλέποντα τον Bakhmeteff, στον οποίον οφείλεται και η πρώτη διατύπωση της συνάρτησης με τη μορφή της σχέσης 6.12. Ακολούθησαν και άλλες προσπάθειες ανασύνταξης και εμπλουτισμού των πινάκων αυτών. Αναφέρουμε εδώ τους πίνακες του Chow (1955) στον οποίο οφείλεται η διαδικασία ολοκλήρωσης με τη μορφή που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο αυτό.

$$F(u,3) = \int_0^u \frac{du}{1-u^3} = \frac{1}{6} \cdot \ln \frac{u^2+u+1}{(u-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tan^{-1} \frac{2u+1}{\sqrt{3}} \quad (6.16)$$

και είναι γνωστή ως συνάρτηση του Bresse. Με τη σχέση αυτή η διαφορική εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας αποκτά αναλυτική λύση κλειστής μορφής στην ειδική περίπτωση αγωγού ορθογωνικής διατομής μεγάλου πλάτους, αν χρησιμοποιηθεί η εξίσωση Chezy για την έκφραση της κλίσης τριβής. Τότε, όπως θα αποδειχτεί στην επόμενη ενότητα, είναι :  $M = N = J = 3$ . Επομένως,  $u = v$  και η εξίσωση 6.14 γίνεται :

$$x_2 - x_1 = \frac{y_0}{S_0} \cdot \left\{ (u_2 - u_1) - \left[ 1 - \left( \frac{y_c}{y_0} \right)^3 \right] \cdot [F(u_2,3) - F(u_1,3)] \right\} \quad (6.17)$$

#### γ. Υπολογισμός των εκθετών $M$ και $N$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο συντελεστής διατομής ορίζεται από τις εξισώσεις 4.5 και 6.9 :

$$Z^2 = c_2 \cdot y^M = A^3/B$$

και η αγωγιμότητα  $K$  από τις εξισώσεις 4.65 και 6.8 :

$$K^2 = c_1 \cdot y^N = \begin{cases} \frac{1}{n^2} A^2 R^{4/3} & \text{(Manning)} \\ C^2 A^2 R & \text{(Chezy)} \end{cases}$$

Οι εκθέτες  $M$  και  $N$  είναι σταθεροί για ορισμένα μόνο είδη διατομών, όπως είναι οι τριγωνικές, οι ορθογωνικές μεγάλου πλάτους και οι παραβολικές μεγάλου πλάτους.

Για παράδειγμα, έστω τριγωνική διατομή με κλίση πρανών 1:m. Είναι:  $B = 2my$ ,  $A = my^2$ ,  $P = 2y\sqrt{1+m^2}$  και  $R = my/2\sqrt{1+m^2}$ . Μετά τις αντικαταστάσεις στις παραπάνω σχέσεις έχουμε :

$$Z^2 = \frac{A^3}{B} = \frac{m^2}{2} \cdot y^5 \Rightarrow c_2 \cdot y^M = \frac{m^2}{2} \cdot y^5$$

Προφανώς :  $c_2 = m^2/2$  και  $M = 5$

$$K^2 = c_1 \cdot y^N = \begin{cases} \frac{1}{n^2} A^2 R^{4/3} = \frac{m^{10/3}}{2^{4/3} \cdot n^2 \cdot (1+m^2)^{2/3}} \cdot y^{16/3} & \text{(Manning)} \\ C^2 A^2 R = \frac{C^2 \cdot m^3}{2\sqrt{1+m^2}} \cdot y^5 & \text{(Chezy)} \end{cases}$$

Επομένως για τριγωνική διατομή είναι :

$$N = 16/3 = 5^{1/3} \text{ αν χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Manning}$$

και  $N = 5$  αν στους υπολογισμούς χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Chezy.

Ο εκθέτης J έχει τιμές :  $J = 4$  και  $J = 5$  αντίστοιχα.

Με ανάλογη διαδικασία προκύπτει ότι για ορθογωνικές διατομές είναι :  $M = 3$ . Ο εκθέτης N είναι σταθερός μόνον αν η διατομή θεωρηθεί ως ορθογωνική **μεγάλου πλάτους**. Τότε προκύπτει :  $N = 10/3 = 3^{1/3}$ , αν χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Manning ή  $N = 3$  αν χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Chezy. Ο εκθέτης J έχει τιμές :  $J = 5/2$  και  $J = 3$  αντίστοιχα.

Στη γενική περίπτωση οι εκθέτες M και N δεν μπορούν να υποτεθούν σταθεροί, αλλά είναι συναρτήσεις του y. Τότε τα M και N υπολογίζονται ως εξής :

Από τη σχέση 6.9 προκύπτει :

$$\begin{aligned} \frac{d(Z^2)}{dy} &= c_2 \cdot M \cdot y^{M-1} + c_2 \cdot y^M \cdot \ln y \cdot \frac{dM}{dy} \\ &= \frac{Z^2}{y} \cdot M + \frac{Z^2}{y} \cdot y \cdot \ln y \cdot \frac{dM}{dy} \\ \Rightarrow \frac{y}{Z^2} \cdot \frac{d(Z^2)}{dy} &= M + y \cdot \ln y \cdot \frac{dM}{dy} \\ \text{ή} \quad \frac{d(\ln Z)}{d(\ln y)} &= \frac{M}{2} + \frac{y}{2} \cdot \ln y \cdot \frac{dM}{dy} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Η τελευταία αυτή σχέση οφείλεται στον Ven te Chow (1959).

Μια πρώτη προσέγγιση για το  $M$ , αν υποτεθεί ότι  $dM/dy$  πολύ μικρό, είναι :

$$M \approx \frac{y}{Z^2} \cdot \frac{d}{dy} (Z^2) \quad \text{ή} \quad M \approx 2 \cdot \frac{d(\ln Z)}{d(\ln y)} = 2y \cdot \frac{d}{dy} (\ln Z) \quad (6.19)$$

Αν στην εξίσωση αυτή τεθεί :  $Z^2 = A^3/B$  και γίνουν οι πράξεις, προκύπτει :

$$M \approx \frac{y}{A} \cdot \left( 3B - \frac{A}{B} \cdot \frac{dB}{dy} \right) \quad (6.20)$$

Επίσης από την 6.8 προκύπτει με όμοιο τρόπο :

$$\frac{d(\ln K)}{d(\ln y)} = \frac{N}{2} + \frac{y}{2} \cdot \ln y \cdot \frac{dN}{dy} \quad (6.21)$$

και για μικρό  $dN/dy$  :

$$N \approx \frac{y}{K^2} \cdot \frac{d}{dy} (K^2) \quad \text{ή} \quad N \approx 2 \cdot \frac{d(\ln K)}{d(\ln y)} = 2y \cdot \frac{d}{dy} (\ln K) \quad (6.22)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση του Manning, αν στην 6.20 τεθεί :  $K = \frac{1}{n} \cdot A \cdot R^{2/3}$ , προκύπτει :

$$N \approx \frac{2y}{3A} \cdot \left( 5B - 2R \frac{dP}{dy} \right) \quad (6.23\alpha)$$

Ενώ αν τεθεί :  $K = CAR^{1/2}$  (κατά Chezy) προκύπτει :

$$N \approx \frac{y}{A} \cdot \left( 3B - R \frac{dP}{dy} \right) \quad (6.23\beta)$$

Για παράδειγμα, έστω τραπεζοειδής διατομή με πλάτος πυθμένα  $b$  και κλίση πρανών  $1 : m$ . Τα γεωμετρικά μεγέθη της διατομής είναι :

$$A = by + my^2, \quad B = b + 2my, \quad P = b + 2y\sqrt{1 + m^2}.$$

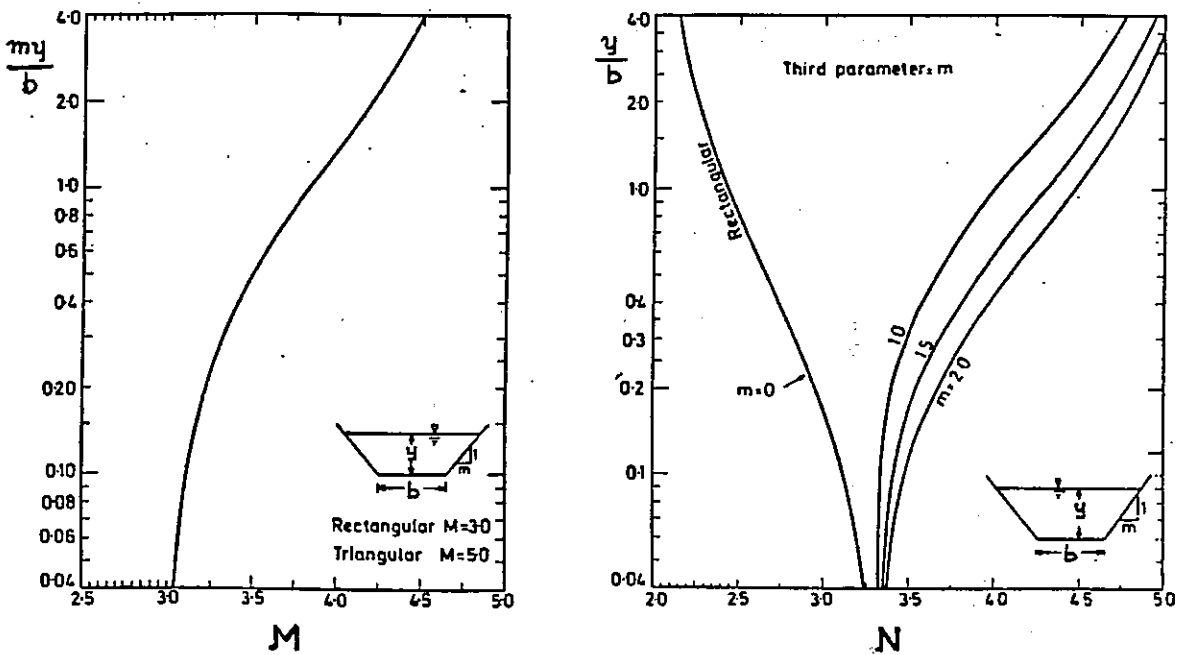
Μετά τις αντικαταστάσεις στις 6.18 και 6.21 προκύπτει :

$$M \approx \frac{3(b + 2my)}{b + my} - \frac{2my}{b + 2my}$$

$$\text{και} \quad N \approx \frac{10}{3} \cdot \frac{b + 2my}{b + my} - \frac{8}{3} \cdot \frac{y\sqrt{1 + m^2}}{b + 2y\sqrt{1 + m^2}} \quad (\text{Manning})$$



Στα σχήματα που ακολουθούν έχουν σχεδιαστεί οι ακριβείς καμπύλες  $M(y)$  και  $N(y)$  για τραπεζοειδείς αγωγούς.



Όπως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα, οι εκθέτες  $M$  και  $N$  σε τραπεζοειδείς αγωγούς είναι σχεδόν σταθεροί για ένα σημαντικό εύρος τιμών του λόγου  $y/b$  ή γενικά μεταβάλλονται με αργό ρυθμό ως συναρτήσεις του  $y/b$ . Ανάλογη είναι η συμπεριφορά τους και σε άλλα είδη διατομών. Στις περιπτώσεις στις οποίες η τιμή των  $M$  και  $N$  δεν αλλάζει σημαντικά μέσα στο αναμενόμενο εύρος τιμών του βάθους  $y$  και των βαθών  $y_0$  και  $y_c$ , μπορεί μέσω της εξίσωσης 6.14 να γίνει ο κατά προσέγγιση υπολογισμός του προφίλ. Ως  $M$  και  $N$  χρησιμοποιούνται τότε οι μέσοι όροι των αντίστοιχων τιμών στα όρια του διαστήματος τιμών του βάθους και θεωρούνται σταθεροί στο διάστημα ολοκλήρωσης\*.

Θα έπρεπε όμως να τονιστεί, ότι η αναλυτική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης χάνει την αξία της, όταν συνδυάζεται με τέτοιες προσεγγιστικές διαδικασίες υπολογισμού των  $M$  και  $N$ . Πιο αξιόπιστες σ' αυτή την περίπτωση είναι οι σύγχρονες μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης, που παρουσιάζονται σε επόμενο κεφάλαιο.

\* Για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων της αναλυτικής προσέγγισης στην περίπτωση μεταβλητών εκθετών  $M$  και  $N$  έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι. Με τις μεθόδους αυτές προτείνεται η τροποποίηση της εξίσωσης 6.14 με την εισαγωγή επιπλέον εκθετών, που αντιστοιχούν στο κρίσιμο και ομοιόμορφο βάθος (Chow, 1959; Subramanya, 1986).

δ. Αναλυτική επίλυση για οριζόντιο αγωγό

Όταν ο αγωγός είναι οριζόντιος, τότε  $S_o = 0$  και  $y_o \rightarrow \infty$ . Για το λόγο αυτόν τροποποιείται η μεθοδολογία της παραγράφου 6.3.1 ως εξής :

Η εξίσωση 3.44 γράφεται :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{S_f}{1 - Fr^2} = -S_c \cdot \frac{S_f/S_c}{1 - Fr^2} \quad (6.24)$$

όπου :  $S_c$  η κρίσιμη κλίση που δίνεται από την εξίσωση 4.71:

$$S_c = S_f(y_c) = (Q/K_c)^2 \quad \text{και} \quad K_c = K(y_c)$$

Επομένως ο λόγος  $S_f/S_c$  γίνεται :

$$S_f/S_c = (K_c/K)^2$$

Τέλος ο αριθμός Froude εκφράζεται με τη σχέση 6.6. Έτσι, μετά τις αντικαταστάσεις στην εξίσωση 6.24 έχουμε :

$$\frac{dy}{dx} = -S_c \cdot \frac{(K_c/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2}$$

Αν τώρα τεθεί :  $(K_c/K)^2 = (y_c/y)^N$  και  $(Z_c/Z)^2 = (y_c/y)^M$

η διαφορική εξίσωση γίνεται :

$$\frac{dy}{dx} = -S_c \cdot \frac{(y_c/y)^N}{1 - (y_c/y)^M} \quad (6.25)$$

Εισάγεται τώρα η νέα μεταβλητή :  $p = y / y_c$  και γίνεται χωρισμός μεταβλητών :

$$\Rightarrow dx = \frac{y_c}{S_c} \cdot (p^{N-M} - p^N) dp$$

και μετά από ολοκλήρωση μεταξύ δύο διατομών 1 και 2 προκύπτει :

$$x_2 - x_1 = \frac{y_c}{S_c} \cdot \left[ \frac{p_2^{N-M+1} - p_1^{N-M+1}}{N - M + 1} - \frac{p_2^{N+1} - p_1^{N+1}}{N + 1} \right] \quad (6.26)$$

ε. Αναλυτική προσέγγιση για κυκλικό αγωγό

Η αναλυτική προσέγγιση με τη χρήση των εκθετών  $M$  και  $N$ , που περιγράφηκε στις προηγούμενες παραγράφους, δεν ενδείκνυται για την περίπτωση αγωγών κυκλικής διατομής. Μια διαφορετική διαδικασία επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης 6.4, η οποία αναπτύχθηκε από τους Keifer και Chu (1955) για κυκλικές διατομές, είναι η ακόλουθη :

Έστω  $Q$  η πραγματική παροχή που διαρρέει αγωγό διαμέτρου  $D$  με κατά μήκος κλίση  $S_o$ . Τότε :

$$Q = K \cdot \sqrt{S_f} \quad , \quad K = K(y) = \frac{1}{n} \cdot A \cdot R^{2/3}$$

και  $Q = K_o \cdot \sqrt{S_o} \quad , \quad K = K(y_o) = \frac{1}{n} \cdot A_o \cdot R_o^{2/3}$

Έστω  $Q_D$  μια υποθετική παροχή που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφο βάθος  $y_{D_o} = D$  (δηλαδή σε ομοιόμορφη ροή που καταλαμβάνει το σύνολο της διατομής). Τότε:

$$Q_D = K_D \cdot \sqrt{S_o} \quad , \quad K_D = K(D) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \quad (6.27)$$

Συμβολίζουμε με  $Q_r$  το λόγο της πραγματικής προς την υποθετική παροχή :

$$Q_r = Q / Q_D = (K_D / K_o)^2 \quad (6.28)$$

Τότε ο λόγος  $S_f / S_o$  στον αριθμητή της διαφορικής εξίσωσης 6.4 γίνεται :

$$\frac{S_f}{S_o} = \left(\frac{K_o}{K}\right)^2 = \left(\frac{K_o}{K_D}\right)^2 \cdot \left(\frac{K_D}{K}\right)^2 = Q_r^2 \cdot f_1(y/D) \quad (6.29)$$

όπου :  $f_1(y/D) = \left(\frac{K_D}{K}\right)^2 = \left[ \frac{(\pi D^2/4) \cdot (D/4)^{2/3}}{A \cdot R^{2/3}} \right]^2 \quad (6.30)$

Επίσης ο αριθμός Froude στον παρονομαστή της 6.4 γράφεται :

$$Fr^2 = \frac{Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3} = \frac{Q^2}{g \cdot D^5} \cdot f_2(y/D) \quad (6.31)$$

Μετά την αντικατάσταση των σχέσεων 6.29 και 6.30 στην 6.4 και την εισαγωγή της μεταβλητής :  $\eta = y/D = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \theta)$  η εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{S_o}{D} \cdot \frac{1 - Q_r^2 \cdot f_1(\eta)}{1 - \frac{Q^2}{gD^5} \cdot f_2(\eta)}$$

$$\eta \quad dx = \frac{D}{S_o} \cdot \left[ \frac{d\eta}{1 - Q_r^2 \cdot f_1(\eta)} - \frac{Q^2}{gD^5} \cdot \frac{f_2(\eta) d\eta}{1 - Q_r^2 \cdot f_1(\eta)} \right]$$

Μετά από ολοκλήρωση προκύπτει :

$$x = \frac{D}{S_o} \cdot \left[ I_1(Q_r, \eta) - \frac{Q^2}{gD^5} \cdot I_2(Q_r, \eta) \right] + c \quad (6.32)$$

$$\text{όπου : } I_1(Q_r, \eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{1 - Q_r^2 \cdot f_1(\eta)} \quad (6.33)$$

$$\text{και } I_2(Q_r, \eta) = \int_0^\eta \frac{f_2(\eta) \cdot d\eta}{1 - Q_r^2 \cdot f_1(\eta)} \quad (6.34)$$

Τιμές των ολοκληρωμάτων  $I_1$  και  $I_2$  έχουν υπολογιστεί αριθμητικά και δίνονται σε πίνακες. Η σταθερά ολοκλήρωσης  $c$  απαλείφεται, αν η ολοκλήρωση γίνει μεταξύ δύο διατομών 1 και 2.

## 6.3.2 Αριθμητική επίλυση

### α. Αριθμητική επίλυση για πρισματικό αγωγό

Η διαφορική εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας 3.44 μπορεί να γραφεί με τη μορφή :

$$dy/dx = f(y) \quad (6.35)$$

$$\text{όπου : } f(y) = \frac{S_o - S_f(y)}{1 - Fr^2(y)} \quad (6.36)$$

Η εξίσωση αυτή, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Σε συνδυασμό με μια οριακή συνθήκη της μορφής :  $y(x_1) = y_1$  μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με κάποια από τις γνωστές μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης (Σιδηρόπουλος και Φωτιάδης, 1996). Η αριθμητική διαδικασία είναι γενικά η ακόλουθη :

Επιλέγεται ένα βήμα ολοκλήρωσης  $\Delta x$ , το μέγεθος του οποίου είναι προφανώς καθοριστικό για την ακρίβεια της λύσης. Στη συνέχεια ξεκινώντας από το γνωστό βάθος  $y_1$  στη θέση  $x_1$  υπολογίζονται διαδοχικά τα βάθη  $y_2, y_3, \dots, y_N$  στις θέσεις  $x_2, x_3, \dots, x_N$ , αντίστοιχα, με τη σχέση :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (6.37)$$

Οι μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης, που έχουν αναπτυχθεί, διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο υπολογισμού του  $\Delta y_i$  και επιτυγχάνουν διαφορετικό βαθμό ακριβείας στις λύσεις. Εδώ αναφέρουμε τη μέθοδο Runge - Kutta 4ης τάξης, ως μία από τις κλασικές μεθόδους επίλυσης του προβλήματος. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή το  $\Delta y_i$  υπολογίζεται ως εξής :

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6.38)$$

$$\text{όπου : } k_1 = \Delta x \cdot f(y_i)$$

$$k_2 = \Delta x \cdot f(y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = \Delta x \cdot f(y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = \Delta x \cdot f(y_i + k_3)$$

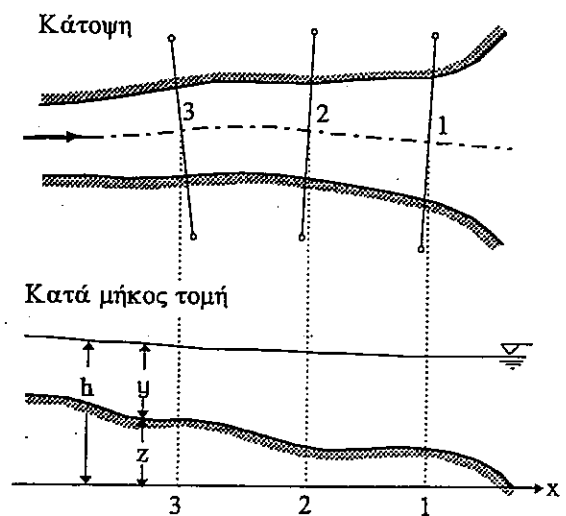
και όπου η  $f$  υπολογίζεται κάθε φορά με τη σχέση 6.36.

## β. Αριθμητική επίλυση για μη πρισματικό αγωγό

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια για τον υπολογισμό του προφίλ σε έναν αγωγό αναφέρεται στη ροή σε πρισματικούς ή κατά τμήματα πρισματικούς αγωγούς. Δεν μπορεί όμως να εφαρμοστεί σε μη πρισματικούς ή φυσικούς αγωγούς, όπου η μορφή του αγωγού και ενδεχόμενα και η τραχύτητα μεταβάλλονται κατά μήκος του αγωγού, και μάλιστα κατά τρόπο που η μεταβολή αυτή να μην μπορεί πάντα να περιγραφεί με κάποια σχέση ως συνάρτηση της θέσης  $x$ .

Στην περίπτωση αυτή το προφίλ δεν προσδιορίζεται από τη σχέση βάθους - απόστασης ( $y - x$ ), όπως γίνεται στους πρισματικούς αγωγούς, αλλά από τη σχέση στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας - απόστασης ( $h - x$ ). Η στάθμη  $h$  ( $=y+z$ ) εκφράζεται ως προς ένα επίπεδο αναφοράς, που χρησιμοποιείται ως αφετηρία μέτρησης των υψών. Αντίστοιχα, τα στοιχεία που προσδιορίζουν τη μορφή της διατομής εκφράζονται ως προς το επίπεδο αυτό. Είναι φανερό, ότι όταν πρόκειται για φυσικό αγωγό, απαιτείται να έχει προηγηθεί η αποτύπωση ενός αριθμού διατομών κατά μήκος του αγωγού. Σ' αυτή την περίπτωση οι πληροφορίες οι σχετικές με τη γεωμετρία της διατομής είναι γνωστές μόνο σε συγκεκριμένες θέσεις  $x$ . Τέλος για να είναι δυνατός ο υπολογισμός του προφίλ, θα πρέπει να είναι γνωστές οι οριακές συνθήκες.

Έστω λοιπόν ο φυσικός αγωγός του σχήματος που διαρρέεται από γνωστή παροχή  $Q$ . Το πρόβλημα υπολογισμού της ελεύθερης επιφάνειας διατυπώνεται ως εξής: Με δεδομένα τη γεωμετρία δύο διατομών 1 και 2 και γνωστή τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας στη διατομή 1, απαιτείται ο υπολογισμός της στάθμης στη διατομή 2. Η επανάληψη της διαδικασίας για όλες τις διατομές διαδοχικά οδηγεί στον υπολογισμό του προφίλ της ροής κατά μήκος του αγωγού.



Για την επίλυση του προβλήματος κατάλληλη είναι η κλασική μέθοδος **κατά βήματα** (the standard step method). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, χρησιμοποιείται η εξίσωση συνέχειας 3.39 και η εξίσωση ολικού φορτίου 3.42,

οι οποίες γράφονται με διακριτοποιημένη μορφή. Για τον τρόπο αρίθμησης των διατομών του σχήματος, οι εξισώσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$Q_2 = Q_1 = Q \Rightarrow V_2 A_2 = V_1 A_1 = Q \quad (6.39)$$

$$\text{και } H_1 - H_2 = \Delta H_f \quad (*) \quad (6.40)$$

$$\text{όπου: } H_2 = h_2 + V_2^2/2g, \quad h_2 = z_2 + y_2 \quad (6.41)$$

$$H_1 = h_1 + V_1^2/2g, \quad h_1 = z_1 + y_1$$

$$\Delta H_f = \bar{S}_f \cdot \Delta x = \frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \cdot \Delta x \quad (6.42)$$

$$S_{fi} = \frac{n^2 \cdot V_i^2}{R_i^2} = \frac{n^2 \cdot Q^2}{A_i^2 \cdot R_i^2}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Από την εξίσωση 6.40 και την 6.42 προκύπτει :

$$H_2 = H_1 + \frac{1}{2} \cdot (S_{f1} + S_{f2}) \cdot \Delta x \quad (6.43)$$

Είναι φανερό ότι, αφού τα  $Q$  και  $h_1$  είναι γνωστά, όλα τα γεωμετρικά και υδραυλικά μεγέθη της διατομής 1 μπορούν να υπολογιστούν. Επομένως, από το συνδυασμό των εξισώσεων 6.39, 6.41 και 6.43 προκύπτει μία μη γραμμική σχέση της μορφής  $f(h_2) = \text{σταθ.}$ , η οποία μπορεί να επιλυθεί με διαδοχικές προσεγγίσεις.

Δεχόμαστε κατ'εκτίμηση μια αρχική τιμή της στάθμης  $h_2 (=z_2+y_2)$  και υπολογίζουμε τα υδραυλικά μεγέθη της διατομής 2. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ολικό φορτίο  $H_2$  από τις εξισώσεις 6.41 και 6.43 χωριστά. Αν οι τιμές του  $H_2$  που θα προκύψουν από τις δύο εξισώσεις διαφέρουν κατά  $H_E$ , θα πρέπει να γίνει διόρθωση της στάθμης  $h_2$  άρα του βάθους  $y_2$  κατά  $\Delta y_2$  και επανάληψη των υπολογισμών μέχρι να μηδενιστεί το σφάλμα  $H_E$ . Η

---

\* Στην περίπτωση ενός φυσικού αγωγού στις απώλειες φορτίου εκτός από τις απώλειες τριβής  $\Delta H_f$  θα έπρεπε να περιληφθούν και τυχόν τοπικές απώλειες λόγω απότομων μεταβολών. Οι απώλειες αυτές μπορούν να ληφθούν υπόψη μέσω των απωλειών τριβής με κατάλληλη αύξηση του συντελεστή τριβής του Manning. Εναλλακτικά, μπορούν να εκφραστούν ως ποσοστό της μεταβολής του κινητικού φορτίου.

επιλογή του κατάλληλου κάθε φορά βάθους  $y_2$  και συνεπώς η επιτάχυνση της σύγκλισης μπορεί να επιτευχθεί με την ακόλουθη διαδικασία που προτάθηκε από τον Henderson (1966) : Η τιμή του σφάλματος  $H_E$  μπορεί να μεταβληθεί μόνο αν μεταβληθεί το  $y_2$ . Επομένως η μεταβολή του  $H_E$  ως προς  $y_2$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση :

$$\begin{aligned} \frac{dH_E}{dy_2} &= \frac{d}{dy_2} [H_2 - (H_1 + \Delta H_f)] \\ &= \frac{d}{dy_2} \left[ z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} - \left( H_1 + \frac{S_{f1} + S_{f2}}{2} \cdot \Delta x \right) \right] \\ &= \frac{d}{dy_2} \left( y_2 + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot S_{f2} \right) \\ &\approx 1 - Fr_2^2 + \frac{3 \cdot S_{f2}}{2 \cdot R_2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Αν :  $\frac{dH_E}{dy_2} = \frac{\Delta H_E}{\Delta y_2}$  και  $\Delta y_2$  επιλεγεί έτσι ώστε  $\Delta H_E = -H_E$ , τότε :

$$\Delta y_2 = \Delta h_2 = \frac{-H_E}{1 - Fr_2^2 + \frac{3 \cdot S_{f2}}{2 \cdot R_2} \cdot \Delta x} \quad (6.44)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι  $\Delta y_2$  και  $H_E$  είναι ετερόσημα μεγέθη. Θα έπρεπε να σημειωθεί ότι, αν οι υπολογισμοί γίνονταν με διεύθυνση προς τα κατάντη (θετικά  $x$ ), όπως στην περίπτωση υπερκρίσιμης ροής, ο τρίτος όρος στον παρονομαστή του κλάσματος θα είχε αρνητικό πρόσημο.

Η επαναληπτική φύση των υπολογισμών και ο μεγάλος αριθμός των απαιτούμενων πράξεων για τον υπολογισμό του προφίλ σε φυσικό αγωγό καθιστούν την κλασική μέθοδο κατά βήματα κατάλληλη για επίλυση μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή. Έτσι από διάφορα ερευνητικά κέντρα έχουν αναπτυχθεί προγράμματα  $H/Y$ , που χρησιμοποιούν τη μέθοδο αυτή με διάφορες παραλλαγές για επίλυση της ροής σε φυσικούς αγωγούς (Eichert, 1970). Μεταξύ αυτών μπορούμε να αναφέρουμε το καθιερωμένο πια πρόγραμμα HEC-2 (U.S. Hydrologic Engineering Center, 1979).



### γ. Επίλυση με κλασικές μεθόδους

Για ιστορικούς λόγους και λόγους πληρότητας αναφέρουμε εδώ χωρίς ανάπτυξη τις λεγόμενες κλασικές μεθόδους επίλυσης της βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής. Οι μέθοδοι αυτές αναπτύχθηκαν παλαιότερα πριν από την εξάπλωση της χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών και περιλαμβάνονται σε όλα τα εγχειρίδια ανοικτών αγωγών. Σ' αυτές υπάγονται οι διάφορες μέθοδοι κατά βήματα, η μέθοδος γραφικής ολοκλήρωσης Ezra κ.ά. Όλες στηρίζονται στη διακριτοποιημένη μορφή μιας από τις εξισώσεις φορτίου, δηλαδή είτε της εξίσωσης ειδικής ενέργειας 3.41 (όπως η απευθείας μέθοδος βημάτων : the direct step method), είτε της εξίσωσης ολικού φορτίου 3.42 (όπως η κλασική μέθοδος κατά βήματα : the standard step method). Από τις μεθόδους αυτές άλλες ήταν κατάλληλες για επίλυση του προφίλ μόνο σε πρισματικούς αγωγούς, ενώ άλλες μπορούσαν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση φυσικών και γενικά μη πρισματικών αγωγών. Σήμερα έχουν υποκατασταθεί από πιο σύγχρονες μεθόδους επίλυσης ενώ ορισμένες αποτέλεσαν τη βάση για την ανάπτυξη των τελευταίων (βλ. προηγούμενη παράγραφο β).

## 6.4 ΘΕΣΗ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΥΔΡΑΥΛΙΚΟΥ ΑΛΜΑΤΟΣ

Έχει αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια, ότι το υδραυλικό άλμα δημιουργείται κατά τη μετάβαση της ροής από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη. Έτσι το άλμα είναι ένα τμήμα απότομα μεταβαλλόμενης ροής που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο τμημάτων βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής. Η εύρεση της θέσης σχηματισμού του άλματος στηρίζεται στο συνδυασμό των ακόλουθων παρατηρήσεων :

– Η διατομή που καθορίζει την αρχή του άλματος, καθορίζει ταυτόχρονα και το τέλος της ανάντη υπερκρίσιμης ροής. Ανάλογα με το είδος των ανάντη οριακών συνθηκών και το είδος κλίσης του πυθμένα, το προφίλ σ' αυτό το ανάντη τμήμα ροής θα ακολουθεί τη γραμμή ομοιόμορφου (υπερκρίσιμου) βάρους ή έναν από τους τύπους καμπυλών υπερκρίσιμης ανομοιόμορφης ροής : M3, S2, S3, C3, H3, A3. Επομένως το βάθος ροής στην αρχή του άλματος πρέπει να ικανοποιεί είτε την εξίσωση ομοιόμορφου βάρους, είτε τη διαφορική εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας της βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής.

– Αντίστοιχα, η διατομή που καθορίζει το τέλος του άλματος, σηματοδοτεί ταυτόχρονα και την αρχή της κατάντη υποκρίσιμης ροής. Η διατομή αυτή μπορεί αντίστροφα να θεωρηθεί ότι χαρακτηρίζει το τέλος του προφίλ υποκρίσιμης ροής, αν ληφθεί υπόψη ότι η ροή αυτή ελέγχεται από τα κατάντη και επομένως η χάραξή της γίνεται από τα κατάντη (διατομή ελέγχου) προς τα ανάντη με φορά αντίθετη προς τη φορά της ροής. Στο τμήμα αυτό της ροής το προφίλ ακολουθεί ή τη γραμμή (υποκρίσιμου) ομοιόμορφου βάρους ή έναν από τους τύπους καμπυλών : M1, M2, S1, C1, H2, A2. Επομένως το βάθος ροής στο τέλος του άλματος πρέπει να ικανοποιεί είτε την εξίσωση ομοιόμορφου βάρους, είτε τη διαφορική εξίσωση ελεύθερης επιφάνειας της αντίστοιχης βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής.

– Το άλμα περιγράφεται από συγκεκριμένες εξισώσεις (βλ. κεφ. 4.3.2) και ειδικότερα από : α) την εξίσωση συζυγών βαθών που καθορίζει τη σχέση ανάμεσα στα βάθη στην αρχή και στο τέλος του άλματος και β) τη σχέση που προσδιορίζει το μήκος του άλματος, δηλαδή την απόσταση μεταξύ αρχής και τέλους του άλματος.

Υστερα από τις παρατηρήσεις αυτές, γίνεται φανερό ότι το άλμα σχηματίζεται σε εκείνη τη θέση, στην οποία ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παραπάνω συνθήκες. Ο προσδιορισμός της θέσης του άλματος σε ένα σύνθετο



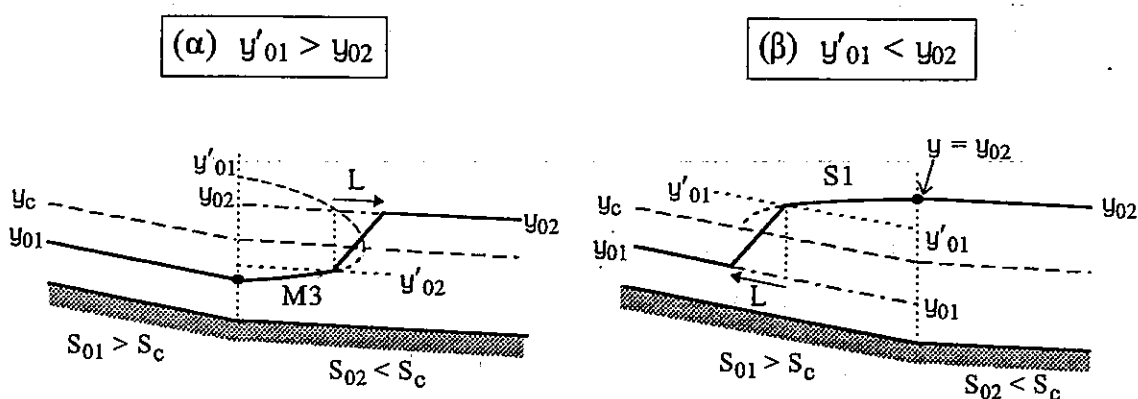
Συνεπώς το προφίλ στη συγκεκριμένη περίπτωση προσδιορίζεται από τη γραμμή ΑΓΓ'Β.

Για τα σημεία Γ και Γ' παρατηρούμε ότι : α) ανήκουν στις αντίστοιχες καμπύλες M3 και M2 βαθμιαία μεταβαλλόμενης ροής, β) τα βάθη τους ικανοποιούν την εξίσωση συζυγών βαθών, μια που η ΓΓ' είναι παράλληλη προς τον πυθμένα και  $y_{\Gamma'}$  συζυγές του  $y_{\Gamma}$  και γ) βρίσκονται σε απόσταση L κατά τη διεύθυνση της ροής, όπου L το αντίστοιχο μήκος άλματος.

Στο παράδειγμα που εξετάσαμε, η όλη διαδικασία χάραξης του προφίλ σπηρίχτηκε στην παραδοχή, ότι οι καμπύλες ΒΔ και Α'Γ' τέμνονται. Αν όμως η καμπύλη ΒΔ (M2) μετατοπιστεί προς τα πάνω, π.χ. ανεβεί η στάθμη της λίμνης, τότε αντίστοιχα το σημείο Γ' μετατοπίζεται προς το Α' και το άλμα προς τη θυρίδα. Στην οριακή περίπτωση που το Γ' συμπίπτει με το Α', το σημείο Γ ταυτίζεται με το Α και το άλμα σχηματίζεται αμέσως μετά την έξοδο του νερού από τη θυρίδα. Η οριακή αυτή θέση προσδιορίζεται κατά προσέγγιση από τη σχέση  $y_{A'} = y_{\Delta}^*$ . Αν τέλος ξεπεραστεί το όριο αυτό, τότε η εκροή από τη θυρίδα θα είναι "βυθισμένη".

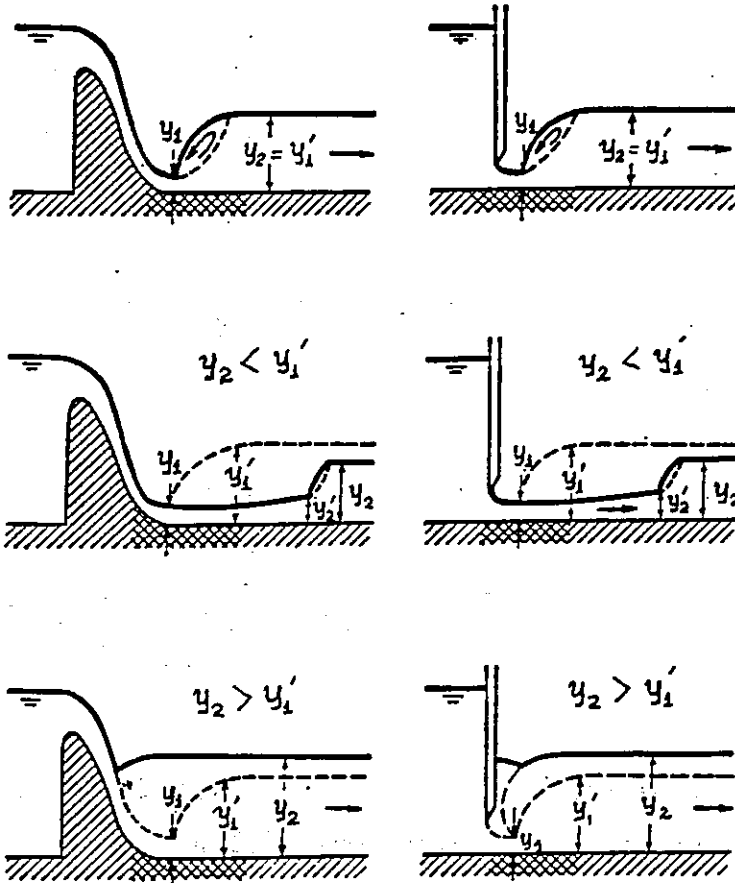
Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να ενσωματωθεί σε μια αριθμητική διαδικασία υπολογισμού ενός σύνθετου προφίλ ροής. Ας σημειωθεί ότι η διαδικασία αυτή εντοπίζει άμεσα το τέλος του άλματος και ισχύει γενικά για μια μεγάλη ποικιλία αντίστοιχων προβλημάτων ροής.

**Παράδειγμα 2ο :** Σχηματισμός άλματος σε αγωγό με αλλαγή κατά μήκος κλίσης από απότομη σε ήπια και οριακές συνθήκες ομοιόμορφου βάθους.



\* Η σχέση αυτή ισχύει αν αγνοηθεί το μήκος του άλματος. Πράγματι στις περισσότερες περιπτώσεις το μήκος του άλματος αγνοείται και το άλμα σχεδιάζεται με τη μορφή κατακόρυφου μετώπου.

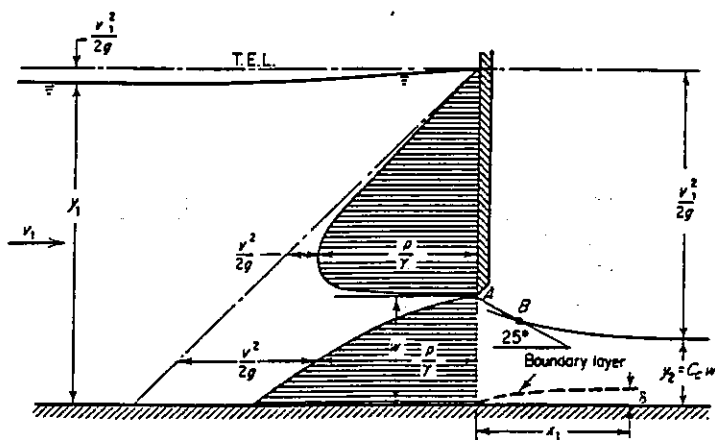
**Παράδειγμα 3ο :** Σχηματισμός άλματος σε εκχειλιστή και θυρίδα -  
 Επίδραση κατάντη συνθηκών στη θέση του άλματος.



## 7. ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΗΣ ΡΟΗΣ

### 7.1 ΘΥΡΙΔΕΣ – ΘΥΡΟΦΡΑΓΜΑΤΑ

Οι θυρίδες είναι υδραυλικές κατασκευές για τη ρύθμιση και τη μέτρηση της ροής σε ανοικτούς αγωγούς. Η ανάλυση που ακολουθεί στοχεύει στην εύρεση σχέσεων μεταξύ παροχής, ανάντη και κατάντη βάθους και χαρακτηριστικών της θυρίδας. Ο αγωγός υποτίθεται ορθογωνικός.



Στο τμήμα μεταξύ των διατομών 1 και 2 οι απώλειες θεωρούνται αμελητέες. Έτσι κατά τα γνωστά (κεφ. 4.2.2) ισχύει :

$$E_1 = E_2 \Rightarrow y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} = y_2 + \frac{q^2}{2gy_2^2} \quad (7.1)$$

Το βάθος  $y_2$  συνδέεται με το άνοιγμα της θυρίδας  $w$  με τη σχέση

$$y_2 = C_c \cdot w \quad (7.2)$$

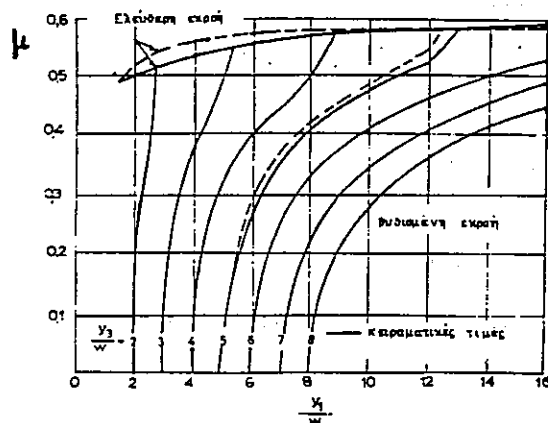
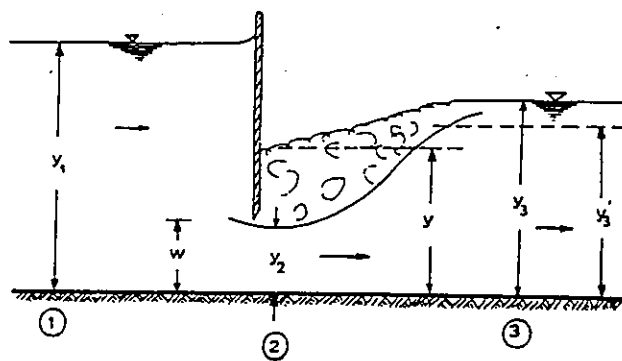
όπου :  $C_c$  = συντελεστής συστολής, ο οποίος συνήθως είναι  $\approx 0.61$ .

Από το συνδυασμό των εξισώσεων 7.1 και 7.2 προκύπτει :

$$q = \mu \cdot w \cdot \sqrt{2gy_1} \quad (7.3)$$

όπου :  $\mu = \frac{C_c}{\sqrt{1 + C_c \cdot w/y_1}}$  = συντελεστής παροχής.

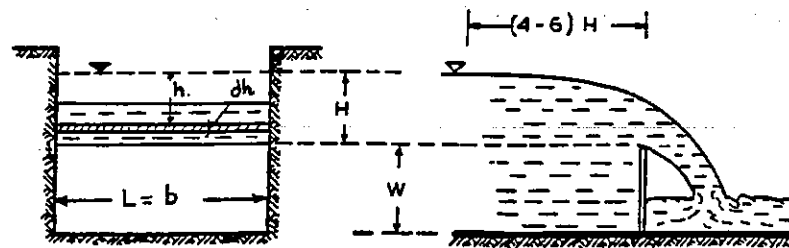
Τα παραπάνω ισχύουν για ελεύθερη εκροή της υδάτινης φλέβας από τη θυρίδα. Όταν η εκροή είναι βυθισμένη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η παροχή  $q$  υπολογίζεται από την εξίσωση 7.3, όπου όμως ο συντελεστής  $\mu$  εξαρτάται πια και από το λόγο  $y_3/w$ . Στο σχήμα δίνεται ο συντελεστής παροχής  $\mu$  ως συνάρτηση των  $y_1/w$  και  $y_3/w$  για κατακόρυφες θυρίδες με ελεύθερη και βυθισμένη ροή. Αντίστοιχα διαγράμματα υπάρχουν στη σχετική βιβλιογραφία για άλλου είδους θυρίδες.



## 7.2 ΕΚΧΕΙΛΙΣΤΕΣ

### 7.2.1 Εκχειλιστές λεπτής στέψης

#### α. Ορθογωνικός εκχειλιστής χωρίς πλευρική συστολή



Για την εξαγωγή της εξίσωσης παροχής σε έναν εκχειλιστή λεπτής στέψης, υποθέτουμε αρχικά ότι η υδάτινη φλέβα πάνω από τη στέψη του εκχειλιστή έχει ύψος ίσο με το ανάντη φορτίο  $H$ . Υποθέτουμε δηλαδή ότι τα υγρά σωματίδια κινούνται οριζόντια και δεν παρατηρείται καμπύλωση της ελεύθερης επιφάνειας. Τότε η ταχύτητα  $V$  κάθε λωρίδας πάχους  $dh$  δίνεται από τη σχέση :  $V = \sqrt{2gh}$  και η αντίστοιχη ιδανική παροχή  $dQ_i$  από :

$$dQ_i = L \cdot \sqrt{2gh} \cdot dh$$

$$\text{Άρα : } Q_i = \int_0^H L \cdot \sqrt{2gh} \cdot dh = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2g} \cdot L \cdot H^{3/2} \quad (7.4)$$

Αν τώρα ληφθεί υπόψη η συστολή της διατομής πάνω από τον εκχειλιστή και το γεγονός ότι στην προηγούμενη ανάλυση αγνοήθηκε το ανάντη κινητικό φορτίο, η πραγματική παροχή γράφεται :

$$Q = \mu \cdot Q_i = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot L \cdot H^{3/2} \quad (7.5)$$

όπου :  $\mu$  ο συντελεστής παροχής. Το  $\mu$  μπορεί να υπολογιστεί με τις ακόλουθες εμπειρικές σχέσεις του Rehbock :

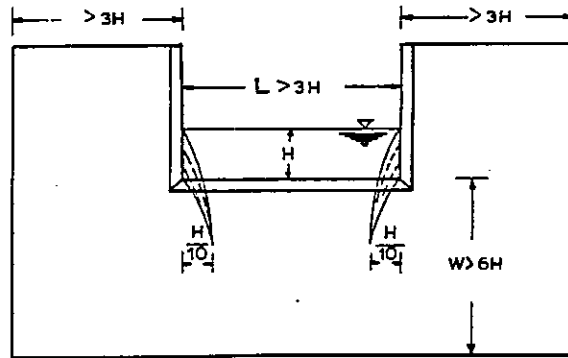
$$\mu = 0.61 + 0.08 \cdot H/w, \quad \text{για } 0.15 \leq w/H \leq 5 \quad (7.6\alpha)$$

$$\text{και } \mu = 1.06 \cdot (1 + w/H), \quad \text{για } w/H \leq 0.08 \quad (7.6\beta)$$



### β. Ορθογωνικός εκχειλιστής με πλευρική συστολή

Όταν το μήκος  $L$  της στέψης του εκχειλιστή είναι μικρότερο από το πλάτος  $b$  του αγωγού, δημιουργείται πλευρική συστολή της φλέβας του υπερχειλίζει.



Ο υπολογισμός της παροχής στην περίπτωση αυτή γίνεται με τις ακόλουθες εμπειρικές εξισώσεις :

$$- Q = 0.581(L - 0.1H')\sqrt{g} H'^{3/2} \quad (\text{Hamilton Smith}) \quad (7.7)$$

όπου :  $H' = H + 1.4 \cdot V^2 / 2g$  με  $V$  την ανάντη ταχύτητα. Η εξίσωση αυτή ισχύει για :  $H/w < 0.5$ ,  $H/L < 0.5$ ,  $b > 0.3\text{m}$  και  $0.075\text{m} < H < 0.6\text{m}$ .

$$- Q = 0.554(1 - 0.0035H/w) \cdot (L + 0.0025) \cdot \sqrt{g} \cdot (H + 0.001)^{3/2} \quad (7.8)$$

των Kindsvater και Carter και ισχύει για :  $H/w < 2$ ,  $b > 0.15\text{m}$ ,  $H > 0.03\text{m}$ ,  $w > 0.10\text{m}$ .

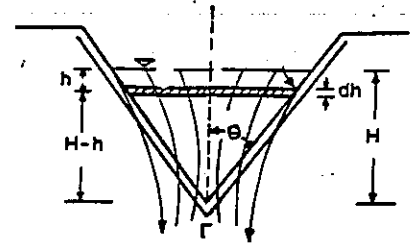
Η εξίσωση 7.7 δίνει καλύτερα αποτελέσματα για μεγάλους εκχειλιστές και η 6.8 για μικρά φορτία.

### γ. Τριγωνικός εκχειλιστής

Ο υπολογισμός της παροχής σε τριγωνικό εκχειλιστή γίνεται με τρόπο ανάλογο προς τους ορθογωνικούς εκχειλιστές. Η παροχή δίνεται τελικά από την εξίσωση :

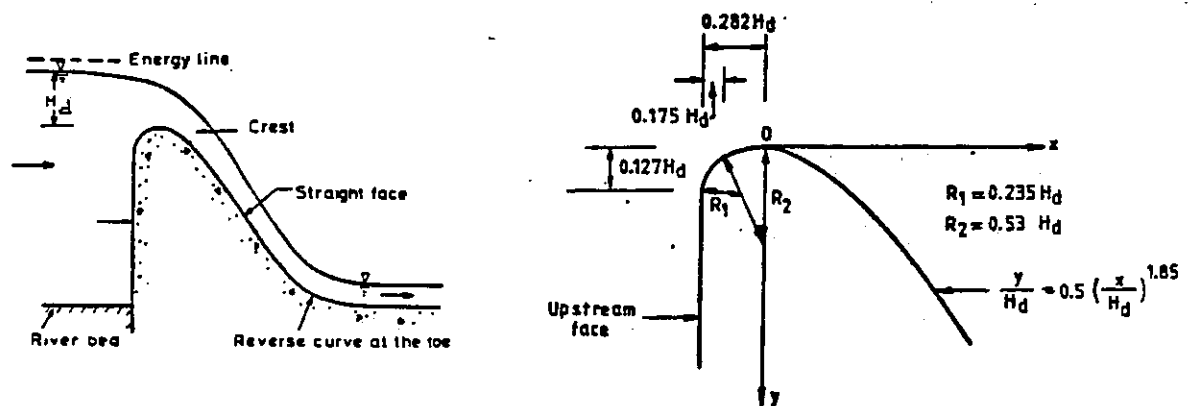
$$Q = \frac{8}{15} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot \tan \theta \cdot H^{5/2} \quad (7.9)$$

Ο συντελεστής παροχής  $\mu$  κυμαίνεται γενικά από 0.58 μέχρι 0.62 και περιλαμβάνει και την επίδραση της πλευρικής συστολής.



### 7.2.2 Εκχειλιστές κανονικής ή πρότυπης στέψης

Οι εκχειλιστές αυτού του τύπου σχεδιάζονται με τρόπο ώστε η μορφή της στέψης του εκχειλιστή να συμπίπτει με το εσωράχιο της υδάτινης φλέβας, που σχηματίζεται σε έναν αντίστοιχο εκχειλιστή λεπτής στέψης καλά αεριζόμενο. Με τον τρόπο αυτόν εξασφαλίζεται η ροή από την ανάπτυξη υποπιέσεων και υπερπιέσεων και έτσι εξασφαλίζεται υψηλός συντελεστής παροχής.



Η μορφή της στέψης του εκχειλιστή για κάποιο ανάντη φορτίο σχεδιασμού  $H_d$  δίνεται από τη σχέση :

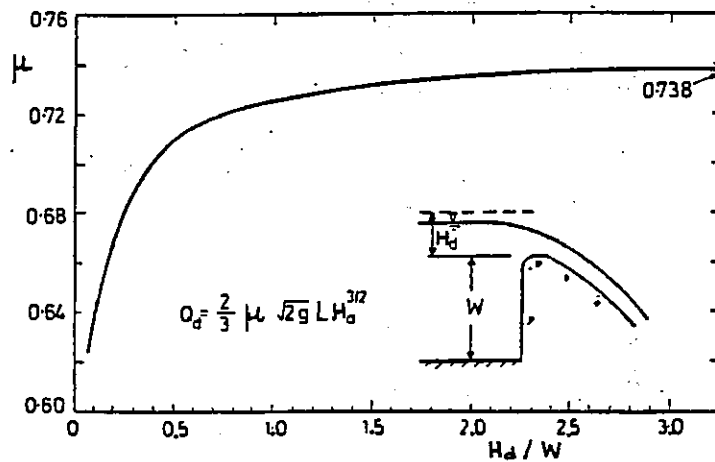
$$y/H_d = k \cdot (x/H_d)^a \quad (7.10)$$

όπου τα  $x$ ,  $y$  εκφράζονται ως προς άξονες συντεταγμένων προσαρμοσμένους στην κορυφή της στέψης του εκχειλιστή. Οι σταθερές  $k$  και  $a$  για κατακόρυφη ανάντη παρειά του εκχειλιστή είναι  $k = 0.5$  και  $a = 1.85$ .

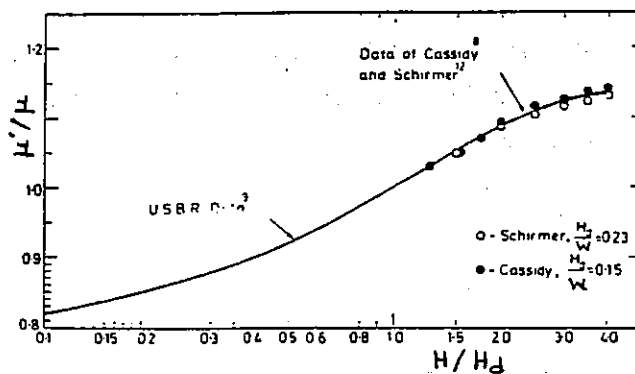
Η παροχή εκφράζεται με τη σχέση :

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot L \cdot H_d^{3/2} \quad (7.11)$$

Ο δείκτης  $d$  αναφέρεται στα μεγέθη σχεδιασμού. Ο συντελεστής παροχής  $\mu$  δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα ως συνάρτηση του λόγου  $w/H_d$ .

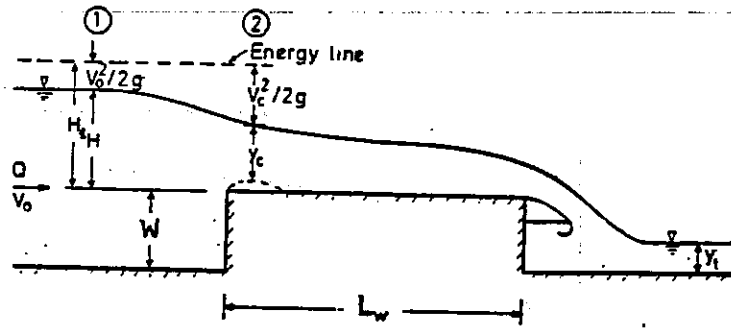


Για τιμές του ανάντη φορτίου  $H$  και κατά συνέπεια και της παροχής  $Q$  διαφορετικές από τις αντίστοιχες τιμές σχεδιασμού, εξακολουθεί να ισχύει η εξίσωση 7.11. Ο συντελεστής παροχής όμως αντικαθίσταται από τον  $\mu'$ . Τιμές του λόγου  $\mu'/\mu$  ως συνάρτηση του  $H/H_d$  δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



### 7.2.3 Εκχειλιστές ευρείας στέψης

Εκχειλιστές ευρείας στέψης είναι οι αναβαθμοί με εύρος στέψης  $L_w$  και ύψος  $w$ , που ικανοποιεί τη σχέση:  $w > \Delta z_{\max}$  (βλ. κεφ. 4.2.2β). Το μέγεθος  $\Delta z_{\max}$  είναι η οριακή τιμή του ύψους  $\Delta z$  του αναβαθμού για την οποία δεν προκαλείται απόπνιξη της ανάντη ροής. Συνεπώς στη διατομή 2 πάνω στον αναβαθμό η ροή γίνεται κρίσιμη.



Με βάση την παραδοχή αμελητέας απώλειας φορτίου μεταξύ των διατομών 1 και 2 έχουμε :  $H_1 = E_2 = E_c$  . Σε συνδυασμό με τις εξισώσεις 4.8 και 4.21, η σχέση αυτή γίνεται :

$$H_1 = \frac{3}{2} \cdot y_c = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$$

$$\text{Άρα : } q = \sqrt{g} \cdot \left( \frac{2}{3} H_1 \right)^{3/2} = 1.705 \cdot H_1^{3/2} \quad (7.12)$$

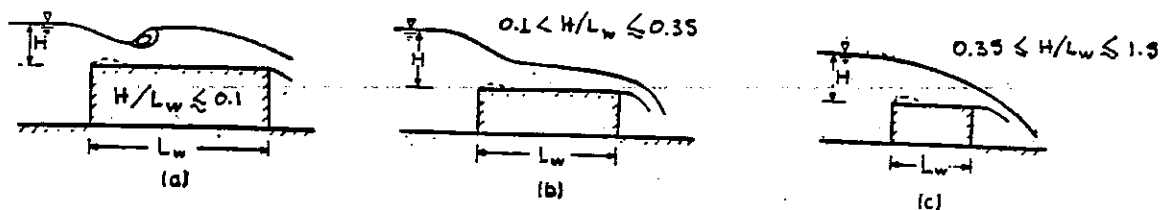
$$\text{ή } Q = 1.705 \cdot L \cdot H_1^{3/2} \quad (7.13)$$

Για να ληφθούν τώρα υπόψη οι απώλειες, καθώς και το ότι στη διατομή 2 το βάθος δεν είναι ακριβώς κρίσιμο, εισάγεται στις παραπάνω εξισώσεις ένας διορθωτικός συντελεστής  $\mu'$  . Έτσι :

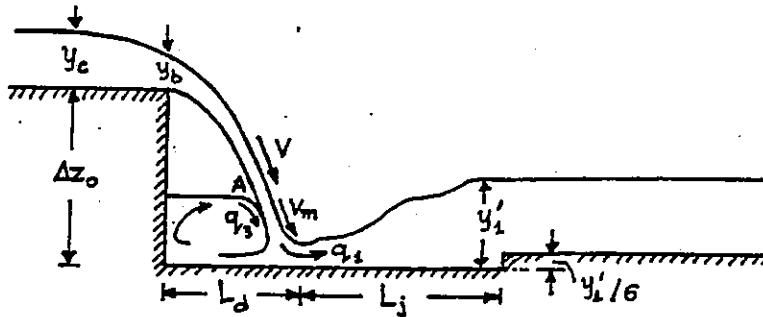
$$Q = 1.705 \cdot \mu' \cdot L \cdot H_1^{3/2}$$

$$\text{ή } Q = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{2g} \cdot L \cdot H_d^{3/2}$$

όπου :  $\mu$  ο συντελεστής παροχής, που εξαρτάται από τους λόγους  $H/w$  και  $H/L_w$  . Ειδικά ο λόγος  $H/L_w$  επηρεάζει τις συνθήκες ροής πάνω στον εκχειλιστή, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



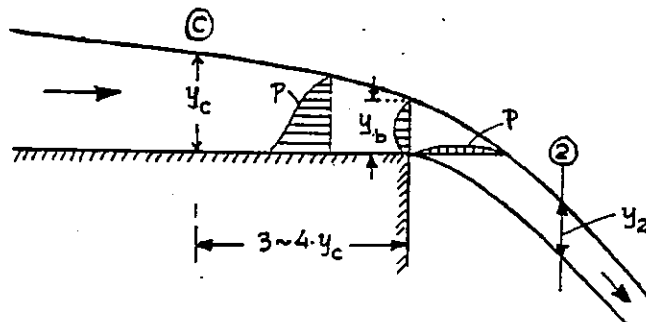
### 7.3 ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΥΔΑΤΟΠΤΩΣΗ



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η ελεύθερη πτώση του νερού από έναν καταβαθμό μεγάλου ύψους  $\Delta z_0$ . Τέτοιου είδους κατασκευές μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κατασκευές μέτρησης παροχής και ως κατασκευές καταστροφής κινητικής ενέργειας. Παλλαπλοί καταβαθμοί σε σειρά χρησιμοποιούνται συχνά για τη διευθέτηση ορεινών υδατορευμάτων, όπου λόγω μεγάλων κλίσεων του εδάφους το νερό αποκτά μεγάλο κινητικό φορτίο και διαβρωτική ικανότητα.

#### Κεφαλή ελεύθερης υδατόπτωσης

Έχει επανειλημμένα αναφερθεί, ότι η κατανομή της πίεσης σε βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή είναι περίπου υδροστατική. Στην περίπτωση όμως ελεύθερης υδατόπτωσης, κοντά στο χείλος του καταβαθμού παύει να ισχύει η υπόθεση της υδροστατικής κατανομής και στην ελεύθερη φλέβα του νερού (διατομή 2) η πίεση γίνεται ίση με την ατμοσφαιρική. Συνέπεια αυτού είναι η μετατόπιση της διατομής, στην οποία το βάθος γίνεται κρίσιμο, προς τα ανάντη σε κάποια θέση C.



Αν εφαρμοστεί η εξίσωση γραμμικής ορμής στο τμήμα μεταξύ των θέσεων C και 2 προκύπτει :

$$\frac{q^2}{g} \left( \frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_c} \right) = \frac{y_c^2}{2} - 0 \quad (7.16)$$

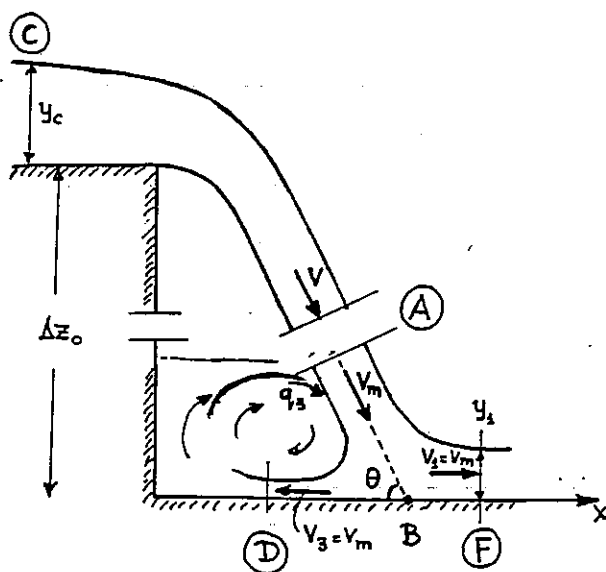
Αλλά :  $q^2/g = y_c^3$  . Επομένως η εξίσωση 7.16 δίνει :  $y_2 / y_c = 2/3$ . Και επειδή :  $y_c > y_b > y_2 \Rightarrow 1 > y_b / y_c > 2/3$ . Πράγματι από πειραματικές μετρήσεις έχει βρεθεί ότι :

$$y_b = 0.715 y_c \quad (7.17)$$

Η σχέση 7.17 έχει αποδειχτεί και θεωρητικά και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της παροχής στον αγωγό, αν συνδυαστεί με την εξίσωση κρίσιμου βάθους.

### Βάση της υδατόπτωσης

Σκοπός της μελέτης της ροής στη βάση της υδατόπτωσης είναι να προσδιοριστούν οι συνθήκες ροής μετά την πρόσκρουση της υδάτινης φλέβας στον πυθμένα της λεκάνης ηρεμίας, να υπολογιστεί δηλαδή το βάθος  $y_1$  καθώς και το ποσό της κινητικής ενέργειας που καταστρέφεται με την πρόσκρουση αυτή.



Ο κρουσμός παροχής  $q$  και ταχύτητας  $V$  προσπίπτει με γωνία  $\theta$  στο σημείο B της λεκάνης και διαχωρίζεται σε δύο τμήματα : το ένα παροχής  $q_1 (= q)$  και το άλλο παροχής  $q_3$  που ανακυκλώνεται και επανεισέρχεται στην κυρίως φλέβα με αμελητέα ταχύτητα.

Για τη γωνία  $\theta$  ισχύει :

$$\cos\theta = V_x/V$$

Για την ταχύτητα  $V$  και με την παραδοχή αμελητέας απώλειας φορτίου μεταξύ των διατομών C και A έχουμε :

$$\frac{V^2}{2g} + 0 + 0 \approx \Delta z_o + y_c + \frac{V_c^2}{2g} = \Delta z_o + 1.5 \cdot y_c$$

$$\text{Άρα : } V = \sqrt{2g(\Delta z_o + 1.5 \cdot y_c)} \quad (7.18)$$

$$\text{Αλλά : } q = y_2 \cdot V_x = y_c \cdot V_c, \text{ όπου } V_c = \sqrt{gy_c}$$

$$\Rightarrow V_x = V_c \cdot y_c / y_2 = 1.5 \cdot V_c = 1.5 \cdot \sqrt{gy_c}$$

$$\text{Τελικά : } \cos\theta = \frac{1.5 \cdot \sqrt{gy_c}}{\sqrt{2gy_c} \cdot \sqrt{\Delta z_o / y_c + 1.5}} = \frac{1.06}{\sqrt{\Delta z_o / y_c + 1.5}} \quad (7.19)$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα την εξίσωση γραμμικής ορμής για το τμήμα που περιλαμβάνεται μεταξύ των διατομών A, D και F. Η διατομή A τοποθετείται αμέσως μετά το σημείο επανεισόδου της παροχής  $q_3$  :

$$0 = \rho q_1 V_m - \rho q_3 V_m - \rho (q_1 + q_3) V_m \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{q_3}{q_1} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \quad (7.20)$$

Η διατομή A μετατίθεται τώρα σε θέση λίγο πριν από την επανείσοδο της παροχής  $q_3$  και εφαρμόζεται πάλι η εξίσωση γραμμικής ορμής :

$$0 = \rho q_1 V_m - \rho q_3 V_m - \rho q_1 V_m \cos\theta$$

$$\Rightarrow V \cdot \cos\theta = V_m (1 - q_3 / q_1) \quad (7.21)$$

Από τις εξισώσεις 7.20 και 7.21 έπεται ότι :

$$V_m = \frac{V}{2} \cdot (1 + \cos\theta) \quad (7.22)$$

Τα μεγέθη  $V$  και  $\cos\theta$  δίνονται από τις σχέσεις 7.18 και 7.19. Συνεπώς από την 7.22 προκύπτει τελικά η τιμή της  $V_1$  :

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{y_c}{4} \cdot \left[ \sqrt{(1.5 + \Delta z_o / y_c)} + 1.06 \right]^2 \quad (7.23)$$

$$\text{αλλά : } V_1 = \frac{q}{y_1} = \frac{\sqrt{gy_c^3}}{y_1}$$

$$\text{οπότε : } \frac{y_1}{y_c} = \frac{\sqrt{2}}{1.06 + \sqrt{(1.5 + \Delta z_o / y_c)}} \quad (7.24)$$

Από την εξίσωση 7.24 προσδιορίζεται εύκολα το βάθος  $y_1$  στη διατομή F.

Το ολικό φορτίο  $H_1$  στη διατομή F προκύπτει από το συνδυασμό των εξισώσεων 7.23, 7.24 και της :  $H_1 = E_1 = y_1 + V_1^2/2g$  :

$$\frac{H_1}{y_c} = \frac{\sqrt{2}}{1.06 + \sqrt{(1.5 + \Delta z_o / y_c)}} + \frac{1}{4} \cdot \left[ 1.06 + \sqrt{(1.5 + \Delta z_o / y_c)} \right]^2 \quad (7.25)$$

Αρχικά το ολικό φορτίο στην κρίσιμη διατομή C ήταν :

$$H_c = \Delta z_o + y_c + V_c^2/2g = \Delta z_o + 1.05 \cdot y_c \quad (7.26)$$

Συνεπώς η απώλεια φορτίου ανάμεσα στις διατομές C και F είναι :  $H_c - H_1$  , όπου οι δύο αυτές ποσότητες υπολογίζονται από τις εξισώσεις 7.25 και 7.26.

Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμένες εμπειρικές σχέσεις που δίνουν με ικανοποιητική ακρίβεια τα  $y_1$  και  $y_1'$  , ως συναρτήσεις των  $y_c$  και  $\Delta z_o$  , καθώς και τα μήκη  $L_d$  και  $L_j$  του κρουνού και του άλματος, που σχηματίζεται μετά την πρόσκρουση, αντίστοιχα :

$$y_1 / \Delta z_o = 0.54 \cdot (y_c / \Delta z_o)^{1.275} \quad (7.27)$$

$$y_1 / y_c = 0.54 \cdot (y_c / \Delta z_o)^{0.275} \quad (7.28)$$

$$y_1' / \Delta z_o = 1.66 \cdot (y_c / \Delta z_o)^{0.81} \quad (7.29)$$

$$L_d / \Delta z_o = 4.30 \cdot (y_c / \Delta z_o)^{0.09} \quad (7.30)$$

$$L_j = 6.9 \cdot (y_1' - y_1) \quad (7.31)$$



## 7.4 ΕΛΕΓΧΟΣ ΘΕΣΗΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΟΥ ΑΛΜΑΤΟΣ

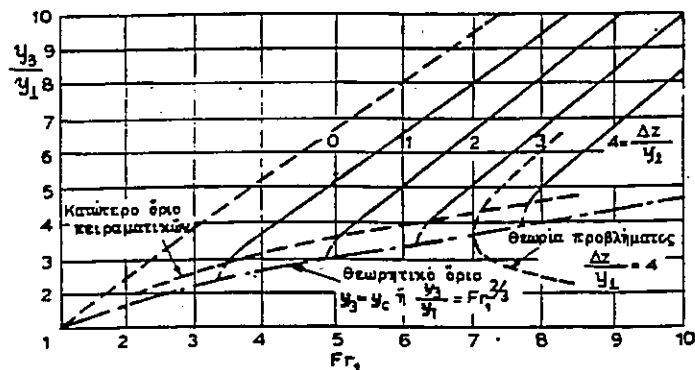
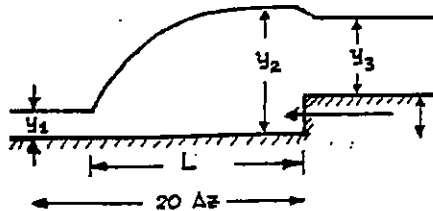
### 7.4.1 Μικρός αναβαθμός

Η σταθεροποίηση του υδραυλικού άλματος μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ήδη στο κεφάλαιο 4.3.2β εξετάστηκε η περίπτωση σχηματισμού ενός άλματος σε θέση μικρού απότομου καταβαθμού, ως παράδειγμα εφαρμογής της εξίσωσης γραμμικής ορμής. Οι μικροί καταβαθμοί χρησιμοποιούνται για να αποφεύγεται η μετατόπιση του άλματος προς τα ανάντη, όταν το κατάντη βάθος προβλέπεται μεγάλο. Αντίθετα, αν το κατάντη βάθος είναι μικρό και υπάρχει κίνδυνος ανεξέλεγκτης μετατόπισης του άλματος προς τα κατάντη, τότε για τη σταθεροποίηση της θέσης του άλματος κατασκευάζονται μικροί απότομοι αναβαθμοί. Οι μικροί αναβαθμοί χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στο σχεδιασμό λεκανών ηρεμίας (βλ. επόμενο κεφάλαιο).

Τα υδραυλικά μεγέθη στην περίπτωση σχηματισμού άλματος πριν από έναν αναβαθμό συνδέονται μεταξύ τους με την εξίσωση γραμμικής ορμής, δηλ.

$$m_3 - m_1 = -f/\rho g \quad \text{ή} \quad \frac{q^2}{gy_3} + \frac{y_3^2}{2} = \frac{q^2}{gy_1} + \frac{y_1^2}{2} - \frac{f}{\rho g} \quad (7.32)$$

όπου  $f$  η δύναμη που ασκείται από το μέτωπο του αναβαθμού στο ρευστό ανά μονάδα πλάτους της διατομής. Έχει βρεθεί ότι η δύναμη  $f$  στην περίπτωση αναβαθμού εμφανίζει σημαντική απόκλιση από την τιμή της υδροστατικής δύναμης, σε αντίθεση προς την αντίστοιχη δύναμη που αναπτύσσεται σε μικρούς καταβαθμούς (βλ. κεφ. 4.3.2β). Έτσι το μέγεθος της  $f$  στην εξίσωση 7.32 παραμένει άγνωστο και η συσχέτιση των υδραυλικών μεγεθών με το ύψος του αναβαθμού μπορεί να γίνει μόνο με τη βοήθεια των εμπειρικών καμπυλών του διαγράμματος. Το μήκος του άλματος στην περίπτωση αυτή δίνεται από την εμπειρική σχέση:  $L = 5 \cdot (y_3 + \Delta z)$ .



## 7.4.2 Παραδείγματα λεκανών ηρεμίας

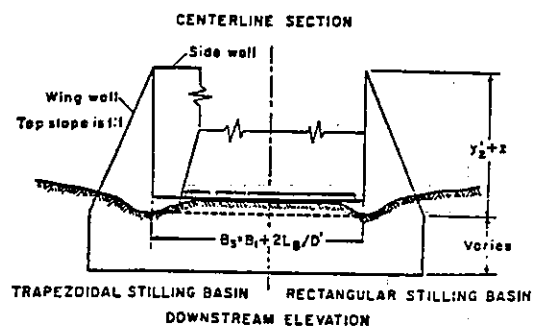
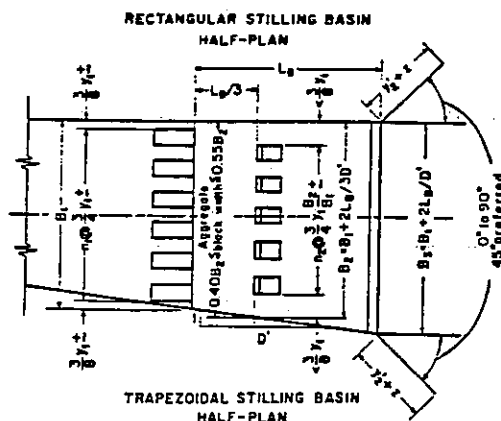
Από πρακτική άποψη, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το υδραυλικό άλμα είναι ένα μέσο για την καταστροφή του μεγάλου κινητικού φορτίου της υπερκρίσιμης ροής, που θα μπορούσε να προκαλέσει σοβαρές διαβρώσεις και υποσκαφές στην κατάντη πλευρά εκχειλιστών, θυροφραγμάτων κ.λ.π. Γι' αυτό σχεδιάζονται ειδικές κατασκευές, που ονομάζονται λεκάνες ηρεμίας ή λεκάνες καταστροφής κινητικής ενέργειας, με σκοπό να περιοριστεί το άλμα μερικά ή ολικά μέσα σ' αυτές. Παρακάτω δίνονται τρεις χαρακτηριστικοί τύποι λεκανών ηρεμίας.

Τύπος α : Συνιστάται για μικρές κατασκευές, όπου  $Fr_1 = 1.7 \sim 17$ . Η μείωση του μήκους της λεκάνης που πετυχαίνεται με τις προεξοχές, είναι της τάξης του 70 ~ 90 %.

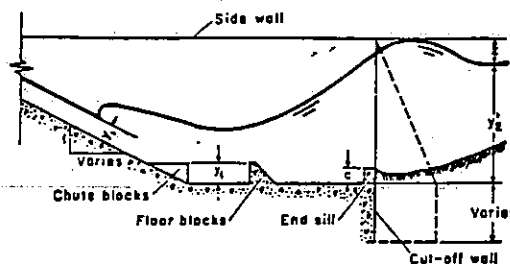
Τύπος β : Συνιστάται για μεγάλες κατασκευές, όταν  $Fr_1 > 4.5$ . Η μείωση του μήκους της λεκάνης είναι της τάξης του 33 %.

Τύπος γ : Συνιστάται όταν  $Fr_1 = 2.5 \sim 4.5$ . Ο τύπος αυτός εξασφαλίζει τη μείωση των κυματισμών που δημιουργούνται, όταν ο αριθμός  $Fr_1$  είναι αυτής της τάξης.

### Τύπος α



Proportions of the SAF basin. (U.S. Soil Conservation Service (64).)



$$L_B = 4.5 y_2 / Fr_1^{0.76}$$

$$c = 0.06 y_2$$

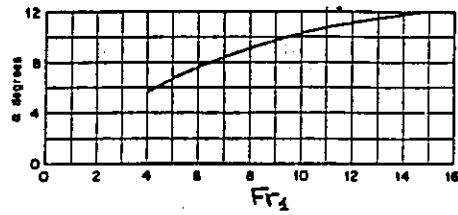
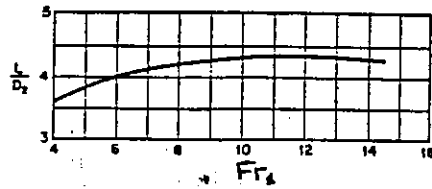
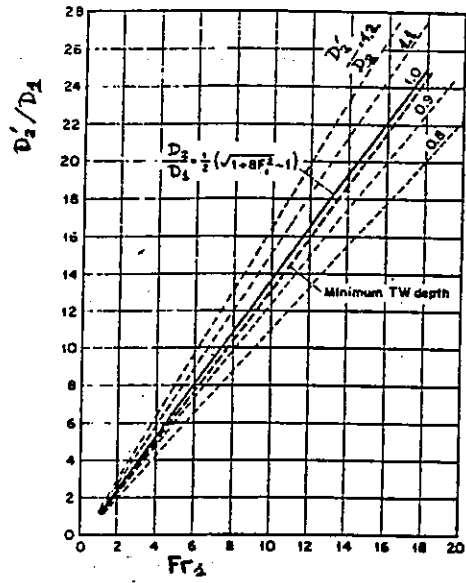
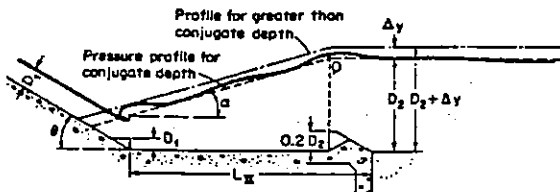
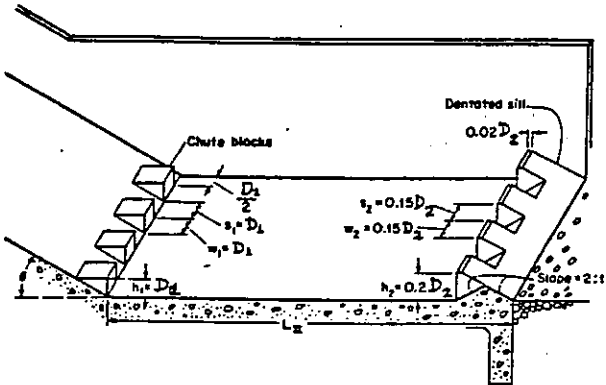
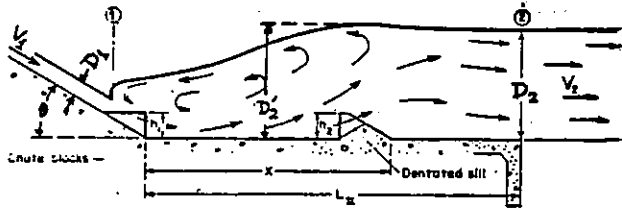
$$y_2' = (1.1 - Fr_1^2/120) \cdot y_2, \quad 1.5 \leq Fr_1 \leq 5.5$$

$$y_2' = 0.85 \cdot y_2, \quad 5.5 \leq Fr_1 \leq 11$$

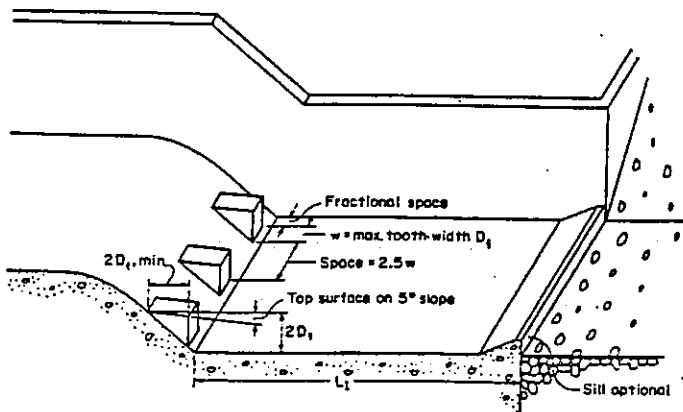
$$y_2' = (1.0 - Fr_1^2/800) \cdot y_2, \quad 11 \leq Fr_1 \leq 17$$

$$y_2 = \text{συζυγές του } y_1 \text{ (εξίσω. 4.39)}$$

# Τύπος Β



# Τύπος γ

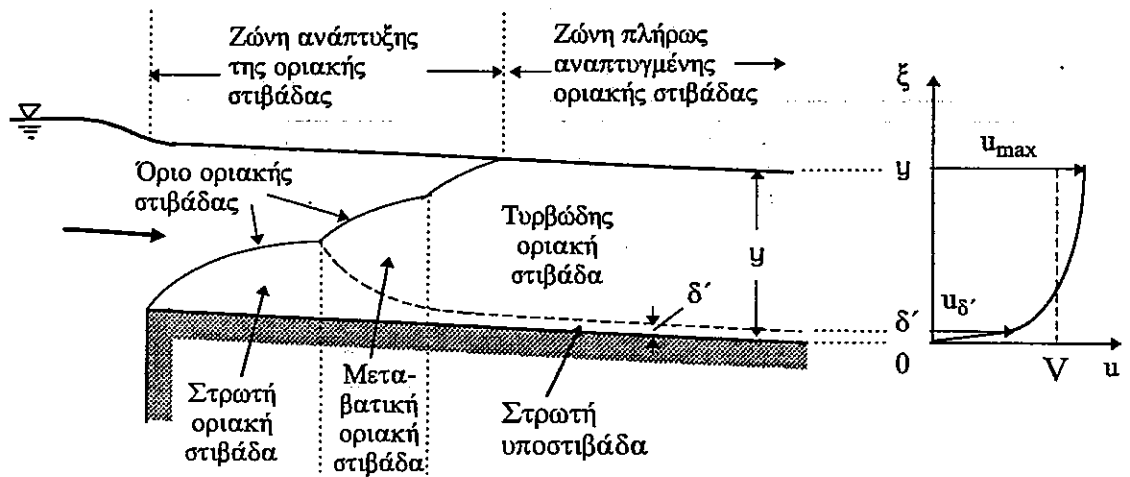


## 8. ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

### 8.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

#### 8.1.1 Κατακόρυφη μεταβολή σε αγωγό μεγάλου πλάτους

Ας θεωρήσουμε την κατά μήκος τομή ενός ανοικτού αγωγού, του οποίου το πλάτος είναι πολύ μεγάλο και η γωνία  $\theta$  μικρή ( $\cos\theta \approx 1$ ). Επιπλέον θεωρούμε τη ροή μόνιμη και τυρβώδη.



Σχήμα 8.1. Ανάπτυξη οριακής στιβάδας σε ανοικτό αγωγό και κατανομή της ταχύτητας στην κατακόρυφο.

Το νερό στον αγωγό ρέει με μια μέση ταχύτητα  $V$  που είναι γενικά συνάρτηση της θέσης  $x$  κατά μήκος του αγωγού. Η κατανομή όμως της ταχύτητας μέσα στη διατομή δεν είναι ομοιόμορφη. Πράγματι τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται σε επαφή με τον πυθμένα έχουν μηδενική ταχύτητα. Η ταχύτητά τους μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η απόστασή τους ( $\xi$ ) από το στερεό όριο του πυθμένα. Η διατμητική δύναμη που αναπτύσσεται στον πυθμένα, μεταβιβάζεται σταδιακά στο ρευστό με τη μορφή εσωτερικών τριβών. Η περιοχή που επηρεάζεται από τις τριβές ονομάζεται οριακή στιβάδα και το πάχος της, από μηδενικό στη θέση εισόδου στον αγωγό, αυξάνει κατά μήκος του αγωγού μέχρι να καλύψει όλο το βάθος ροής ( $y$ ). Αυτό το αρχικό τμήμα ροής μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η οριακή στιβάδα είναι ουσιαστικά το τμήμα προσαρμογής της ροής στις νέες συνθήκες. Η δίαυτα της ροής οριστικοποιείται με την είσοδό της στη ζώνη της πλήρως αναπτυγμένης ροής.

Στη ζώνη αυτή το μεγαλύτερο τμήμα της ροής καταλαμβάνει η τυρβώδης οριακή στιβάδα στην οποία η κατανομή της ταχύτητας  $u(\xi)$  είναι λογαριθμική. Κοντά στον πυθμένα, όπου η επιβράδυνση της ροής από την παρουσία του στερεού ορίου είναι σημαντική, αναπτύσσεται μία μικρού πάχους οριακή υποστιβάδα, στην οποία η ροή είναι στρωτή και η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά ως συνάρτηση του  $\xi$  (βλ. Τολίκας, Φωτιάδης, 1994). Η κατανομή της ταχύτητας στην κατακόρυφη διεύθυνση δίνεται ενδεικτικά στο σχήμα 8.1. Οι σχέσεις που περιγράφουν την κατανομή αυτή είναι οι εξής :

$$\text{Στρωτή υποστιβάδα } (0 \leq \xi \leq \delta') : \quad u = \left( \frac{\tau_0}{\mu} \right) \cdot \xi = \left( \frac{u_*^2}{\nu} \right) \cdot \xi \quad (8.1)$$

Τυρβώδης οριακή στιβάδα ( $\delta' \leq \xi \leq y$ ) :

$$\text{λείος πυθμένας } (k_s/\delta' \leq 0.3) : \quad \frac{u}{u_*} = 2.5 \cdot \ln \left( 9.05 \cdot \frac{u_* \xi}{\nu} \right) \quad (8.2\alpha)$$

$$\text{τραχύς πυθμένας } (k_s/\delta' \geq 7.0) : \quad \frac{u}{u_*} = 2.5 \cdot \ln \left( 30.2 \cdot \frac{\xi}{k_s} \right) \quad (8.2\beta)$$

$$\text{ενδιάμεσος πυθμ. } (0.3 \leq k_s/\delta' \leq 7.0) : \quad \frac{u}{u_*} = 2.5 \cdot \ln \left( 30.2 \cdot \chi \cdot \frac{\xi}{k_s} \right) \quad (8.2\gamma)$$

όπου :  $\xi$  : η κατακόρυφη απόσταση από τον πυθμένα

$u = u(\xi)$  : η ταχύτητα σε απόσταση  $\xi$  από τον πυθμένα

$\delta' = 11.6 \nu/u_*$  : το πάχος της στρωτής υποστιβάδας

$u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$  : η διατμητική ταχύτητα

$\tau_0 = (f/8)\rho V^2$  : η διατμητική τάση στον πυθμένα. Μπορεί να αποδειχτεί ότι για ομοιόμορφη ροή σε αγωγό μεγάλου πλάτους είναι :

$$\tau_0 = \rho g y S_0$$

$\mu$  : ο συντελεστής δυναμικού ιξώδους

$\nu$  : ο συντελεστής κινηματικού ιξώδους

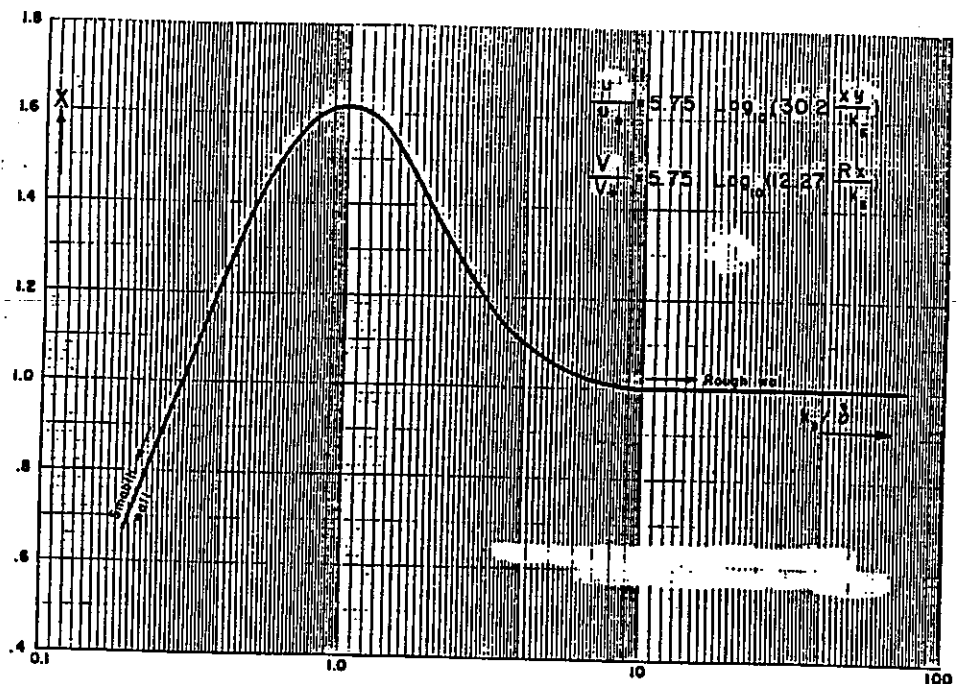
$\rho$  : η πυκνότητα του ρευστού

$f$  : ο συντελεστής τριβής των Darcy-Weisbach

$k_s$  : ο συντελεστής τραχύτητας του πυθμένα

$\chi = \chi(k_s/\delta')$  : διορθωτικός συντελεστής που δίνεται στο σχήμα 8.2.

Από τις εξισώσεις 8.2 φαίνεται, ότι η ταχύτητα  $u(\xi)$  γίνεται μέγιστη για  $\xi=y$  (δηλαδή στην ελεύθερη επιφάνεια).



Σχήμα 8.2. Διορθωτικός συντελεστής  $\chi$  (Einstein, 1950)

Η μέση ταχύτητα  $V$  υπολογίζεται από την ολοκλήρωση της  $u(\xi)$  σε όλο το βάθος ροής :

$$V = \frac{1}{y} \cdot \int_0^y u d\xi = \begin{cases} 2.5u_* \cdot [\ln(9.05 \cdot u_* y / \nu) - 1] = u_* [2.5 \ln(u_* y / \nu) + 3] \\ 2.5u_* \cdot [\ln(30.2\chi \cdot y / k_s) - 1] = u_* [2.5 \ln(\chi \cdot y / k_s) + 6] \end{cases} \quad (8.3)$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις 8.3 ισχύει για λείο πυθμένα, ενώ η δεύτερη για τραχύ και ενδιάμεσο πυθμένα.

Η ταχύτητα  $u(\xi)$  (εξισ. 8.2) μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση της  $u_{\max}$  ή της  $V$  :

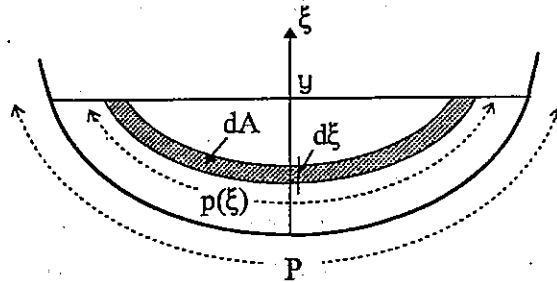
$$u(\xi) = u_{\max} + 2.5u_* \ln(\xi/y) \quad (8.4)$$

ή

$$u(\xi) = V + 2.5u_* [\ln(\xi/y) + 1] \quad (8.5)$$

### 8.1.2. Κατανομή σε αγωγό πεπερασμένης διατομής

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε έναν ανοικτό αγωγό πεπερασμένης διατομής όπως αυτή του σχήματος.



Σχήμα 8.3. Τυχαία διατομή αγωγού.

Η κατανομή της ταχύτητας στη διατομή αυτή ακολουθεί τους ίδιους κανόνες με αυτούς που ισχύουν στους αγωγούς μεγάλου πλάτους. Δηλαδή, λογαριθμική εξάρτηση από την απόσταση  $\xi$  από το στερεό όριο. Η μέση ταχύτητα της ροής στη διατομή αυτή μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της σχέσης :

$$V = \frac{1}{A} \cdot \int_0^A u dA = \frac{1}{A} \int_0^y u(\xi) p(\xi) d\xi \quad (8.6)$$

όπου :  $u(\xi)$  : η ταχύτητα που δίνεται από τις σχέσεις 8.1 και 8.2

$$p(\xi) = P - \lambda \xi$$

$P$  : η βρεχόμενη περίμετρος

$\lambda$  : σταθερά που εξαρτάται από τη μορφή της διατομής

$$A = \int_0^y p(\xi) d\xi \quad : \text{το εμβαδό της διατομής.}$$

Με την εισαγωγή των σχέσεων αυτών στην εξίσωση 8.6 προκύπτει :

$$V = \begin{cases} V_* [2.5 \ln(V_* R / \nu) + c_s] \\ V_* [2.5 \ln(\chi R / k_s) + c_R] \end{cases} \quad (8.7)$$

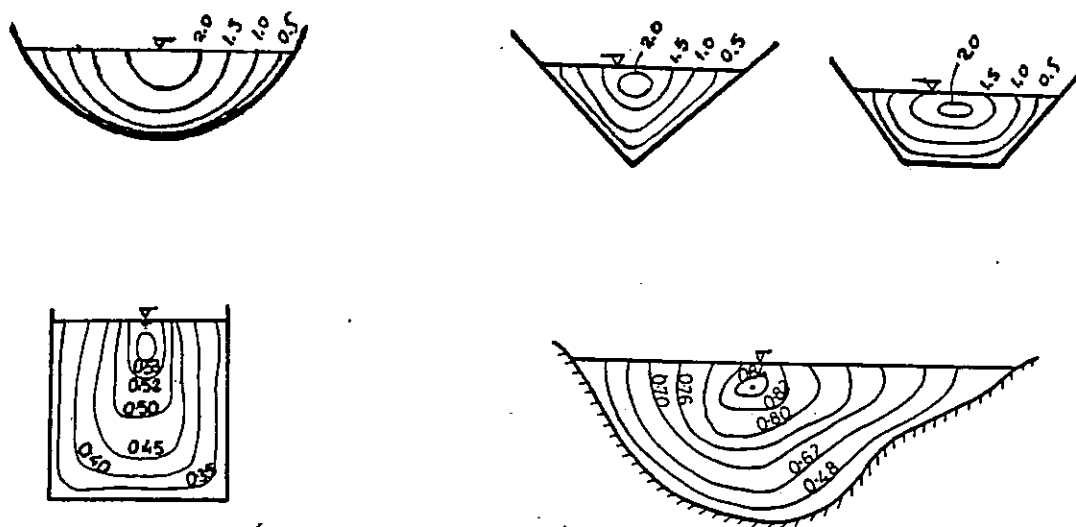
όπου :  $V_* = \sqrt{\tau_o / \rho}$  : η μέση διατμητική ταχύτητα

$\tau_o = (f/8)\rho V^2$  : η μέση διατμητική τάση στον πυθμένα, η οποία σε ομοιόμορφη ροή δίνεται από τη σχέση :  $\tau_o = \rho g R S_o$ .

$R$  : η υδραυλική ακτίνα.

$c_S, c_R$  : εμπειρικές σταθερές που βρέθηκαν από τον Keulegan ίσες με 3.25 και 6.25 αντίστοιχα. Περιλαμβάνουν την επίδραση του σχήματος της διατομής, της ανομοιόμορφης κατανομής της διατμητικής τάσης στην περίμετρο κ.ά.

Στο σχήμα 8.4 έχουν σχεδιαστεί ορισμένες τυπικές κατανομές ταχυτήτων με τη μορφή ισοταχών καμπυλών, που μετρήθηκαν σε διάφορα είδη ανοικτών αγωγών. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η μέγιστη ταχύτητα στις διατομές αυτές δεν παρατηρείται στην ελεύθερη επιφάνεια, όπως θα περίμενε κανείς σύμφωνα με τις εξισώσεις 8.2, αλλά λίγο χαμηλότερα σε απόσταση από 0.05 έως 0.25 $y$  από την ελεύθερη επιφάνεια. Η απόκλιση από τη θεωρητική κατανομή οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στα εγκάρσια ρεύματα που δημιουργούνται λόγω της ασυμμετρίας των οριακών συνθηκών στη διατομή, και τα οποία δεν παίρνονται υπόψη στη θεωρητική αντιμετώπιση του προβλήματος. Για το λόγο αυτό και για λόγους απλούστευσης των υπολογισμών, η πραγματική κατανομή σε πολλές περιπτώσεις εφαρμογών προσεγγίζεται με εμπειρικές εξισώσεις εκθετικής ή άλλης μορφής (όπως στα παραδείγματα του κεφαλαίου 1.6).



Σχήμα 8.4. Χαρακτηριστικές κατανομές ταχυτήτων υπό μορφή ισοταχών καμπυλών.



## 8.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΙΩΡΥΤΩΝ

Ο τρόπος σχεδιασμού και η διαστασιολόγηση ενός ανοικτού αγωγού εξαρτάται από το σκοπό για τον οποίο αυτός προορίζεται. Έτσι άλλα στοιχεία θα καθορίσουν το σχεδιασμό ενός υδατολιστήρα φράγματος, άλλα τη διευθέτηση ενός χειμάρρου και άλλα το σχεδιασμό μιας αρδευτικής διώρυγας. Στο κεφάλαιο 5.4 αναφέρθηκε η έννοια της οικονομικής διατομής, η οποία στηρίχθηκε μόνο στην ελαχιστοποίηση του εμβαδού και της βρεχόμενης περιμέτρου. Εδώ θα αναφερθούν με συντομία μερικά ακόμη στοιχεία που πρέπει να παίρνονται υπόψη στο σχεδιασμό διωρύγων.

### Το μέγεθος της ταχύτητας

Η τιμή της μέσης ταχύτητας  $V$  στη διατομή πρέπει να κυμαίνεται ανάμεσα σε κάποιο μέγιστο και κάποιο ελάχιστο όριο. Το μέγιστο όριο τίθεται για να αποφεύγεται ο κίνδυνος διάβρωσης των πρανών και της κοίτης. Το ελάχιστο όριο τίθεται για να αποφεύγεται η καθίζηση των φερτών υλών με επακόλουθο τη συχνή και πολυδάπανη συντήρηση της διώρυγας.

Το μέγιστο όριο της ταχύτητας εξαρτάται από το υλικό της παράπλευρης επιφάνειας του αγωγού και είναι :

για εδάφη μαλακά (αμμώδη και αργιλώδη) :	0.4 ~ 0.5 m/sec
για εδάφη μέσης αντοχής :	~ 0.6 m/sec
για εδάφη συμπαγή :	~ 0.9 m/sec
για επένδυση με λιθοδομή :	~ 1.2 m/sec
για επένδυση με σκυρόδεμα :	6.0 m/sec

Το ελάχιστο όριο ταχύτητας εξαρτάται από το είδος των φερτών υλών. Έτσι :

για να μην κατακάθεται η ιλύς πρέπει :  $V \geq 0.25$  m/sec

για να μην κατακάθεται η άμμος πρέπει :  $V \geq 0.4$  m/sec

Γενικά μια τιμή  $V \geq 0.3$  m/sec θεωρείται συνήθως ικανοποιητική.

### Κατά μήκος κλίση του πυθμένα

Ο περιορισμός της ταχύτητας μέσα σε επιτρεπτά όρια καθορίζει και αντίστοιχες κατά μήκος κλίσεις. Έτσι συνήθεις κλίσεις είναι :

για επενδυμένες διώρυγες :  $S_0 = 1:1,000 \sim 1:5,000$

για χωμάτινες διώρυγες :  $S_0 = 1:5,000 \sim 1:10,000$

## Κλίσεις πρανών

Σε τραπεζοειδείς διώρυγες, που διανοίγονται μέσα στο έδαφος, οι κλίσεις των πρανών καθορίζονται από το είδος του εδάφους. Έτσι συνήθως :

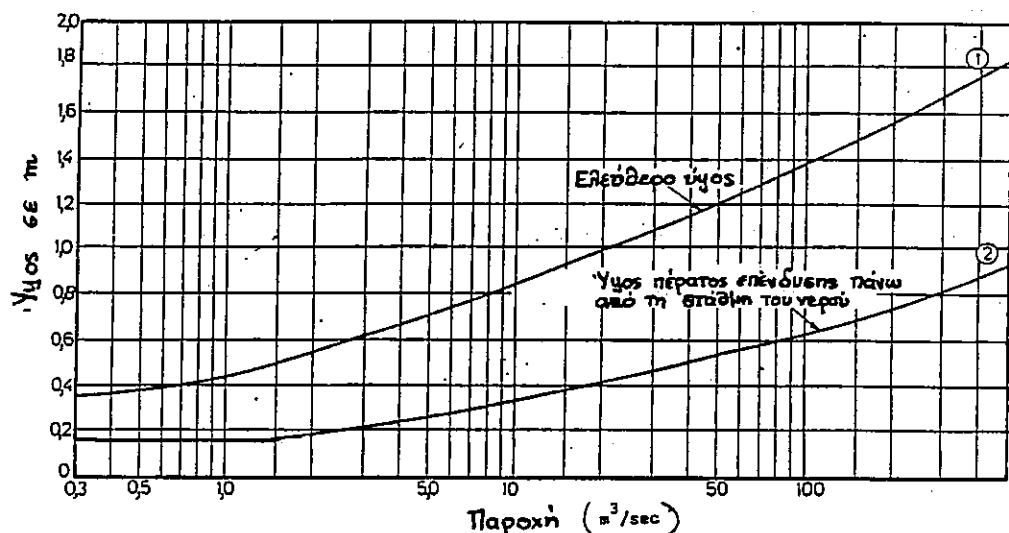
- σε εδάφη μαλακά :  $m = 2.0$
- σε εδάφη μέσης αντοχής :  $m = 1.5$
- σε συμπαγή εδάφη :  $m = 1.0$
- σε ημιβραχώδη εδάφη :  $m = 0.5$

## Διαστάσεις διατομής

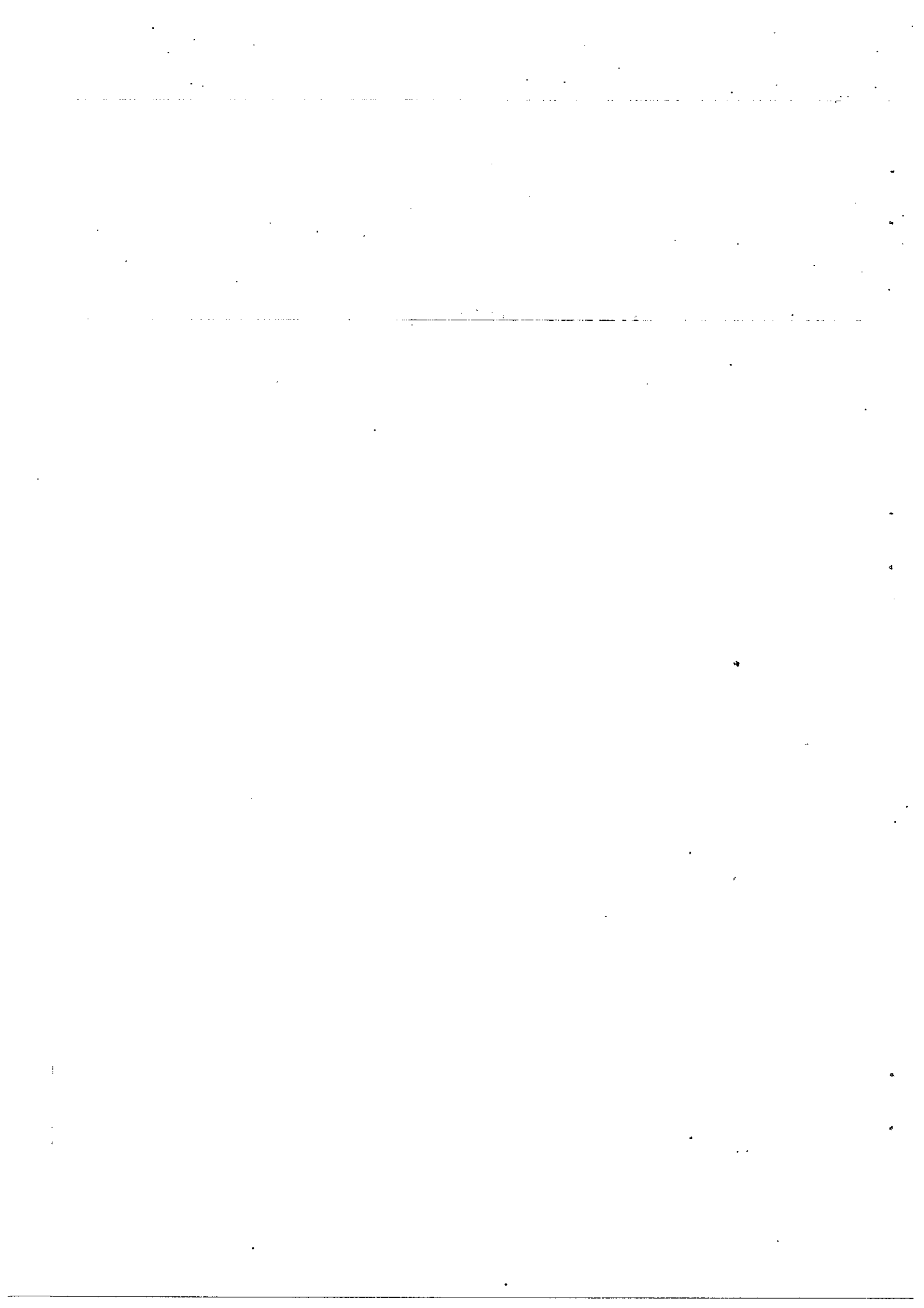
Προκειμένου για τραπεζοειδείς διώρυγες, που είναι και οι συνηθέστερες, έχει ήδη βρεθεί η σχέση πλάτους  $b$  προς βάθος  $y$  που ικανοποιεί το κριτήριο της οικονομικής διατομής :

$$b/y = 2\sqrt{1+m^2} - 2m$$

Συνήθως όμως στις μελέτες διωρύγων επιλέγεται πιο αβαθής διατομή από την οικονομική. Για τη διαστασιολόγηση της διατομής μπορεί ο μελετητής να χρησιμοποιήσει τη σχέση :  $b / y = 4 - m$ . Σε μεγάλες διώρυγες με μεγάλη παροχή το βάθος ροής συγκριτικά προς το πλάτος περιορίζεται ακόμη περισσότερο. Επίσης στη διαστασιολόγηση της διατομής προβλέπεται και ένα ελεύθερο ύψος "  $\epsilon$  " (απόσταση του χείλους του πρανούς από την ανώτατη στάθμη του νερού) για αποφυγή υπερχειλίσης λόγω κυματισμών. Αντίστοιχα προβλέπεται ένα ελάχιστο ύψος "  $\alpha$  " του τέλους της επένδυσης πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, στην περίπτωση διώρυγας που είναι επενδυμένη.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π1

### ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΔΙΟΡΘΩΤΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

#### α. Διορθωτικός συντελεστής γραμμικής ορμής $\beta$

Ο διορθωτικός συντελεστής γραμμικής ορμής  $\beta$  είναι ένας διορθωτικός συντελεστής ολοκλήρωσης και προκύπτει άμεσα από τη σχέση 3.9 (κεφ. 3.3.2α) :

$$\beta = \frac{1}{V^2 A} \cdot \iint_A u^2 dA = \frac{A}{Q^2} \cdot \iint_A u^2 dA$$

για λογαριθμική κατανομή της ταχύτητας  $u$  είναι :

$$\beta = 1 + \varepsilon, \quad \text{όπου : } \varepsilon = \frac{u_{\max}}{V} - 1$$

#### β. Διορθωτικός συντελεστής κινητικού φορτίου $\alpha$

Το κινητικό φορτίο γενικά είναι ίσο προς την κινητική ενέργεια ανά μονάδα βάρους. Η συνολική κινητική ενέργεια του ρευστού, που περνά από μία διατομή  $A$  στη μονάδα του χρόνου, εκφράζεται με το ολοκλήρωμα :

$$\iint_A \frac{u^2}{2g} \cdot \rho g u dA = \rho g \cdot \iint_A \frac{u^3}{2g} dA$$

όπου :  $(\rho g u dA)$  είναι το βάρος του ρευστού που περνά από στοιχειώδη επιφάνεια  $dA$  στη μονάδα του χρόνου, και  $u^2/2g$  το κινητικό του φορτίο.

Για να εκφραστεί το ολοκλήρωμα αυτό συναρτήσει της μέσης ταχύτητας  $V$  και του εμβαδού  $A$  σύμφωνα με τη μονοδιάστατη θεώρηση της ροής (κεφ. 1.6), εισάγεται ένας διορθωτικός συντελεστής ολοκλήρωσης  $\alpha$  :

$$\iint_A \frac{u^2}{2g} \cdot \rho g u dA = \alpha \cdot \frac{V^2}{2g} \cdot (\rho g V A)$$

όπου :  $(\rho g V A)$  είναι το βάρος του ρευστού που περνά από τη διατομή εμβαδού  $A$  στη μονάδα του χρόνου, και  $\alpha \cdot V^2/2g$  το κινητικό του φορτίο.  
Επομένως :

$$\alpha = \frac{1}{V^3 A} \cdot \iint_A u^3 dA = \frac{A^2}{Q^3} \cdot \iint_A u^3 dA$$

Ο συντελεστής  $\alpha$  ονομάζεται διορθωτικός συντελεστής κινητικού φορτίου. Για λογαριθμική κατανομή της ταχύτητας είναι :

$$\alpha = 1 + 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3, \quad \text{όπου :} \quad \varepsilon = \frac{u_{\max}}{V} - 1$$

### γ. Παρατηρήσεις

- i. Όταν η κατανομή της ταχύτητας στη διατομή είναι σχεδόν ομοιόμορφη, οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  είναι ίσοι με τη μονάδα.
- ii. Ο συντελεστής  $\alpha$  είναι περισσότερο ευαίσθητος από τον  $\beta$  σε μεταβολές της ταχύτητας. Η τιμή του κυμαίνεται μεταξύ του 1.0 και 1.2 σε ευθύγραμμους πρισματικούς αγωγούς και μπορεί να ξεπεράσει το 2.0 σε φυσικά υδατορεύματα. Τα αντίστοιχα όρια του διακύμανσης του  $\beta$  είναι 1.0 έως 1.33.
- iii. Το πεδίο ταχυτήτων σε έναν ανοικτό αγωγό δεν είναι γενικά γνωστό παρά μόνον αν επιλυθεί το τριδιάστατο πρόβλημα. Κατά συνέπεια η ακριβής τιμή των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$ , που απαιτείται για τη μελέτη της ροής με μονοδιάστατη αντιμετώπιση, δεν είναι γνωστή, εκτός αν έχουν γίνει μετρήσεις ταχυτήτων στον αγωγό ή αν υπάρχουν συγκριτικά στοιχεία από αγωγούς όμοιας μορφής.
- iv. Για τους παραπάνω λόγους, στις περιπτώσεις τεχνητών αγωγών απλής διατομής οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  θεωρούνται ίσοι με τη μονάδα και παραλείπονται. Το σφάλμα που προκύπτει από την παραδοχή αυτή είναι πολύ μικρό και πάντως μικρότερο από σφάλματα άλλης προέλευσης, όπως είναι για παράδειγμα το σφάλμα από την παραδοχή της υδροστατικής κατανομής της πίεσης ή από τη μη επαρκή γνώση της τριβής.
- v. Η χρησιμοποίηση των συντελεστών  $\alpha$  και  $\beta$  επιβάλλεται, όταν ο αγωγός είναι σύνθετης μορφής. Στην περίπτωση αυτή η διατομή χωρίζεται σε υποδιατομές με νοητές διαχωριστικές γραμμές. Η μέση ταχύτητα σε κάθε υποδιατομή διαφέρει σημαντικά από τις άλλες και ο υπολογισμός των διορθωτικών συντελεστών γίνεται με τη βοήθεια των σχέσεων :

$$\alpha = \frac{1}{V^3 A} \cdot \sum_i V_i^3 A_i \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{V^2 A} \cdot \sum_i V_i^2 A_i$$

όπου :  $i$  δείκτης που υποδηλώνει τον αριθμό της υποδιατομής.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π2

### Απόδειξη του θεωρήματος μεταφοράς <sup>1</sup>

Ας θεωρήσουμε ένα ολοκλήρωμα όγκου της μορφής :

$$\Omega(t) = \iiint_{V(t)} \omega(x_i, t) dV \quad (\text{Π2.1})$$

όπου :  $\omega$  είναι μία συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση της θέσης  $x_i$  και του χρόνου  $t$ , και

$\Omega$  το ολοκλήρωμα της  $\omega$  σε έναν όγκο  $V(t)$ , ο οποίος μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Η επιφάνεια  $S$ , που περικλείει τον όγκο  $V$ , αλλάζει και αυτή με την πάροδο του χρόνου. Ας συμβολίσουμε με  $\bar{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο προς την κλειστή επιφάνεια  $S$  με διεύθυνση προς τα έξω και με  $u_n$  την αντίστοιχη συνιστώσα της ταχύτητας με την οποία η  $S$  μετατοπίζεται.

Αφού η  $\Omega$  εξαρτάται από το χρόνο, μετά από διάστημα  $\Delta t$  θα έχει μεταβληθεί κατά  $\Delta\Omega$  :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \Omega(t + \Delta t) - \Omega(t) \\ &= \iiint_{V(t+\Delta t)} \omega(x_i, t + \Delta t) dV - \iiint_{V(t)} \omega(x_i, t) dV \end{aligned} \quad (\text{Π2.2})$$

Η  $\omega$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor. Αν αγνοήσουμε τις διαφορές δεύτερης τάξης ανάλογες προς  $(\Delta t)^2$ , τότε :

$$\omega(x_i, t + \Delta t) = \omega(x_i, t) + \frac{\partial \omega(x_i, t)}{\partial t} \Delta t \quad (\text{Π2.3})$$

Όμοια ανάπτυξη μπορεί να γίνει και για τον όγκο  $V(t)$ . Έτσι, ο όγκος  $V(t + \Delta t)$  διαφέρει από τον  $V(t)$  κατά  $\Delta V$ , όπου  $\Delta V$  είναι ένας μικρός όγκος ανάλογος του  $\Delta t$  που περιέχεται μεταξύ των επιφανειών  $S(t + \Delta t)$  και  $S(t)$ . Από την Π2.2 προκύπτει :

$$\Delta\Omega = \iiint_{V+\Delta V} \left( \omega + \frac{\partial \omega}{\partial t} \Delta t \right) dV - \iiint_V \omega dV$$

<sup>1</sup> Newman J.N., 1977, Marine Hydrodynamics, MIT Press, U.S.A.

$$= \Delta t \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \iiint_{\Delta V} \omega dV + O[(\Delta t)^2] \quad (\text{Π2.4})$$

όπου ο τελευταίος όρος υποδηλώνει σφάλμα της τάξης του  $(\Delta t)^2$ .

Ο όγκος  $\Delta V$  καταλαμβάνει μια περιοχή με πάχος ίσο προς την απόσταση μεταξύ των επιφανειών  $S(t+\Delta t)$  και  $S(t)$ . Το πάχος αυτό λοιπόν είναι ίσο προς την κάθετη συνιστώσα του διαστήματος που διέτρεξε η  $S(t)$  σε χρόνο  $\Delta t$ , δηλαδή είναι ίσο με το γινόμενο  $u_n \Delta t$ . Αν ολοκληρώσουμε κατά τη διεύθυνση αυτή, το τριπλό ολοκλήρωμα της  $\omega$  στον όγκο  $\Delta V$  μετατρέπεται στο επιφανειακό ολοκλήρωμα του γινομένου  $\omega(u_n \Delta t)$  στην  $S$  με σφάλμα της τάξης του  $(\Delta t)^2$ . Έτσι η Π2.4 γίνεται :

$$\Delta \Omega = \Delta t \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \iint_S \omega(u_n \Delta t) dS + O[(\Delta t)^2] \quad (\text{Π2.5})$$

Τελικά, αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το  $\Delta t$ , το όριο για  $\Delta t \rightarrow 0$  γίνεται :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \iint_S \omega(u_n) dS \quad (\text{Π2.6})$$

Η εξίσωση Π2.6 είναι γνωστή ως **θεώρημα μεταφοράς**. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα παριστάνει τη μεταφορά της ποσότητας  $\omega$  έξω από τον όγκο  $V$  ως αποτέλεσμα της μετατόπισης της επιφάνειας  $S$ .

Στην ειδική περίπτωση που η επιφάνεια  $S$  είναι σταθερή και αμετάβλητη ως προς το χρόνο, τότε  $u_n = 0$  και το διπλό ολοκλήρωμα στην εξίσωση Π2.6 μηδενίζεται. Έχουμε, δηλαδή, παραγωγή ενός ολοκληρώματος με σταθερά όρια, οπότε η παραγωγή μεταφέρεται στην ολοκληρωτέα ποσότητα  $\omega$ .

Σε άλλη ειδική περίπτωση (όπως αυτή που αναφέρεται στο κεφάλαιο 2.1) ο όγκος  $V$  είναι υλικός όγκος και αποτελείται πάντα από το ίδιο σύνολο υλικών σημείων του ρευστού. Τότε η επιφάνεια  $S$  κινείται με την ίδια κάθετη ταχύτητα που έχει το ρευστό και :  $u_n = (\vec{v} \cdot \vec{n})$ . Στην περίπτωση αυτή ο συμβολισμός της παραγωγού αντικαθίσταται από το συμβολισμό της υλικής παραγωγού και η εξίσωση Π1.6 γίνεται :

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial \omega}{\partial t} dV + \iint_S \omega (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{Π2.7})$$

Η Π2.7 είναι γνωστή ως **θεώρημα μεταφοράς του Reynolds**.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π3

### Απόδειξη της εξίσωσης 3.11

Θα αποδείξουμε ότι :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dx = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \iint_{FS} u (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS$$

Πράγματι είναι :

$$Q = Q(x, t) = \iint_A u dA$$

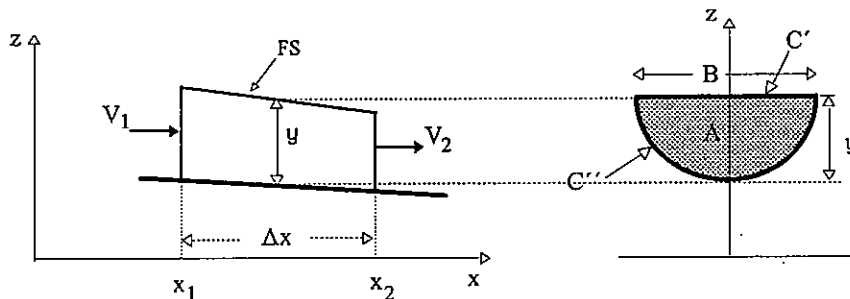
και 
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_A u dA$$

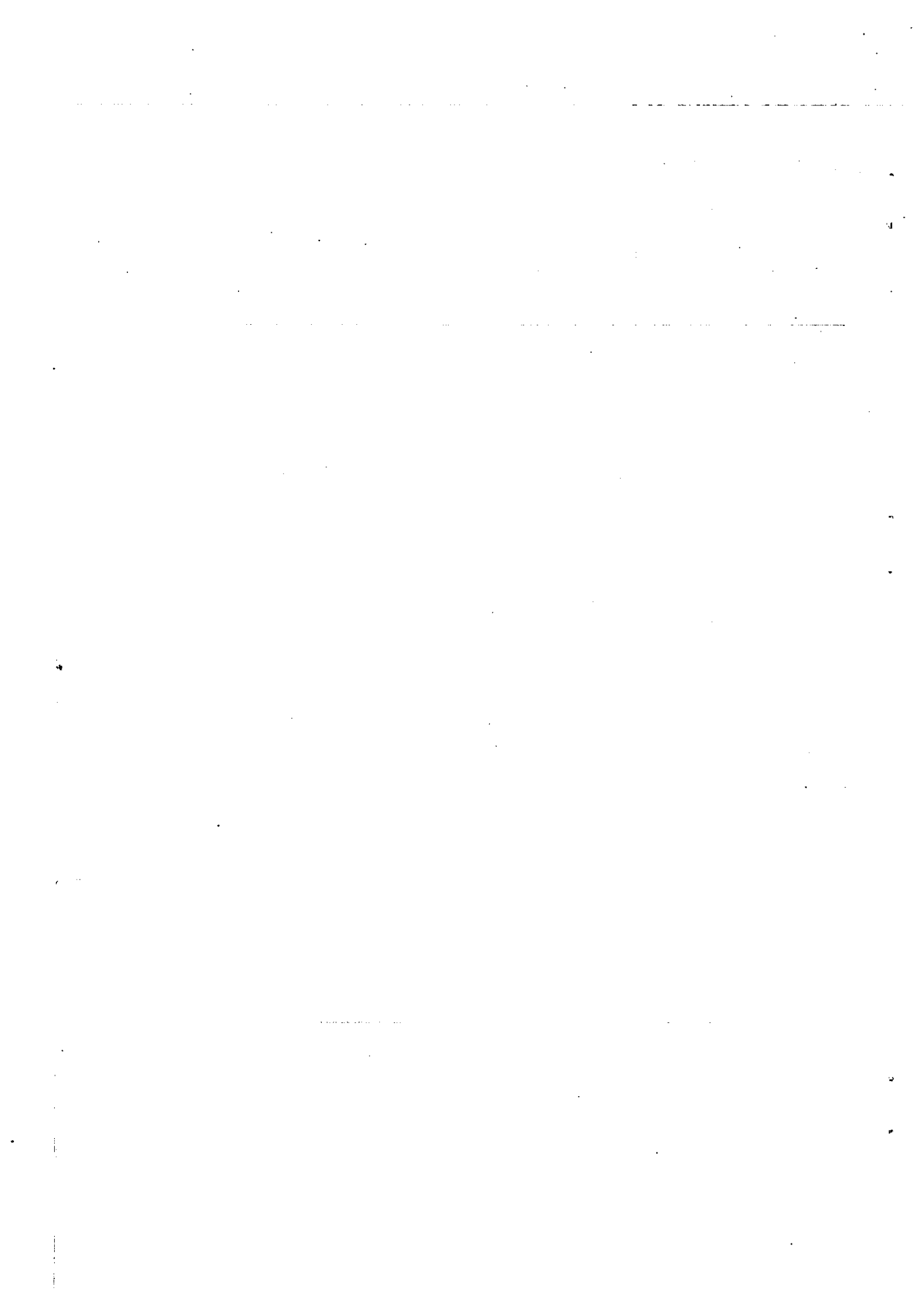
Έστω C μια κλειστή γραμμή που περικλείει την επιφάνεια ολοκλήρωσης A. Τότε η παραγωγή του επιφανειακού ολοκληρώματος μπορεί να γίνει κατά τρόπο ανάλογο προς το θεώρημα μεταφοράς (κεφ. 2.3, παράρτημα Π1), που ισχύει για παραγωγή τριπλού ολοκληρώματος στο χώρο. Δηλαδή :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_A u dA = \iint_A \frac{\partial u}{\partial t} dA + \int_C u (\bar{v} \cdot \bar{n}) dC$$

Η καμπύλη C, που περιβάλλει τη διατομή A, αποτελείται από τη βρεχόμενη περίμετρο της διατομής και τη γραμμή της ελεύθερης επιφάνειας. Κατά μήκος της βρεχόμενης περιμέτρου η ταχύτητα είναι μηδέν. Επομένως η επικαμπύλια ολοκλήρωση περιορίζεται στο τμήμα C' της ελεύθερης επιφάνειας. Τέλος :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \iint_A \frac{\partial u}{\partial t} dA \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{C'} u (\bar{v} \cdot \bar{n}) dC \right] dx \\ &= \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} dV + \iint_{FS} u (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS \end{aligned}$$





## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ :

ΛΙΣΤΕΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ Η/Υ



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ ΣΕ ΤΡΑΠΕΖΟΕΙΔΗ ΑΓΩΓΟ

```
'YCTR  
'MAIN MODULE FOR COMPUTING  
'CRITICAL DEPTH IN A TRAPEZOIDAL CHANNEL  
'USING NEWTON RAPHSON AND BRACKETS ALGORITHMS
```

```
DECLARE SUB FROUTINE (X, F)  
DECLARE SUB BRACKETS (A(), N%, Z, B, C)  
DECLARE SUB NEWTON (X0, X)
```

```
COMMON SHARED A()  
COMMON SHARED N AS INTEGER
```

```
CLS  
PRINT "PROBLEM DATA"
```

```
READ Q, M, B  
DATA 12.2, 1, 1.5
```

```
AL = Q ^ 2 * M ^ 3 / (9.81 * B ^ 5)  
PRINT "ALPHA = "; AL
```

```
N% = 6  
DIM A(N% + 1)  
A(0) = -AL: A(1) = -2 * AL  
A(2) = 0: A(3) = 1: A(4) = 3: A(5) = 3: A(6) = 1
```

```
'INITIAL VALUE FOR NEWTON-RAPHSON  
X0 = .5 * LOG(AL): X0 = EXP(X0)  
PRINT "INITIAL X0="; X0  
PRINT  
CALL NEWTON(X0, X)
```

```
SUB FROUTINE (X, F)
```

```
CALL BRACKETS(A(), N%, X, B, C)  
F = X - B / C
```

```
END SUB
```

```
'BRACKETS.BAS  
'MODULE CONTAINING  
'SUBROUTINE BRACKETS(A(), N%, Z, B, C)  
'FOR EVALUATING A POLYNOMIAL AND ITS  
'DERIVATIVE FOR X=Z
```

```
DECLARE SUB BRACKETS (A(), N%, Z, B, C)  
COMMON SHARED A()  
COMMON SHARED N AS INTEGER
```

```
SUB BRACKETS (A(), N%, Z, B, C)
```

```
B = A(N%)  
C = B
```

```

FOR I% = 1 TO N% - 1
    B = A(N% - I%) + Z * B
    C = B + Z * C
NEXT I%

B = A(0) + Z * B

END SUB

```

```

'NEWTON.BAS
'MODULE CONTAINING
'SUBROUTINE NEWTON(X0, X)

```

```

DECLARE SUB FROUTINE (X, F)

```

```

SUB NEWTON (X0, X)

```

```

EPS = .00001: IMAX% = 25

```

```

DO

```

```

    CALL FROUTINE(X0!, F!)

```

```

    X1 = F

```

```

    I% = I% + 1

```

```

    PRINT " I="; I%; " X="; X1

```

```

    'LPRINT " I="; I%; " X="; X1

```

```

    IF I% > IMAX% THEN

```

```

        PRINT

```

```

        PRINT " ΔΕΝ ΕΧΟΥΜΕ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΜΕΤΑ ΑΠΟ "; IMAX%; " ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ"

```

```

        EXIT DO

```

```

    END IF

```

```

    IF ABS(X1 - X0) < EPS THEN

```

```

        X = X1

```

```

        PRINT

```

```

        PRINT " FINAL X="; X

```

```

        'LPRINT

```

```

        'LPRINT " FINAL X="; X

```

```

        EXIT DO

```

```

    END IF

```

```

    X0 = X1

```

```

LOOP

```

```

END SUB

```

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

```

PROBLEM DATA

```

```

ALPHA = 1.997995

```

```

INITIAL X0= 1.413504

```

```

I= 1 X= 1.166191

```

```

I= 2 X= 1.007949

```

```

I= 3 X= .9394599

```

```

I= 4 X= .9274306

```

```

I= 5 X= .9270925

```

```

I= 6 X= .9270923

```

```

FINAL X= .9270923

```

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΒΑΘΟΥΣ ΣΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΑΓΩΓΟ

```
'YCCR.BAS
'MAIN MODULE
'CONTAINING PROBLEM DATA AND
'FROUTINE(X, F) FOR COMPUTING
'CRITICAL DEPTH IN A CIRCULAR OPEN CHANNEL
'BY THE BISECTION METHOD
```

```
DECLARE SUB FROUTINE (X, F)
DECLARE SUB BISECT (X0, DX, EPS, X)
COMMON SHARED AL
```

```
CLS
READ X0, DX, EPS
DATA 0.3927, .1, 1.E-05
```

```
AL = .2
```

```
PRINT "PROBLEM DATA"
PRINT "ALPHA = "; AL; " X0 = "; X0
```

```
CALL BISECT(X0, DX, EPS, X)
```

```
YD = .5 * (1 - COS(X))
```

```
PRINT
PRINT " YC/D = "; YD
```

```
SUB FROUTINE (X, F)
```

```
SN = SIN(X): CS = COS(X)
F = (X - SN * CS) ^ 3 / (64 * SN)
F = F - AL
```

```
END SUB
```

```
'BISECT.BAS
'MODULE CONTAINING
'SUBROUTINE BISECT(X0, DX, EPS, X)
```

```
DECLARE SUB FROUTINE (X, F)
```

```
END
```

```
SUB BISECT (X0, DX, EPS, X)
```

```
'INITIALIZE
X1 = X0
CALL FROUTINE(X1, F1)
```

```
'SEARCH LOOP
DO
```

```

X2 = X1 + DX
CALL FROUTINE(X2, F2)
PRINT "X="; X2; " F="; F2
LPRINT "X="; X2; " F="; F2
IF F1 * F2 < 0 THEN
  EXIT DO
END IF
X1 = X2
F1 = F2
LOOP

```

```

BISECTION LOOP
I% = 0
PRINT : PRINT

```

```

DO
  I% = I% + 1
  X = .5 * (X1 + X2)
  CALL FROUTINE(X, F)
  PRINT " X="; X; " F="; F
  LPRINT " X="; X; " F="; F
  IF ABS(F) < EPS THEN
    EXIT DO
  END IF
  IF F * F1 < 0 THEN
    X2 = X: F2 = F
  ELSE
    X1 = X: F1 = F
  END IF
LOOP

```

```

END SUB

```

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

```

PROBLEM DATA
ALPHA = .2  X0 = .3927

```

X= 1.9427	F=-8.910745E-04
X= 1.9677	F= 1.271312E-02
X= 1.9552	F= 5.835965E-03
X= 1.94895	F= 2.453759E-03
X= 1.945825	F= 7.766485E-04
X= 1.944263	F=-5.836785E-05
X= 1.945044	F= 3.5882E-04
X= 1.944654	F= 1.501888E-04
X= 1.944458	F= 4.591048E-05
X= 1.94436	F=-6.258488E-06

```

YC/D = .6824681

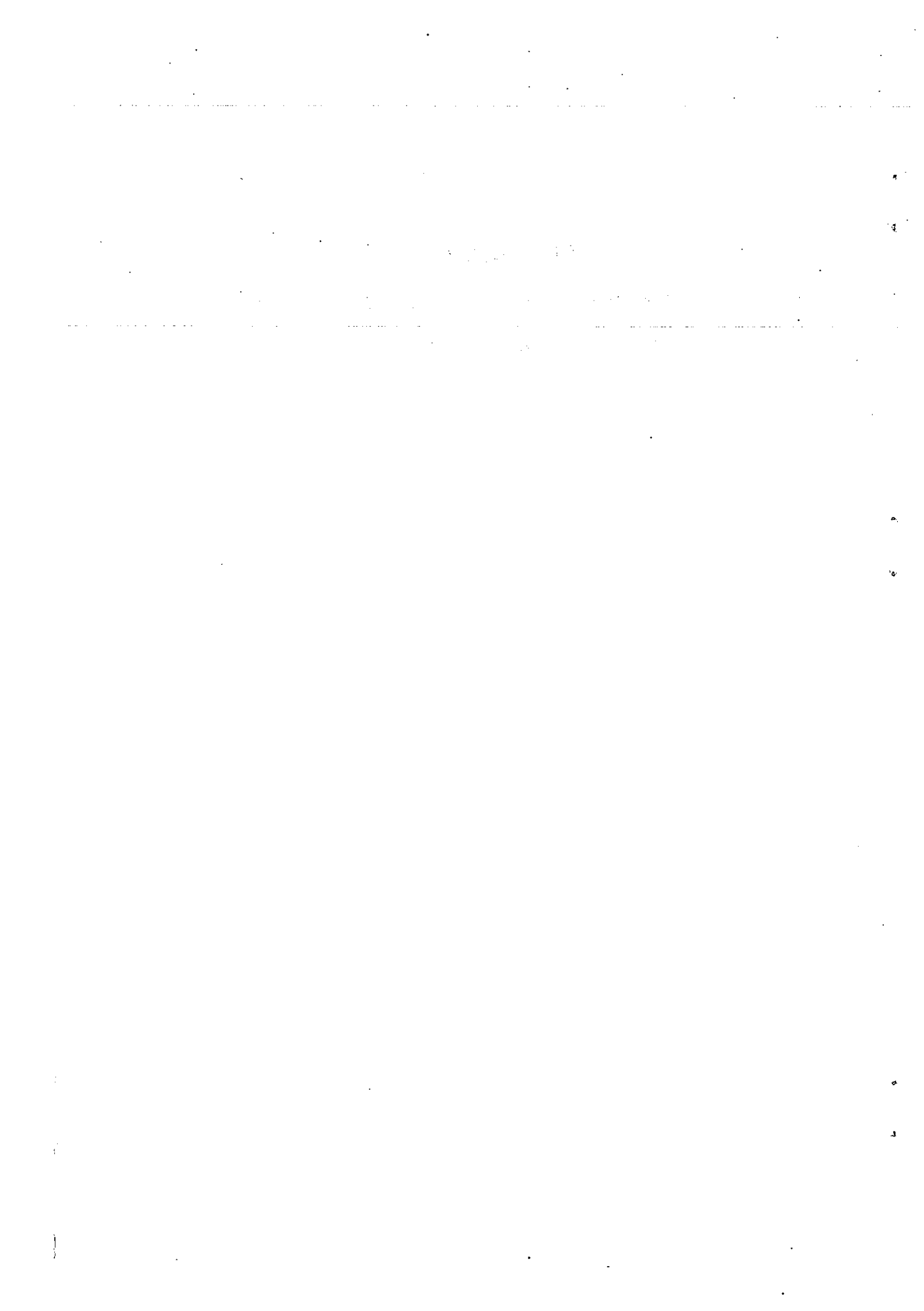
```



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π5

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΖΥΓΩΝ ΒΑΘΩΝ :

ΛΙΣΤΕΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ Η/Υ



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΒΑΘΟΥΣ ΣΕ ΤΡΑΠΕΖΟΕΙΔΗ ΑΓΩΓΟ

```
'YJUMPTR.BAS
'MAIN MODULE
'CONTAINING PROBLEM DATA AND
'FROUTINE(X, F) FOR COMPUTING
'CONJUGATE DEPTH IN A TRAPEZOIDAL OPEN CHANNEL
'BY THE BISECTION METHOD
```

```
DECLARE SUB FROUTINE (x, F)
DECLARE SUB BISECT (X0, DX, EPS, x)
COMMON SHARED AL, k
```

```
CLS
```

```
'Problem data
READ Q, m, b, y1
DATA 4.18, 1, 2, 0.25
```

```
B1 = b + 2 * m * y1
A1 = (b + m * y1) * y1
AL = Q * Q * B1 / (9.81 * A1 ^ 3)
k = b / (m * y1)
```

```
'X0 = initial value for ratio r = y2/y1
READ X0, DX, EPS
DATA 1.0, .1, 1.E-05
```

```
PRINT "PROBLEM DATA"
PRINT " Q = "; Q; " m = "; m; " b = "; b; " y1 = "; y1
PRINT "ALPHA = "; AL; " k = "; k; " X0 = "; X0
```

```
CALL BISECT(X0, DX, EPS, x)
y2 = x * y1
```

```
PRINT
PRINT " r = y2/y1 = "; x; " y2 = "; y2
```

```
  SUB FROUTINE (x, F)
```

```
  k1 = 1.5 * k + 1
  k2 = 2.5 * k + 1
  F = (k1 * (k + 1) + k2 * x + x ^ 2) * x + k1 * k
  F = x * (k + 2) * F / (3 * (k + 1 + x) * (k + 1) ^ 2)
  F = F - AL
```

```
  END SUB
```

```
'BISECT.BAS
'MODULE CONTAINING
'SUBROUTINE BISECT(X0, DX, EPS, X)
```

```
DECLARE SUB FROUTINE (X, F)
END
```

SUB BISECT(X0,DX, EPS, X)

```
'INITIALIZE
X1 = X0
CALL FROUTINE(X1, F1)

'SEARCH LOOP
DO
  X2 = X1 + DX
  CALL FROUTINE(X2, F2)
  IF F1 * F2 < 0 THEN
    EXIT DO
  END IF
  X1 = X2
  F1 = F2
LOOP

'BISECTION LOOP
I% = 0
PRINT : PRINT

DO
  I% = I% + 1
  X = .5 * (X1 + X2)
  CALL FROUTINE(X, F)
  PRINT " X="; X; TAB(20); " F="; F
  IF ABS(F) < EPS THEN
    EXIT DO
  END IF
  IF F * F1 < 0 THEN
    X2 = X: F2 = F
  ELSE
    X1 = X: F1 = F
  END IF
LOOP

END SUB
```

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### PROBLEM DATA

Q = 4.18   m = 1   b = 2   y1 = .25  
ALPHA = 25.01819   k = 8   X0 = 1

X= 5.549997	F=-.3553772		
X= 5.574997	F=-.1122723	X= 5.58652	F= 2.784729E-04
X= 5.587497	F= 9.832382E-03	X= 5.586422	F=-6.752014E-04
X= 5.581247	F=-5.126572E-02	X= 5.586472	F=-1.964569E-04
X= 5.584372	F=-2.073097E-02	X= 5.586496	F= 4.196167E-05
X= 5.585934	F=-5.451202E-03	X= 5.586484	F=-7.43866E-05
X= 5.586716	F= 2.191544E-03	X= 5.58649	F=-1.907349E-05
X= 5.586325	F=-1.63269E-03	X= 5.586493	F= 7.629395E-06

r = y2/y1 = 5.586493   y2 = 1.396623

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΒΑΘΟΥΣ ΣΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΑΓΩΓΟ

```
'YJUMPCIR.BAS
'MAIN MODULE
'CONTAINING PROBLEM DATA AND
'FROUTINE(X, F) FOR COMPUTING
'CONJUGATE DEPTH IN A CIRCULAR OPEN CHANNEL
'BY THE BISECTION METHOD
```

```
DECLARE SUB FROUTINE (x, F)
DECLARE SUB BISECT (X0, DX, EPS, x)
COMMON SHARED AL, Q1
```

```
CLS
```

```
'Problem data
READ Q, D, y1
DATA 5, 2, 0.7
```

```
cs = 1 - 2 * y1 / D
cx = SQR(1 - cs * cs)
b1 = ATN(cx / cs)
Q1 = 4 * Q ^ 2 / (9.81 * D ^ 5)
AL = 0
CALL FROUTINE(b1, F)
AL = F
```

```
'X0 = initial value for angle β2
X0 = b1
DX = 3.14159 / 30
READ EPS
DATA 1.E-05
```

```
PRINT "PROBLEM DATA"
PRINT "Q = "; Q; " D = "; D; " y1 = "; y1
PRINT "b1 = "; b1
PRINT "M1/D^3 = "; AL; " X0 = "; X0
```

```
CALL BISECT(X0, DX, EPS, x)
y2 = .5 * D * (1 - COS(x))
```

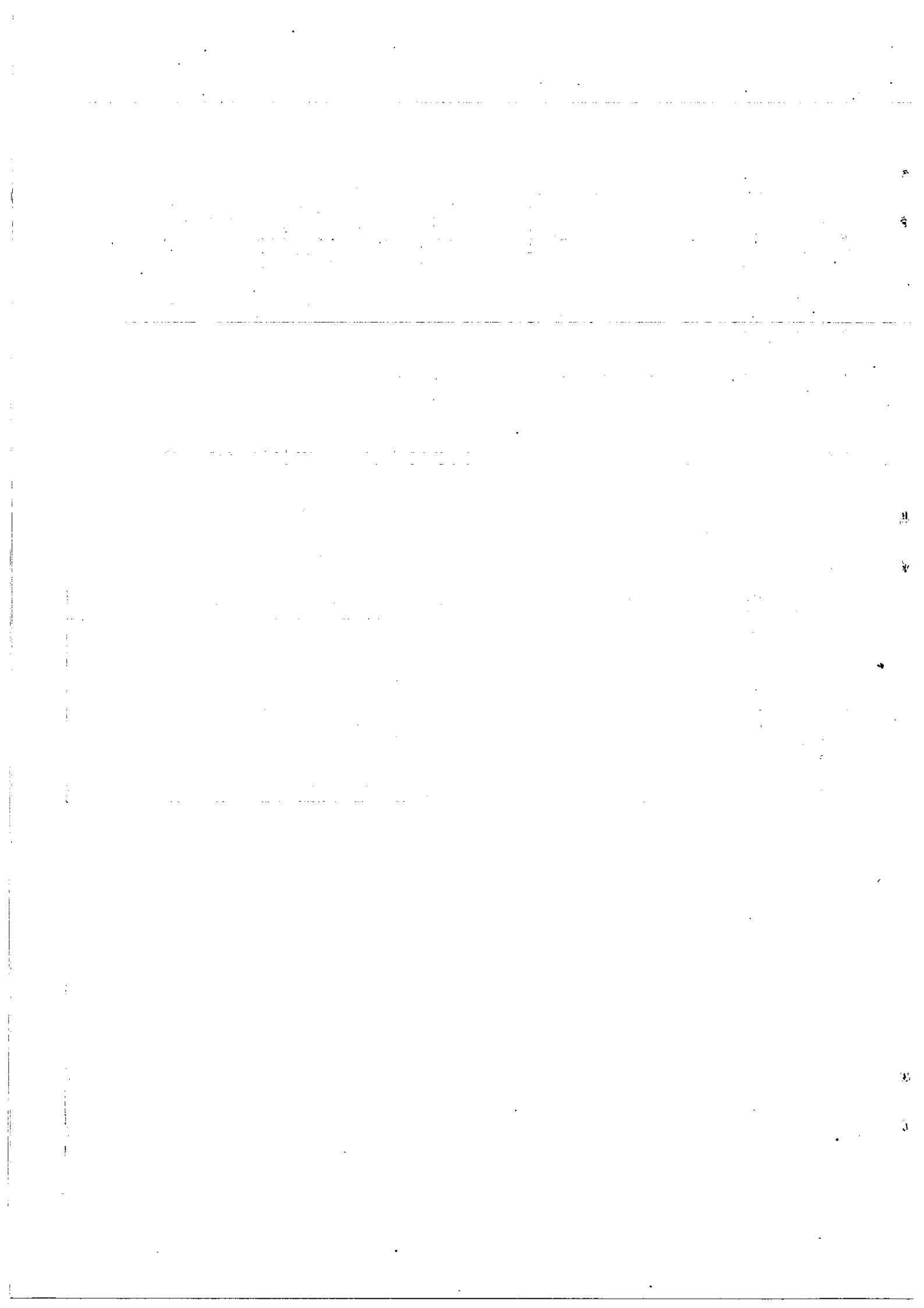
```
PRINT
PRINT " b2 = "; x; " y2 = "; y2
```

```
SUB FROUTINE (x, F)
```

```
sn = SIN(x): cs = COS(x)
FS = 3 * sn - 3 * x * cs - sn ^ 3
F = Q1 / (x - sn * cs) + FS / 24
```

```
F = F - AL
```

```
END SUB
```



## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abbott, M.B. (1979). *Computational Hydraulics. Elements of the theory of free surface flows*. Pitman, London, U.K.

Anonymous (1979) 'HEC-2, Water surface Profiles, Computer program, Users manual'. Hydrologic Engineering Center, Davis, Calif., U.S.A.

Chow, V.T. (1959). *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill, New York, N.Y.

Cunge, J.A., Holly, F.M.Jr. and Verwey A. (1980). *Practical aspects of computational hydraulics*. Pitman, London, U.K.

Eichert, B.S. (1970). 'Survey of programs for water surface profiles'. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Feb., 547-563.

Einstein, H.A. (1950). 'The bed-load function for sediment transportation in open channel flows'. U.S. Dep. of Agriculture, Soil Conservation Service, Techn. Bulletin No. 1026, Washington, D.C.

French, R.H. (1987). *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York, N.Y.

Heggen, R.J. (1991). 'Critical depth, velocity profile and channel shape'. Journal of Irrigation and Drainage Engrg, ASCE, vol. 177(3), 442-448.

Henderson, F.M. (1966). *Open channel Flow*, MacMillan, New York, N.Y.

Jain, A.K. (1976). 'An accurate explicit equation for friction factor', Jour. Hydr. Engrg., ASCE, Techn. Note, May, 674-677.

Keifer, C.J. and Chu, H.H. (1955). 'Backwater functions by numerical integration'. Transactions ASCE, Vol.120, No.2748, 429-448.

Liggett, J.A. (1993). 'Critical depth, velocity and averaging'. Jour. Irrig. and Drain. Engrg, ASCE, vol. 119(2), 416-422.

Newman, J.N. (1977). *Marine Hydrodynamics*. The MIT Press, Cambridge, Mass., U.S.A.

Ranga Raju, K.G. (1981). *Flow through open channels*, TATA McGraw-Hill, New Delhi.

Stoker, J.J. (1957). *Water Waves*. Interscience, New York, N.Y.

Subramanya, K. (1986). *Flow in open channels*. TATA McGraw-Hill, New Delhi.

Swamee, P.K. (1993). 'Critical flow equations for irrigation canals'. Jour. Irrig. and Drain. Engrg, ASCE, vol. 119(2), 400-409.

Σιδηρόπουλος, Ε. και Φωτιάδης, Χ. (1996). Σημειώσεις αριθμητικής ανάλυσης με χρήση  $H/Y$ . Α.Π.Θ.

Τερζίδης, Γ.Α. (1982). Μαθήματα Υδραυλικής : Ανοικτοί αγωγοί. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Τολίκας, Π. και Φωτιάδης, Χ. (1994). Σημειώσεις εφαρμοσμένης υδραυλικής. Α.Π.Θ.



4

4

4

4

2

2

4

2

10

2

2

7