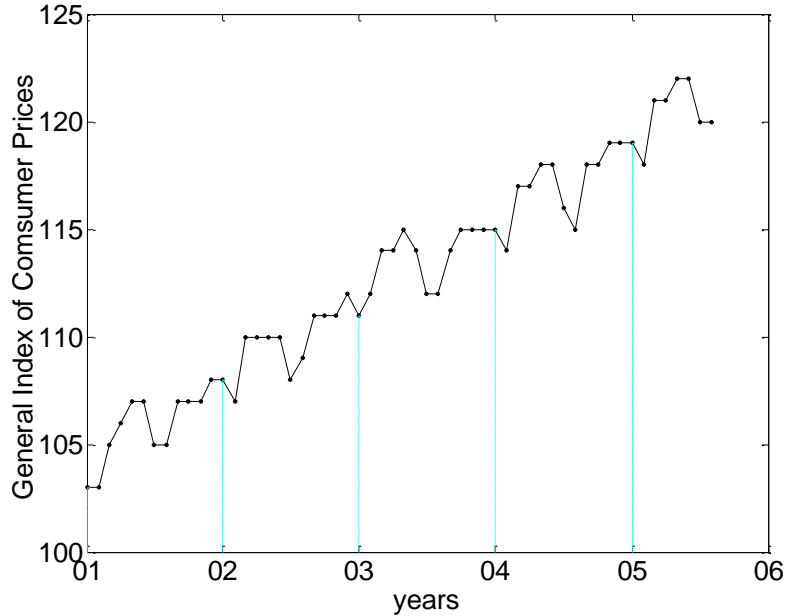


Χρονοσειρές Μάθημα 2

General Index of Consumer Prices, period Jan 2001 - Aug 2005

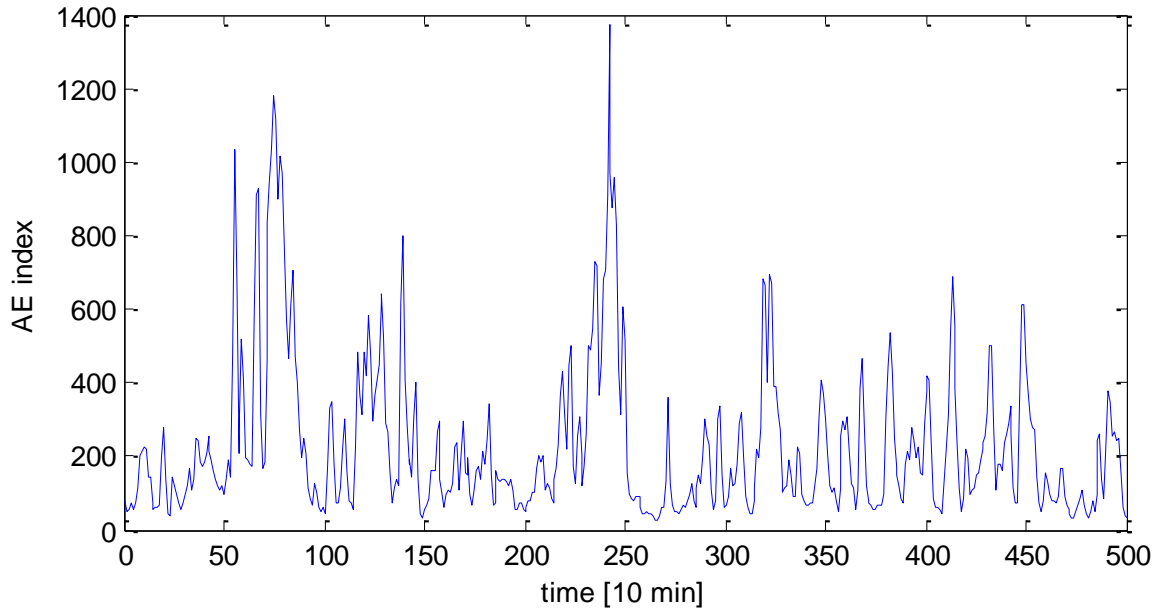


Μη-στασιμότητα

Τάση?

Εποχικότητα / περιοδικότητα?

Auroral Electrojet Index



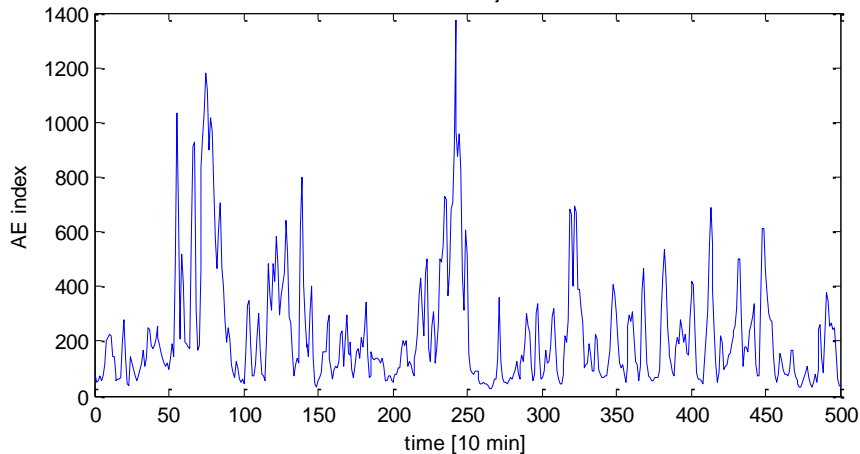
Ασταθή διασπορά?

Αυτοσυσχέτιση?

Σταθεροποίηση διασποράς

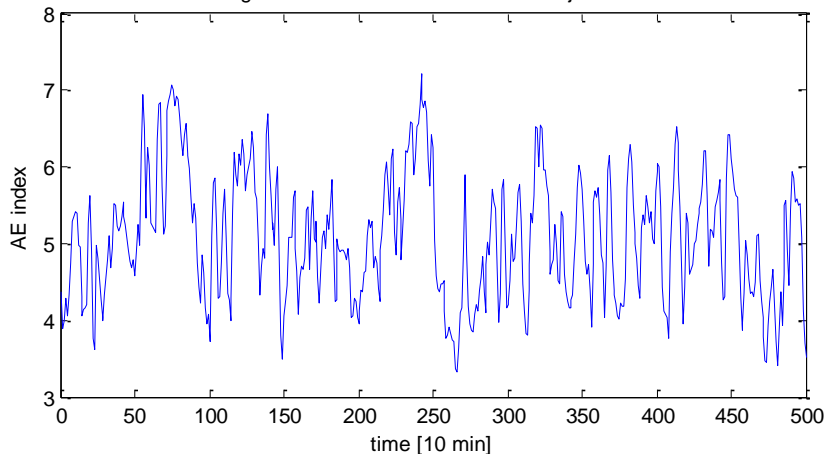
$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

Auroral Electrojet Index



$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Logarithm transform of Auroral Electrojet Index



Μετασχηματισμός $X_t = T(Y_t)$ που σταθεροποιεί τη διασπορά της Y_t ?

$$\text{Var}[X_t] = \text{const}$$

Απλή λύση: $X_t = \log(Y_t)$

?

Μετασχηματισμός δύναμης (Box-Cox):

$$X_t = \frac{Y_t^\lambda - 1}{\lambda}$$

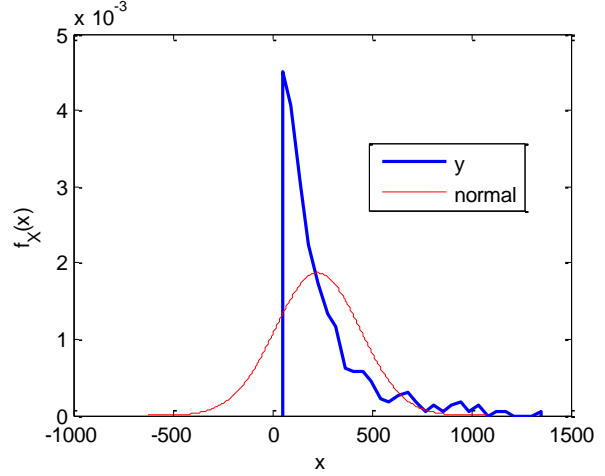
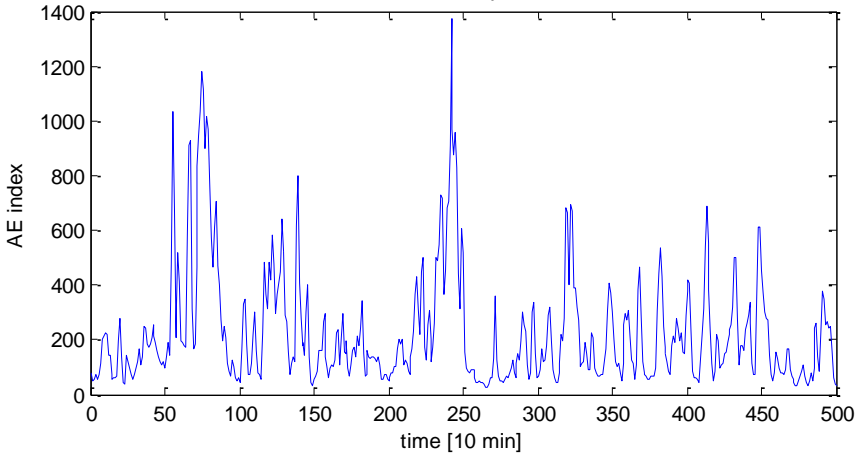
Υπόθεση: $\text{Var}[Y_t]$ αλλάζει ως συνάρτηση της τάσης μ_t

λ	X_t	$\text{Var}[y_t]$
-1	$\frac{1}{Y_t}$	$c \mu_t^4$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{Y_t}}$	$c \mu_t^3$
0	$\log(Y_t)$	$c \mu_t^2$
0.5	$\sqrt{Y_t}$	$c \mu_t$

?

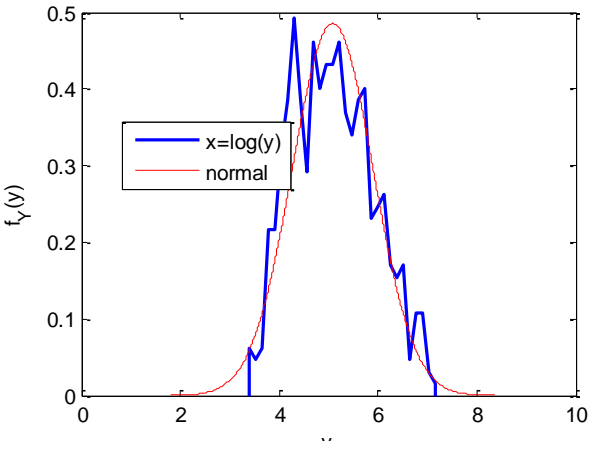
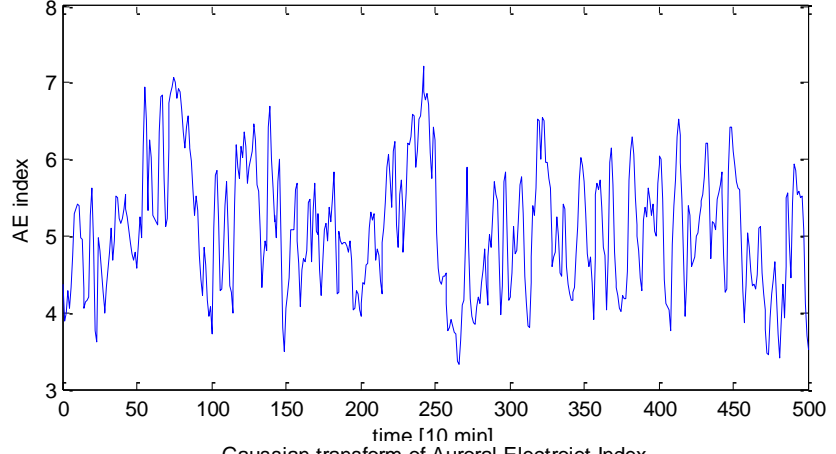
Άλλος μετασχηματισμός ?

Auroral Electrojet Index



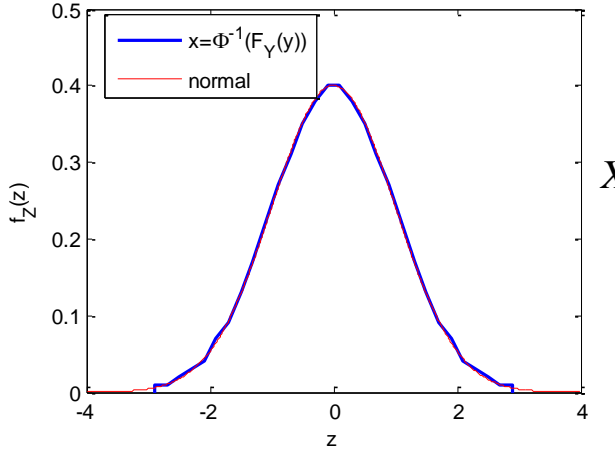
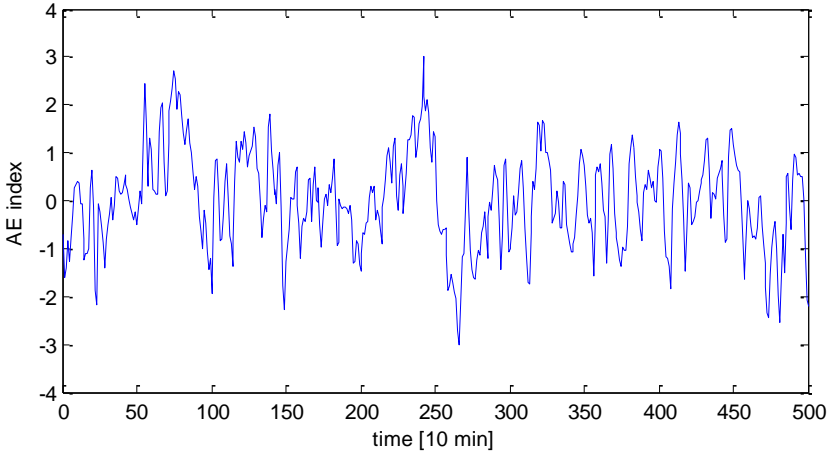
$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

Logarithm transform of Auroral Electrojet Index



$$X_t = \log(Y_t)$$

Gaussian transform of Auroral Electrojet Index



$$X_t = \Phi^{-1}(F_Y(Y_t))$$



Απαλοιφή τάσης

$$Y_t = \mu_t + X_t$$

μ_t : μέση τιμή ως συνάρτηση του t (αργά μεταβαλλόμενο μέσο επίπεδο τιμών)

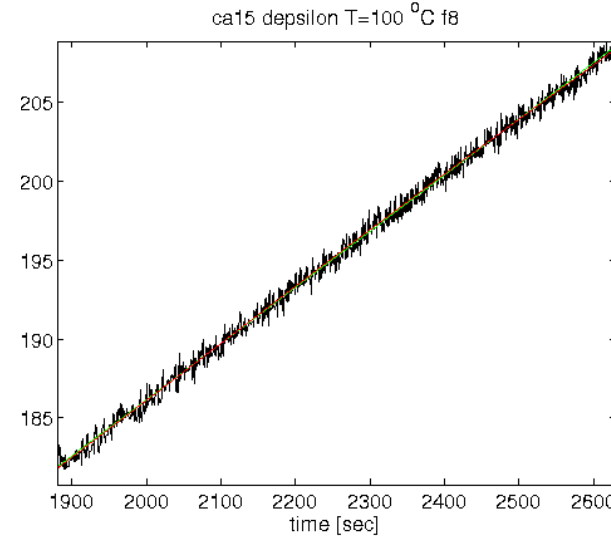
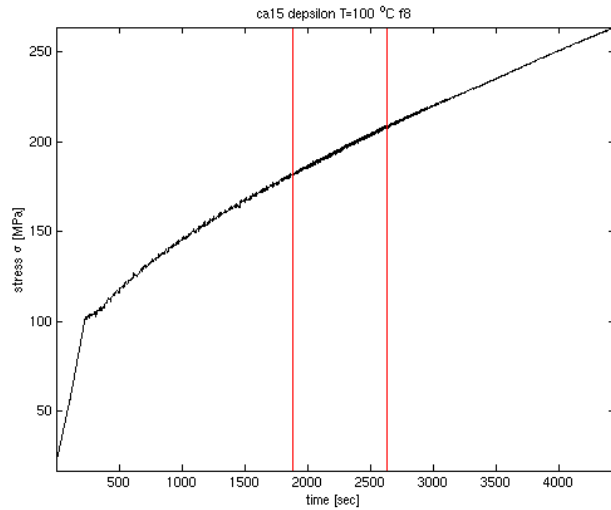
1. Καθοριστική τάση :

γνωστή ή εκτιμώμενη συνάρτηση του χρόνου $\mu_t = f(t)$

Παράδειγμα: πολυώνυμο βαθμού p

$$\mu_t = f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_p t^p$$

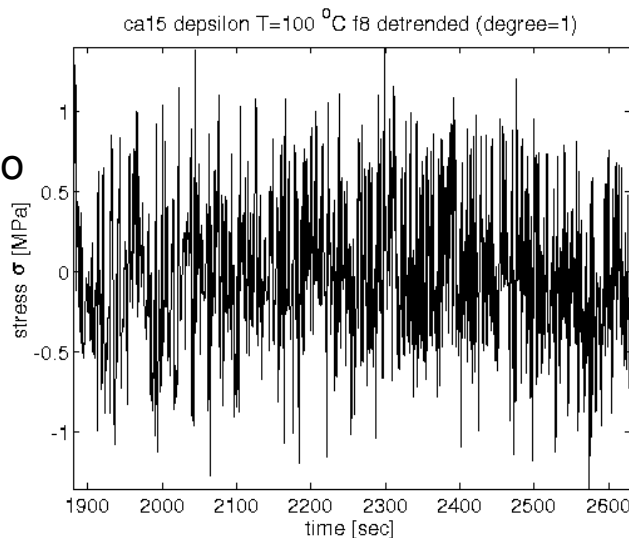
Πλαστική παραμόρφωση



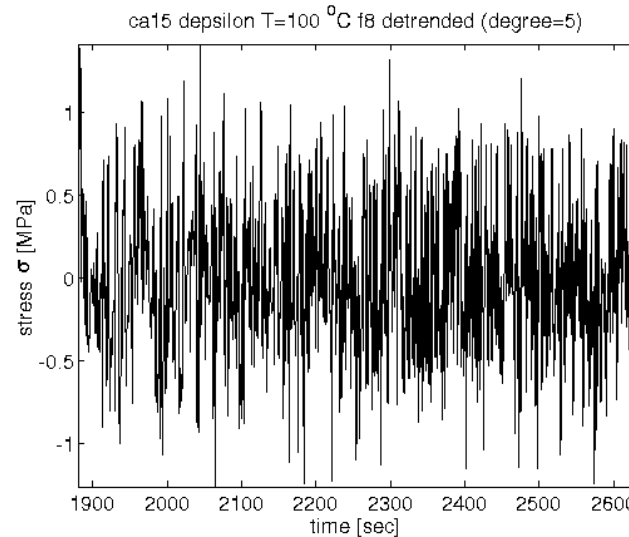
$$X_t = Y_t - \mu_t$$

$\{X_t\}$ στάσιμη

Προσαρμογή με πολυώνυμο βαθμού 1

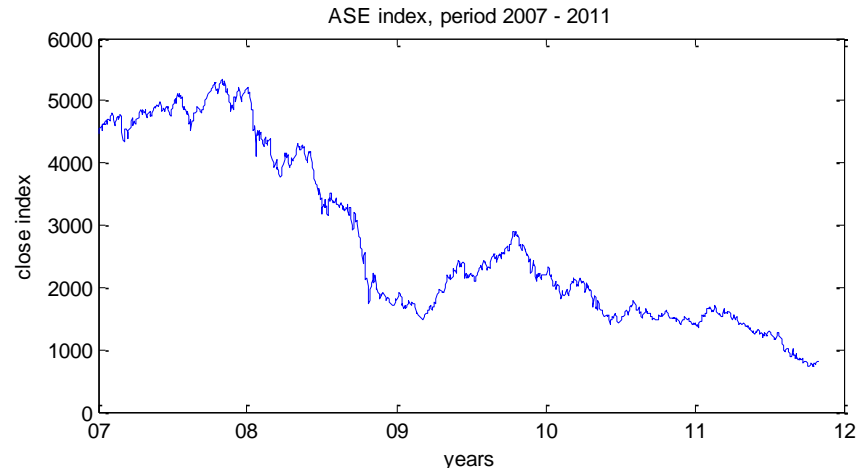
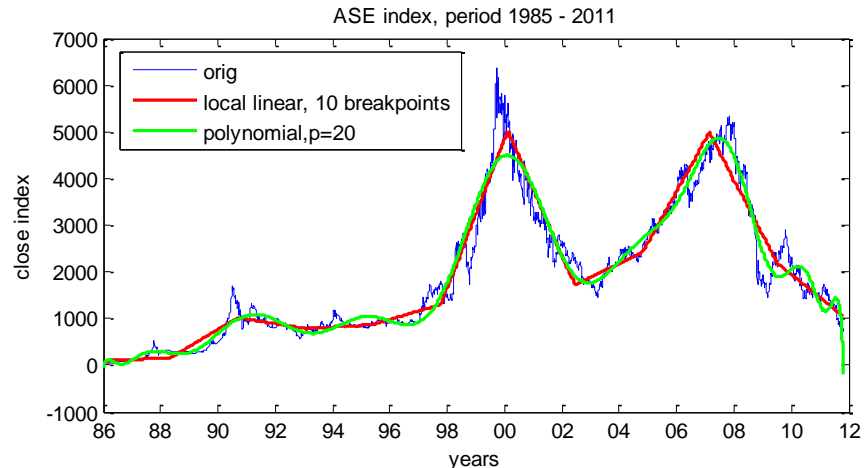


Προσαρμογή με πολυώνυμο βαθμού 5



2. Στοχαστική τάση

Δείκτης συναλλαγών Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ)



2α. Εξομάλυνση με φίλτρο κινούμενου μέσου

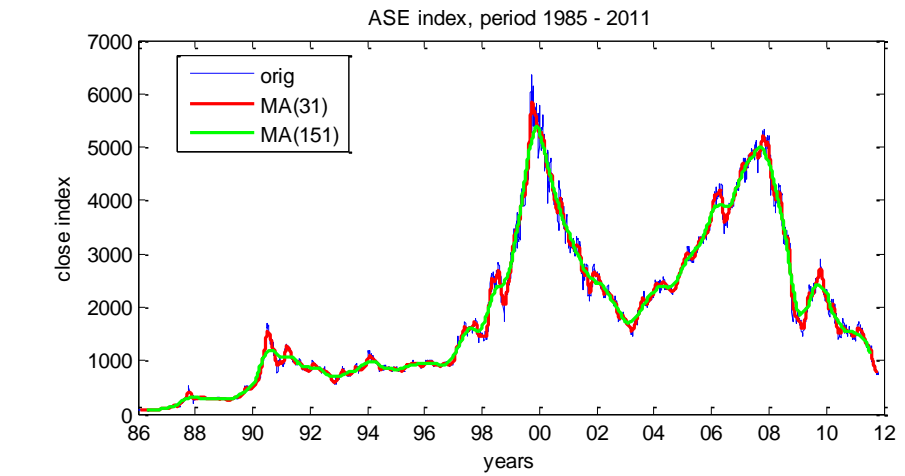
Απλό φίλτρο:

Κινούμενος μέσος όρος

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{2q + 1} \sum_{j=-q}^q y_{t-j}$$

$2q + 1 = 3 \rightarrow \hat{\mu}_t = \frac{1}{3} y_{t-1} + \frac{1}{3} y_t + \frac{1}{3} y_{t+1}$

" $2q + 1$ " = 4 ?



Γενικό φίλτρο:

Σταθμισμένος κινούμενος μέσος όρος

$$\hat{\mu}_t = \sum_{j=-q}^q a_j y_{t-j} \quad \sum_{j=-q}^q a_j = 1$$

Απλός κινούμενος μέσος:

$$a_j = \frac{1}{2q + 1}, \quad j = -q, \dots, q$$

2b. Απαλοιφή τάσης με χρήση διαφορών (differencing)

- Τελεστής διαφοράς πρώτης τάξης (one lag difference or first difference)

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - B)Y_t \quad B: \text{τελεστής υστέρησης (lag operator)} \quad B Y_t = Y_{t-1}$$

- Τελεστής διαφοράς δεύτερης τάξης

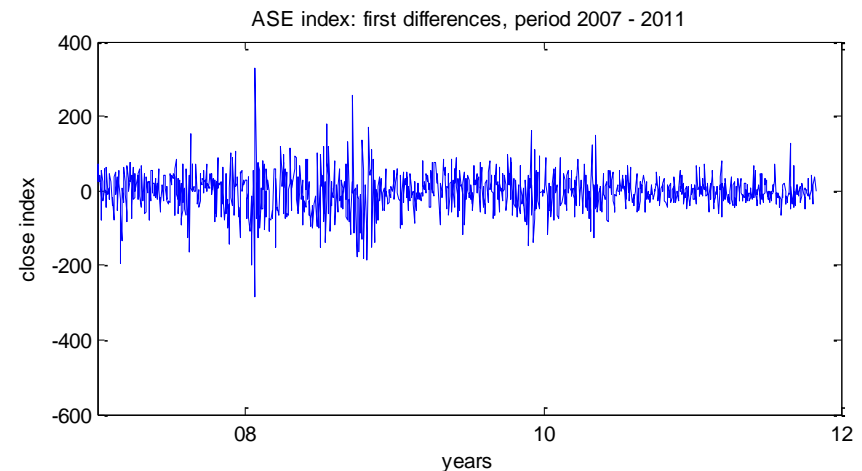
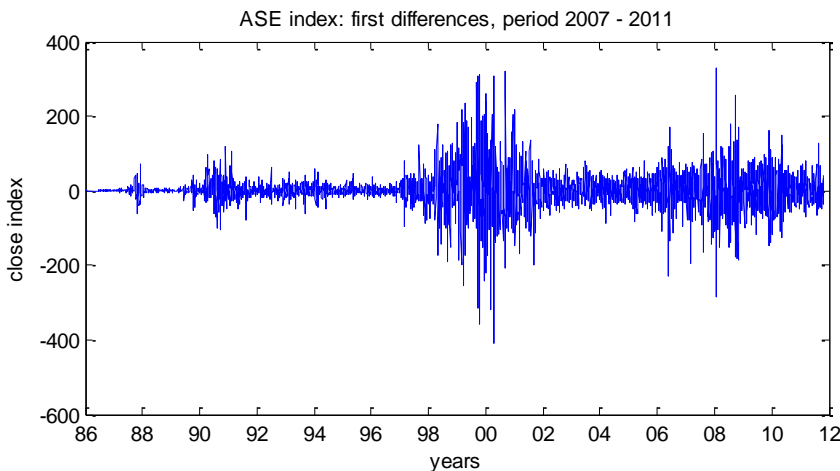
$$\nabla^2 Y_t = \nabla (\nabla Y_t) = (1 - B)(1 - B)Y_t = (1 - 2B + B^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Αν η τάση είναι τοπικά γραμμική, απαλείφεται με τις πρώτες διαφορές:

$$\mu_t = a_0 + a_1 t \quad \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \mu_t - \mu_{t-1} + X_t - X_{t-1}$$

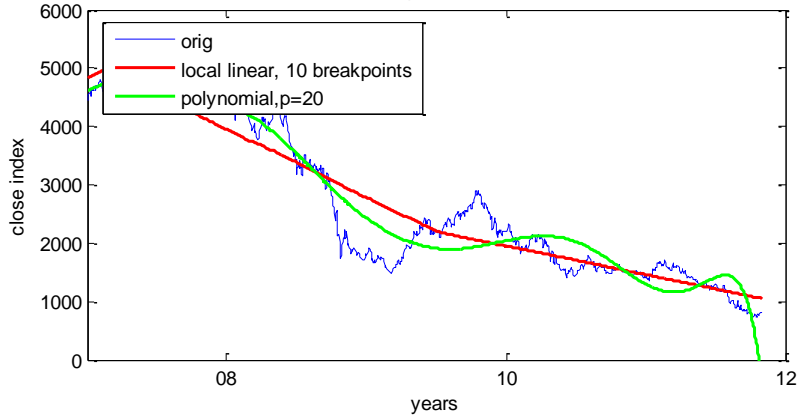
$$\mu_t - \mu_{t-1} = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1 (t - 1) = a_1 \quad \text{«σταθερή τάση»!}$$

Αν η τάση είναι τοπικά πολυώνυμο βαθμού p , απαλείφεται με χρήση του $\nabla^p Y_t$
[δείξτε ότι $\nabla^p Y_t = p!c + X_t$]

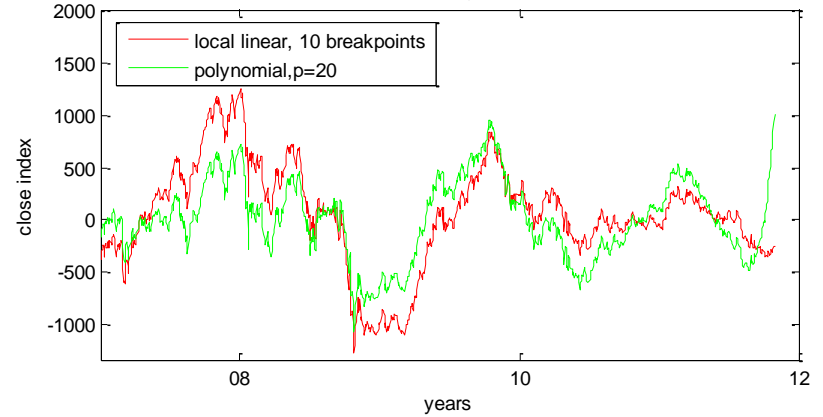


Ποια μέθοδος απαλοιφής τάσης είναι καλύτερη?

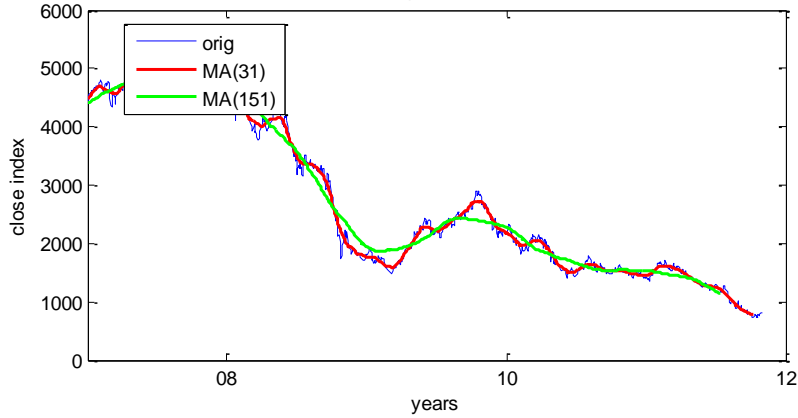
ASE index, period 2007 - 2011



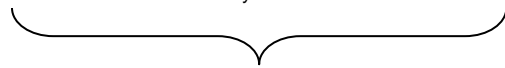
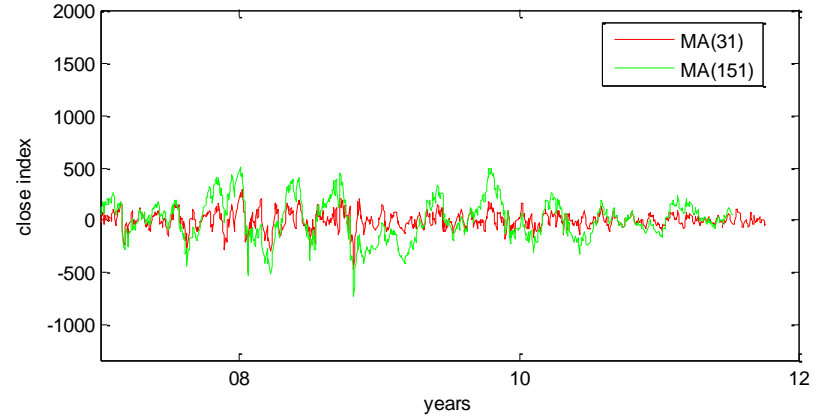
ASE index detrended, period 2007 - 2011



ASE index, period 2007 - 2011



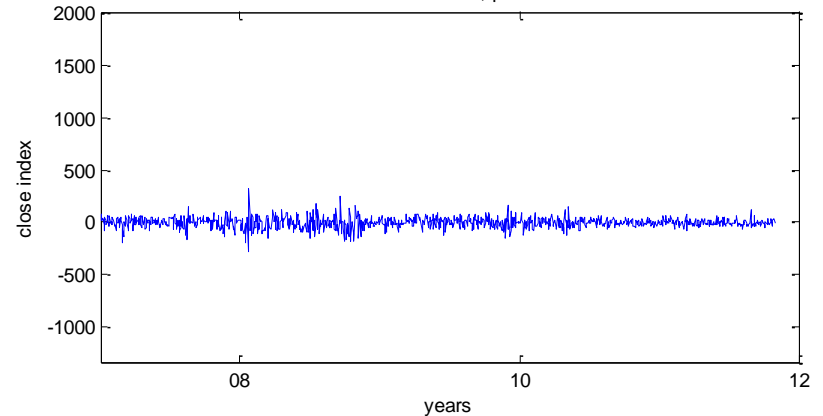
ASE index detrended, period 2007 - 2011



Εκτίμηση της τάσης

5 Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας:
Dickey-Fuller και Phillips-Perron έλεγχοι

ASE index: first differences, period 2007 - 2011

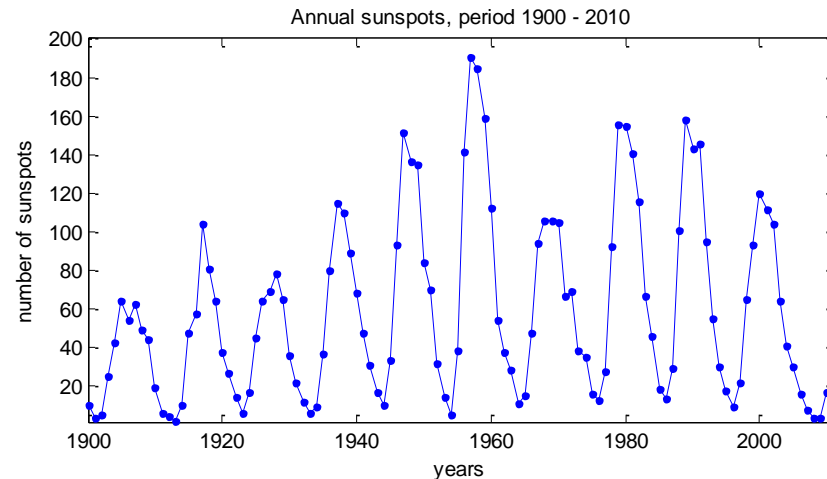
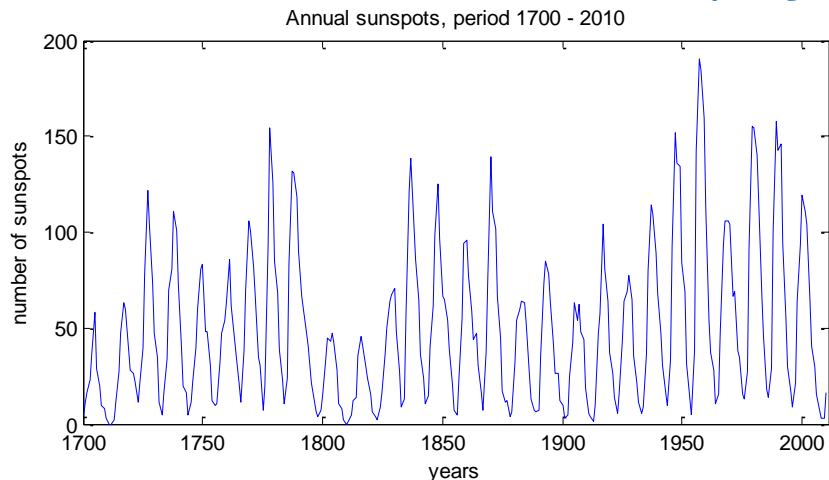


Απαλοιφή περιοδικότητας

$$Y_t = s_t + X_t$$

s_t : περιοδική συνάρτηση του t με περίοδο d (περιλαμβάνει την εποχικότητα)

Ετήσιες ηλιακές κηλίδες



Περίοδος d και κατάλληλη συνάρτηση s_t



$$X_t = Y_t - s_t$$

$\{X_t\}$ στάσιμη

1. γνωστή ή εκτιμώμενη περιοδική συνάρτηση $s_t = f(t)$

2a. Εκτίμηση της s_i $i=1, \dots, d$ από μέσους όρους των στοιχείων της

Περίοδος d γνωστή $k = [n / d]$ $\hat{s}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_{i+jd}$

2b. Απαλοιφή περιοδικότητας με χρήση διαφορών (d -differencing)

$$\nabla_d Y_t = Y_t - Y_{t-d} = (1 - B^d) Y_t$$

Απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας

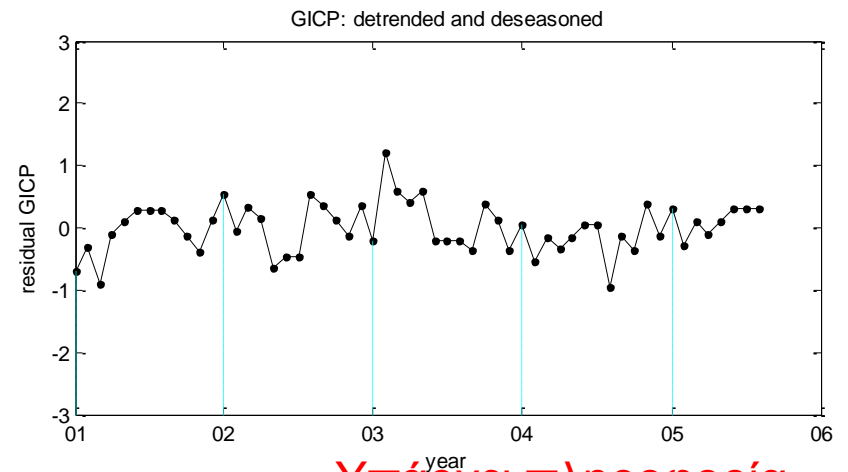
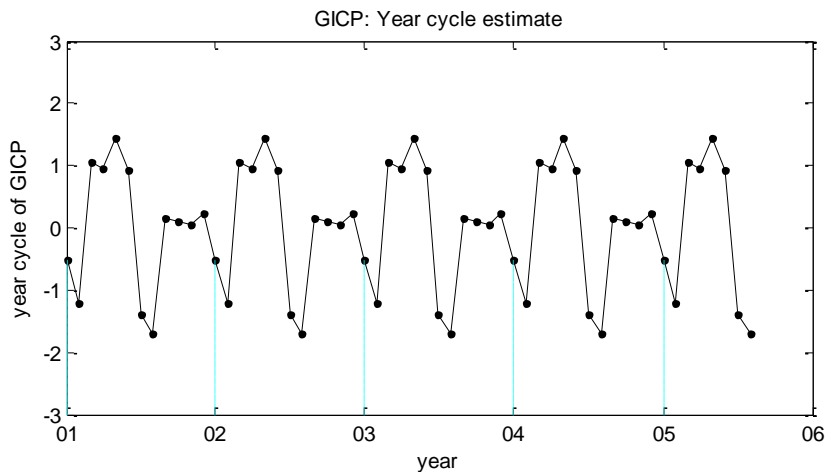
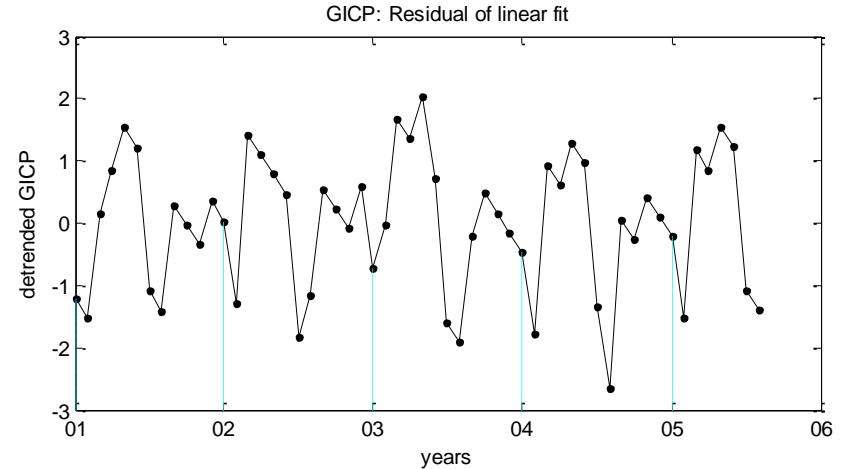
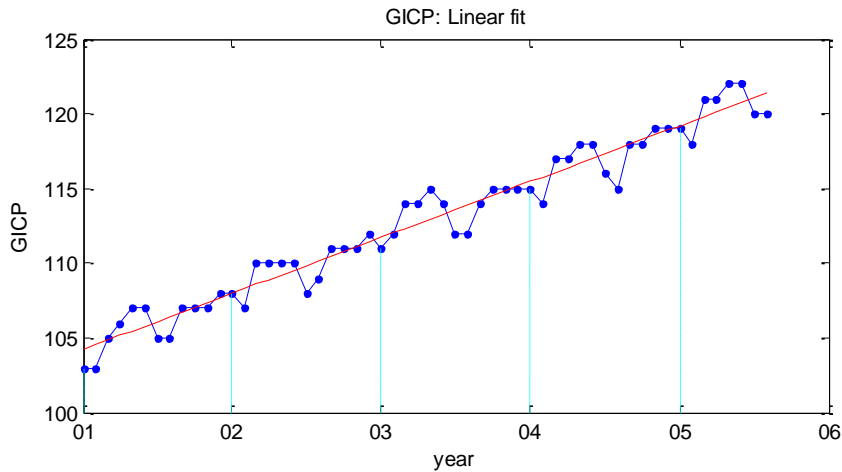
$$Y_t = \mu_t + s_t + X_t$$

Πρώτα απαλοιφή περιοδικότητας
και μετά τάσης?

1. Απαλοιφή τάσης $Y'_t = Y_t - \mu_t = s_t + X_t$

2. Απαλοιφή περιοδικότητας $X_t = Y'_t - s_t = Y_t - \mu_t - s_t$

$\{X_t\}$: χρονοσειρά υπολοίπων (residual)



μη-στάσιμη $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \rightarrow$ στάσιμη $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Υπάρχει πληροφορία
στα υπόλοιπα?

Έλεγχος ανεξαρτησίας

παρατηρούμενη στάσιμη χρονοσειρά
χρονοσειρά υπολοίπων από απαλοιφή
τάσης και/ή περιοδικότητας

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Υποθέσεις

Είναι iid? H_0

Υπάρχουν
συσχετίσεις? H_0

$H_0: \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι iid \Rightarrow $H_0: \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι λευκός θόρυβος

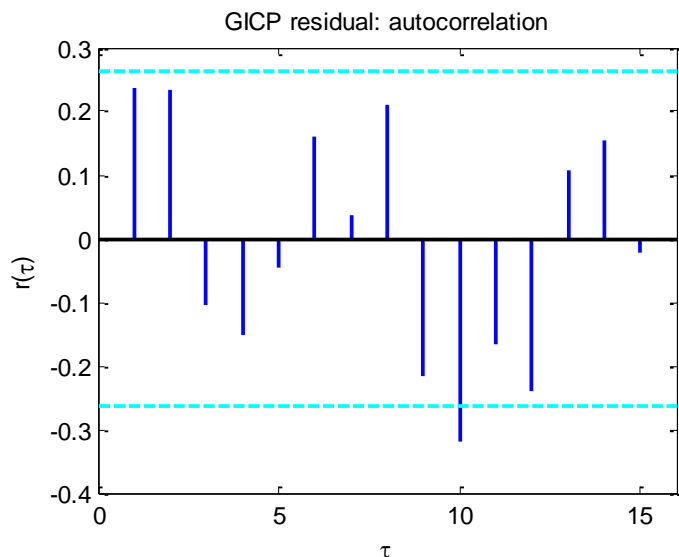
Έλεγχος σημαντικότητας αυτοσυσχέτισης

$$H_0: \rho_\tau = 0 \quad H_1: \rho_\tau \neq 0$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ λευκός θόρυβος $\Rightarrow r_\tau \sim N(0, \frac{1}{n})$

Απορριπτική περιοχή: $R = \left\{ r_\tau \mid \left| \frac{r_\tau}{\sqrt{1/n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$ για στάθμη σημαντικότητας α

Ζώνη μη-σημαντικής αυτοσυσχέτισης: $\pm z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ για $\alpha=0.05 \approx \pm \frac{2}{\sqrt{n}}$



Έλεγχος σημαντικότητας $\rho_\tau = 0$
για κάθε τ χωριστά

Σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0.05$,
απορρίπτεται η H_0 για $\tau=10$

Υπάρχουν συσχετίσεις στη χρονοσειρά GICP?

Έλεγχος ανεξαρτησίας Portmanteau

Ένας έλεγχος για $\rho_\tau = 0, \tau = 1, \dots, k$

$$H_0 : \rho_\tau = 0, \tau = 1, \dots, k$$

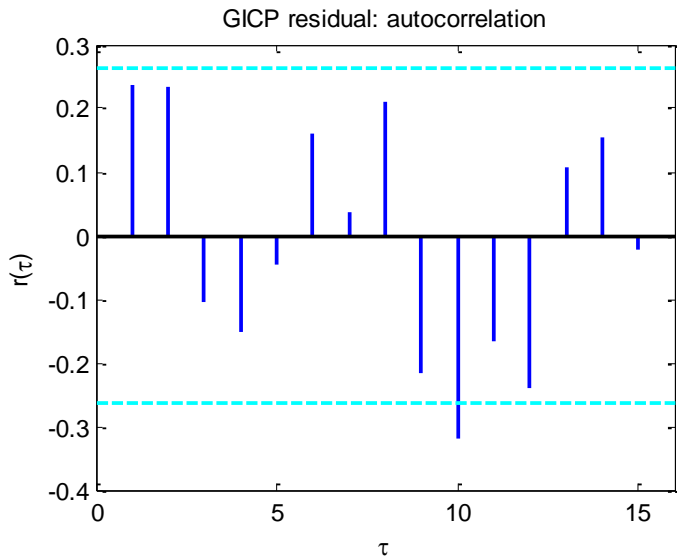
Στατιστικό ελέγχου Q :

$$Q = n \sum_{\tau=1}^k r_\tau^2 \quad \text{Box-Pierce}$$

$$Q = n(n+2) \sum_{\tau=1}^k r_\tau^2 / (n-j) \quad \text{Ljung-Box}$$

$$Q \sim \chi^2_k$$

απορριπτική περιοχή $R = \{ Q > \chi^2_{k;1-\alpha} \}$

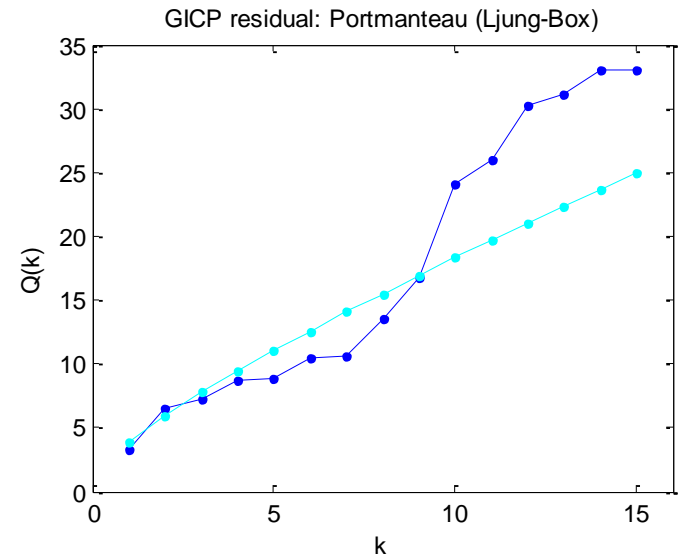


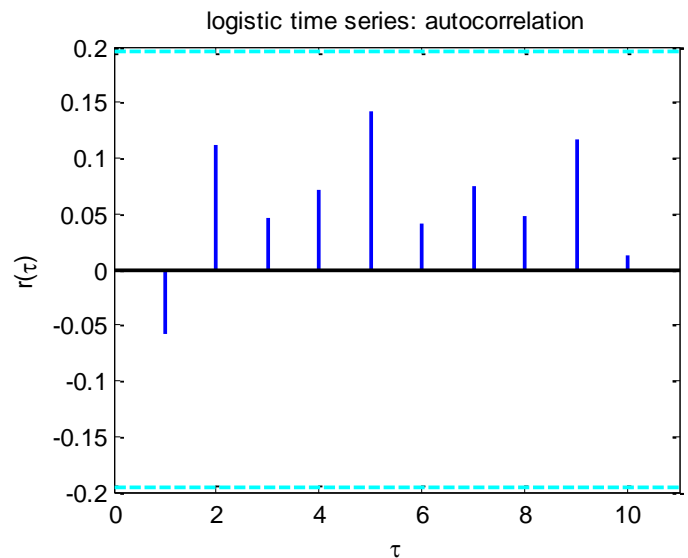
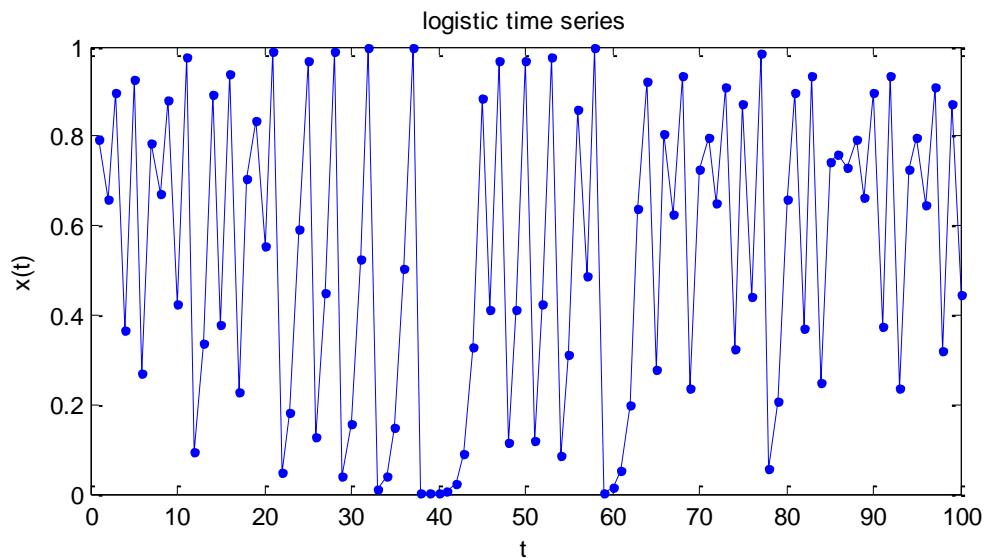
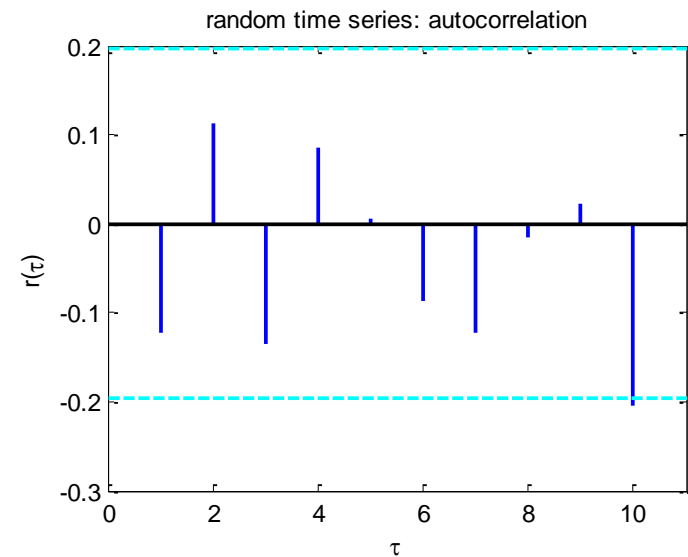
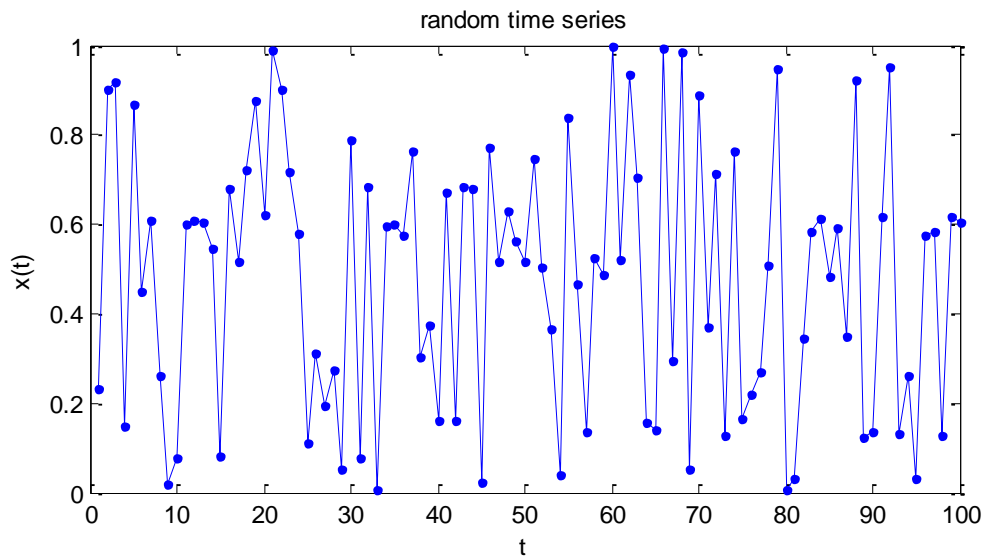
$$k = 10$$

$$Q = 24.06$$

$$\chi^2_{k;1-\alpha} = 18.30$$

H_0 για $\tau=10$
απορρίπτεται





κατάλληλος έλεγχος ανεξαρτησίας ?

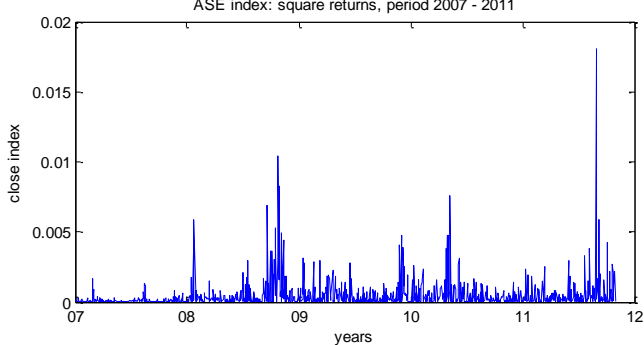
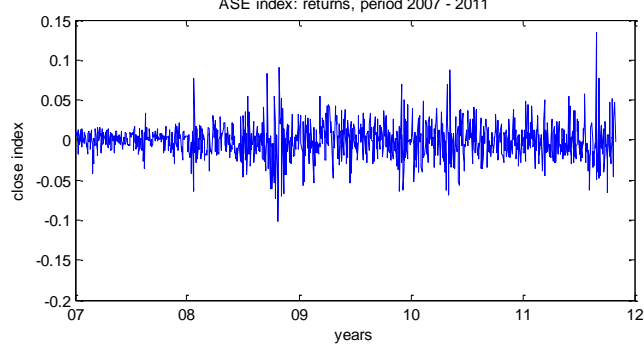
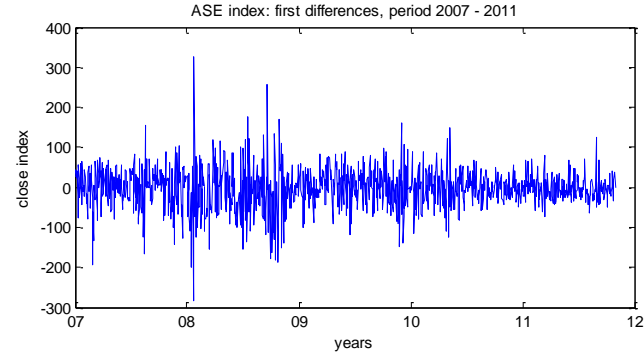
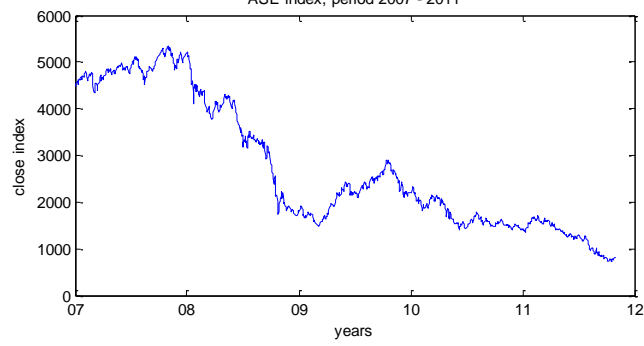
6 Ο έλεγχος ανεξαρτησίας BDS
(Brock, Dechert, Scheinkman)

7 Έλεγχος ανεξαρτησίας και
γεννήτρια τυχαίων αριθμών

Άσκηση: Υπάρχουν συσχετίσεις στις αποδόσεις του δείκτη ΧΑΑ (περίοδος 2007-2011)?

Κατάλληλη στάσιμη χρονοσειρά:
πρώτες διαφορές ή αποδόσεις?

Υπάρχουν συσχετίσεις? ... μη γραμμικές? $E[X_t^2 X_{t-\tau}^2]$



πρώτες διαφορές

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

αποδόσεις

$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

τετράγωνο αποδόσεων

$$x'_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

$$x_t = (x'_t)^2$$

