

1 Εισαγωγή

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε με δύο είδη δυναμικών συστημάτων. Το πρώτο είναι τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ενώ το δεύτερο είναι οι απεικονίσεις. Πρώτα θα εξετάσουμε στις διαφορικές εξισώσεις τα σημεία ισορροπίας και την ευστάθειά τους. Η ευστάθεια των περισσότερων ειδών σημείων ισορροπίας (των υπερβολικών σημείων) καθορίζεται από το γραμμικοποιημένο σύστημα, το οποίο θα μελετήσουμε και θα βρούμε τις λύσεις του. Στη συνέχεια θα συνδέσουμε τις λύσεις του γραμμικοποιημένου συστήματος με αυτές του αρχικού, μη γραμμικού συστήματος από το οποίο προήλθε, με τη βοήθεια των θεωρημάτων Hartman – Grobman και ευσταθούς πολλαπλότητας. Θα δούμε ότι, στην περίπτωση των μη υπερβολικών σημείων ισορροπίας, το γραμμικοποιημένο σύστημα δεν μπορεί να δώσει πληροφορίες για τα φαινόμενα γύρω από αυτά τα σημεία και αυτή είναι η περίπτωση όπου παρουσιάζονται οι διακλαδώσεις (bifurcations). Θα μελετήσουμε τέσσερα είδη διακλαδώσεων (διακλάδωση σάγματος – κόμβου, υποκρίσιμη διακλάδωση, διακλάδωση διχάλας και διακλάδωση Hopf). Θα μελετήσουμε εν συντομία τα αντίστοιχα φαινόμενα στα σταθερά σημεία των απεικονίσεων, δηλαδή τα σημεία, τα αντίστοιχα των σημείων ισορροπίας, στην περίπτωση των υπερβολικών σημείων με τη βοήθεια της γραμμικοποίησης και στην περίπτωση των μη υπερβολικών σημείων με τη θεωρία διακλαδώσεων.

Το δεύτερο μέρος του βιβλίου είναι αφιερωμένο στο χάος. Θα δώσουμε τον ορισμό του χαοτικού αναλλοίωτου συνόλου και στις δύο περιπτώσεις δυναμικών συστημάτων. Θα μελετήσουμε δύο μονοδιάστατες απεικονίσεις που εμφανίζουν χάος, την απεικόνιση Renyi και τη λογιστική απεικόνιση. Στην απεικόνιση Renyi θα εισάγουμε την έννοια της συμβολικής δυναμικής και της μετατόπισης Bernoulli και με τη βοήθειά τους θα αποδείξουμε την ύπαρξη χάους στην απεικόνιση αυτή. Στη λογιστική απεικόνιση θα μελετήσουμε και άλλα φαινόμενα, όπως το διπλασιασμό περιόδου. Θα μελετήσουμε επίσης μια διδιάστατη χαοτική απεικόνιση, το πέταλο του Smale. Χρησιμοποιώντας συμβολική δυναμική, θα δείξουμε ότι το αναλλοίωτο σύνολό της είναι χαοτικό και επιπλέον σύνολο Cantor. Το πέταλο του Smale εμφανίζεται όταν υπάρχουν οι λεγόμενες ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές στα δυναμικά συστήματα, στην περίπτωση που μια ασταθής και μια ευσταθής πολλαπλότητα τέμνονται εγκάρσια. Θα χρησιμοποιήσουμε το ομοκλινικό θεώρημα Mel'nikov για να εντοπίσουμε την ύπαρξη εγκάρσιας τομής, η οποία μας εγγυάται την ύπαρξη πετάλου του Smale και συνεπώς χαοτικής δυναμικής στην περιοχή σαγματικού σημείου στα Χαμιλτονιανά και άλλα δυναμικά συστήματα.

Αυτό το βιβλίο, με βάση την παραπάνω ύλη, δίνει μια γενική επισκόπηση της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων, ενώ εμβαθύνει περισσότερο σε ορισμένα

θέματα της θεωρίας αυτής. Για περαιτέρω μελέτη των δυναμικών συστημάτων προτείνονται τα βιβλία που βρίσκονται στη βιβλιογραφία.

2 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

2.1 Αυτόνομα και μη αυτόνομα συστήματα

Θα ασχοληθούμε με συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, της μορφής

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, t), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Τα x_i μπορεί να είναι συντεταγμένες στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n η μπορεί να είναι συντεταγμένες πάνω σε μια αυθαίρετη n -διάστατη επιφάνεια M . Επίσης, αν τα f_i εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο, τότε το σύστημα λέγεται *μη αυτόνομο*. Αντίθετα αν οι εξισώσεις (1) είναι της μορφής

$$\dot{x}_i = f_i(x_j), \quad (2)$$

δηλαδή αν το σύστημα δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, τότε ονομάζεται *αυτόνομο*.

Λύση του παραπάνω συστήματος (1) είναι η οικογένεια των καμπύλων, σε παραμετρική μορφή με παράμετρο το χρόνο,

$$x_i = x_i(t; x_{j0}, t_0). \quad (3)$$

Η παραπάνω λύση παρουσιάζεται γραφικά στο χώρο καταστάσεων του συστήματος, ο οποίος είναι η n -διάστατη επιφάνεια M και ο χρόνος $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή ο χώρος $M \times \mathbb{R}$. Παρατηρείστε ότι η λύση εξαρτάται από τις $n + 1$ αρχικές συνθήκες x_{j0}, t_0 και από την παράμετρο t . Κατά το 19ο αιώνα αναπτύχθηκαν θεωρήματα για συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τα οποία εγγυώνται ότι, αν τα $f_i(x_j, t)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις των x_j και του χρόνου, τότε από κάθε σημείο του χώρου καταστάσεων (x_j, t) περνάει μία και μόνο μία λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1), δηλαδή σε κάθε αρχική συνθήκη (x_{j0}, t_0) αντιστοιχεί μία και μόνο μία λύση. Η λύση (3), για συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες (x_{j0}, t_0) , παριστάνει μια καμπύλη στο χώρο καταστάσεων $M \times \mathbb{R}$, που ονομάζεται *τροχιά*. Λόγω της παραπάνω μοναδικότητας της λύσης, οι τροχιές στον χώρο καταστάσεων δεν τέμνονται μεταξύ τους, ούτε και μία τροχιά τέμνει τον εαυτό της. Τέτοια θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης αποδείχθηκαν από τους Cauchy, Picard κ.α.

Για τα αυτόνομα συστήματα της μορφής (2) έχουμε τη λύση

$$x_i(t) = x_i(t - t_0; x_{j0}) \quad (4)$$

Ο χώρος καταστάσεων σε αυτή την περίπτωση είναι η n -διάστατη επιφάνεια M . Το γεγονός ότι τα x_i εξαρτώνται από το t_0 μόνο μέσω του συμπλέγματος $t - t_0$ σημαίνει ότι, αν για την ίδια αρχική συνθήκη x_{j0} θεωρήσουμε κάποιο διαφορετικό t'_0 , τότε η καμπύλη που παριστάνει μια συγκεκριμένη λύση παραμένει η ίδια με αυτή που αντιστοιχεί στο t_0 , απλώς περνά από τα διάφορα σημεία x_i σε διαφορετικό χρόνο. Και για τα αυτόνομα συστήματα υπάρχουν τα αντίστοιχα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης. Σε αυτή την περίπτωση, αν τα $f_i(x_j)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις των x_j και επιπλέον υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, \dots, n\}$, τέτοιο ώστε $f_i(x_j) \neq 0$, τότε από κάθε σημείο x_j περνά μοναδική λύση των (4).

Τα σημεία για τα οποία ισχύει $f_i(x_j) = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ ονομάζονται *σημεία ισορροπίας*. Για αυτά τα σημεία ισχύει ότι $\dot{x}_i = 0$ και αν θεωρήσουμε ότι αποτελούν αρχικές συνθήκες για τη λύση $x_j = x_{j0}$, τότε $x_i(t) = x_{i0}$ και η λύση παραμένει για πάντα στο ίδιο σημείο της M .

2.2 Σημεία ισορροπίας και γραμμικοποίηση

Έστω ότι

$$f_i(x_j) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Οι εξισώσεις (5) αποτελούν αλγεβρικό σύστημα n εξισώσεων ως προς τις n μεταβλητές x_j και επιδέχονται κάποιες λύσεις. Έστω επίσης ότι $\mathbf{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ είναι μια τέτοια λύση. Το σημείο $\mathbf{x}^* \in M$ είναι ένα σημείο ισορροπίας και, αν θεωρηθεί ως αρχική συνθήκη, η τροχιά του αποτελείται μόνο από αυτό το σημείο, δηλαδή η τροχιά παραμένει στο σημείο αυτό για κάθε χρονική στιγμή t .

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε μικρές διαταραχές γύρω από το σημείο ισορροπίας, δηλαδή

$$x_i = x_i^* + \xi_i. \quad (6)$$

Θα ανπτύξουμε το δεξί μέλος της (4) σε σειρά Taylor και θα κρατήσουμε τους γραμμικούς όρους ως προς τα ξ_i . Ο σκοπός και η χρησιμότητα αυτής της μεθόδου θα φανεί αφού πρώτα μιλήσουμε για τις λύσεις του γραμμικού συστήματος, για τα υπερβολικά σημεία ισορροπίας και τα θεωρήματα Hartman – Grobman και ευσταθούς πολλαπλότητας.

Αντικαθιστώντας τις (6) στο σύστημα (4) και ανπτύσσοντας ως προς τις διαταραχές ξ_i , αφού πάρουμε υπόψη ότι στο σημείο ισορροπίας \mathbf{x}^* ισχύουν οι

(5), παίρνουμε

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + O(\xi^2) \quad (7)$$

όπου ο \mathbf{A} είναι ο πίνακας με στοιχεία

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^*}.$$

Ο πίνακας αυτός παριστάνεται επίσης ως $\mathbf{A} = \mathbf{Df}$. Αφού ο πίνακας \mathbf{A} είναι υπολογισμένος στο σημείο ισορροπίας, θα είναι σταθερός πίνακας.

Το προσαρτημένο γραμμικό σύστημα ή το σύστημα των εξισώσεων μεταβολών στο σημείο ισορροπίας \mathbf{x}^* είναι το γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi \quad (8)$$

που παίρνουμε από τις (7) παραλείποντας τους όρους ανώτερης τάξης. Παρακάτω θα μελετήσουμε τις λύσεις γραμμικών συστημάτων της μορφής (8).

2.3 Γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές.

Θα μελετήσουμε συστήματα της μορφής (8),

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (9)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{A} έχει σταθερά στοιχεία και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Πριν αναφέρουμε ποια είναι η λύση του παραπάνω συστήματος, πρέπει να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση πίνακα

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \quad (10)$$

όπου $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$. Αποδεικνύεται ότι, αν το μέτρο του πίνακα \mathbf{A} είναι φραγμένο, τότε η παραπάνω σειρά συγκλίνει. Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης είναι οι παρακάτω:

- Μετασχηματισμός ομοιότητας

$$e^{\mathbf{PAP}^{-1}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1} \quad (11)$$

- Ισχύει ότι

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \quad (12)$$

αν και μόνο αν οι πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} αντιμετατίθενται, δηλαδή αν $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

- Με τη βοήθεια του αναπτύγματος (10), αποδεικνύεται ότι

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \quad (13)$$

Τώρα μπορούμε να πούμε ότι η γενική λύση της (9) είναι η

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \quad (14)$$

όπου $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ είναι η αρχική συνθήκη για $t = 0$, δηλαδή $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Με βάση την ιδιότητα (13) είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε ότι η (14) είναι η λύση της (9). Πραγματικά, έχουμε

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} (e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0) = \frac{d}{dt} (e^{\mathbf{A}t}) \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Το ζήτημα όμως είναι ότι δεν ξέρουμε την αναλυτική έκφραση της εκθετικής συνάρτησης πίνακα. Η μορφή της εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} που βρίσκεται στον εκθέτη.

Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι για τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα \mathbf{A} ισχύει ότι

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει το γραμμικό σύστημα (15) λύση $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι η ορίζουσα των συντελεστών του να ισούται με μηδέν,

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \quad (16)$$

Η παραπάνω σχέση δίνει μια αλγεβρική εξίσωση, πολυωνυμική n -βαθμού αν ο \mathbf{A} είναι $n \times n$ πίνακας και, σύμφωνα με τη άλγεβρα, έχει n ρίζες, κάθε μια από τις οποίες είναι πραγματική ή μιγαδική. Οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται ανά συζυγή ζεύγη, μια και ο πίνακας \mathbf{A} είναι πραγματικός, δηλαδή αν υπάρχει μια μιγαδική ρίζα, τότε υπάρχει και η συζυγής της. Θα ξεχωρίσουμε λοιπόν τις παρακάτω περιπτώσεις:

- *Ιδιοτιμές πραγματικές με γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα*

Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} είναι διαφορετικές μεταξύ τους, τότε τα ιδιοδιανύσματα είναι διαφορετικά και γραμμικά ανεξάρτητα. Αν όμως κάποια ιδιοτιμή είναι πολλαπλή με πολλαπλότητα k (αλγεβρική πολλαπλότητα), υποθέτουμε ότι αντιστοιχούν σε αυτή k γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα (γεωμετρική πολλαπλότητα). Αν λοιπόν η εξίσωση (16) έχει n

πραγματικές ρίζες, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά και βρίσκονται από τη σχέση

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει το λ με την αντίστοιχη ιδιοτιμή. Από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα της λ , αν αυτή είναι απλή, ή τα k γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, αν η ρίζα είναι πολλαπλότητας k . Σχηματίζουμε τον $n \times n$ πίνακα \mathbf{P} που έχει ως στήλες τα n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε όλες τις ιδιοτιμές του \mathbf{A} . Τότε ισχύει ότι $|\mathbf{P}| \neq 0$, μια και οι στήλες του πίνακα αυτού είναι γραμμικά ανεξάρτητες, συνεπώς υπάρχει ο πίνακας \mathbf{P}^{-1} και επιπλέον ο μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D} \quad (17)$$

διαγωνοποιεί τον πίνακα, δηλαδή

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

ενώ $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$. Όμως το εκθετικό διαγώνιου πίνακα είναι απλώς

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

οπότε η λύση (14) σε αυτή την περίπτωση γράφεται ως

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}t}\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$$

ή

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (18)$$

- *Ιδιοτιμές συζυγείς μιγαδικές με γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα*

Αν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα είναι μιγαδικές, τότε υπάρχουν τα μιγαδικά συζυγή ζεύγη ιδιοτιμών $\alpha_k \pm i\beta_k$, αφού ο πίνακας είναι πραγματικός. Επιπλέον, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα μιγαδικά συζυγή ζεύγη $\mathbf{u}_k \pm i\mathbf{v}_k$. Αν χρησιμοποιήσουμε ως πίνακα \mathbf{P} τον πίνακα που έχει στήλες

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_k, \dots),$$

τότε ο μετασχηματισμός ομοιότητας του \mathbf{A} , δηλαδή ο πίνακας $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, γίνεται

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 & \dots \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & \dots \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

ή

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} \right).$$

Όμως η εκθετική συνάρτηση κάθε block της μορφής

$$\begin{bmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} t$$

είναι

$$\exp \left(\begin{bmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} t \right) = e^{\alpha_k t} \begin{bmatrix} \cos \beta_k t & -\sin \beta_k t \\ \sin \beta_k t & \cos \beta_k t \end{bmatrix}.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Ισχύει ότι

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^2 t^2 = \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \beta^2) & -2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & (\alpha^2 - \beta^2) \end{pmatrix} t^2.$$

Όμως $\alpha^2 - \beta^2 = \text{Re} (\alpha + i\beta)^2$ και $2\alpha\beta = \text{Im} (\alpha + i\beta)^2$, έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^2 t^2 = \begin{pmatrix} \text{Re} (\alpha + i\beta)^2 & -\text{Im} (\alpha + i\beta)^2 \\ \text{Im} (\alpha + i\beta)^2 & \text{Re} (\alpha + i\beta)^2 \end{pmatrix} t^2.$$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^n t^n = \begin{pmatrix} \text{Re} (\alpha + i\beta)^n & -\text{Im} (\alpha + i\beta)^n \\ \text{Im} (\alpha + i\beta)^n & \text{Re} (\alpha + i\beta)^n \end{pmatrix} t^n.$$

Επομένως η σειρά του εκθετικού για αυτό το block γράφεται

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{Re} (\alpha + i\beta)^n t^n & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{Im} (\alpha + i\beta)^n t^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{Im} (\alpha + i\beta)^n t^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{Re} (\alpha + i\beta)^n t^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)t} & -\operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)t} \\ \operatorname{Im} e^{(\alpha+i\beta)t} & \operatorname{Re} e^{(\alpha+i\beta)t} \end{pmatrix}$$

ή, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Moivre,

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & -e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}$$

και η λύση του συστήματος όταν ο \mathbf{A} έχει μιγαδικές ιδιοτιμές γράφεται ως

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = e^{(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1})t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0$$

ή

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \operatorname{diag} \left(e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0.$$

Αν λοιπόν ο πίνακας \mathbf{A} έχει k πραγματικές ιδιοτιμές λ_i , $i = 1, k$ με k γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και m ζεύγη συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών $\alpha_j \pm i\beta_j$, $j = 1, m$ με m ζεύγη συζυγών μιγαδικών και γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, τότε η λύση γράφεται ως εξής

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \operatorname{diag} \left(e^{\lambda_i t}, e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} \cos \beta_j t & -\sin \beta_j t \\ \sin \beta_j t & \cos \beta_j t \end{bmatrix} \right) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0,$$

όπου κατά μήκος της διαγωνίου του πίνακα της παραπάνω έκφρασης υπάρχουν k στοιχεία της μορφής $e^{\lambda_i t}$ και m blocks της μορφής

$$e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} \cos \beta_j t & -\sin \beta_j t \\ \sin \beta_j t & \cos \beta_j t \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση $k+2m = n$, όπου n η διάσταση του χώρου καταστάσεων.

3 Θεωρία διακλαδώσεων

Θεωρούμε μια οικογένεια δυναμικών συστημάτων με παράμετρο το μ ,

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, \mu), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Ας υποθέσουμε ότι για $\mu = 0$ το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, 0)$$

έχει ένα σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$. Το ερώτημα είναι αν, καθώς αλλάζει η παράμετρος μ , το σημείο ισορροπίας που υπάρχει για $\mu = 0$ διατηρείται και σε άλλα μέλη της οικογένειας δυναμικών συστημάτων (19) για $\mu \neq 0$.

Υπάρχει ένα θεώρημα, το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (implicit function theorem), το οποίο λέει ότι όταν ένα σύνολο συναρτήσεων $f_i(x_j, \mu)$ μηδενίζεται για κάποια τιμή $\mu = \mu_0$, δηλαδή

$$f_i(x_j^*, 0) = 0,$$

όπως συμβαίνει στο σημείο ισορροπίας \mathbf{x}^* για $\mu = 0$, και επιπλέον ο πίνακας

$$\left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}^*}$$

δεν έχει μηδενικές ιδιοτιμές (ή, ισοδύναμα, η ορίζουσα του πίνακα δεν είναι μηδέν) τότε η λύση αυτή συνεχίζεται με μοναδικό τρόπο ως προς μ . Δηλαδή υπάρχει καμπύλη $x_i = x_i(\mu)$ γύρω από το $\mu = 0$, στο ανοικτό διάστημα $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ τιμών του μ , τέτοια ώστε

$$f_i(x_j(\mu), \mu) = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σημείο ισορροπίας συνεχίζει να υπάρχει για κάποιες συνεχείς τιμές του μ σε όλα τα μέλη της οικογένειας (19) γύρω από το $\mu = 0$ και είναι μοναδικό.

Τα υπερβολικά σημεία ισορροπίας, στα οποία ισχύει ότι

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

έχουν προφανώς ορίζουσα διάφορη του μηδενός, και επομένως συνεχίζονται με μοναδικό τρόπο. Επιπλέον και τα σημεία ισορροπίας που έχουν $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ για κάποιο i αλλά ισχύει ότι $\operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0$, συνεχίζονται με μοναδικό τρόπο. Τέτοια περίπτωση είναι το κέντρο στον \mathbb{R}^2 . Όμως η ευστάθειά του μπορεί να αλλάξει δραστικά και να δημιουργηθεί από αυτό ένας οριακός κύκλος, όπως θα δούμε

παρακάτω. Αντίθετα, σημεία ισορροπίας για τα οποία ισχύει ότι $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0 \forall i$ όχι μόνο συνεχίζονται με μοναδικό τρόπο, αλλά επιπλέον και η ευστάθειά τους διατηρείται, καθώς ο χαρακτήρας των ιδιοτιμών (αν δηλαδή ισχύει ότι $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ ή αντίθετα $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$) διατηρείται για μια ανοικτή περιοχή τιμών της παραμέτρου μ γύρω από το μηδέν και επίσης το μη γραμμικό και το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα είναι τοπολογικά συζυγή.

Σημεία ισορροπίας λοιπόν των οποίων ο πίνακας \mathbf{A} του γραμμικοποιημένου συστήματος

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi$$

έχει μηδενικές ιδιοτιμές για κάποια τιμή της παραμέτρου $\mu = \mu_0$, μπορεί να μη συνεχίζονται με μοναδικό τρόπο ως προς την παράμετρο μ . Τέτοια σημεία μπορεί να εξαφανίζονται ή να εμφανίζονται για κάποια τιμή της παραμέτρου ή στη θέση τους μπορεί να εμφανίζονται δύο, τρία ή περισσότερα σημεία ισορροπίας. Σημείο ισορροπίας για το οποίο υπάρχει i τέτοιο ώστε $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ (όπως το κέντρο), μπορεί να αλλάζει ευστάθεια καθώς μεταβάλλεται το μ από την τιμή $\mu = 0$ και να συμβαίνουν νέα φαινόμενα, όπως η εμφάνιση οριακού κύκλου. Τα μη υπερβολικά σημεία ισορροπίας ονομάζονται *σημεία διακλάδωσης* και η μορφή των τροχιών στο χώρο καταστάσεων των μελών της οικογένειας που αντιστοιχούν σε μικρό μ είναι τελείως διαφορετική από αυτή του μέλους της οικογένειας για $\mu = 0$.

3.1 Είδη διακλαδώσεων

Θα μελετήσουμε κάποιες μονοπαραμετρικές οικογένειες δυναμικών συστημάτων που αποτελούν αντιπροσώπους γενικών κατηγοριών συστημάτων τα οποία εμφανίζουν αυτών των ειδών διακλαδώσεις, στο επίπεδο \mathbb{R}^2 .

- Διακλάδωση σάγματος – κόμβου

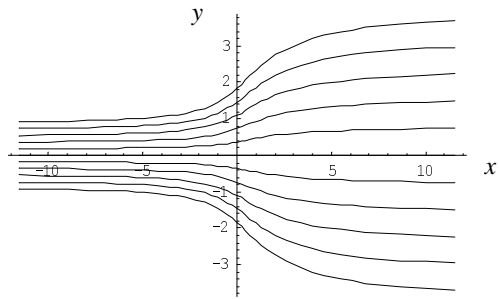
Θεωρούμε την οικογένεια των δυναμικών συστημάτων στον \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu - x^2, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

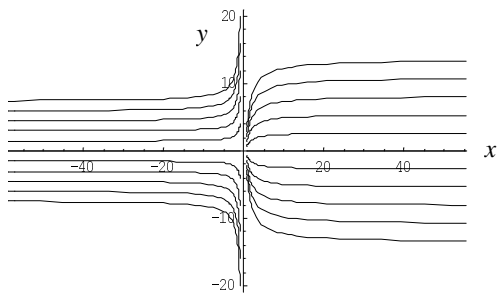
Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται ως εξής

$$\begin{aligned}f_1(x, y) = \mu - x^2 = 0 &\Rightarrow x = \pm\sqrt{\mu} \\ f_2(x, y) = -y = 0 &\Rightarrow y = 0\end{aligned}$$

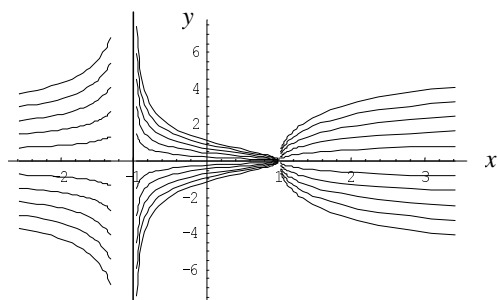
άρα για $\mu < 0$ τα μέλη της οικογένειας δεν έχουν κανένα σημείο ισορροπίας, για $\mu = 0$ υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας, το $(x, y) = (0, 0)$, και



$$\mu < 0$$

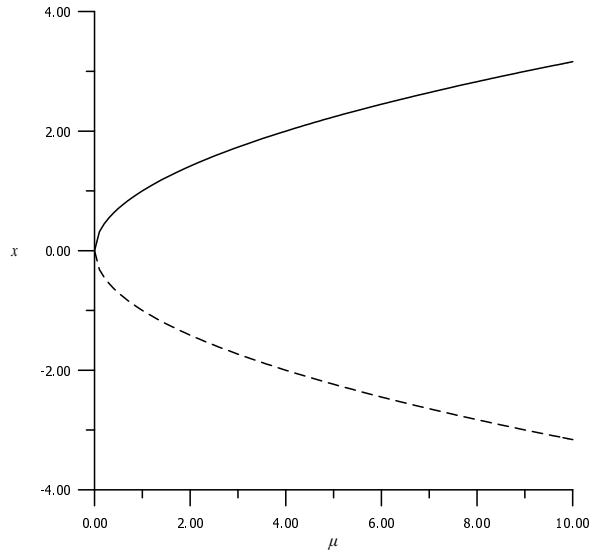


$$\mu = 0$$



$$\mu > 0$$

Σχήμα 1: Η διακλάδωση σάγματος - κόμβου



Σχήμα 2: Το διάγραμμα διακλάδωσης σάγματος - κόμβου

για $\mu > 0$ υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας, το $(x, y) = (\sqrt{\mu}, 0)$ και το $(x, y) = (-\sqrt{\mu}, 0)$.

Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι για $\mu = 0$

$$\mathbf{Df}|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ενώ για $\mu > 0$ είναι αντίστοιχα για τα δύο σημεία ισορροπίας

$$\mathbf{Df}|_{\sqrt{\mu}} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και

$$\mathbf{Df}|_{(-\sqrt{\mu})} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Για $\mu \neq 0$, το πρώτο από τα παραπάνω σημεία, αφού ο πίνακας έχει δύο πραγματικές, αρνητικές ιδιοτιμές, είναι ευσταθής κόμβος, ενώ το δεύτερο, όπου ο πίνακας έχει δύο πραγματικές ετερόσημες ιδιοτιμές, είναι σάγμα. Παρατηρούμε ότι τα σημεία ισορροπίας αυτά είναι υπερβολικά σημεία ισορροπίας και συνεχίζονται, και αυτά και η ευστάθειά τους, με μοναδικό

τρόπο κάτω από μεταβολές του μ . Αντίθετα, για $\mu = 0$ ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος έχει μηδενική ιδιοτιμή και το σημείο ισορροπίας $(x, y) = (0, 0)$ είναι σημείο διακλάδωσης. Η διακλάδωση αυτού του είδους ονομάζεται *διακλάδωση σάγματος – κόμβου* και οι τροχιές στον χώρο καταστάσεων, καθώς μεταβάλλεται το μ , φαίνονται στο Σχήμα 1. Στο σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι, για αρνητικές τιμές του μ δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας, ενώ για $\mu = 0$ εμφανίζεται το σημείο ισορροπίας στο $(0, 0)$ που είναι μη υπερβολικό και αποτελεί το σημείο διακλάδωσης. Στο τρίτο σχήμα, που αντιστοιχεί στην τιμή $\mu = 1$, βλέπουμε ένα σάγμα στο σημείο $(-1, 0)$ και ένα κόμβο στο $(1, 0)$.

Το *διάγραμμα διακλάδωσης*, δηλαδή το διάγραμμα της συντεταγμένης x των σημείων ισορροπίας συναρτήσει της παραμέτρου μ , δίνεται στο Σχήμα 2, όπου με συνεχή γραμμή παριστάνεται η θέση του ευσταθούς σημείου ισορροπίας (κόμβος) και με διακεκομμένη αυτή του ασταθούς (σάγμα). Δηλαδή η συνεχής γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = \sqrt{\mu}$ και η διακεκομμένη της $x = -\sqrt{\mu}$.

- Υποκρίσιμη διακλάδωση

Η αντιπροσωπευτική οιογένεια συστημάτων, στα οποία εμφανίζεται αυτή η διακλάδωση δίνεται από το σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^2, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος αυτού είναι τα

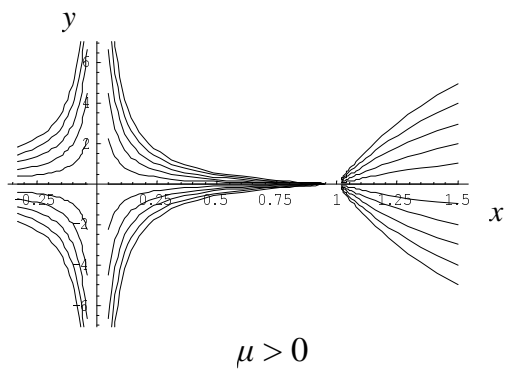
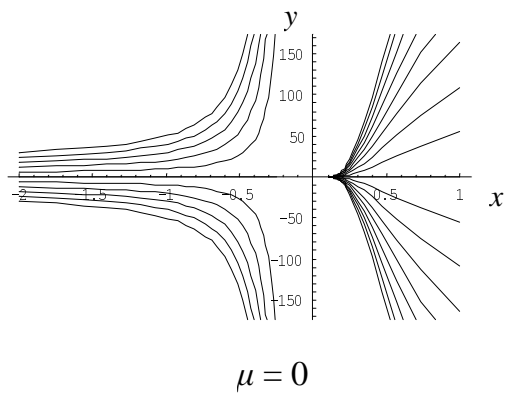
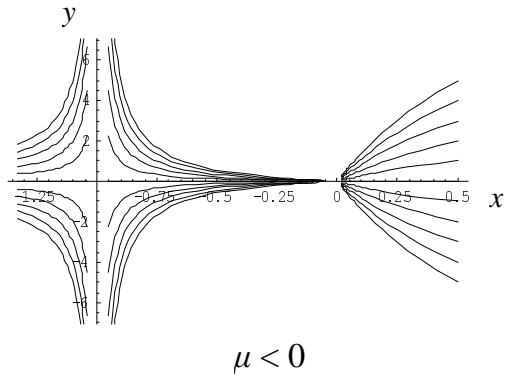
$$\begin{aligned}f_1(x, y) = \mu x - x^2 = 0 &\Rightarrow x = 0 \text{ και } x = \mu \\ f_2(x, y) = -y = 0 &\Rightarrow y = 0 \text{ και } y = 0\end{aligned}$$

άρα, για θετικές ή αρνητικές τιμές του μ , το παραπάνω σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας, τα σημεία $(x, y) = (0, 0)$ και $(x, y) = (\mu, 0)$, εκτός από την περίπτωση $\mu = 0$, για την οποία υπάρχει μόνο το σημείο $(x, y) = (0, 0)$.

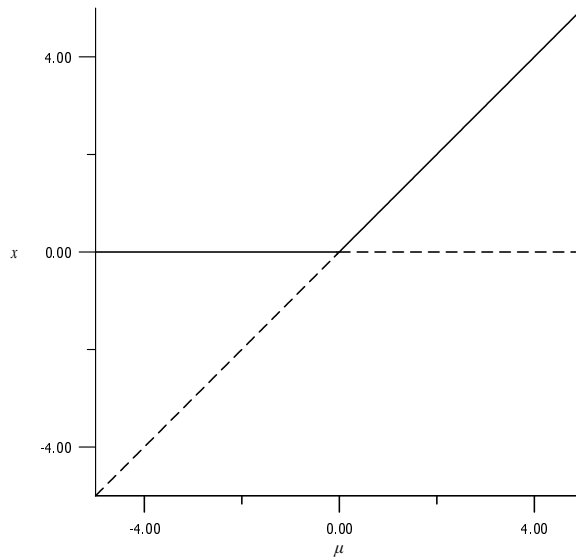
Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος στο σημείο $(0, 0)$ είναι

$$\mathbf{Df}|_0 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

συνεπώς το σημείο αυτό για $\mu < 0$ είναι ευσταθής κόμβος, ενώ για $\mu > 0$ είναι σάγμα.



Σχήμα 3: Η υποκρίσιμη διακλάδωση



Σχήμα 4: Το διάγραμμα της υποκρίσιμης διακλάδωσης

Στο σημείο $(x, y) = (\mu, 0)$, ο πίνακας είναι

$$\mathbf{Df}|_{\mu} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και το σημείο αυτό για $\mu < 0$ είναι σάγμα και για $\mu > 0$ είναι ευσταθής κόμβος. Για $\mu = 0$ ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος στο μοναδικό σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι ο

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και το σημείο ισορροπίας είναι μη υπερβολικό, αφού ο πίνακας έχει μη-δενική ιδιοτιμή. Παρατηρήστε ότι κατά τη διακλάδωση που συμβαίνει για $\mu = 0$ τα δύο σημεία ισορροπίας ανταλλάσσουν την ευστάθειά τους. Οι τροχιές στο χώρο καταστάσεων για την περίπτωση αυτή δίνονται στο Σχήμα 3 και το διάγραμμα διακλάδωσης στο Σχήμα 4, όπου πάλι τα ευσταθή σημεία ισορροπίας σχεδιάστηκαν με συνεχή γραμμή και τα ασταθή με διακεκομμένη.

- Διακλάδωση διχάλας

Η οικογένεια συστημάτων που είναι εκπρόσωπος της διακλάδωσης διχάλας (pitchfork) είναι η

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3, \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Τα σημεία ισορροπίας είναι τα

$$\begin{aligned}f_1(x, y) = \mu x - x^3 = 0 &\Rightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad x = \pm\sqrt{\mu} \\ f_2(x, y) = -y = 0 &\Rightarrow y = 0 \quad \text{και} \quad y = 0\end{aligned}$$

άρα, για $\mu < 0$, το παραπάνω σύστημα έχει ένα μόνο σημείο ισορροπίας, το $(x, y) = (0, 0)$, ενώ για $\mu > 0$ υπάρχουν επιπλέον άλλα δύο σημεία, τα $(x, y) = (\sqrt{\mu}, 0)$ και $(x, y) = (-\sqrt{\mu}, 0)$.

Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας βρίσκεται από τον πίνακα του γραμμικοποιημένου συστήματος, ο οποίος είναι

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

όπου αντικαθιστούμε το x με την αντίστοιχη τιμή του σημείου ισορροπίας. Έτσι, ο πίνακας αυτός στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$ είναι

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

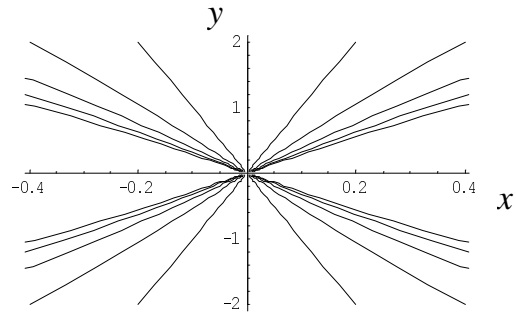
δηλαδή το σημείο αυτό για $\mu < 0$ είναι ευσταθής κόμβος ενώ για $\mu > 0$ είναι σάγμα. Ιδιαίτερα για $\mu = 0$ ο πίνακας γίνεται

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

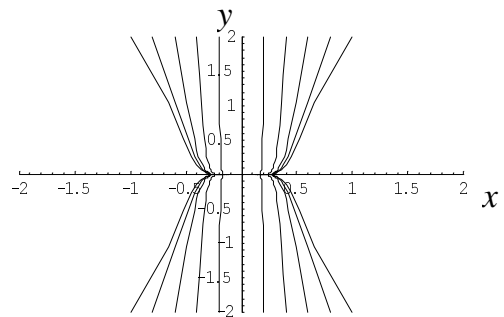
και το σημείο ισορροπίας είναι μη υπερβολικό. Ο πίνακας και στα δύο σημεία $(x, y) = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$ είναι

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} -2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

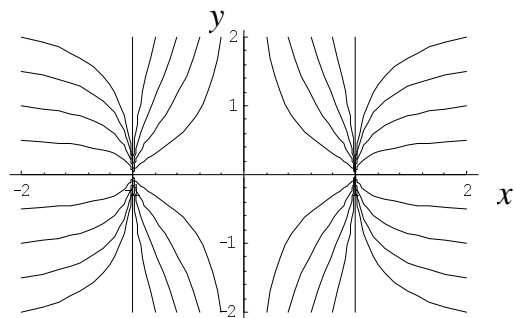
συνεπώς τα σημεία αυτά είναι ευσταθείς κόμβοι. Στο Σχήμα 5 φαίνονται οι τροχιές στο χώρο καταστάσεων. Για $\mu < 0$ το μοναδικό σημείο $(0, 0)$ είναι ευσταθής κόμβος, ενώ για $\mu = 0$ είναι μη υπερβολικό σημείο. Για τη θετική τιμή $\mu = 1$ το σημείο αυτό έγινε σάγμα, ενώ τα σημεία $(\pm 1, 0)$ είναι ευσταθείς κόμβοι. Το διάγραμμα διακλάδωσης δίνεται στο Σχήμα 6.



$$\mu < 0$$

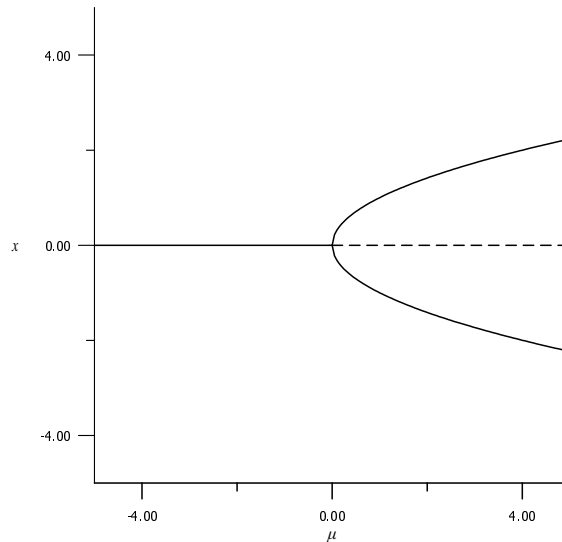


$$\mu = 0$$



$$\mu > 0$$

Σχήμα 5: Η διακλάδωση διχάλας



Σχήμα 6: Το διάγραμμα της διακλάδωσης διχάλας

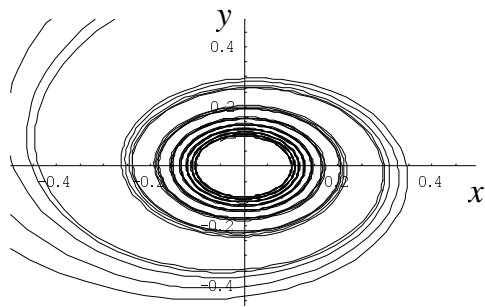
- Διακλάδωση Hopf

Ο τελευταίος τύπος διακλάδωσης που θα μελετήσουμε είναι η διακλάδωση Hopf. Αυτή η διακλάδωση εμφανίζεται όταν για $\mu = 0$ το γραμμικοποιημένο σύστημα του σημείου ισορροπίας αντιστοιχεί σε κέντρο. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, ένα τέτοιο σημείο ισορροπίας συνεχίζεται και για $\mu \neq 0$ με μοναδικό τρόπο, όμως αλλάζει το είδος της ευστάθειάς του καθώς περνάμε από την τιμή $\mu = 0$ και εμφανίζεται ένας οριακός κύκλος. Οριακό κύκλο ονομάζουμε μία περιοδική τροχιά, δηλαδή μια κλειστή καμπύλη στο χώρο καταστάσεων, στην οποία τείνουν όλες οι γειτονικές τροχιές του συστήματος. Αν αυτό συμβαίνει καθώς $t \rightarrow \infty$, ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής, ενώ αν συμβαίνει για $t \rightarrow -\infty$, τότε είναι ασταθής.

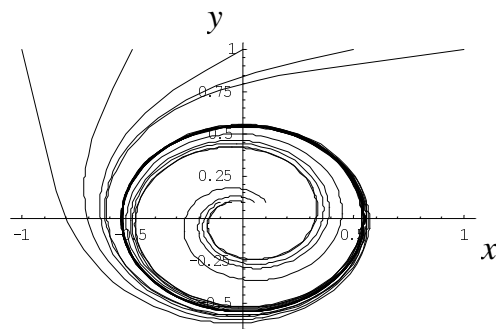
Η οικογένεια συστημάτων που είναι εκπρόσωπος της διακλάδωσης Hopf είναι η

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(0, 0)$. Πραγματικά, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί $-y$, τη δεύτερη επί x και προσθέτοντας



$$\mu \leq 0$$



$$\mu > 0$$

Σχήμα 7: Η διακλάδωση Hopf

κατά μέλη, παίρνουμε για τη θέση ισορροπίας

$$x^2 + y^2 = 0,$$

με μοναδική λύση το σημείο $(0, 0)$. Ο πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος του σημείου αυτού είναι

$$\mathbf{Df} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού, όπως γνωρίζουμε από τη γραμμική θεωρία, είναι $\mu \pm i$ και το σημείο ισορροπίας για $\mu < 0$ είναι ευσταθής εστία, για

$\mu = 0$ είναι κέντρο, ενώ για $\mu > 0$ είναι ασταθής εστία. Για $\mu \neq 0$ το σημείο ισορροπίας κάθε μέλους της οικογένειας είναι υπερβολικό και η γραμμική ευστάθεια διατηρείται και στο μη γραμμικό σύστημα, σύμφωνα με το θεώρημα Hartman – Grobman. Αντίθετα, για $\mu = 0$ το σημείο είναι μη υπερβολικό και το θεώρημα αυτό δεν ισχύει. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος για $\mu = 0$ είναι ευσταθής εστία. Όμως, καθώς περνάμε από το $\mu = 0$ που είναι το σημείο διακλάδωσης, δημιουργείται ένας οριακός κύκλος που υπάρχει για όλα τα μέλη της οικογένειας για $\mu = 0$. Αυτό μπορεί κανείς να το δει εύκολα, αν μεταβεί σε πολικές συντεταγμένες. Πραγματικά, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί x , τη δεύτερη επί y και προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)(\mu - x^2 - y^2),$$

ή

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

όπου $r^2 = x^2 + y^2$. Συνεπώς για τον κύκλο $r^2 = \mu$ ισχύει $\dot{r} = 0$ και αυτός αποτελεί αναλλοίωτο σύνολο του συστήματος.

Στο Σχήμα 7 φαίνονται οι τροχιές στο χώρο καταστάσεων. Για $\mu \leq 0$ το σημείο $(0, 0)$ είναι ευσταθής εστία, ενώ για $\mu > 0$ το σημείο έγινε ασταθής εστία και εμφανίστηκε ο ευσταθής οριακός κύκλος.

4 Απεικονίσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μονοδιάστατες και διδιάστατες απεικονίσεις της μορφής

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

οι οποίες ορίζονται μέσω μιας συνάρτησης

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

και επίσης της μορφής

$$x_{n+1} = f_1(x_n), \quad y_{n+1} = f_2(y_n)$$

που ορίζονται μέσω μιας συνάρτησης

$$f = (f_1, f_2), \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Παρακάτω θα συμβολίζουμε το διάνυσμα (x_n, y_n) ως \bar{x}_n . Επίσης θα απαιτήσουμε η συνάρτηση f να είναι τουλάχιστο συνεχής.

Ως μοντέλο μονοδιάστατης απεικόνισης θα αναλύσουμε τη συμπεριφορά της λογιστικής απεικόνισης και ως μοντέλο διδιάστατης απεικόνισης θα μελετήσουμε την απεικόνιση Poincaré συστήματος δύο πρώτης τάξεως διαφορικών εξισώσεων που εξαρτώνται περιοδικά από το χρόνο.

Θεωρώντας ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$ ή $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, ορίζουμε ως προς τα εμπρός τροχιά του σημείου αυτού κάτω από την απεικόνιση τα σημεία που αποτελούν το παρακάτω σύνολο

$$O^+ = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

και αντίστοιχα για το \bar{x} . Το σύμβολο $f^n(x)$ σημαίνει n φορές εφαρμογή της συνάρτησης f , δηλαδή

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n\text{-φορές}} = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{n\text{-φορές}}(x)$$

Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, (δηλαδή αν είναι αμφιμονότιμη και επί) τότε $\forall x \in \mathbb{R}$ (ή $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$) υπάρχει μοναδική προεικόνα της f , $f^{-1}(x) \in \mathbb{R}$ (αντίστοιχα, $f^{-1}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^2$). Τότε ορίζουμε και την προς τα πίσω τροχιά της f ως

$$O^- = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x), \dots\}$$

και αντίστοιχα για το \bar{x} . Το σύμβολο $f^{-n}(x)$ δηλώνει την n -φορές εφαρμογή της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

Σταθερό σημείο της απεικόνισης ονομάζεται ένα σημείο x_0 για το οποίο ισχύει

$$f(x_0) = x_0,$$

δηλαδή η εικόνα του κάτω από την απεικόνιση είναι ο ίδιος ο εαυτός του (αντίστοιχα, $f(\bar{x}_0) = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$).

Περιοδικό σημείο της απεικόνισης ονομάζεται ένα σημείο x_0 για το οποίο ισχύει

$$f^n(x_0) = x_0 \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}$$

Ο ελάχιστος φυσικός n για τον οποίο ισχύει αυτό ονομάζεται περίοδος του περιοδικού σημείου.

Ένα σταθερό σημείο μίας απεικόνισης ονομάζεται ευσταθές όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, όταν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f^n(x) - x_0| < \varepsilon$ για κάθε φυσικό n . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει δ γειτονιά του σταθερού σημείου που κάθε τροχιά της παραμένει όσο κοντά θέλουμε στο σταθερό σημείο για άπειρο χρόνο. (Το σύμβολο $||$ σημαίνει απόλυτη τιμή για $x \in \mathbb{R}$, ενώ σημαίνει την Ευκλείδεια μετρική για $x \in \mathbb{R}^2$.) Σε ένα ευσταθές σταθερό σημείο οι τροχιές είτε πλησιάζουν ασυμπτωτικά σε αυτό οπότε λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές, είτε παραμένουν γύρω από αυτό για άπειρες εφαρμογές της συνάρτησης. Ένα σταθερό σημείο που δεν είναι ευσταθές ονομάζεται ασταθές.

Η ευστάθεια ενός σταθερού σημείου μπορεί να μελετηθεί και με τη γραμμική θεωρία. Προκύπτει ότι αν $|f'(x_0)| < 1$ όπου $f'(x_0)$ συμβολίζει την παράγωγο της f στο σημείο x_0 τότε το σταθερό σημείο είναι ευσταθές. Αν $|f'(x_0)| > 1$ τότε αυτό είναι ασταθές (Η γραμμική θεωρία δεν μπορεί να αποφανθεί για την ευστάθεια ή την αστάθεια του σταθερού σημείου αν $|f'(x)| = 1$). Αντίστοιχα για το $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ η ευστάθεια του σταθερού σημείου μπορεί να καθορισθεί από τη γραμμική θεωρία και συγκεκριμένα από τον Ιακωβιανό πίνακα

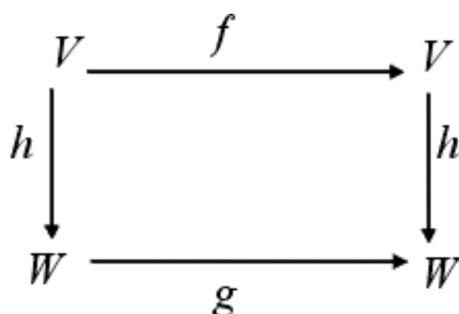
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Αν οι ιδιοτιμές του J έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας, τότε το σταθερό σημείο είναι ευσταθές. Αν έστω και μία ιδιοτιμή έχει μέτρο μεγαλύτερο της μονάδας τότε το σταθερό σημείο είναι ασταθές. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για περιοδικά σημεία περιόδου n , μόνο που σε αυτή την περίπτωση δε μελετάμε τη συνάρτηση $f(x_0)$ αλλά την $f^n(x_0)$.

Επιπλέον υπάρχει ένα πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο για να μελετηθούν κάποιες απεικονίσεις με τη βοήθεια άλλων απεικονίσεων που έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Παίρνουμε δύο απεικονίσεις $f : V \rightarrow V$ και $g : W \rightarrow W$. Έστω ότι υπάρχει μία συνάρτηση $h : V \rightarrow W$ η οποία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- είναι 1 – 1 (αμφιμονότιμη και επί) άρα αντιστρέψιμη
- είναι συνεχής και η αντίστροφη της h^{-1} είναι συνεχής
- $h \circ f = g \circ h$

ή με άλλο τρόπο γραφικά μπορούμε να πούμε ότι το διάγραμμα του σχήματος 4 αντιμετατίθεται



Σχήμα 8: Οι απεικονίσεις f και g είναι τοπολογικά συζυγείς

Αν υπάρχει η h με τις παραπάνω ιδιότητες τότε λέμε ότι οι δύο συναρτήσεις f και g είναι τοπολογικά συζυγείς. Λόγω της τρίτης ιδιότητας η h απεικονίζει τροχιές της f σε τροχιές της g . Επιπλέον ότι ιδιότητες έχουν οι τροχιές της f που σχετίζονται με την απόσταση, τις ίδιες ιδιότητες έχουν και οι τροχιές της g , επειδή η h είναι συνεχής συνάρτηση. Ιδιότητες που ορίζονται με τη βοήθεια της απόστασης και των ανοιχτών και κλειστών συνόλων ονομάζονται τοπολογικές και διατηρούνται κάτω από τη συνέχεια. **Οι ιδιότητες του χάους που θα ορίσουμε παρακάτω είναι τοπολογικές ιδιότητες.**

5 Μετρική τοπολογία

Μπορούμε σε ένα σύνολο να ορίσουμε την έννοια της μετρικής, δηλαδή την έννοια της απόστασης. Αυτή είναι μία απεικόνιση από ένα ζευγάρι σημείων του συνόλου στον \mathbb{R}^+ , $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ με τις εξής ιδιότητες:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

- $d(x, y) = d(y, x)$ (συμμετρική ιδιότητα)
- $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$ (τριγωνική ανισότητα)

Με βάση τις τρεις παραπάνω ιδιότητες αποδεικνύεται ότι $d(x, y) \geq 0$, δηλαδή ότι η εικόνα του d ανήκει στον \mathbb{R}^+ .

Η πρώτη μετρική που έχει βρεθεί είναι η Ευκλείδεια μετρική στον \mathbb{R}^n , $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

όπου $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Η παραπάνω συνάρτηση έχει τις ιδιότητες της μετρικής.

Με τη βοήθεια της μετρικής μπορούμε να ορίσουμε σφαιρικές περιοχές ενός σημείου $x \in V$. Σφαιρική περιοχή του x με ακτίνα $\varepsilon > 0$ ονομάζεται το σύνολο $B(x, \varepsilon) = \{y \in V : d(x, y) < \varepsilon\}$. Ένα σημείο x ενός συνόλου $A \subset V$ λέγεται εσωτερικό αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subset A$. Ένα σύνολο $A \subset V$ λέγεται ανοικτό αν κάθε σημείο του $x \in A$ είναι εσωτερικό του σημείου. Το συμπλήρωμα K ενός ανοικτού συνόλου A ως προς το σύνολο V ($K = CA = V \setminus A$) είναι κλειστό σύνολο.

Ένα σημείο x ενός συνόλου A λέγεται μεμονωμένο σημείο του A αν υπάρχει ε τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}$. Ένα ανοικτό σύνολο δεν έχει μεμονωμένα σημεία, ενώ ένα κλειστό σύνολο μπορεί να έχει. Ένα σημείο $x \in V$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν $\forall \varepsilon > 0 \exists B(x, \varepsilon) : B(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε περιοχή ενός σημείου συσσώρευσης του συνόλου A , όσο μικρή και αν είναι, μπορούμε να βρούμε ένα άλλο στοιχείο που να ανήκει στο A . Ισοδύναμα αν βρούμε μία ακολουθία, διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του A , η οποία να συγκλίνει σε ένα σημείο x , τότε αυτό είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A . Το ίδιο το σημείο συσσώρευσης μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης χαρακτηρίζεται με A' . Κλειστότητα ενός συνόλου ονομάζεται το σύνολο $Cl(A) = A \cup A'$. Η κλειστότητα ενός συνόλου είναι κλειστό σύνολο. Ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσης του. Αυτός είναι ένας εναλλακτικός τρόπος για να βλέπουμε ένα κλειστό σύνολο.

Ένα σημείο x του συνόλου V ονομάζεται συνοριακό σημείο ενός συνόλου A αν $\forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x, \varepsilon) \cap CA \neq \emptyset$. Ένα συνοριακό σημείο είναι είτε σημείο συσσώρευσης του A , είτε σημείο συσσώρευσης του συμπληρώματος του A , είτε και των δύο.

Η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο και η άπειρη ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Από την άλλη πλευρά, η

πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο και η άπειρη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Μια βασική ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι η λογιστική απεικόνιση έχει χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο είναι το θεώρημα του κιβωτισμού. Έστω ότι έχουμε μια ακολουθία $I_n = [a_n, b_n]$ κλειστών διαστημάτων του \mathbb{R} με τις παρακάτω ιδιότητες

- $I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$

Τότε $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, δηλαδή η άπειρη τομή τους είναι μη κενή και μάλιστα είναι ένα και μοναδικό στοιχείο του \mathbb{R} .

Τέλος αν έχουμε ένα υποσύνολο A του V τότε, λόγω της μετρικής στο V , έχουμε μετρική και στο A , η οποία λέμε ότι επάγεται από το V . Η απόσταση σημείων του A είναι ίδια με την απόσταση τους στο V και τα ανοικτά σύνολα στο A ορίζονται ως: $A \cap B$, όπου B ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο του V .

Ένα σύνολο A λέγεται φραγμένο όταν η απόσταση δύο οποιονδήποτε σημείων του είναι πάντα μικρότερη από ένα σταθερό αριθμό, δηλαδή $d(x, y) < M \quad \forall x, y \in A$. Ένα σύνολο που είναι κλειστό και φραγμένο στον \mathbb{R}^n είναι συμπαγές και αντιστρόφως.

Ένα σύνολο $A \subset V$ λέγεται πυκνό στο V όταν $Cl(A) = V$, δηλαδή όλα τα σημεία του V που δεν ανήκουν στο A είναι σημεία συσσώρευσης του A . Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα πυκνού συνόλου στο \mathbb{R} είναι το σύνολο των ρητών αριθμών \mathbb{Q} . Κάθε πραγματικός αριθμός, είτε είναι ρητός, είτε είναι άρρητος είναι σημείο συσσώρευσης των ρητών, δηλαδή σε κάθε γειτονιά ενός αριθμού μπορούμε πάντα να βρούμε ένα ρητό.

Ιδιότητες τομών, ενώσεων και συναρτήσεων που θα χρειαστούν παρακάτω

- $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$
- $A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- $D \subset E \Rightarrow f^{-1}(D) \subset f^{-1}(E)$
- $A \subset f^{-1}(f(A))$
- $f(f^{-1}(D)) \subset D$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f^{-1}(D \cap E) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(E)$
- $f^{-1}(D \cup E) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(E)$

Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη τότε οι ιδιότητες (5-7) μετατρέπονται σε ισότητες. Εν γένει, είτε η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι αντιστρέψιμη, είτε όχι, ορίζουμε ως αντίστροφη εικόνα ενός συνόλου $A \subset Y$ το σύνολο $f^{-1}(A) = \{x : x \in X, f(x) \in A\}$

Ασκήσεις

- Να αποδειχθούν οι ιδιότητες (3-8) μιας συνάρτησης
- Να αποδειχθεί από τις τρεις ιδιότητες ορισμού μιας μετρικής ότι $d(x, y) \geq 0$.
- Να αποδειχθεί ότι η ευκλείδια μετρική έχει τις τρεις ιδιότητες της μετρικής.
- Να αποδειχθεί ότι η κλειστότητα ενός συνόλου είναι κλειστό σύνολο.
- Να αποδειχθεί ότι $x \in A' \Leftrightarrow \exists$ ακολουθία $x_n \in A$ η οποία να τείνει στο x .
- Να αποδειχθεί με τη βοήθεια της ακολουθίας ανοικτών συνόλων $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ του \mathbb{R} ότι η άπειρη τομή ανοικτών συνόλων δεν είναι πάντα ανοικτό σύνολο.
- Να αποδειχθεί με τη βοήθεια της ακολουθίας κλειστών συνόλων $[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ ότι η άπειρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι πάντα κλειστό σύνολο.
- Να αποδειχθεί ότι οι ρητοί είναι πυκνοί στο \mathbb{R} .

6 Χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο, χαοτικός ελκυστής και σύνολα Cantor

Όταν έχουμε μία απεικόνιση στο \mathbb{R}^n (η σε ένα σύνολο V εφοδιασμένο με μετρική) τότε αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι τροχιές κάθε σημείου του και κυρίως η ασυμπτωτική του συμπεριφορά, δηλαδή που πάει το σημείο ύστερα από άπειρες επαναλήψεις της απεικόνισης. Αν π.χ. έχουμε ένα ασυμπτωτικά ευσταθές

σταθερό ή περιοδικό σημείο, τότε όλα τα σημεία μιας ανοικτής περιχής γύρω του τείνουν στο σταθερό ή περιοδικό σημείο. Εκτός από σταθερά ή περιοδικά σημεία υπάρχουν και άλλα σύνολα πιο περίπλοκα τα οποία έλκουν μια ανοικτή περιοχή γύρω τους. Τέτοια σύνολα είναι τα χαοτικά αναλλοίωτα σύνολα που είναι και ελκτικά, δηλαδή οι **χαοτικοί ελκυστές** (chaotic attractors).

Θα ορίσουμε πρώτα την έννοια του αναλλοίωτου συνόλου. Ένα σύνολο S ονομάζεται αναλλοίωτο σύνολο μιας απεικόνισης f εάν $f(S) = S$. Αν η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη τότε το αναλλοίωτο σύνολο μπορεί να οριστεί ως: $S = \{x : f^n(x) \in S \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}$, δηλαδή οι εικόνες και οι αντίστροφες εικόνες κάθε σημείου του S παραμένουν για πάντα πάνω στο S .

Ένα συμπαγές αναλλοίωτο σύνολο ονομάζεται χαοτικό όταν:

- Η απεικόνιση f έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών πάνω σε αυτό το σύνολο.
- Η απεικόνιση f είναι τοπολογικά μεταβατική πάνω σε αυτό το σύνολο
- Η απεικόνιση f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες πάνω σε αυτό το σύνολο

Σχετικά πρόσφατα έχειδειχθεί ότι η τρίτη ιδιότητα μπορεί ναδειχθεί όταν ισχύουν οι δύο πρώτες.

Μια απεικόνιση λέγεται τοπολογικά μεταβατική σε ένα αναλλοίωτο σύνολο S αν για κάθε δυάδα ανοικτών περιοχών U, V του συνόλου S υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι ανοικτές περιοχές του συνόλου S κάποτε θα τμηθούν κάτω από την απεικόνιση και όλα τα σημεία του χώρου θα έρθουν όσο κοντά θέλουμε. Πολλές φορές αυτό αναφέρεται και ως ιδιότητα mixing, δηλαδή οι ανοικτές περιοχές του συνόλου S αναμειγνύονται.

Μια απεικόνιση f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες πάνω σε ένα αναλλοίωτο σύνολο S αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε σημείο $x \in S$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $y \in S$ για το οποίο ισχύει $d(x, y) < \delta$ και επίσης ισχύει ότι

$$d(f^n(x), f^n(y)) > r$$

για κάποιο n . Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρή περιοχή και να θεωρήσουμε γύρω από ένα τυχαίο σημείο x του συνόλου S πάντα θα βρούμε ένα άλλο σημείο αυτής της περιοχής του οποίου κάποια εικόνα κάτω από την απεικόνιση f θα βρεθεί σε απόσταση μεγαλύτερη από ένα σταθερό αριθμό r από την αντίστοιχη εικόνα του x μετά από πεπερασμένες εφαρμογές της απεικόνισης.

Τέλος θα αναφέρουμε τις ιδιότητες ενός συνόλου Cantor μια και πολλά από τα χαοτικά αναλλοίωτα σύνολα που είναι γνωστά είναι σύνολα Cantor. Ένα σύνολο S , υποσύνολο ενός συνόλου V , είναι σύνολο Cantor στο V αν

- Είναι κλειστό στην τοπολογία του V .
- Είναι πουθενά πυκνό στο V .
- Είναι τέλειο.

Ένα σύνολο S λέγεται πουθενά πυκνό στο V αν για κάθε περιοχή κάθε σημείου $x \in V$ μπορεί να βρεθεί πάντα υποπεριοχή της που να είναι ξένη με το S . Ένα σύνολο S λέγεται τέλειο αν κάθε σημείο του x είναι σημείο συσσώρευσης του S , δηλαδή ένα τέλειο σύνολο δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

7 Η λογιστική απεικόνιση

Η λογιστική απεικόνιση έχει δύο σταθερά σημεία που βρίσκονται από τη σχέση ορισμού των σταθερών σημείων απεικόνισης

$$f(x) = x \Rightarrow Rx(1-x) = x.$$

Λύνοντας την παραπάνω σχέση ως προς x βρίσκουμε τα σημεία $x_0 = 0$ και $x_1 = \frac{R-1}{R}$. Η γραμμική ευστάθεια των σταθερών σημείων δίνεται από την απόλυτη τιμή της παραγώγου της συνάρτησης υπολογισμένης στο αντίστοιχο σταθερό σημείο. Αν $|f'(x)| < 1$ στο x_0 ή στο x_1 τότε το σημείο είναι γραμμικά ευσταθές και ευσταθές για τη μη γραμμική συνάρτηση. Ευκολά υπολογίζεται ότι $|f'(x_0)| < 1$ για $-1 < R < 1$ και $|f'(x_1)| < 1$ για $1 < R < 3$. Επομένως το μηδέν είναι ευσταθές σταθερό σημείο για $-1 < R < 1$ και για $R > 1$ γίνεται ασταθές ενώ το x_1 είναι ευσταθές σταθερό σημείο για $1 < R < 3$ και για $R > 3$ γίνεται ασταθές σταθερό σημείο. Για $R = 3$ εμφανίζεται ένα περιοδικό σημείο περιόδου δύο το οποίο αποτελεί λύση της εξίσωσης ορισμού ενός περιοδικού σημείου με περίοδο δύο, δηλαδή

$$f(f(x)) = x.$$

Αυτό είναι ευσταθές για κάποιο διάστημα τιμών του R , δηλαδή το $(3, R_2)$ και μετά γίνεται ασταθές. Για $R = R_2$ δημιουργείται ένα περιοδικό σημείο περιόδου 2^2 κ.τ.λ. Γενικώς για $R = R_n$ δημιουργείται ένα ευσταθές περιοδικό σημείο περιόδου 2^n το οποίο για $R = R_{n+1}$ γίνεται ασταθές και για το ίδιο R_{n+1} δημιουργείται ένα ευσταθές περιοδικό σημείο περιόδου 2^{n+1} . Αυτό το σενάριο που εμφανίζεται και στις απεικονίσεις και στις διαφορικές εξισώσεις ονομάζεται σενάριο διπλασιασμού της περιόδου και οδηγεί σε χαοτικά φαινόμενα για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου πράγμα που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Για $R = R_\infty = 3.5699456\dots$ έχουν εμφανιστεί όλα τα περιοδικά

σημεία περιόδου $2^n \forall n$ και έχουν γίνει όλα ασταθή. Ένα μέτρο σύγκλισης των τιμών της παραμέτρου R_n στο R_∞ είναι ο αριθμός

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n}$$

τον οποίο ο Feigenbaum βρήκε αριθμητικά ότι είναι $\delta = 4.669202\dots$. Ο αριθμός δ ονομάστηκε και παγκόσμια σταθερά γιατί ισχύει για μια μεγάλη οικογένεια μονοδιάστατων απεικονίσεων που έχουν ένα μέγιστο. Αυτές εμφανίζουν το σενάριο διπλασιασμού περιόδου και έχει βρεθεί και θεωρητικά από τους Feigenbaum, Couillet, Collet, Eckmann κ.α. Παρόλα αυτά ακόμα παραμένουν αναπάντητα ερωτήματα και επίσης έχουν μελετηθεί αριθμητικά διδιάστατες απεικονίσεις που εμφανίζουν το σενάριο διπλασιασμού περιόδου και δεν έχουν τους ίδιους παγκόσμιους αριθμούς.

Για $R_\infty < R < 4$ λίγα πράγματα έχουν αποδειχθεί. Υπάρχει το θεώρημα του Sharkovskii που ισχύει γενικά για μονοδιάστατες απεικονίσεις και κατατάσσει τα περιοδικά σημεία με κάποια διάταξη (διαφορετική αυτή των φυσικών αριθμών). Αποδεικνύει ότι αν μία μονοδιάστατη απεικόνιση $f(x)$ έχει περιοδικά σημεία περιόδου n τότε έχει και περιοδικά σημεία περιόδου k όπου $n \triangleright k$ (όπου το \triangleright χρησιμοποιείται για να δηλώσει το μεγαλύτερο σε αυτή τη διάταξη). Το θεώρημα του Sharkovskii αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος των Lie και Yorke ότι σε μία μονοδιάστατη απεικόνιση αν υπάρχει η περίοδος τρία υπάρχουν όλες οι άλλες περίοδοι μια και στη διάταξη του Sharkovskii $3 \triangleright n \forall n$. Επιπλέον για κάποιες από αυτές τις τιμές $R_\infty < R < 4$ έχει αποδειχθεί ότι τα περισσότερα σημεία x έχουν τροχιές που είναι πυκνές στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα της τοπολογικής μεταβατικότητας που είναι μια από τις απαιτήσεις για να υπάρχει χάος, αλλά δεν είναι ισοδύναμη με χάος παρά μόνο με εργοδικότητα.

Για $R = 4$ έχουμε τη λογιστική απεικόνιση $f(x) = 4x(1-x)$. Αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $x = h(\varphi) = \sin^2 \varphi$ τότε παίρνουμε

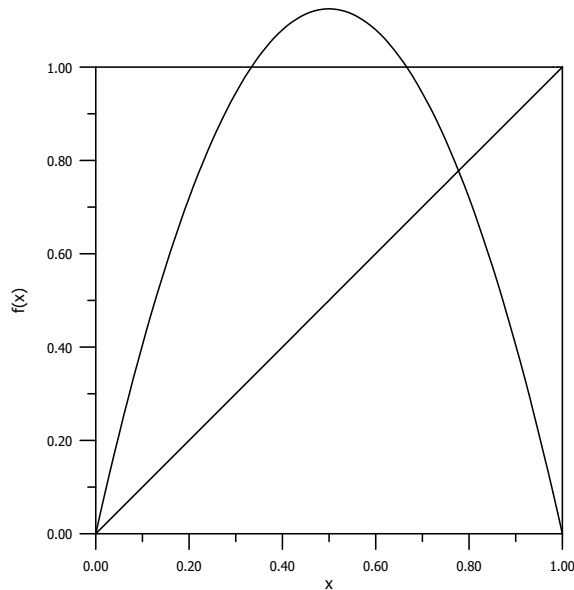
$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) \Rightarrow \sin^2 \varphi_{n+1} = \sin^2 2\varphi_n. \quad (20)$$

Επομένως μια και η h είναι συνεχής συνάρτηση υπάρχει μία ημισυζυγία μεταξύ της απεικόνισης Renyi $\varrho : S^1 \rightarrow S^1$, όπου ϱ είναι η παρακάτω απεικόνιση

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n \text{ mod } 1,$$

και της λογιστικής απεικόνισης για $R = 4$, δηλαδή

$$h \circ \varrho(\varphi) = f \circ h(\varphi)$$



Σχήμα 9: Η λογιστικά απεικόνιση για $R = 4.5$

(σχέση (20)). Επομένως τροχιές της ρ απεικονίζονται σε τροχιές της f και οι τοπολογικές ιδιότητες της ρ μεταφέρονται σε ίδιες τοπολογικές ιδιότητες της f . Αποδεικνύεται με συμβολική δυναμική ότι το S^1 είναι χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης του Renyi, άρα, εξαιτίας της τοπολογικής ημισυζυγίας το $[0, 1]$ είναι χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο της λογιστικής απεικόνισης για $R = 4$.

8 Το χαοτικό αναλλοίωτο Cantor σύνολο της λογιστικής απεικόνισης για $R > 4$

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια εκτενώς τη δυναμική των μελών της οικογένειας της λογιστικής απεικόνισης για $R > 4$. Όταν $R > 4$ τότε η λογιστική απεικόνιση που για κάθε R έχει μέγιστο στο $x = 1/2$ παίρνει την τιμή σε αυτό το x $f(1/2) = R/2(1 - 1/2) = R/4 > 1$ και γίνεται της μορφής που φαίνεται στο σχήμα 2.

Παρατηρούμε ότι για $x \in [0, x_a] \cup [x_b, 1] = S_1$ το $f(x)$ βρίσκεται μέσα στο διάστημα $[0, 1]$, ενώ για $x \in [0, 1] \setminus S_1$ το $f(x)$ γίνεται μεγαλύτερο του 1. Το διάστημα S_1 αποτελείται από την ένωση δύο ξένων μεταξύ τους κλειστών

διαστημάτων των $I_1 = [0, x_a]$ και $I_2 = [x_b, 1]$. Επιπλέον η λογιστική συνάρτηση είναι μονοτόνως αύξουσα στο I_1 και μονοτόνως φθίνουσα στο διάστημα I_2 . Αμέσως φαίνεται ότι το S_1 μπορεί αν οριστεί και ως το σύνολο

$$S_1 = I \cap f^{-1}(I) = I_1 \cup I_2$$

Ορίζουμε ως S_2 το σύνολο $S_2 = I \cap f^{-1}(I) \cap f^{-2}(I) = (I_1 \cup I_2) \cap f^{-1}(S_1)$. Ισχύει ότι

$$I_1 \cap f^{-1}(S_1) = I_1 \cap f^{-1}(I_1 \cup I_2) = (I_1 \cap f^{-1}(I_1)) \cup (I_1 \cap f^{-1}(I_2)) = I_{11} \cup I_{12}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η λογιστική συνάρτηση είναι μονότονη στο I_1 , επομένως ο περιορισμός της σε αυτό το διάστημα είναι 1-1 και η τομή του με τις δύο προεικόνες είναι δύο κλειστά σύνολα ξένα μεταξύ τους που τα ονομάζουμε I_{11} και I_{12} . Βρίσκονται και τα δύο μέσα στο I_1 και έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} f(I_{11}) &= I_1 \quad \text{και} \quad f(I_{12}) = I_2 \\ I_{11} &= \{x | x \in I_1 \quad \text{και} \quad f(x) \in I_1\} \end{aligned}$$

και

$$I_{12} = \{x | x \in I_1 \quad \text{και} \quad f(x) \in I_2\}$$

Ακριβώς αντίστοιχες ιδιότητες ισχύουν για την τομή του I_2 με το σύνολο $f^{-1}(S_1)$ και επομένως παίρνουμε τελικά ότι

$$S_2 = \bigcup_{i_0 i_1} I_{i_0 i_1}$$

όπου $i_0, i_1 \in \{1, 2\}$. Δηλαδή το S_2 αποτελείται από την ένωση 2^2 ξένων μεταξύ τους κλειστών συνόλων με τις εξής ιδιότητες

$$f(I_{i_0 i_1}) = I_{i_1}$$

$$I_{i_0 i_1} = \{x | x \in I_{i_0} \quad \text{και} \quad f(x) \in I_{i_1}\}$$

Επαγωγικά ορίζουμε το σύνολο S_n ως

$$\begin{aligned} S_n &= \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(I) = I \cap f^{-1}(I) \cap_{k=2}^n f^{-k}(I) = (I_1 \cup I_2) \cap_{k=2}^n f^{-(k-1)}(f^{-1}(I)) = \\ &= (I_1 \cup I_2) \cap_{k=1}^{n-1} f^{-k}(I_1 \cup I_2) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k}(I_1 \cup I_2) \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι αυτό αποτελείται από την ένωση 2^n ξένων μεταξύ τους κλειστών συνόλων

$$S_n = \bigcup_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$$

με τις εξής ιδιότητες

$$\begin{aligned} f(I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}) &= I_{i_1 \dots i_{n-1}} \\ I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} &= \{x | f^k(x) \in I_{i_k}\} \\ I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \cap S_n &= I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} 1} \cup I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} 2} \end{aligned}$$

Πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι και το S_{n+1} έχει τις ίδιες ιδιότητες (χρησιμοποιούμε την αποδεικτική διαδικασία της επαγωγής). Είναι φανερό από τον ορισμό των S_n ότι $S_{n+1} \subset S_n$. Επομένως το S_{n+1} προκύπτει από την τομή του με το S_n , δηλαδή από την τομή του με καθένα από τα κλειστά σύνολα $I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$. Άρα

$$I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} \cap S_{n+1} = I_{i_0 i_1 i_{n-1}} \cap (I_1 \cup I_2) \cap f^{-1}(S_n)$$

. Μια και το $I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ έχει την πρώτη ιδιότητα που αναφέραμε παραπάνω και η λογιστική συνάρτηση είναι μονότονη στο I_{i_0} όπου $i_0 \in 1, 2$ ισχύει $I_{i_0} \cap f^{-1}(f(I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}})) = I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} = f^{-1}(I_{i_1 \dots i_{n-1}}) \cap I_{i_0}$. Επομένως

$$\begin{aligned} I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}} \cap S_{n+1} &= (I_1 \cap I_{i_0 i_1 i_{n-1}} \cap f^{-1}(S_n)) \cup (I_2 \cap I_{i_0 i_1 i_{n-1}} \cap f^{-1}(S_n)) = \\ &= f^{-1}(S_n \cap I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}) \cap I_{i_0} = f^{-1}(I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} 1}) \cap f^{-1}(I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} 2}) \cap I_{i_0} \\ &= \cup_{i_n} I_{i_0 i_1 \dots i_n} \end{aligned}$$

Οι παραπάνω πράξεις όχι μόνο αποδεικνύουν ότι το S_{n+1} αποτελείται από 2^{n+1} ξένα μεταξύ τους κλειστά διαστήματα αλλά και την τελευταία από τις τρεις ιδιότητες αυτών των κλειστών συνόλων. Επιπλέον η τελευταία ιδιότητα δείχνει ότι $f(I_{i_0 i_1 \dots i_n}) = I_{i_1 \dots i_n}$. Τέλος μια και όταν $x \in I_{i_0 i_1 \dots i_n}$ ισχύει η τελευταία ιδιότητα και επίσης ισχύει ότι $f(x) \in I_{i_1 \dots i_n}$, το $I_{i_0 i_1 \dots i_n}$ είναι το σύνολο

$$I_{i_0 i_1 \dots i_n} = \{x | x \in I_{i_0}, f(x) \in I_{i_1 \dots i_n}\} = \{x | x \in I_{i_0}, f^k(x) \in I_{i_k}, 1 \leq k \leq n\}$$

από το ότι το $I_{i_0 i_1 \dots i_{n-1}}$ έχει τις ιδιότητες που υποθέσαμε.

Ορίζουμε με τον παραπάνω τρόπο το αναλλοίωτο σύνολο

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Το σύνολο αυτό είναι αναλλοίωτο γιατί $f(S) = f(\bigcap_{k=0}^{\infty} S_k) = f(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(S_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{k-1} = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k = S$.

Αποδεικνύεται επίσης ότι τα διαστήματα $I_{i_0 i_1 \dots i_n}$ έχουν μήκος λ^{-n} όπου $\lambda > 1$.

Πρόταση: Το αναλλοίωτο σύνολο S είναι σύνολο Cantor.

Απόδειξη: Το S είναι κλειστό σύνολο, μια και αποτελείται από την άπειρη τομή άπειρων κλειστών συνόλων. Επιπλέον είναι ολικά μη συνεκτικό. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τυχαία σημεία a, b του συνόλου S . Αυτά θα απέχουν απόσταση l . Για κάθε διάστημα $[a, b]$ μήκους l υπάρχει πάντα ένα διάστημα της μορφής $I_{i_0 i_1 \dots i_n}$, για το οποίο ισχύει $\lambda^{-n} < l$. Επομένως μεταξύ των δύο αυτών σημείων του συνόλου S θα υπάρχει πάντα ένα τουλάχιστον ανοικτό διάστημα που δεν θα ανήκει στο S . Τέλος το σύνολο S είναι τέλειο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα στοιχείο p του S . Αυτό θα ανήκει σε ένα κλειστό διάστημα $I_{i_0 i_1 \dots i_n}$. Στο επόμενο βήμα της λογιστικής απεικόνισης, θα ανήκει σε ένα από τα διαστήματα $I_{i_0 i_1 \dots i_n 1}$ ή $I_{i_0 i_1 \dots i_n 2}$. Διαλέγουμε ένα q_n που συμπίπτει με ένα από τα ακραία σημεία εκείνου από τα παραπάνω δύο διαστήματα στο οποίο δεν ανήκει το p . Ως ακραίο σημείο συνεπώς το q_n ανήκει στο S , και επιπλέον $q_n \neq p$. Επαναλαμβάνοντας αυτή την εκλογή σε κάθε βήμα n της απεικόνισης, σχηματίζουμε μια ακολουθία σημείων $q_n \neq p$ για την οποία ισχύει

$$|q_n - p| \leq \lambda^{-n}.$$

Επομένως έχουμε σχηματίσει μια ακολουθία σημείων διάφορων του p , η οποία συγκλίνει στο τυχόν σημείο $p \in S$. Άρα κάθε σημείο του S είναι οριακό σημείο του συνόλου και συνεπώς το S είναι τέλειο. Συνεπώς το S είναι σύνολο Cantor.

9 Συμβολική δυναμική

Ορίζουμε ως $I_{i_0 i_1 \dots i_n \dots}$ το σύνολο $I_{i_0 i_1 \dots i_n \dots} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{i_0 i_1 \dots i_n}$ που είναι η άπειρη τομή των κλειστών διαστημάτων $I_{i_0 i_1 \dots i_n}$ τα οποία, σύμφωνα με την κατασκευή τους το ένα είναι υποσύνολο του προηγούμενου, δηλαδή $I_{i_0 i_1 \dots i_n i_{n+1}} \subset I_{i_0 i_1 \dots i_n}$. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι το μήκος τους μικραίνει εκθετικά, δηλαδή $L(I_{i_0 i_1 \dots i_n}) = \lambda^n$ όπου $\lambda < 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα του κιβωτισμού, υπάρχει μόνο ένα στοιχείο του διαστήματος $[0, 1]$ το οποίο ανήκει στην άπειρη τομή των $I_{i_0 i_1 \dots i_n}$. Δηλαδή η άπειρη τομή δεν είναι κενή και περιέχει μόνο ένα στοιχείο. Επομένως υπάρχει μία αμφιμονότιμη και επί απεικόνιση h μεταξύ του συνόλου S και των άπειρων ακολουθιών δύο συμβόλων. Χαρακτηρίζουμε το σύνολο των άπειρων ακολουθιών δύο συμβόλων με Σ , δηλαδή $\Sigma = \{i_0 i_1 \dots i_n \dots : i_k \in \{1, 2\}\}$.

Ορίζουμε στο σύνολο Σ τη μετρική

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(s_k, t_k)}{3^k}$$

όπου $s = .s_0s_1\dots s_k\dots$ και $t = t_0t_1\dots t_k\dots$ και $\delta(s_k, t_k) = 0$ όταν $s_k = t_k$ και $\delta(s_k, t_k) = 1$ όταν $s_k \neq t_k$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το $d(s, t)$ είναι μετρική. Επίσης ορίζουμε στο σύνολο Σ μία απεικόνιση, η οποία ονομάζεται Bernoulli shift και ορίζεται ως εξής: $\sigma(.s_0s_1\dots s_k\dots) = .s_1\dots s_k\dots$, η οποία ονομάζεται και μετατόπιση της υποδιαστολής. Αποδεικνύεται ότι η λογιστική απεικόνιση στο S όπου θεωρούμε τη συνήθη Ευκλείδεια μετρική είναι τοπολογικά συζυγής με το Bernoulli shift στο σύνολο Σ εφοδιασμένο με την παραπάνω μετρική. Ήδη δείξαμε ότι η h είναι 1-1. Θα δείξουμε επίσης ότι είναι και συνεχής επομένως είναι ένας ομοιομορφισμός από το σύνολο S στο σύνολο Σ .

Απόδειξη: Για κάποιο τυχαίο $\varepsilon > 0$ υπάρχει πάντα ένα $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Παίρνουμε δύο στοιχεία $x, y \in S$ για τα οποία ισχύει $x, y \in I_{i_0i_1\dots i_n}$. Τότε $|x - y| < \lambda^n$. Επιπλέον ισχύει ότι $h(x) = .i_0i_1\dots i_ni_{n+1}\dots$ και $h(y) = .i_0i_1\dots i_ni'_{n+1}\dots$. Άρα

$$d(h(x), h(y)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\delta(i_k, i'_k)}{3^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Άρα η h είναι συνεχής. Επιπλέον απεικονίζει ένα κλειστό και φραγμένο (συμπαγές) σύνολο (υποσύνολο του $[0, 1]$) σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο, μια και

$$d(s, s') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta(s_l, s'_l)}{3^l} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3^l} = \frac{1}{2}$$

και συνεπώς και η h^{-1} είναι συνεχής.

Τέλος θα πρέπει να δείξουμε ότι $h \circ f = \sigma \circ h$. Σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα των κλειστών διαστημάτων $I_{i_0i_1\dots i_n}$ η εικόνα του είναι το $I_{i_1i_2\dots i_n}$ και επομένως η εικόνα της άπειρης τομής τους $x = I_{i_0i_1\dots i_n\dots}$ είναι η $I_{i_1\dots i_n\dots}$. Εφαρμόζοντας σε αυτή την h παίρνουμε το στοιχείο του Σ $h(f(x)) = .i_1i_2\dots i_n\dots$. Για το δεύτερο μέρος της ισότητας της τοπολογικής συζυγίας εφαρμόζοντας την h στο x παίρνουμε το στοιχείο του Σ $h(x) = .i_0i_1\dots i_n\dots$ και κάτω από την απεικόνιση σ αυτό γίνεται $\sigma(h(x)) = .i_1\dots i_n\dots$. Επομένως αποδείξαμε και ότι $h(f(x)) = \sigma(h(x))$.

Πρόταση: Το σύνολο Σ είναι ένα χαοτικό αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης σ .

Απόδειξη: Η απεικόνιση σ έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών. Κάθε στοιχείο s του συνόλου που αποτελείται από ένα επαναλαμβανόμενο block n συμβόλων $s = .s_0s_1\dots s_{n-1}s_0s_1\dots s_{n-1}$ είναι μια περιοδική τροχιά περιόδου n . Πράγματι $\sigma^n(s) = .s_0s_1\dots s_{n-1}s_0\dots$. Επιπλέον οσοδήποτε κοντά σε ένα τυχαίο στοιχείο του Σ μπορούμε να βρούμε μια τέτοια περιοδική τροχιά. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τυχαίο στοιχείο του Σ το $t = .t_0t_1\dots t_n\dots$ και ένα τυχαίο ε όσο μικρό θέλουμε. Πάντα υπάρχει ένα k τέτοιο ώστε $1/3^k < \varepsilon$. Διαλέγουμε μία περιοδική τροχιά τέτοια ώστε να συμφωνεί στα πρώτα k ψηφία με το t , δηλαδή να είναι $t' = .t_0t_1\dots t_k t_0t_1\dots t_k\dots$. Αυτή η περιοδική τροχιά βρίσκεται ε κοντά στο t . Αυτό συμβαίνει γιατί

$$d(t, t') = \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{\delta(t_l, t'_l)}{3^l} \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^l} = \frac{1}{2} \frac{1}{3^k} \leq \varepsilon$$

Επίσης η απεικόνιση σ είναι τοπολογικά μεταβατική. Παίρνουμε δύο τυχαίες σφαιρικές περιοχές με κέντρα τα στοιχεία $s = .s_0s_1\dots s_n\dots$ και $s' = .s'_0s'_1\dots s'_n\dots$ και ακτίνες ε και δ αντίστοιχα. Υπάρχουν πάντα δύο φυσικοί n και k τέτοιοι ώστε $1/3^n < \varepsilon$ και $1/3^k < \delta$. Από την ε σφαιρική περιοχή του s διαλέγουμε ένα στοιχείο $s'' = .s_0s_1\dots s_n s'_0s'_1\dots s'_k\dots$. Αυτό βρίσκεται στην ε σφαιρική περιοχή του s $B(s, \varepsilon) = \{s'' \in \Sigma : d(s, s'') < \varepsilon\}$ γιατί

$$d(s, s'') = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\delta(s_l, s''_l)}{3^l} \leq \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^l} = \frac{1}{2} \frac{1}{3^n} \leq \varepsilon.$$

Το $\bar{\sigma}^n(s'') = .s'_0s'_1\dots s'_k\dots$ βρίσκεται στη δ περιοχή του s' , επειδή

$$d(s', \bar{\sigma}^n(s'')) = \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{\delta(s'_l, \bar{\sigma}^n(s'')_l)}{3^l} \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^l} = \frac{1}{2} \frac{1}{3^n} \leq \delta.$$

Επομένως υπάρχει στοιχείο του $B(s, \varepsilon)$ (το s'') του οποίου η $n+1$ εικόνα βρίσκεται μέσα στο $B(s', \delta)$ και η απεικόνιση σ είναι τοπολογικά μεταβατική.

Τέλος η απεικόνιση σ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $s = .s_0s_1s_2\dots s_ns_{n+1}\dots$ και ένα $\varepsilon > 0$ όσο μικρό επιθυμούμε. Υπάρχει πάντα ένα n τέτοιο ώστε $1/3^n < \varepsilon$. Από τη σφαιρική περιοχή $B(s, \varepsilon)$ διαλέγουμε το στοιχείο του Σ , $s' = .s_0s_1s_2\dots s_ns'_{n+1}\dots$ για το οποίο ισχύει $s'_{n+1} \neq s_{n+1}$. Το s' βρίσκεται στη σφαιρική περιοχή του s γιατί

$$d(s, s') = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{\delta(s_l, s'_l)}{3^l} \leq \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^l} = \frac{1}{2} \frac{1}{3^n} \leq \varepsilon.$$

Μετά από $n+1$ εφαρμογές της απεικόνισης, έχουμε ότι $\sigma^{n+1}(s) = \bar{s} = .s_{n+1} \dots$ και $\sigma^{n+1}(s') = \tilde{s}' = .s'_{n+1} \dots$. Άρα ισχύει ότι

$$d(\sigma^{n+1}(s), \sigma^{n+1}(s')) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta(\bar{s}_l, \tilde{s}'_l)}{3^l} \geq 1.$$

Άρα υπάρχει $r = 1$ τέτοιο ώστε, για τυχαίο s υπάρχει περιοχή του, όσο μικρή επιθυμούμε, που περιέχει ένα τουλάχιστο σημείο s' το οποίο μετά από $n+1$ εφαρμογές της απεικόνισης απομακρύνεται σε απόσταση μεγαλύτερη του r .

10 Fractals (Μορφοκλασματικά Σύνολα)

Θα μελετήσουμε αναλυτικές συναρτήσεις στο μιγαδικό επίπεδο \mathbb{C} ως δυναμικά συστήματα της μορφής $z_{n+1} = f(z_n)$. Η τροχιά ενός σημείου ορίζεται όπως και στην πραγματική περίπτωση ως το σύνολο

$$\{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^n(z_0), \dots\}$$

όπου

$$f^n(z_0) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-φορές}}(z_0)$$

Σταθερό σημείο, όπως και στην πραγματική περίπτωση, είναι το σημείο $z = a$ για το οποίο ισχύει

$$f(a) = a.$$

Τα ίδια ισχύουν και για τα περιοδικά σημεία της f . Ένα σημείο z_0 είναι περιοδικό σημείο περιόδου n αν ισχύει ότι

$$f^n(z_0) = z_0$$

και n είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση.

Έστω ένα σταθερό σημείο $a = f(a)$. Αν $|f'(a)| < 1$ τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή ακτίνας r , $|z_0 - a| < r$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = a.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής. Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός β , μικρότερος της μονάδας, τέτοιος ώστε $|f'(a)| < \beta$. Μια και το $f'(a)$ είναι το όριο της συνάρτησης

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

υπάρχει ανοικτή περιοχή του a , $|z_0 - a| < r$ τέτοια ώστε

$$\left| \frac{f(z_0) - f(a)}{z_0 - a} - f'(a) \right| < \beta - |f'(a)|$$

για και ο $\beta - |f'(a)|$ είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του μηδενός.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

έχουμε

$$\left| \left| \frac{f(z_0) - f(a)}{z_0 - a} \right| - |f'(a)| \right| < \beta - |f'(a)|$$

ή

$$\left| \frac{f(z_0) - f(a)}{z_0 - a} \right| < \beta$$

και επομένως

$$|f(z_0) - f(a)| < \beta |z_0 - a|$$

για κάθε z_0 τέτοιο ώστε $|z_0 - a| < r$. Συνεπώς

$$|f(z_0) - a| < \beta r < r,$$

αφού $f(a) = a$. Άρα

$$|f^2(z_0) - a| < \beta |f(z_0) - a| < \beta^2 |z_0 - a|,$$

και επαγωγικά

$$|f^n(z_0) - a| < \beta^n |z_0 - a|.$$

Αφού $\beta < 1$, η ακολουθία στο δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας τείνει στο μηδέν και επομένως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(z_0) - a) = 0$$

ή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = a.$$

Ένα τέτοιο σταθερό σημείο a με $f'(a) < 1$ είναι *ευσταθές* σταθερό σημείο. Το σύνολο

$$B = \left\{ z \mid z \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = a \right\}.$$

ονομάζεται *περιοχή έλξης* του ευσταθούς σταθερού σημείου.

Ένα απλό παράδειγμα περιοχής έλξης δίνεται από την απεικόνιση $f(z) = z^2$. Το $z = 0$ είναι σταθερό σημείο, αφού $z^2 = z$, και μάλιστα ευσταθές, αφού

$$f'(z)|_{z=0} = 2z|_{z=0} = 0 < 1.$$

Για όλα τα σημεία που βρίσκονται μέσα στον ανοικτό δίσκο $|z| < 1$ ισχύει ότι

$$|f^n(z)| = |z|^{2^n},$$

άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0.$$

Όμως για $|z| \geq 1$ ισχύει ότι

$$|f^n(z)| = |z|^{2^n} \geq 1,$$

άρα η περιοχή έλξης είναι ο ανοικτός δίσκος $|z| < 1$. Για $|z| = 1$ έχουμε $|f^n(z)| = 1$ για κάθε n και για $|z| > 1$, $|f^n(z)| = |z|^{2^n} \rightarrow \infty$.

Θα ασχοληθούμε τώρα γενικά με τις απεικονίσεις της μορφής $f(z) = z^2 + c$ όπου c μιγαδικός αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιοχές του μιγαδικού επιπέδου. Η μία είναι το σύνολο των αρχικών συνθηκών των οποίων οι τροχιές παραμένουν πάντα σε μια φραγμένη περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή είναι σημεία των οποίων η τροχιά είναι φραγμένη, ενώ η άλλη είναι το σύνολο των σημείων που η τροχιά τους πηγαίνει στο άπειρο. Το σύνολο των δύο αυτών περιοχών είναι εν γένει ένα fractal.

Θεώρημα: Ορίζουμε

$$r_c = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + |c|} > 1.$$

Τότε για $|z_0| > r_c$ ισχύει ότι $f^n(z_0) \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη: Από την τριγωνική ανισότητα ισχύει ότι

$$|z^2 + c| \geq |z|^2 - |c|.$$

Ο πραγματικός αριθμός r_c είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - |c| = x$, δηλαδή ισχύει ότι $r_c^2 - |c| = r_c$. Έστω ένα σημείο $|z_0| > r_c$. Τότε $|z_0| \geq r_c + \varepsilon$ όπου ε ένας μη μηδενικός θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει ότι

$$|z_0^2| - |c| \geq (1 + \varepsilon)|z_0|.$$

Πραγματικά,

$$\begin{aligned}
 \frac{|z_0|^2 - |c|}{|z_0|} &= |z_0| - \frac{|c|}{|z_0|} \geq (r_c + \varepsilon) - \frac{|c|}{r_c + \varepsilon} = \\
 &= \frac{(r_c + \varepsilon)^2 - |c|}{r_c + \varepsilon} = \frac{r_c^2 + 2r_c\varepsilon + \varepsilon^2 - |c|}{r_c + \varepsilon} = \\
 &= \frac{(r_c^2 - |c|) + 2r_c\varepsilon + \varepsilon^2}{r_c + \varepsilon} = \frac{r_c + r_c\varepsilon + r_c\varepsilon + \varepsilon^2}{r_c + \varepsilon} \geq \\
 &\geq \frac{r_c + r_c\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon^2}{r_c + \varepsilon} = 1 + \varepsilon,
 \end{aligned}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $r_c > 1$. Επομένως

$$|f(z_0)| \geq |z_0^2| - |c| \geq (1 + \varepsilon)|z_0|$$

και επαγωγικά

$$|f^n(z_0)| \geq (1 + \varepsilon)^n |z_0|.$$

Μια και ισχύει ότι $1 + \varepsilon > 1$, η ακολουθία $(1 + \varepsilon)^n$ τείνει στο άπειρο και κατά συνέπεια $|f^n(z_0)| \rightarrow \infty$.

Όπως αναφέραμε, ορίζουμε το σύνολο

$$E_c = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid f^n(z_0) \rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty\},$$

δηλαδή το σύνολο E_c αποτελείται από όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου, των οποίων η τροχιά πηγαίνει στο άπειρο. Σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη, τα σημεία για οποία ισχύει ότι $|z_0| < r_c$ αποτελούν υποσύνολο του E_c . Το συμπλήρωμα του E_c είναι το σύνολο K_c , δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από σημεία των οποίων η τροχιά παραμένει φραγμένη.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια τις παρακάτω ιδιότητες για τα σύνολα E_c και K_c :

- (α) $\{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_0| > r_c\} \subset E_c, K_c \subseteq \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_0| \leq r_c\}$.
- (β) Το E_c είναι ανοικτό και το K_c κλειστό σύνολο.
- (γ) $E_c \neq \mathbb{C}, K_c \neq \emptyset$.
- (δ) Τα σύνολα E_c και K_c είναι αναλλοίωτα κάτω από τη δράση της συνάστησης $f = z^2 + c$.
- (ε) Τα E_c και K_c είναι συμμετρικά κάτω από στροφή γύρω από το 0.

- (ζ) Το E_c είναι συνεκτικό και το K_c είναι απλά συνεκτικό.

Ας ορίσουμε πρώτα τις έννοιες του συνεκτικού και του απλά συνεκτικού συνόλου. Ένα σύνολο λέγεται *συνεκτικό* αν δεν μπορούν να βρεθούν δύο ανοικτές περιοχές του A και B , για τις οποίες να ισχύει

$$A \cup B = X \text{ και } A \cap B = \emptyset.$$

Δηλαδή ένα συνεκτικό σύνολο δεν μπορεί να αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα. Ένα σύνολο X λέγεται *απλά συνεκτικό* αν οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη του συνόλου μπορεί να συρρικνωθεί με συνεχή τρόπο σε σημείο, ανήκοντας πάντα κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης στο σύνολο X . Αν το σύνολο X έχει τρύπες, αυτό δεν είναι δυνατό και το X δεν είναι απλά συνεκτικό. Ένα συνεκτικό σύνολο μπορεί να μην είναι απλά συνεκτικό.