ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Μάθημα του μεταπτυχιακού προγράμματος ειδίκευσης "Στατιστική και Μοντελοποίηση" του Τμήματος Μαθηματικών ΑΠΘ

Κουγιουμτζής Δημήτρης
Αν. Καθηγητής Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ, Πολυτεχνική Σχολή, ΑΠΘ
e-mail: dkugiu@auth.gr,
http://users.auth.gr/~dkugiu/
ιστοσελίδα μαθήματος:
http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/TimeSeries/index.html

Περιεχόμενα

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ***1***

Μάθημα του μεταπτυχιακού προγράμματος ειδίκευσης "Στατιστική και Μοντελοποίηση" του Τμήματος Μαθηματικών ΑΠΘ ***1***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ***5***

1.1 Παραδείγματα πραγματικών χρονοσειρών 6

1.2 Βασικά προβλήματα στην ανάλυση χρονοσειρών 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑΣ ***12***

2.1 Στασιμότητα, μη-στασιμότητα και σταθεροποίηση διασποράς 12

2.2 Κατανομές και ροπές στοχαστικής διαδικασίας 16

2.3 Στάσιμη στοχαστική διαδικασία και αυτοσυσχέτιση 17

2.4 Κάποιες βασικές στοχαστικές διαδικασίες 19

2.4.1 Ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές 19

2.4.2 Λευκός θόρυβος 19

2.4.3 Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία 19

2.4.4 Τυχαίος περίπατος 20

2.5 Εκτίμηση αυτοσυσχέτισης 20

2.6 Μετασχηματισμός μη-στάσιμης σε στάσιμη χρονοσειρά 22

2.6.1 Απαλοιφή της τάσης 23

2.6.2 Απαλοιφή περιοδικότητας ή εποχικότητας 26

2.6.3 Απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας ή εποχικότητας 26

2.7 Στατιστικός έλεγχος ανεξαρτησίας 28

Ασκήσεις ***31***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ***33***

3.1 Γενικά για γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες 33

3.2 Αυτοπαλινδρομούμενες διαδικασίες 34

3.2.1 Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης ένα 35

3.2.2 Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης δύο 36

3.2.3 Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης p 39

3.3 Μερική αυτοσυσχέτιση 41

3.4 Διαδικασίες κινούμενου μέσου 43

3.4.1 Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης ένα 44

3.4.2 Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης δύο 46

3.4.3 Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q 48

3.5 Δυϊκή σχέση διαδικασιών AR και MA 48

3.6 Μικτή διαδικασία ARMA 49

3.6.1 Μικτή διαδικασία ARMA(1,1) 50

Ασκήσεις ***52***

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ***53***

4.1 Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα 54
4.1.1 Μέθοδος ροπών ή Yule Walker 54
4.1.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων 55
4.1.3 Προσδιορισμός τάξης *p* μοντέλου AR 56
4.1.4 Διάγνωση καταλληλότητας AR μοντέλου 59
4.2 Μοντέλα κινούμενου μέσου 60
4.2.1 Μέθοδος ροπών 60
4.2.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων 61
4.2.3 Προσδιορισμός τάξης του MA μοντέλου 62
4.3 Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα κινούμενου μέσου 63
4.4 Μοντέλο χρονοσειράς με τάση 67
4.5 Μοντέλο χρονοσειράς με εποχικότητα 71
4.5.1 Εποχικότητα χωρίς συσχέτιση μεταξύ εποχικών κύκλων 71
4.5.2 Εποχικότητα με συσχέτιση μόνο μεταξύ εποχικών κύκλων 72
4.5.3 Εποχικότητα με συσχέτιση και τάση μόνο μεταξύ εποχικών κύκλων 73
4.6 Μοντέλο χρονοσειράς με τάση και εποχικότητα 77
Ασκήσεις 83
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ 84
5.1 Απλές τεχνικές πρόβλεψης 86
5.1.1 Αιτιοκρατική τάση (deterministic trend) 86
5.1.2 Εκθετική ομαλοποίηση 87
5.2 Πρόβλεψη στάσιμων χρονικών σειρών με γραμμικά μοντέλα 87
5.2.1 Πρόβλεψη με αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα (AR) 88
5.2.2 Πρόβλεψη με μοντέλα μέσου όρου (MA) 89
5.2.3 Πρόβλεψη με αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα μέσου όρου (ARMA) 90
5.3 Πρόβλεψη μη-στάσιμων χρονικών σειρών με γραμμικά μοντέλα 90
Ασκήσεις 93
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ 96
6.1 Γενικά 96
6.2 Φάσμα Ισχύος στοχαστικής διαδικασίας 98
6.3 Εκτίμηση φάσματος ισχύος 101
6.3.1 Κλασική εκτίμηση φάσματος ισχύος 101
6.4 Παραμετρική εκτίμηση φάσματος ισχύος 106
Ασκήσεις 110
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ 112
7.1 Επεκτάσεις των γραμμικών αυτοπαλινδρομούμενων μοντέλων 113
7.1.1 Τμηματικά Μοντέλα 113
7.1.2 AR μοντέλα με τυχαίους συντελεστές 116

7.1.3 Διγραμμικά μοντέλα 117
7.1.4 AR μοντέλα με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα..... 117
7.1.5 Διαδικασία ανάλυσης με στατιστικά μη-γραμμικά μοντέλα 118
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 120
8.1 Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών και δυναμικά συστήματα 120
8.1.1 Δυναμικά συστήματα και χρονοσειρές 120
8.1.2 Ανακατασκευή χώρου καταστάσεων 123
8.1.3 Εκτίμηση μη-γραμμικών χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος 126
8.1.4 Μη-γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης 133
Ασκήσεις 137

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αρκετές μελέτες διαδικασιών προσπαθούμε να δημιουργήσουμε μοντέλα που εκφράζουν την εξάρτηση του μεγέθους ή των μεγεθών ενδιαφέροντος από άλλα μεγέθη. Τέτοια μοντέλα μπορούν να αναπτυχθούν από τη γνώση μας για το πρόβλημα που μελετάμε, δηλαδή για τις σχέσεις των εμπλεκόμενων μεγεθών, τα λεγόμενα μοντέλα βασικών αρχών [first principles]. Πολλές φορές όμως δε γνωρίζουμε (ή δε θέλουμε να συμπεριλάβουμε στην ανάλυση μας) τέτοιες σχέσεις και η μελέτη γίνεται με βάση την παρατήρηση των σχετικών μεγεθών. Τέτοια μοντέλα λέγονται εμπειρικά ή παραγόμενα από τα δεδομένα [empirical or data driven models]. Η προσέγγιση μας εδώ δε θα προϋποθέτει γνώση του προβλήματος και θα στηρίξουμε την ανάλυση μας αποκλειστικά στα δεδομένα. Θα περιοριστούμε σε δεδομένα που δίνονται με χρονική διάταξη, δηλαδή χρονοσειρές. Το αντικείμενο είναι λοιπόν η **ανάλυση χρονοσειρών**, δηλαδή η χρήση μεθόδων που θα μας επιτρέψουν να διερευνήσουμε το μηχανισμό (στοχαστική διαδικασία ή δυναμικό σύστημα) που παράγει τη χρονοσειρά, να εκτιμήσουμε χαρακτηριστικά του, να αναπτύξουμε μοντέλο για να τον περιγράψουμε και να κάνουμε προβλέψεις της εξέλιξης του, δηλαδή τις επόμενες τιμές στη χρονοσειρά.

Η μελέτη θα περιοριστεί σε **μονομεταβλητές χρονοσειρές** [univariate time series], δηλαδή στην ανάλυση χρονικών διαταγμένων παρατηρήσεων από ένα μόνο μέγεθος. Φυσικά έχει μεγάλο ενδιαφέρον και η ανάλυση **πολυ-μεταβλητών χρονοσειρών** [multivariate time series], αλλά δε θα το πραγματευτούμε εδώ. Προβλήματα ανάλυσης χρονοσειρών συναντούνται πολύ συχνά λόγω και της έξαρσης τις τελευταίες δεκαετίες καταγραφής της εξέλιξης διαφόρων φαινομένων και διαδικασιών. Η ανάλυση χρονοσειρών έχει λοιπόν γνωρίσει μεγάλο ενδιαφέρον σε πολλούς κλάδους όπως για παράδειγμα στη μετεωρολογία και κλιματολογία, στη γεωφυσική, στη μηχανική, στη βιολογία και στην οικονομία. Για παράδειγμα υπάρχουν πολλές μελέτες που προσπαθούν να προβλέψουν τη θερμοκρασία σε μια περιοχή όχι με χρήση κάποιου μετεωρολογικού μοντέλου που κάνει χρήση πολλών διαφορετικών μεγεθών (π.χ. δείκτες θερμοκρασίας και πίεσης από διάφορους σταθμούς) αλλά με βάση τα ιστορικά δεδομένα θερμοκρασίας για αυτήν την περιοχή, δηλαδή τη χρονοσειρά της θερμοκρασίας για αυτήν την περιοχή.

Οι τιμές του *παρατηρούμενου μεγέθους* [observable] αλλάζουν με κάποια μικρή ή μεγάλη τυχαιότητα ή όπως ονομάζουμε στη στατιστική ανάλυση **στοχαστικότητα** [stochasticity] και για αυτό θεωρούμε το παρατηρούμενο μέγεθος ως **τυχαία μεταβλητή** [random variable] X. Η στοχαστικότητα δε μπορεί να αγνοηθεί όταν έχουμε πραγματικές μετρήσεις και μελετάμε πραγματικές διαδικασίες γιατί πάντα θα υπάρχει τυχαιότητα και στην εξέλιξη της διαδικασίας που παρατηρούμε (δυναμικός θόρυβος [dynamical or system noise]), καθώς και στη μέτρηση του μεγέθους ενδιαφέροντος (θόρυβος παρατήρησης [observational noise]). Είναι φυσικό λοιπόν για να μελετήσουμε παρατηρούμενα μεγέθη μιας πραγματικής διαδικασίας να καταφύγουμε σε προσεγγίσεις που βασίζονται στη θεωρία των **στοχαστικών διαδικασιών** [stochastic processes]. Αυτή θα είναι η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε στο πρώτο μέρος. Στο δεύτερο μέρος θα θεωρήσουμε ότι παρά την

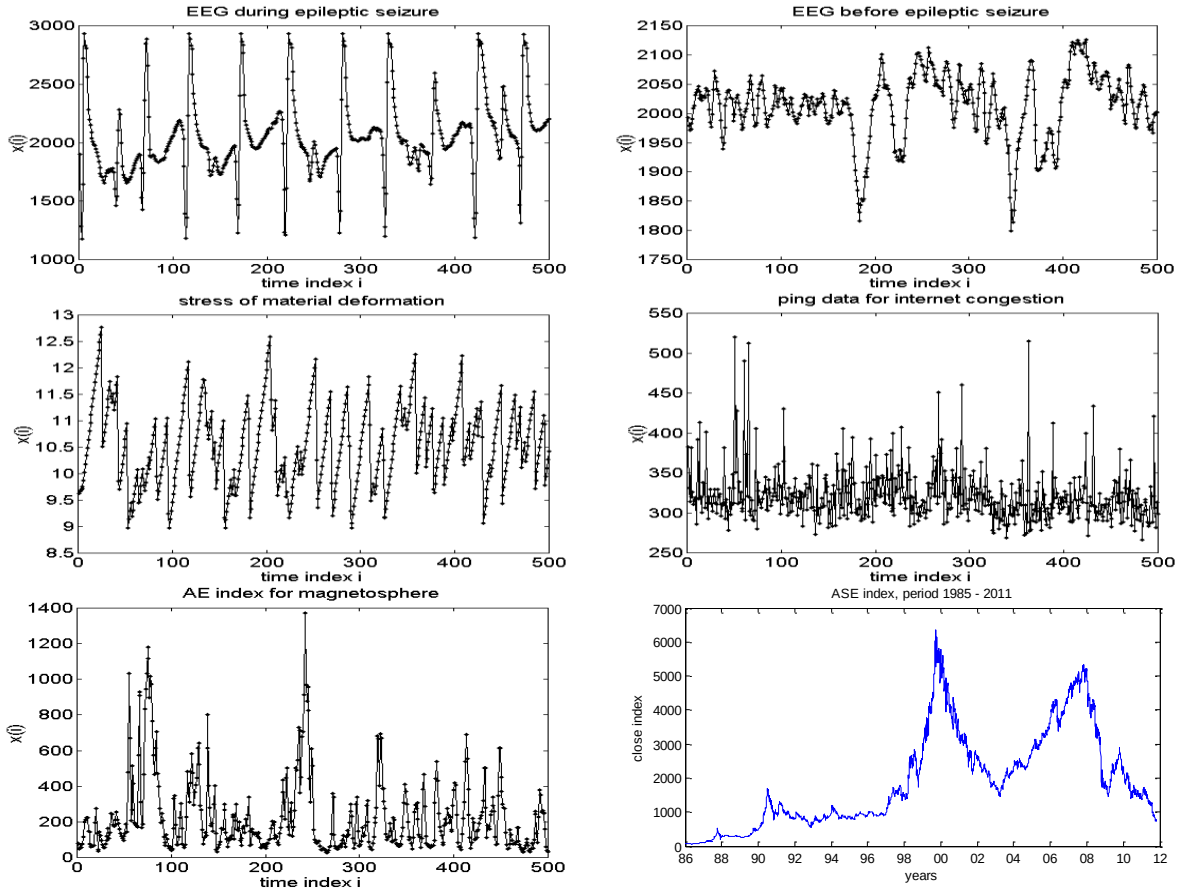
ύπαρξη της στοχαστικότητας στην υπό μελέτη διαδικασία (ύπαρξη δυναμικού θορύβου και θορύβου παρατήρησης), η εξέλιξη της διαδικασίας είναι κυρίως καθορισμένη, δηλαδή ο μηχανισμός που παράγει τη χρονοσειρά δίνεται κυρίως από ένα **δυναμικό σύστημα** [dynamical system], δηλαδή υπάρχει κατά βάση **αιτιοκρατική** [deterministic] περιγραφή του μηχανισμού με διαφορικές εξισώσεις (σε συνεχή χρόνο) ή εξισώσεις διαφορών (σε διακριτό χρόνο). Σε αυτήν την περίπτωση το παρατηρούμενο μέγεθος X δε θεωρείται τυχαία μεταβλητή αλλά μεταβλητή του (άγνωστου) συστήματος.

Οι παρατηρήσεις μεγέθους γίνονται συνήθως με συγκεκριμένο χρονικό βήμα που λέγεται και **χρόνος δειγματοληψίας** [sampling time]. Για παράδειγμα, έχουμε τη μέτρηση της θερμοκρασίας κάθε ώρα, η τη μέση θερμοκρασία κάθε ημέρας, τη μεταβολή της συναλλαγματικής αξίας ανά λεπτό ή την τιμή μιας μετοχής στο κλείσιμο της ημέρας. Γενικά για κάθε χρονική στιγμή t θεωρούμε την τιμή x_t του παρατηρούμενου μεγέθους X. Το σύνολο των τιμών του μεγέθους x_t για κάποια χρονική περίοδο n (σε μονάδες δειγματοληψίας), δηλαδή για χρονικές στιγμές t, $t = 1,\ldots,n$, αποτελεί τη **χρονική σειρά** ή **χρονοσειρά** [time series] $\{x_t\}_{t=1}^{n} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Γενικά θα συμβολίζουμε μια χρονοσειρά $\{x_t\}$ αν δεν αναφερόμαστε σε χρονοσειρά με συγκεκριμένο μήκος.

Ο κυριότερος στόχος στην ανάλυση χρονοσειρών είναι η επιλογή και προσαρμογή κατάλληλου μοντέλου που να προσεγγίζει ικανοποιητικά τα δεδομένα, καθώς και η χρησιμοποίηση του μοντέλου για πρόβλεψη. Τα μοντέλα χρονοσειρών υποθέτουν πως υπάρχει κάποια δομή, ή αλλιώς, πως υπάρχουν συσχετίσεις στη χρονοσειρά, δηλαδή συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών $x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+\tau}$, και προσπαθούν να εκφράσουν μαθηματικά αυτές τις συσχετίσεις. Γι αυτό ένα πρώτο και σημαντικό στάδιο στην ανάλυση χρονοσειρών είναι η διερεύνηση και περιγραφή των συσχετίσεων στη χρονοσειρά καθώς και άλλων σχετικών χαρακτηριστικών της χρονοσειράς.

1.1 Παραδείγματα πραγματικών χρονοσειρών

Για να καταλάβουμε την σημαντικότητα της ανάλυσης χρονοσειρών είναι καλό να δούμε κάποιες πραγματικές εφαρμογές και τα προβλήματα προς διερεύνηση. Κάποιες πραγματικές χρονοσειρές από διάφορα πεδία δίνονται στην Σχήμα 1. Τα ερωτήματα μπορεί να διαφέρουν σε κάθε πεδίο αλλά το κοινό ζητούμενο είναι η διερεύνηση της πληροφορίας που δίνει η χρονοσειρά.

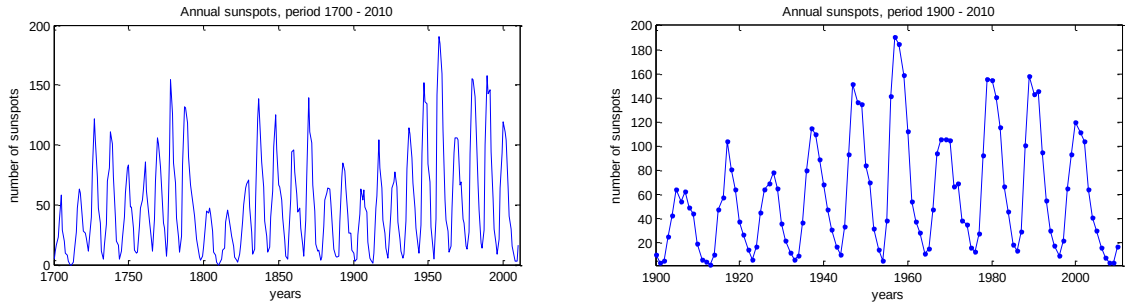


Σχήμα 1 Διαγράμματα ιστορίας πραγματικών χρονοσειρών. Επάνω: ηλεκτροεγκεφαλογράφημα [EEG] από ένα ηλεκτρόδιο κατά τη διάρκεια επιληπτικής κρίσης (αριστερά) και πολύ πριν την κρίση (δεξιά). Μέση αριστερά: συνολική τάση κατά τη διάρκεια πειράματος παραμόρφωσης υλικού. Μέση δεξιά: Δεδομένα τύπου ping (χρόνος μεταφοράς πακέτου πληροφορίας προς και από ένα δεδομένο εξυπηρετητή) για το φόρτο χρήσης (και ιδιαίτερα συμφόρηση) του διαδικτύου. Κάτω αριστερά: δείκτης AE [aurora electrojet] για τη μαγνητική δραστηριότητα στο βόρειο πόλο. Κάτω δεξιά: ο δείκτης του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ) την περίοδο 1/1/1986 - 31/10/2011.

Για παράδειγμα, η ανάλυση των δεδομένων ping που μετρήθηκαν κάθε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, σκοπό έχει να διερευνηθεί κατά πόσο οι μεταβολές στο φόρτο χρήσης του διαδικτύου είναι τυχαίες και ανεξάρτητες από τη μια χρονική στιγμή στην άλλη. Οι μετρήσεις του δείκτη AE της μαγνητόσφαιρας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διερευνηθεί και να περιγραφεί η διαδικασία της μαγνητικής δραστηριότητας στη περιοχή του βορείου πόλου. Το ίδιο ενδιαφέρον υπάρχει για το μηχανισμό της πλαστικής παραμόρφωσης υλικού του οποίου μετράμε την ολική τάση κατά τη διάρκεια του πειράματος (όταν εξασκείται σταθερή τάση εφελκυσμού). Η διερεύνηση και πολύ περισσότερο η περιγραφή της διαδικασίας ή συστήματος που παράγει τη χρονοσειρά είναι πολύ δύσκολη υπόθεση που συνήθως δε μπορεί να δώσει συγκεκριμένα αποτελέσματα. Για αυτό και σε πολλά προβλήματα η ανάλυση χρονοσειρών δεν έχει ως σκοπό να δώσει να ταυτοποιήσει το σύστημα (system identification) και να δώσει μια μαθηματική περιγραφή του συστήματος, αλλά απλά να εντοπίσει κάποιο αντιπροσωπευτικό χαρακτηριστικό του συστήματος και να το εκτιμήσει από τη χρονοσειρά. Για παράδειγμα η ανάλυση ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων [EEG] πριν και κατά τη διάρκεια επιληπτικής κρίσης (δες Σχήμα 1) μπορεί να καταλήξει σε κάποιο χαρακτηριστικό (δείκτη [marker]) που να επιτρέπει το διαχωρισμό των δύο καταστάσεων. Αυτό μπορεί να φαίνεται σχετικά εύκολο για το συγκεκριμένο πρόβλημα και να μπορεί ο διαχωρισμός να γίνει απλά με

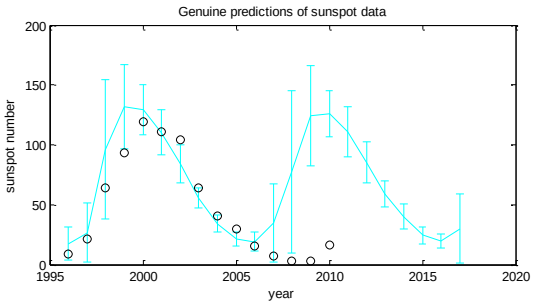
οπτική σύγκριση των δύο χρονοσειρών (δεν υπάρχει για όλες τις κρίσεις εμφανή διαφορά!), αλλά αν αντίστοιχα έχουμε το EEG πολλές ώρες πριν και λίγο πριν την κρίση ο διαχωρισμός είναι πολύ πιο δύσκολος και η εύρεση κατάλληλου διαχωριστικού δείκτη θα είχε μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον (θα σήμαινε τον ερχομό μιας κρίσης και έγκαιρη αντιμετώπιση της). Το ενδιαφέρον στην ανάλυση χρονοσειρών είναι συχνά η πρόβλεψη των επόμενων τιμών της χρονοσειράς. Δε χρειάζεται ιδιαίτερη συζήτηση για τη χρησιμότητα της πρόβλεψης της τιμής του ημερήσιου δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ) [Athens Stock Exchange, ASE] την επόμενη μέρα ή τις επόμενες μέρες. Βέβαια εκτός του πρακτικού ενδιαφέροντος της βραχυπρόθεσμης πρόβλεψης του δείκτη ΧΑΑ, η διερεύνηση του συστήματος της ελληνικής χρηματιστηριακής αγοράς έχει επίσης ενδιαφέρον και αυτό μπορεί να μελετηθεί στα πλαίσια των χρονοσειρών κάτω από δύο βασικές προσεγγίσεις, αυτή των (γραμμικών) στοχαστικών διαδικασιών και των (μη-γραμμικών) δυναμικών συστημάτων.

Μια από τις πιο γνωστές πραγματικές χρονοσειρές που έχουν μελετηθεί είναι η χρονοσειρά του πλήθους ηλιακών κηλίδων, δηλαδή μαύρων κηλίδων που εμφανίζονται στον ήλιο και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα εξαφανίζονται. (Πιστεύεται πως ο αριθμός των ηλιακών κηλίδων επηρεάζει το κλίμα της γης). Στο Σχήμα 2 δίνεται η χρονοσειρά των ετήσιων ηλιακών κηλίδων από το 1700 ως το 2010.



Σχήμα 2 Η χρονοσειρά των ετήσιων ηλιακών κηλίδων. Αριστερά το γράφημα της συνολικής καταγραφής που μας είναι γνωστή και δεξιά το τελευταίο τμήμα ως το 2010.

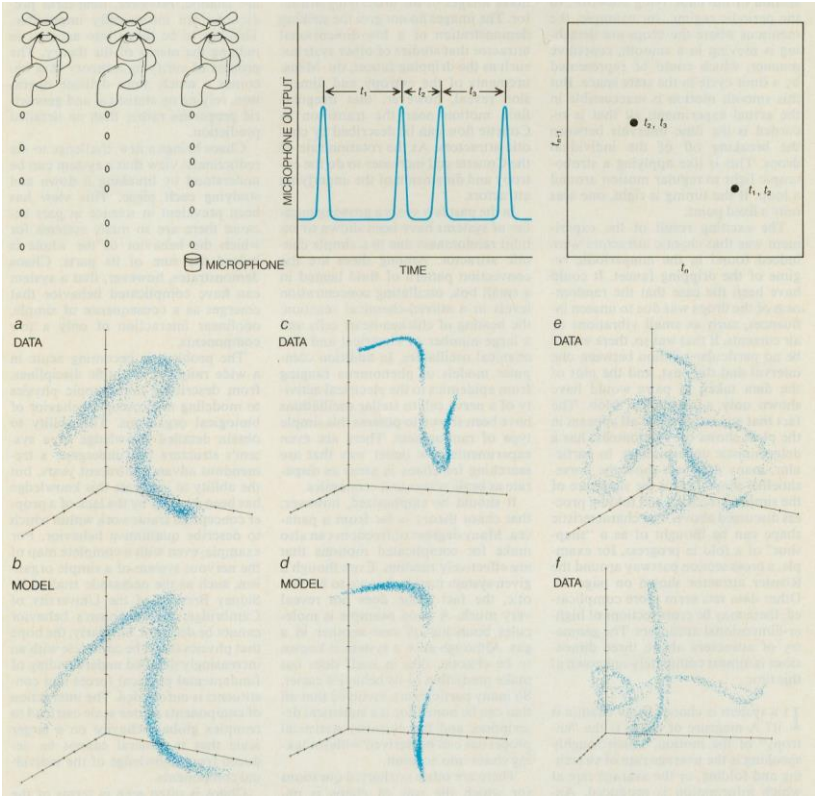
Φυσικά και θα θέλαμε να προβλέψουμε το μέσο ετήσιο αριθμό ηλιακών κηλίδων για το 2011 καθώς και τα επόμενα έτη. Έχουν γίνει διάφορες μελέτες στην πρόβλεψη ηλιακών κηλίδων και κάποιες χρησιμοποιούν μεθόδους και μοντέλα πρόβλεψης της ανάλυσης μονο-μεταβλητών χρονοσειρών. Στο Σχήμα 3, δίνονται οι αυθεντικές προβλέψεις (καθώς και τα όρια της πρόβλεψης), δηλαδή οι προβλέψεις σε χρόνους μελλοντικούς για τους οποίους όταν έγινε η μελέτη δεν υπήρχαν παρατηρήσεις.



Σχήμα 3 Αυθεντική πρόβλεψη των ηλιακών κηλίδων και όρια πρόβλεψης (γαλάζιες ή γκρι γραμμές), από το 1996 ως το 2017 (αντιγραφή από την εργασία Kugiumtzis et al, Physica D, 112, 344-360, 1998). Οι ανοιχτοί κύκλοι δηλώνουν τις πραγματικές μετρήσεις.

Είναι φανερό πως οι ηλιακές κηλίδες ακολουθούν έναν κύκλο διάρκειας περίπου 11 με 12 έτη. Παρόλα αυτά το φαινόμενο δεν είναι περιοδικό και όπως φαίνεται στο Σχήμα 3 η τελευταία περίοδος φαίνεται να έχει μεγαλύτερη διάρκεια από την αναμενόμενη. Για αυτό και έχουν αναπτυχθεί μοντέλα που προσπαθούν να περιγράψουν τις αποκλίσεις από την περιοδικότητα και τη στοχαστικότητα της χρονοσειράς που βασίζονται στη θεώρηση ότι υπάρχει ένα αιτιοκρατικό σύστημα που έχει όμως φαινομενικά στοχαστική συμπεριφορά, δηλαδή είναι ένα **χαοτικό δυναμικό σύστημα** (chaotic dynamical system).

Ενώ για τις ηλιακές κηλίδες δε μπορούμε να δείξουμε παρά μόνο να υποθέσουμε πως το σύστημα είναι χαοτικό, έχουν γίνει πειράματα που δείχνουν την ύπαρξη χαοτικού δυναμικού συστήματος. Ένα τέτοιο πείραμα, που μπορεί να πραγματοποιηθεί με ελάχιστη υποδομή, είναι η βρύση που στάζει (dripping faucet) (δες Σχήμα 4). Ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών σταγόνων είναι η μεταβλητή που μετράμε, π.χ. με ένα μικρόφωνο στο σημείο που πέφτει η σταγόνα στο νιπτήρα. Ρυθμίζοντας το άνοιγμα της βρύσης πάντα όμως ώστε να στάζει, οι σταγόνες μπορεί να πέφτουν αργά αλλά σε σταθερό χρόνο, αλλά μπορεί να πέφτουν σε χρόνους που δε συνιστούν κάποια περιοδικότητα. Αυτή η απεριοδική ακολουθία των χρονικών διαστημάτων μεταξύ σταγόνων έχει δειχθεί πως δεν είναι τυχαία, αλλά μπορεί να περιγραφεί με χαμηλο-διάστατο αιτιοκρατικό σύστημα που για το συγκεκριμένο άνοιγμα της βρύσης μεταπίπτει (π.χ. από περιοδική συμπεριφορά) σε χαοτική συμπεριφορά. Αυτήν την προσέγγιση θα μελετήσουμε στο τελευταίο μέρος.



Σχήμα 4 Το πείραμα της βρύσης που τρέχει και το δυναμικό σύστημα που ορίζει τη χρονική διάρκεια μεταξύ των σταγόνων που πέφτουν από τη βρύση. Πηγή Crutchfield et al, Scientific American, 255, 46-57, 1986.

1.2 Βασικά προβλήματα στην ανάλυση χρονοσειρών

Ο σκοπός της ανάλυσης χρονοσειρών μπορεί λοιπόν να διαφέρει (π.χ. κατανόηση του συστήματος, εκτίμηση διακριτικών χαρακτηριστικών του συστήματος, πρόβλεψη), τα προβλήματα της ανάλυσης όμως είναι λίγο πολύ τα ίδια σε πραγματικές εφαρμογές και έχουν να κάνουν με τη διαθέσιμη πληροφορία. Τα κυριότερα προβλήματα σημειώνονται παρακάτω:

1. *Μονο-μεταβλητή χρονοσειρά*. Σε πολλά πραγματικά προβλήματα έχουμε μετρήσεις ενός μόνο μεγέθους από το υπό μελέτη σύστημα, όπως για παράδειγμα στο πείραμα πλαστικής παραμόρφωσης, όπου το μέγεθος που μετράμε είναι η ολική τάση, ενώ για τα EEG μπορούμε να έχουμε μετρήσεις από διάφορα ηλεκτρόδια που τοποθετούνται σε πλέγμα στο κρανίο.
2. *Μια μόνο χρονοσειρά*. Σε χρονοσειρές από πειράματα, έχουμε τη δυνατότητα να επαναλάβουμε το πείραμα και να πάρουμε μετρήσεις κάτω από τις ίδιες συνθήκες, δηλαδή να παρατηρήσουμε περισσότερες από μια πραγματοποιήσεις του ίδιου συστήματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η χρονοσειρά ολικής τάσης από το πείραμα πλαστικής παραμόρφωσης. Σε χρονοσειρές όμως από φυσικές διαδικασίες, δεν υπάρχει αυτή η δυνατότητα καθώς δε μπορούμε να έχουμε επαναλήψεις των μετρήσεων κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Τέτοια είναι βασικά όλα τα άλλα παραδείγματα στο Σχήμα 1.
3. *Περιορισμένο μήκος χρονοσειράς*. Η αναζήτηση μεγάλων δειγμάτων είναι γνωστό πρόβλημα στη στατιστική. Συχνά οι πραγματικές συνθήκες δεν το επιτρέπουν. Δε μπορεί για παράδειγμα να ζητούμε μεγαλύτερη καταγραφή σε επιληπτική κρίση, αφού η διάρκεια της είναι δεδομένη (και ευτυχώς σχετικά σύντομη), όπως δε μπορούμε να έχουμε μετρήσεις του ημερήσιου δείκτη κλεισίματος ΧΑΑ πριν την έναρξη του χρηματιστηρίου ή μετά τη σημερινή ημέρα.
4. *Ύπαρξη θορύβου*. Στα πραγματικά δεδομένα πάντα υπάρχει θόρυβος. Αυτός μπορεί να είναι δυναμικός ή θόρυβος συστήματος, έχει να κάνει δηλαδή με την εξέλιξη του συστήματος και περιλαμβάνει όλες εκείνες τις εξωτερικές επιδράσεις στο υπό μελέτη σύστημα που δε μπορούμε να εξηγήσουμε. Για παράδειγμα ο δείκτης ΧΑΑ επηρεάζεται από άλλους χρηματο-οικονομικούς (και όχι μόνο) παράγοντες που μπορούμε ενδεχομένως να συμπεριλάβουμε στη μελέτη μας (πολύ-μεταβλητές χρονοσειρές), αλλά πάντα θα υπάρχουν και κάποιοι άλλοι παράγοντες και τυχαία γεγονότα που επηρεάζουν την εξέλιξη του δείκτη ΧΑΑ και δε μπορούμε να συμπεριλάβουμε, τα οποία αποτελούν το δυναμικό θόρυβο. Θόρυβος υπάρχει επίσης και στη διαδικασία παρατήρησης, ο λεγόμενος θόρυβος παρατήρησης, και έχει να κάνει με την ακρίβεια του οργάνου παρατήρησης ή τη δυνατότητα παρατήρησης, ή ακόμα και με την αριθμητική ακρίβεια των μετρήσεων. Για παράδειγμα παλιότερα τα EEG αποθηκεύονταν σε μαγνητοταινίες και η ακρίβεια παράστασης των μετρήσεων ήταν σχετικά μικρή, π.χ 8 bytes.

Έλλειψη στασιμότητας. Αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με την ύπαρξη εξωτερικών επιδράσεων ως προς το σύστημα που μελετάμε, που ενδεχομένως προσθέτουν χαρακτηριστικά ξένα προς το σύστημα. Πολλές φορές το αποτέλεσμα είναι η χρονοσειρά να παρουσιάζει μη-στασιμότητα, δηλαδή αργές μεταβολές (τάσεις) ή/και περιοδικότητα, που δεν σχετίζονται με το μηχανισμό που θέλουμε να μελετήσουμε. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να διερευνήσουμε το μηχανισμό που καθορίζει τις μεταβολές του ημερήσιου δείκτη από μέρα σε μέρα, δε μας ενδιαφέρει η στάθμη του δείκτη, αν δηλαδή αναφερόμαστε στην περίοδο της λεγόμενης «φούσκας» του 2000 ή της ύφεσης του 2011. Θα θέλαμε λοιπόν πρώτα να απαλείψουμε τις αργές μεταβολές

του δείκτη που έγιναν σε χρονικό ορίζοντα μηνών ή ετών. Το θέμα αυτό θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

Η παρουσίαση των θεμάτων στην ανάλυση χρονοσειρών βασίζεται στη θεώρηση πως η χρονοσειρά είναι πραγματοποίηση μιας στοχαστικής διαδικασίας. Στο Κεφάλαιο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 δίνονται τα πρώτα στάδια της ανάλυσης χρονοσειρών και γίνεται περιγραφή βασικών χαρακτηριστικών χρονοσειρών, όπως η στασιμότητα και η αυτοσυσχέτιση. Στο Κεφάλαιο μελετώνται οι γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες και τα χαρακτηριστικά τους, δηλαδή οι αυτοπαλινδρομούμενες διαδικασίες, οι διαδικασίες κινούμενου μέσου και οι μικτές διαδικασίες. Στο Κεφάλαιο 3 μελετώνται τα αντίστοιχα μοντέλα, δηλαδή η εκτίμηση αυτών των στοχαστικών διαδικασιών σε χρονοσειρές, καθώς και μοντέλα για μη-στάσιμες χρονοσειρές. Στο Κεφάλαιο 4 χρησιμοποιούνται τα μοντέλα χρονοσειρών που μελετήθηκαν παραπάνω καθώς και κάποιες άλλες τεχνικές για πρόβλεψη. Στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζεται η ανάλυση χρονοσειρών στο πεδίο των συχνοτήτων και μελετούνται τεχνικές της φασματικής ανάλυσης. Στο Κεφάλαιο 6, επεκτείνονται τα μοντέλα χρονοσειρών θεωρώντας μη-γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες. Τέλος στο Κεφάλαιο 7, η ανάλυση χρονοσειρών γίνεται με τη θεώρηση πως η χρονοσειρά παράγεται από ένα δυναμικό σύστημα, μελετούνται κάποια χαρακτηριστικά του δυναμικού συστήματος από τη χρονοσειρά και παρουσιάζονται κάποια μη-γραμμικά μοντέλα καθώς και οι προβλέψεις με αυτά.

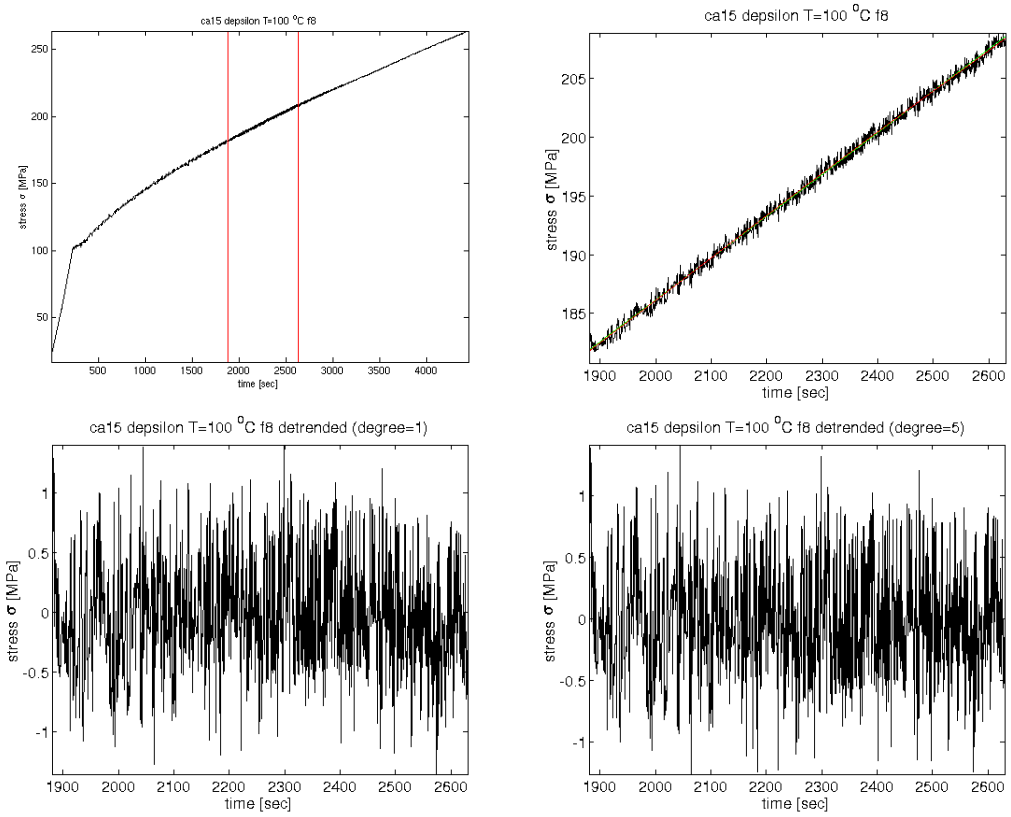
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών μέσα από πραγματικά παραδείγματα. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε στοιχεία μη-στασιμότητας, δηλαδή την τάση και περιοδικότητα (που συμπεριλαμβάνει την εποχικότητα), και πως μπορούμε αυτά να τα εκτιμήσουμε ή και να τα απαλείψουμε. Θα συνδέσουμε την έννοια της στασιμότητας με στοχαστικές διαδικασίες και θα ορίσουμε την αυτοσυσχέτιση και πως εκτιμάται αυτή σε μια δεδομένη χρονοσειρά. Τέλος θα διερευνήσουμε την ύπαρξη συσχέτισης και εξάρτησης σε χρονοσειρές.

2.1 Στασιμότητα, μη-στασιμότητα και σταθεροποίηση διασποράς

Η ύπαρξη μη-στασιμότητας είναι ένα από τα βασικότερα προβλήματα στην ανάλυση χρονοσειρών και το πρώτο που πρέπει να αντιμετωπιστεί. Ας το δούμε μέσα από ένα πραγματικό παράδειγμα.

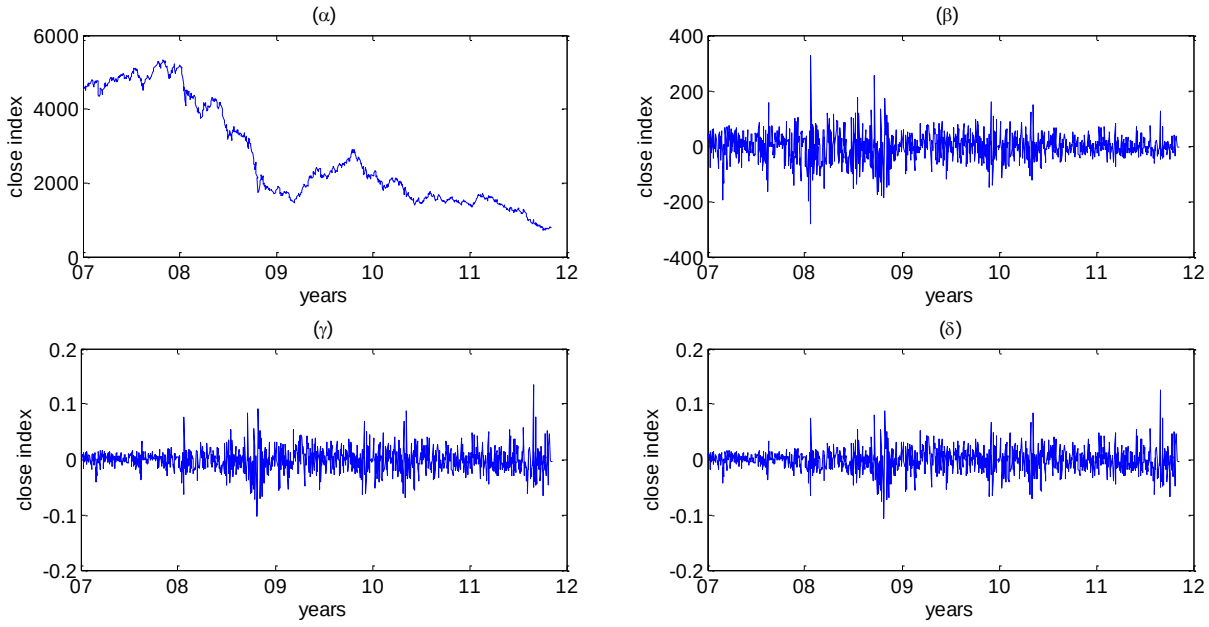


Σχήμα 5 Πάνω: Η χρονοσειρά ολικής τάσης από πείραμα πλαστικής παραμόρφωσης στο αριστερό σχήμα και ένα τμήμα αυτής στο δεξιό σχήμα (οι κατακόρυφες γραμμές δηλώνουν το τμήμα της χρονοσειράς). Κάτω: η χρονοσειρά των υπολοίπων μετά από προσαρμογή πολυωνύμου πρώτου βαθμού (αριστερά) και πέμπτου βαθμού (δεξιά) στο τμήμα της χρονοσειράς.

Στο Σχήμα 5 δίνεται η χρονοσειρά ολικής τάσης όπως μετρήθηκε καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος παραμόρφωσης υλικού σε συγκεκριμένες συνθήκες (υλικό,

θερμοκρασία, σταθερή τάση εφελκυσμού). Είναι φανερό πως η ολική τάση αυξάνει κατά τη διάρκεια του πειράματος. Το ενδιαφέρον στη μελέτη του φαινομένου δεν εστιάζεται στην αύξηση της ολικής τάσης, που είναι αναμενόμενη, αλλά στις διακυμάνσεις της σε μικρά χρονικά διαστήματα που αντιστοιχούν σε αλλαγές στις δομές του υλικού που επιφέρει ο σταθερός εφελκυσμός. Θα θέλαμε λοιπόν να μελετήσουμε την ολική τάση σε κάποιο χρονικό διάστημα, όπως αυτό που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5, και σε αυτό να απαλείψουμε την αυξητική τάση που παρουσιάζεται, ώστε να μελετήσουμε τη χρονοσειρά απαλλαγμένη από αυτήν την τάση. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η τάση φαίνεται να μπορεί να παρασταθεί σε ικανοποιητικό βαθμό ως μια απλή γραμμική συνάρτηση του χρόνου ή ίσως και πολυωνυμική συνάρτηση του χρόνου. Η χρονοσειρά απαλλαγμένη από την τάση είναι η χρονοσειρά των υπολοίπων μετά την προσαρμογή της πολυωνυμικής συνάρτησης του χρόνου (δες Σχήμα 5 για πολυώνυμο πρώτου και πέμπτου βαθμού).

Γενικά όταν η τάση σε μια χρονοσειρά μπορεί να περιγραφεί από κάποια γνωστή ή εκτιμώμενη συνάρτηση του χρόνου, $\mu_t = f(t)$, όπως στο παραπάνω παράδειγμα, ονομάζεται **καθοριστική τάση** [deterministic trend]. Μπορεί όμως η τάση σε μια χρονοσειρά να μην είναι δυνατόν να περιγραφεί από μια γνωστή (παραμετρική) συνάρτηση του χρόνου, να παρουσιάζει δηλαδή αργές μεταβολές με το χρόνο αλλά όχι με κάποιο καθοριστικό τρόπο. Αυτή η τάση λέγεται **στοχαστική** [stochastic trend]. Στα χρηματο-οικονομικά, τυπικά οι διάφοροι δείκτες παρουσιάζουν στοχαστική τάση, όπως ο δείκτης ΧΑΑ που δίνεται στο Σχήμα 6α.



Σχήμα 6 (α) Η χρονοσειρά του δείκτη κλεισίματος ΧΑΑ την περίοδο 2/1/2007 – 31/10/2011. (β) Η χρονοσειρά των πρώτων διαφορών του δείκτη στο (α). (γ) Η χρονοσειρά των διαφορών των λογαρίθμων του δείκτη στο (α). (δ) Η χρονοσειρά των σχετικών μεταβολών του δείκτη στο (α).

Θεωρούμε το δείκτη κλεισίματος ΧΑΑ τη χρονική στιγμή t ως την παρατηρούμενη τυχαία μεταβλητή Y_t και οι n παρατηρήσεις της Y_t σε κάποια χρονική περίοδο αποτελούν τη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Για τα δεδομένα στο Σχήμα 6, το μήκος της χρονοσειράς είναι n =1206 για την περίοδο 2/1/2007 ως 31/10/2011. Η τιμή ενός δείκτη καθορίζεται από το νόμισμα της αγοράς και για αυτό

επηρεάζεται από παράγοντες όπως ο πληθωρισμός, η ανάπτυξη ή η ύφεση της οικονομίας, και διακυμάνσεις στην παγκόσμια αγορά. Αυτά τα φαινόμενα δημιουργούν σχετικά αργές τάσεις ή και διακυμάνσεις στο δείκτη Y_t που ενδεχομένως δε σχετίζονται με το υπό μελέτη σύστημα της χρηματιστηριακή αγοράς. Έτσι αντί η μελέτη να γίνει στη χρονοσειρά του δείκτη Y_t μπορεί να γίνει σε χρονοσειρά που προκύπτει από μετασχηματισμό του δείκτη Y_t με σκοπό την απαλοιφή της τάσης ή και της διακύμανσης. Παρακάτω δίνονται τρεις τέτοιοι μετασχηματισμοί:

1. Ο μετασχηματισμός της μεταβολής των τιμών του δείκτη, που απαλείφει την τάση στη χρονοσειρά $\{y_t\}_{t=1}^n$ (δες Σχήμα 6β)

$$x_t = y_t - y_{t-1}. \tag{1}$$

2. Ο μετασχηματισμός της μεταβολής του λογαρίθμου των τιμών του δείκτη, που απαλείφει την τάση και ελαττώνει τις μεγάλες διακυμάνσεις στη χρονοσειρά $\{y_t\}_{t=1}^n$ (δες Σχήμα 6γ)

$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}. \tag{2}$$

3. Ο μετασχηματισμός της σχετικής μεταβολής των τιμών του δείκτη, που έχει τα ίδια χαρακτηριστικά όπως ο παραπάνω μετασχηματισμός (δες Σχήμα 6δ)

$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}. \tag{3}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι για μεγάλες διακυμάνσεις της Y_t οι μετασχηματισμοί της σχέσης (2) και (3) δίνουν σχεδόν το ίδιο αποτέλεσμα και αναφέρονται και ως *αποδόσεις* του δείκτη [returns] (δες Σχήμα 6γ και δ). Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε ως $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ τη τυχόν μη-στάσιμη χρονοσειρά και αντίστοιχα την παρατηρούμενη (τυχαία) μεταβλητή Y_t και ως $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ τη στάσιμη χρονοσειρά (ή γενικά τη χρονοσειρά που προκύπτει από κάποιο μετασχηματισμό της $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$) και αντίστοιχα τη μεταβλητή X_t.

Ο μετασχηματισμός της μεταβολής του λογαρίθμου των τιμών (ή ισοδύναμα της σχετικής μεταβολής των τιμών) έχει ένα πλεονέκτημα σε σύγκριση με το μετασχηματισμό των πρώτων διαφορών. Ενώ και οι δύο μετασχηματισμοί απαλείφουν αργές μεταβολές της μέσης τιμής, η διαφορά των λογαρίθμων σταθεροποιεί και τη διασπορά, όπως φαίνεται και από τα γραφήματα στο Σχήμα 6. Γενικά παίρνοντας τους λογαρίθμους των τιμών πετυχαίνουμε να μειώσουμε μεγάλες εξάρσεις της χρονοσειράς και τείνει η χρονοσειρά να γίνει κανονική, να έχει δηλαδή Γκαουσιανή περιθώρια κατανομή.

Η σταθεροποίηση της διασποράς μπορεί να αντιμετωπισθεί με μαθηματικό παρά εμπειρικό τρόπο (όπως παίρνοντας λογαρίθμους) θεωρώντας πως η διασπορά της χρονοσειράς $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ αλλάζει ως συνάρτηση της μέσης τιμής μ_t (που μπορεί να μην είναι σταθερή ως προς το χρόνο *t*), δηλαδή $\mathrm{Var}[Y_t] = f(\mu_t)$. Το πρόβλημα της σταθεροποίησης της διασποράς είναι να βρούμε το μετασχηματισμό $x_t = T(y_t)$ έτσι ώστε $\mathrm{Var}[X_t] = \mathrm{const}$ κάτω από την υπόθεση $\mathrm{Var}[Y_t] = f(\mu_t)$. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό δίνει ο μετασχηματισμός δύναμης των Box και Cox

$$x_t = \frac{y_t^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

με παράμετρο λ που γενικά θα πρέπει να εκτιμηθεί από τα δεδομένα. Για λ=0 ο μετασχηματισμός γίνεται $x_t = \ln(y_t)$ (παίρνοντας το όριο $\lambda \to 0$ στην παραπάνω σχέση). Για συγκεκριμένες μορφές της συνάρτησης f δίνονται στον Πίνακας 1 ο μετασχηματισμός της χρονοσειράς για τη σταθεροποίηση της διασποράς καθώς και η αντίστοιχη τιμή της παραμέτρου λ του μετασχηματισμού δύναμης (δες επίσης την άσκηση 1).

λ	x_t	Var[Y_t]
-1	$1/y_t$	$c\mu^4$
0.5	$1/\sqrt{y_t}$	$c\mu^3$
0	$\ln(y_t)$	$c\mu^2$
0.5	$\sqrt{y_t}$	$c\mu$

Πίνακας 1 Μετασχηματισμοί σταθεροποίησης διασποράς (στήλη 2) για συγκεκριμένες συναρτήσεις της διασποράς ως προς την τάση (στήλη 3, *c* είναι σταθερά) και η αντίστοιχη τιμή της παραμέτρου λ του μετασχηματισμού δύναμης.

Σημειώνεται πως ο μετασχηματισμός δύναμης έχει ένα δεύτερο σκοπό συνυφασμένο με τον πρώτο σκοπό της σταθεροποίησης της διασποράς: διορθώνει την περιθώρια κατανομή της χρονοσειράς στην κατεύθυνση της κανονικής (Γκαουσιανής) κατανομής. Η διόρθωση δεν είναι πάντα πετυχημένη, δηλαδή δε μπορεί αυτός ο μετασχηματισμός να μετατρέψει οποιαδήποτε περιθώρια κατανομή σε κανονική.

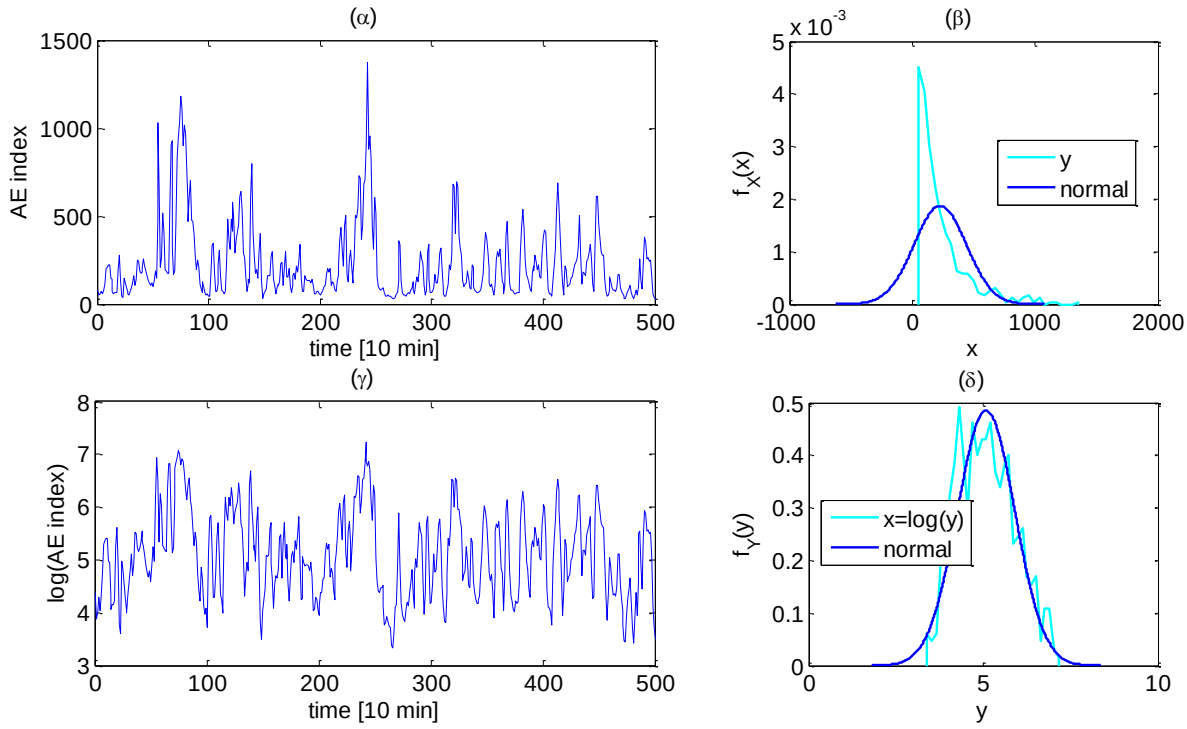
Παράδειγμα

Η χρονοσειρά του δείκτη Aurora Electrojet (AE) στο Σχήμα 1 φαίνεται να παρουσιάζει εξάρσεις, δηλαδή να έχει ασταθή διασπορά. Πράγματι η περιθώρια κατανομή της είναι λοξή με μακριά δεξιά ούρα που αντιστοιχεί στις εξάρσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7β. Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του λογαρίθμου παρατηρούμε πως οι εξάρσεις έχουν μειωθεί και γενικά η περιθώρια κατανομή της μετασχηματισμένης χρονοσειράς έγινε πιο συμμετρική (δες Σχήμα 7γ και δ). Η περιθώρια κατανομή της όμως δε μπορούμε να πούμε πως είναι Γκαουσιανή καθώς παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις. Μπορεί κάποιος εύκολα να διαπιστώσει πως κανένας από τους άλλους μετασχηματισμούς στον Πίνακας 1 δεν καταφέρνει να προσεγγίσει καλύτερα την Γκαουσιανή κατανομή.

Σημειώνεται πως ο πιο κατάλληλος μετασχηματισμός για να πετύχουμε η περιθώρια κατανομή να είναι ακριβώς Γκαουσιανή είναι

$$x_t = \Phi^{-1}\left(F_Y(y_t)\right)$$

όπου $F_Y(y)$ είναι η περιθώρια αθροιστική κατανομή της αρχικής χρονοσειράς και $\Phi^{-1}(u)$ είναι η αντίστροφη αθροιστική συνάρτηση της τυπικής Γκαουσιανής κατανομής (πρόσεξε πως η τιμή u είναι για τυχαία μεταβλητή $U \sim U[0,1]$, δηλαδή ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1], που μπορεί να είναι είτε η $F_Y(y)$, ή η $\Phi(x)$, η οποιαδήποτε αθροιστική κατανομή).



Σχήμα 7 Σταθεροποίηση διασποράς της χρονοσειράς του δείκτη μαγνητόσφαιρας AE: (α) το γράφημα της αρχικής χρονοσειράς και (β) το γράφημα της περιθώριας κατανομής της (επίσης στο σχήμα δίνεται το γράφημα της κανονικής κατανομή), (γ) το γράφημα της χρονοσειράς που προκύπτει από το μετασχηματισμό του λογαρίθμου και (δ) το γράφημα της περιθώρια κατανομής της καθώς και της κανονικής κατανομής.

2.2 Κατανομές και ροπές στοχαστικής διαδικασίας

Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών Y_t για κάθε χρονική στιγμή t ορίζει τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ (και αντίστοιχα για τη X_t και $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$). Θα αναφερόμαστε στη στοχαστική διαδικασία και ως χρονοσειρά εννοώντας την άγνωστη ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών και όχι τις παρατηρήσεις. Η χρονική διάταξη των μεταβλητών με το χρόνο t σε μια στοχαστική διαδικασία είναι αυτή που υποδηλώνει την ανάγκη της δυναμικής και όχι μόνο στατικής περιγραφής, δηλαδή της συσχέτισης μεταξύ των στοιχείων της στοχαστικής διαδικασίας.

Η πλήρης περιγραφή μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ απαιτεί ότι οι **κοινές κατανομές** [joint distributions] όλων των τάξεων (για οποιοδήποτε σύνολο μεταβλητών της στοχαστικής διαδικασίας) είναι γνωστές για κάθε χρονική στιγμή t. Η κατανομή τάξης ένα αντιστοιχεί στη στατική περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας και είναι η (περιθώρια) κατανομή της $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

$$\forall t \in Z\,, \qquad f_{Y_t}(y) = f_Y(y,t)\,,$$

δηλαδή ορίζεται ως συνάρτηση όχι μόνο της κάθε τιμής y αλλά και του χρόνου t. Κατά τον ίδιο τρόπο η κοινή κατανομή δύο μεταβλητών της $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ (κατανομή τάξης 2) είναι

$$\forall t_1, t_2 \in Z\,, \quad f_{Y_{t_1},Y_{t_2}}(y_1,y_2) = f_Y(y_1,y_2,t_1,t_2)\,,$$

η κοινή κατανομή τριών μεταβλητών (κατανομή τάξης 3) είναι

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in Z\ , \quad f_{Y_{t_1}, Y_{t_2}, Y_{t_3}}(y_1, y_2, y_3) = f_Y(y_1, y_2, y_3, t_1, t_2, t_3)$$

και αντίστοιχα ορίζονται οι κατανομές μεγαλύτερων τάξεων.

Αντίστοιχα με τις κατανομές ορίζονται και οι ροπές της στοχαστικής διαδικασίας, δηλαδή ως συναρτήσεις του χρόνου. Η **μέση τιμή** (ροπή πρώτης τάξης) είναι

$$\forall t \in Z\ , \quad \mu_t = \mathrm{E}\left[Y_t\right] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y,t)\mathrm{d}y\ .$$

Η ροπή δεύτερης τάξης είναι

$$\forall t_1, t_2 \in Z\ ,\ \kappa(t_1, t_2) = \mathrm{E}\left[Y_{t_1} Y_{t_2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 f_Y(y_1, y_2, t_1, t_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

και η κεντρική ροπή δεύτερης τάξης που ονομάζεται **αυτοδιασπορά** [autocovariance] είναι

$$\gamma(t_1, t_2) = \mathrm{E}\left[(Y_{t_1} - \mu_{t_1})(Y_{t_2} - \mu_{t_2})\right] = \mathrm{E}\left[Y_{t_1} Y_{t_2}\right] - \mu_{t_1}\mu_{t_2} = \kappa(t_1, t_2) - \mu_{t_1}\mu_{t_2}\ .$$

Για $t = t_1 = t_2$ ορίζεται η **διασπορά** $\sigma_t^2 \equiv \sigma_{Y_t}^2 = \mathrm{E}\left[(Y_t - \mu_t)^2\right]$. Αντίστοιχα ορίζονται οι ροπές και οι κεντρικές ροπές μεγαλύτερης τάξης για δύο μεταβλητές και οι ροπές γενικεύονται για περισσότερες μεταβλητές. Σημειώνεται ότι από τις ροπές για κάθε τάξη για δύο ή περισσότερες μεταβλητές μπορεί να οριστεί η αντίστοιχη κοινή κατανομή.

Σε αυτήν τη γενική περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας οι κατανομές και οι ροπές είναι συναρτήσεις των χρονικών στιγμών, δηλαδή μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο.

2.3 Στάσιμη στοχαστική διαδικασία και αυτοσυσχέτιση

Η στατιστική περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας απλουστεύεται αν θεωρήσουμε ότι οι στατιστικές της ιδιότητες παραμένουν σταθερές στο χρόνο και τότε η στοχαστική διαδικασία ορίζεται ως στάσιμη. Αυτή είναι μα υπόθεση που δύσκολα μπορεί να υιοθετηθεί σε πολλά πραγματικά προβλήματα, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόθεση εργασίας για την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων.

Ειδικότερα ορίζονται δύο μορφές στασιμότητας. Η στοχαστική διαδικασία $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ είναι **αυστηρά στάσιμη** [strict-sense stationary] όταν οι κατανομές της για κάθε τάξη (ή ισοδύναμα όλες οι ροπές) είναι σταθερές στο χρόνο, δηλαδή όταν ισχύει

$$\forall t \in Z\ , \quad f_{Y_t}(y) = f_Y(y,t) = f_Y(y)\ ,$$

$$\forall t_1, t_2 \in Z\ , \quad f_{Y_{t_1}, Y_{t_2}}(y_1, y_2) = f_{Y_t, Y_{t-\tau}}(y_1, y_2)\ ,$$

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in Z\ , \quad f_{Y_{t_1}, Y_{t_2}, Y_{t_3}}(y_1, y_2, y_3) = f_{Y_t, Y_{t-\tau_1}, Y_{t-\tau_2}}(y_1, y_2, y_3)\ ,$$

και αντίστοιχα για κατανομές μεγαλύτερης τάξης.

Για ροπές τάξης μεγαλύτερης του ένα, οι κατανομές δίνονται ως συνάρτηση όχι των χρονικών στιγμών, π.χ. t_1, t_2, αλλά της υστέρησης μεταξύ των χρονικών στιγμών, π.χ. $\tau = t_2 - t_1$, δηλαδή για οποιεσδήποτε δύο χρονικές στιγμές που απέχουν μεταξύ τους τ χρονικά βήματα. Ο έλεγχος της αυστηρής στασιμότητας απαιτεί τη διερεύνηση κοινών κατανομών ή ροπών όλων των τάξεων και δεν αποτελεί μια πρακτικά χρήσιμη ιδιότητα. Για αυτό συχνά χαλαρώνουμε τη συνθήκη στασιμότητας περιορίζοντας την στις δύο πρώτες ροπές.

Η στοχαστική διαδικασία ή χρονοσειρά $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ είναι **ασθενής στάσιμη** [weak ή wide-sense stationary] όταν οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης είναι σταθερές στο χρόνο, δηλαδή

α) η μέση τιμή είναι σταθερή : $\forall t \in Z$, $\mathrm{E}[Y_t] = \mu$,

β) η αυτοδιασπορά ορίζεται μόνο ως προς την υστέρηση και όχι τις χρονικές στιγμές: $\forall t_1, t_2 \in Z$, $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t, t-\tau) = \gamma(\tau) \equiv \gamma_\tau$. (Το σύμβολο ≡ δηλώνει ισοδυναμία στο συμβολισμό. Θα χρησιμοποιούμε και τους δύο συμβολισμούς της αυτοδιασποράς).

Το β) προκύπτει από τη συνθήκη ότι η δεύτερη ροπή είναι σταθερή, δηλαδή ισχύει $\mathrm{E}\left[Y_{t_1} Y_{t_2}\right] = \mathrm{E}\left[Y_t, Y_{t-\tau}\right] = \kappa(t, t-\tau) = \kappa(\tau)$. Από τις συνθήκες α) και β) προκύπτει ότι η διασπορά είναι επίσης σταθερή. Πράγματι για $\tau = 0$, ισχύει $\mathrm{E}\left[Y_t^2\right] = \kappa(0)$ και άρα

$$\sigma_Y^2 = \gamma(0) = \mathrm{E}\left[Y_t^2\right] - \left(\mathrm{E}[Y_t]\right)^2 = \kappa(0) - \mu^2 .$$

Στην πράξη, η συνθήκη ασθενούς στασιμότητας ερμηνεύεται συχνά ως σταθερή μέση τιμή και διασπορά (απλή ροπή δεύτερης τάξης), που δεν είναι σωστό αφού η συνθήκη αναφέρεται στην κοινή ροπή δεύτερης τάξης (αυτοδιασπορά).

Για τη μελέτη συσχετίσεων σε στάσιμες χρονοσειρές χρησιμοποιείται η αυτοσυσχέτιση, που είναι η κανονικοποίηση της αυτοδιασποράς με την διασπορά.

Θεωρούμε την (ασθενώς) στάσιμη στοχαστική διαδικασία (ή χρονοσειρά) $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$. Η **αυτοσυσχέτιση** [autocorrelation] για υστέρηση *τ* ορίζεται ως

$$\rho_\tau \equiv \rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} .$$

Η αυτοσυσχέτιση μετράει τη συσχέτιση μεταβλητών της $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ που βρίσκονται σε χρονική υστέρηση *τ* και είναι ένα χρήσιμο μέτρο της «μνήμης» της στοχαστικής διαδικασίας.

Μπορεί να δειχθεί πως $|\gamma_\tau| \le \gamma_0$ και άρα $|\rho_\tau| \le 1$ για κάθε υστέρηση *τ*. Επίσης η αυτοδιασπορά και η αυτοσυσχέτιση είναι άρτιες συναρτήσεις της υστέρησης *τ*, ισχύει δηλαδή $\gamma_\tau = \gamma_{-\tau}$ και $\rho_\tau = \rho_{-\tau}$.

Παράδειγμα

Υποθέτουμε την στοχαστική διαδικασία $X_t = A\sin(\omega t + \theta)$, όπου A είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1, θ είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [-π,π], $\theta \sim U[-\pi, \pi]$, και τα θ και A είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Σημειώνεται ότι οι μεταβλητές θ και A είναι σταθερές ως προς το χρόνο *t*, αλλά είναι τυχαίες ως προς τις πραγματοποιήσεις (αλλάζουν δηλαδή σε κάθε πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας). Θέλουμε να διερευνήσουμε αν η στοχαστική διαδικασίας είναι (ασθενώς) στάσιμη.

Η μέση τιμή και αυτοδιασπορά της είναι:

$$\mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[A]\mathrm{E}[\sin(\omega t + \theta)] = 0 ,$$

$$\mathrm{E}[X_t X_{t+\tau}] = \mathrm{E}\left[A^2 \sin(\omega t + \theta)\sin(\omega(t+\tau) + \theta)\right] = \ldots = \frac{1}{2}\cos(\omega\tau) ,$$

(όπου οι "τελίτσες" σημαίνουν πως το αποτέλεσμα προκύπτει ύστερα από πράξεις) δηλαδή οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης δεν εξαρτώνται από το χρόνο *t* και άρα η στοχαστική διαδικασία είναι στάσιμη.

2.4 Κάποιες βασικές στοχαστικές διαδικασίες

2.4.1 Ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

Μια απλή υπόθεση για τη χρονοσειρά $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ είναι ότι αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές αλλά που όλες ακολουθούν την ίδια κατανομή, και λέγεται χρονοσειρά **ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών** [independent and identically distributed, iid]. Μαθηματικά η iid ορίζεται από την ανεξαρτησία για οποιοδήποτε σύνολο *n* μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ της $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, δηλαδή ισχύει

$$\mathrm{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n) = \mathrm{P}(X_1 \le x_1) P(X_2 \le x_2) \ldots P(X_n \le x_n),$$

όπου P δηλώνει πιθανότητα, τα κεφαλαία γράμματα τις τυχαίες μεταβλητές και τα μικρά τυχαίες τιμές του πεδίου τιμών της χρονοσειράς.

Μια iid χρονοσειρά είναι εντελώς τυχαία και δεν περιέχει αυτοσυσχετίσεις (γραμμικές ή μη-γραμμικές), δηλαδή συσχετίσεις μεταξύ στοιχείων της χρονοσειράς. Η ανεξαρτησία σε μια χρονοσειρά δηλώνει πως δεν υπάρχει καμιά πληροφορία να αντλήσουμε από τη μελέτη της και η πραγματοποίηση της αποτελείται από τυχαίες τιμές και η μόνη περιγραφή που μπορούμε είναι στατική και περιορίζεται στην περιθώρια κατανομή της.

2.4.2 Λευκός θόρυβος

Είναι γνωστό πως η μηδενική συσχέτιση δύο τυχαίων μεταβλητών δε σημαίνει πως και ανεξαρτησία τους. Κατά τον ίδιο τρόπο μια χρονοσειρά μπορεί να μην έχει γραμμικές συσχετίσεις αλλά τα στοιχεία της να μην είναι ανεξάρτητα, δηλαδή να μην είναι iid. Μια τέτοια χρονοσειρά θα την ονομάζουμε **λευκό θόρυβο** [white noise] και θα την συμβολίζουμε $\mathrm{WN}\left(0, \sigma_X^2\right)$ με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_w^2. Μαθηματικά ο λευκός θόρυβος ορίζεται από τη σχέση $\mathrm{E}\left[X_i X_j\right] = \delta_{ij}\sigma_X^2$ για οποιεσδήποτε δύο τυχαίες μεταβλητές της χρονοσειράς $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$.

Σημειώνεται πως στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει συμφωνία στην έννοια του όρου "λευκός θόρυβος". Σε κάποια συγγράμματα (κυρίως στατιστικής), όπως εδώ, ο όρος "λευκός θόρυβος" χρησιμοποιείται για χρονοσειρές ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες, ενώ σε άλλα συγγράμματα (κυρίως φυσικής, μηχανικής) ταυτίζεται με τον όρο iid.

Αν επιπλέον τα στοιχεία της χρονοσειράς λευκού θορύβου ακολουθούν κανονική (Γκαουσιανή) κατανομή (είναι η γνωστή κατανομή Gauss με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας σε σχήμα καμπάνας), τότε η χρονοσειρά λέγεται **Γκαουσιανός λευκός θόρυβος** [Gaussian white noise]. Ο Γκαουσιανός λευκός θόρυβος ταυτίζεται με iid με Γκαουσιανή κατανομή αφού η κοινή Γκαουσιανή κατανομή ορίζεται μόνο από τις δύο πρώτες ροπές και μηδενική συσχέτιση συνεπάγεται ανεξαρτησία.

2.4.3 Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία

Η πιο απλή στοχαστική διαδικασία με συσχετίσεις είναι η Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία ή χρονοσειρά. Για κάθε τάξη *n* η κοινή κατανομή

$f_{X_t, X_{t-\tau_1}, \ldots, X_{t-\tau_{n-1}}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ της Γκαουσιανής χρονοσειράς είναι *n*-διάστατη Γκαουσιανή κατανομή. Για μια Γκαουσιανή χρονοσειρά η έννοια της ασθενής και αυστηρής στασιμότητας ταυτίζονται αφού η Γκαουσιανή κατανομή ορίζεται μόνο από τις δύο πρώτες ροπές.

2.4.4 Τυχαίος περίπατος

Ο **τυχαίος περίπατος** [random walk] είναι μια μη-στάσιμη χρονοσειρά $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$, όπου η κάθε τυχαία μεταβλητή Y_t για χρόνο *t* προκύπτει όταν στην προηγούμενη τυχαία μεταβλητή Y_{t-1} προστεθεί ένα τυχαίο βήμα, δηλαδή iid τυχαία μεταβλητή X_t,

$$Y_t = Y_{t-1} + X_t . \tag{4}$$

Το όνομα υποδηλώνει ακριβώς ότι η χρονοσειρά παράγεται από την κίνηση κάποιου (μεθυσμένου?) πάνω σε μια ευθεία γραμμή (στο $\mathbb{R}$), που σε κάθε χρονική στιγμή *t* κάνει ένα τυχαίο βήμα μπρος ή πίσω (X_t**)** από το σημείο που βρίσκεται (Y_{t-1}) στο επόμενο (Y_t).

Σημειώνεται ότι αρχίζοντας από κάποια τιμή X_0 (για $t = 0$) και αντικαθιστώντας επαναληπτικά τον ορισμό (4) του τυχαίου περιπάτου για χρόνους ως *t* ο ορισμός του τυχαίου περιπάτου μπορεί να γραφεί ως

$$Y_t = \sum_{k=0}^{t} X_k , \tag{5}$$

δηλαδή ως άθροισμα όλων των τυχαίων βημάτων ως τη στιγμή *t*. Από τη σχέση (5) είναι φανερό πως η μέση τιμή του τυχαίου περιπάτου είναι $\mathrm{E}[Y_t] = 0$ και η διασπορά του είναι $\sigma_Y^2 = \mathrm{E}\left[Y_t^2\right] = t\sigma_X^2$. Το τελευταίο αποτέλεσμα δηλώνει πως η διασπορά του τυχαίου περιπάτου είναι ανάλογη του χρόνου *t*, γεγονός που αποδεικνύει ότι η χρονοσειρά του τυχαίου περιπάτου είναι μη-στάσιμη. Αντίστροφα, αν πάρουμε τις πρώτες διαφορές της $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ προκύπτει η στάσιμη iid χρονοσειρά $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$.

Στη χρηματο-οικονομία ο τυχαίος περίπατος αποτελεί συχνή υπόθεση για παρατηρούμενους δείκτες και χαρακτηρίζει την λεγόμενη αποτελεσματική αγορά, δηλαδή όταν όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες επεξεργάζονται στιγμιαία με την εισαγωγή τους στην αγορά και αντανακλούν αμέσως σε νέες τιμές των συναλλασσόμενων προϊόντων. Ένα τυπικό διάγραμμα ιστορίας τυχαίου περιπάτου είναι αυτό στο Σχήμα 6α του γενικού δείκτη ΧΑΑ (κάτω από την υπόθεση ότι η χρηματιστηριακή αγορά της Ελλάδας για την περίοδο που αναφέρεται η χρονοσειρά είναι αποτελεσματική).

2.5 Εκτίμηση αυτοσυσχέτισης

Θεωρούμε πως έχουμε μια πραγματοποίηση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ της στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$. Σημειώνεται ότι η λέξη χρονοσειρά χρησιμοποιείται (θεωρητικά) για τη στοχαστική διαδικασία ή (πρακτικά) για την πραγματοποίηση της, δηλαδή το σύνολο των παρατηρήσεων.

Μπορεί να δειχθεί πως η εκτίμηση της μέσης τιμής μ της $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ από τις παρατηρήσεις $\{x_1,\ldots,x_n\}$ με το γνωστό μέσο όρο $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_t$ είναι αμερόληπτη. Δηλαδή η υπόθεση της ανεξαρτησίας των παρατηρήσεων στο δείγμα δεν είναι απαραίτητη για την αμερόληπτη εκτίμηση της μέσης τιμής (η χρονοσειρά μπορεί να έχει συσχετίσεις).

Η εκτίμηση της αυτοδιασποράς δίνεται ως

$$c_\tau \equiv c(\tau) \equiv \hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{t=\tau+1}^{n}(x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2), \qquad \tau = 0,1,\ldots,n-1 \tag{6}$$

και για τ=0 η διασπορά δίνεται ως

$$s_X^2 \equiv c(0) \equiv \gamma(0) \equiv \sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t^2 - \bar{x}^2). \tag{7}$$

Παρατηρούμε πως η εκτίμηση της αυτοδιασποράς και διασποράς στις σχέσεις (6) και (7) είναι μεροληπτική και η μεροληψία είναι $\mathrm{E}[c_\tau]-\gamma_\tau \cong -\frac{\tau}{n}\gamma_\tau - \left(\frac{n-\tau}{n}\right)\mathrm{Var}[\bar{x}]$, και είναι συνάρτηση της ίδιας της αυτοδιασποράς καθώς και της υστέρησης τ. Η μεροληψία μειώνεται θεωρώντας την εκτίμηση

$$c'_t \equiv c'(\tau) = \frac{1}{n-\tau}\sum_{t=\tau+1}^{n}(x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2) \tag{8}$$

και τότε η μεροληψία είναι $\mathrm{E}[c'_\tau]-\gamma_\tau \cong \mathrm{Var}[\bar{x}]$. Για μεγάλο n, η μεροληψία και των δύο εκτιμήσεων της αυτοδιασποράς τείνουν προς τη διασπορά της εκτίμησης της μέσης τιμής (που επίσης τείνει στο μηδέν).

Αντίστοιχα, η εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης είναι

$$r_\tau \equiv r(\tau) \equiv \hat{\rho}(\tau) = \frac{c(\tau)}{c(0)} = \frac{c(\tau)}{s_X^2} \tag{9}$$

Για τ=0 είναι $r(0)=r_\tau=1$. Για μεγάλο n, μπορεί να δειχθεί πως ο εκτιμητής r_τ ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή $r_\tau \sim \mathrm{N}(\rho_\tau, \mathrm{Var}[r_\tau])$, όπου η διασπορά του δίνεται από τον λεγόμενο τύπο του Bartlet

$$\mathrm{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\rho_m^2 + \rho_{m+\tau}\rho_{m-\tau} + 2\rho_\tau^2\rho_m^2 - 4\rho_\tau\rho_m\rho_{m-\tau}).$$

Για πολύ μεγάλο n ο παραπάνω τύπος απλοποιείται ως $\mathrm{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\rho_m^2$.

Η παραπάνω προσέγγιση για τη διασπορά της δειγματικής αυτοσυσχέτισης r_τ μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε όρια σημαντικότητας της αυτοσυσχέτισης ως εξής. Για παρατηρούμενη χρονοσειρά λευκού θορύβου, δηλαδή ασυσχέτιστες παρατηρήσεις, θεωρητικά έχουμε $\rho_\tau = 0,\ \forall\,\tau \neq 0$. Για μεγάλο n, σύμφωνα με την παραπάνω προσέγγιση της διασποράς του r_τ, η δειγματική αυτοσυσχέτιση θα ακολουθεί κανονική κατανομή $r_\tau \sim \mathrm{N}(0,1/n)$.

Η κατανομή του r_τ για λευκό θόρυβο μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε (παραμετρικό) έλεγχο σημαντικότητας για την αυτοσυσχέτιση, δηλαδή $\mathrm{H}_0 : \rho_\tau = 0$ και $\mathrm{H}_1 : \rho_\tau \neq 0$. Θεωρώντας ως στατιστικό ελέγχου το r_τ, η απορριπτική περιοχή είναι

$$R = \left\{ r_t \mid \left| \frac{r_\tau}{\sqrt{1/n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$$ για στάθμη σημαντικότητας α.

Πρακτικά λοιπόν ορίζουμε ως σημαντική αυτοσυσχέτιση για κάποια υστέρηση τ, όταν η δειγματική αυτοσυσχέτιση r_τ είναι έξω από το όριο $\pm z_{1-a/2} 1/\sqrt{n}$, που για α=0.05 το όριο προσεγγιστικά είναι $\pm 2/\sqrt{n}$.

Παράδειγμα

Για μια χρονοσειρά 200 παρατηρήσεων δίνονται οι 10 πρώτες δειγματικές αυτοσυσχετίσεις

-0.38 -0.28 0.11 -0.08 0.02 0.00 0.01 0.07 -0.08 0.05

Αν υποθέσουμε πως η χρονοσειρά είναι λευκός θόρυβος ($H_0 : \rho_\tau = 0$) θα πρέπει $\mathrm{Var}[r_\tau] \cong \frac{1}{200} = 0.005$. Για α=0.05, το 95% των δειγματικών αυτοσυσχετίσεων αναμένουμε να βρίσκεται στο διάστημα

$$\pm 1.96 * \frac{1}{\sqrt{200}} = \pm 1.96 * 0.07 = \pm 0.139 .$$

Παρατηρούμε πως μόνο οι δύο πρώτες αυτοσυσχετίσεις είναι εκτός του ορίου σημαντικότητας και απορρίπτεται η υπόθεση πως δεν είναι σημαντικές. Μια τέτοια λοιπόν χρονοσειρά δε μπορεί να υποτεθεί ότι προέρχεται από στοχαστική διαδικασία λευκού θορύβου δηλαδή ότι είναι ακολουθία ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών.

2.6 Μετασχηματισμός μη-στάσιμης σε στάσιμη χρονοσειρά

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα της μη-στασιμότητας για να το μελετήσουμε πιο μεθοδικά. Υπάρχουν στατιστικοί έλεγχοι για να διερευνήσουμε τη στασιμότητα σε μια χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ αλλά δε θα μας απασχολήσουν εδώ. Θα δούμε όμως κάποιους βασικούς μετασχηματισμούς που εφαρμόζουμε σε μια φανερά μη-στάσιμη χρονοσειρά για να την κάνουμε στάσιμη και να προχωρήσουμε με την ανάλυση της μετασχηματισμένης χρονοσειράς.

Γενικά η απαλοιφή της τάσης ή της εποχικότητας (γενικά περιοδικότητας) γίνεται όταν δε μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις μεταβολές στη χρονοσειρά που οφείλονται σε τάσεις ή περιοδικότητα γιατί θεωρούμε ότι δημιουργούνται από άλλους παράγοντες που δε σχετίζονται με το σύστημα που θέλουμε να διερευνήσουμε ή περιγράψουμε. Για προβλέψεις, είτε συμπεριλαμβάνουμε την τάση και περιοδικότητα στο μοντέλο πρόβλεψης, είτε εκτιμούμε το μοντέλο στη χρονοσειρά που προκύπτει αφαιρώντας την τάση ή περιοδικότητα και στις προβλέψεις του μοντέλου αυτού προσθέτουμε την τάση και περιοδικότητα για να πάρουμε την πρόβλεψη του παρατηρούμενου μεγέθους.

Αντίθετα, σε κάποιες εφαρμογές μπορεί η πληροφορία που θέλουμε να αντλήσουμε από τη χρονοσειρά να είναι ακριβώς η τάση ή η περιοδικότητα (ή και τα δύο). Τότε η ανάλυση της χρονοσειράς περιορίζεται στην εκτίμηση της τάσης ή της περιοδικότητας και θεωρεί την υπόλοιπη πληροφορία στις παρατηρήσεις χωρίς καμιά σημασία ή τυχαία.

Συνοψίζοντας, μια χρονοσειρά $\{y_t\}$ μπορεί σε κάθε χρονική στιγμή t να αναλυθεί στις συνιστώσες τάσης και περιοδικότητας, δηλαδή για τη μεταβλητή Y_t θεωρούμε το μοντέλο

$$Y_t = \mu_t + s_t + X_t\,, \tag{10}$$

όπου

- μ_t είναι η τάση ως συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή το αργά μεταβαλλόμενο μέσο επίπεδο τιμών της Y_t,
- s_t είναι η συνιστώσα εποχικότητας ή περιοδικότητας για κάποια περίοδο d και ισχύει $s_{t-d} = s_t$ και
- X_t είναι το υπόλοιπο, που συγκεντρώνει την πληροφορία (αν υπάρχει) για τη δυναμική του συστήματος απαλλαγμένο από τάση και περιοδικότητα.

[Σε πολλά βιβλία θεωρούν την εποχικότητα και περιοδικότητα ως δύο διαφορετικές συνιστώσες, η πρώτη με γνωστή περίοδο (μέρα, μήνας, εποχή) ενώ για τη δεύτερη η περίοδος πρέπει να εκτιμηθεί.]

2.6.1 Απαλοιφή της τάσης

Αρχικά θα υποθέσουμε πως η μη-στασιμότητα της χρονοσειράς οφείλεται αποκλειστικά στην ύπαρξη τάσης, δηλαδή θεωρούμε ότι η Y_t δίνεται ως

$$Y_t = \mu_t + X_t\,.$$

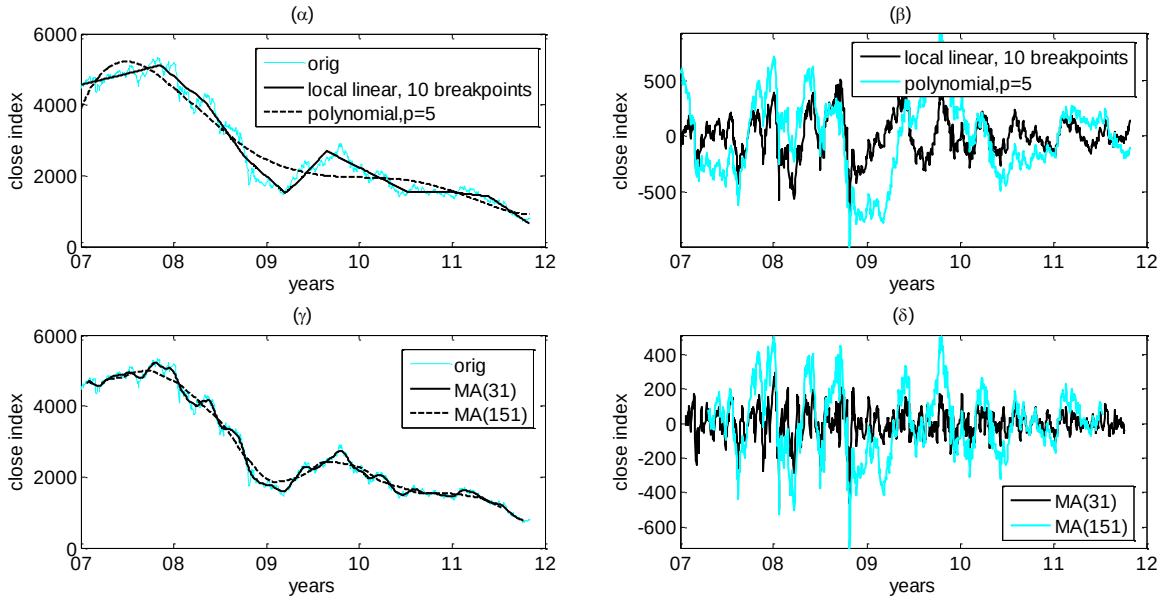
Στην Ενότητα 2.1 έγινε μια πρώτη εισαγωγή στην ύπαρξη καθοριστικής ή στοχαστικής τάσης σε χρονοσειρά. Την καθοριστική τάση που φαίνεται να υπάρχει στη χρονοσειρά της ολικής τάσης στο πείραμα πλαστικής παραμόρφωσης (δες Σχήμα 5) την εκτιμήσαμε με πολυώνυμο πρώτου και πέμπτου βαθμού, ενώ τη στοχαστική τάση στη χρονοσειρά του γενικού δείκτη ΧΑΑ (δες Σχήμα 6) την απαλείψαμε παίρνοντας πρώτες διαφορές, ή διαφορές των λογαρίθμων των τιμών (για να σταθεροποιήσουμε και τη διασπορά των τιμών).

Γενικά αν η τάση στη χρονοσειρά είναι καθοριστική μπορούμε να την εκτιμήσουμε και στη συνέχεια να την απαλείψουμε [detrend] με κάποια **παραμετρική συνάρτηση *f*(*t*) του χρόνου**, όπως με πολυώνυμο κάποιου βαθμού p

$$\mu_t = f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p\,.$$

Όταν η τάση όμως δε φαίνεται να είναι κάποια γνωστή συνάρτηση του χρόνου, η προσαρμογή μιας συνάρτησης του χρόνου σε όλη τη χρονοσειρά δεν είναι κατάλληλη. Σε αυτήν την περίπτωση θα πάρουμε καλύτερα αποτελέσματα αν προσαρμόσουμε τη συνάρτηση $f(t)$ τοπικά σε συνεχόμενα τμήματα της χρονοσειράς.

Για τη χρονοσειρά του γενικού δείκτη ΧΑΑ δίνεται στο Σχήμα 8α η προσέγγιση της τάσης με πολυώνυμο βαθμού 5, καθώς και με τμηματικά γραμμική συνάρτηση του χρόνου χρησιμοποιώντας 10 σημεία τεμαχισμού [breakpoints]. Παρατηρούμε πως το σφαιρικό πολυώνυμο δεν προσαρμόζεται καλά στη χρονοσειρά του δείκτη ΧΑΑ και η χρονοσειρά των υπολοίπων συνεχίζει να παρουσιάζει τάσεις (δες Σχήμα 8β). Η χρήση του τμηματικά γραμμικού πολυωνύμου βελτιώνει την προσαρμογή, αλλά η χρονοσειρά των υπολοίπων συνεχίζει να παρουσιάζει αργές μεταβολές, λιγότερο από αυτές που παίρνουμε με την προσαρμογή του πολυωνύμου, που μπορούν όμως να χαρακτηριστούν ως τάσεις.



Σχήμα 8 (α) Προσαρμογή πολυωνύμου βαθμού 20 και τοπικού πολυωνύμου πρώτου βαθμού χρησιμοποιώντας 10 σημεία τεμαχισμού στη χρονοσειρά του γενικού δείκτη ΧΑΑ την περίοδο, με συμβολισμούς γραμμών όπως δίνονται στο ένθετο. (β) Οι χρονοσειρές των υπολοίπων από τις προσαρμογές των πολυωνύμων στο (α). (γ) Όπως στο (α) αλλά η προσαρμογή γίνεται με μοντέλα κινούμενου μέσου τάξης 31 και 151. (δ) Οι χρονοσειρές των υπολοίπων από τις προσαρμογές των μοντέλων κινούμενου μέσου στο (γ).

Όπως αναφέραμε στην Ενότητα 2.1 όταν η τάση είναι στοχαστική μπορεί να απαλειφθεί (και όχι να εκτιμηθεί!) παίρνοντας τις **πρώτες διαφορές**. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι

$$X_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t\,, \qquad (11)$$

όπου ∇ δηλώνει τον τελεστή της διαφοράς πρώτης τάξης και B είναι ο τελεστής υστέρησης [lag operator]. Αν η χρονοσειρά δε γίνει στάσιμη μπορούμε να πάρουμε πάλι πρώτες διαφορές και αυτός είναι ο **μετασχηματισμός διαφορών δεύτερης τάξης** [second differences]

$$X_t = \nabla^2 Y_t = \nabla(\nabla Y_t) = (1-B)(1-B)Y_t = (1-2B+B^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}\,.$$

Γενικά στην πράξη χρησιμοποιούμε συνήθως διαφορές τάξης ένα (πρώτες διαφορές) γιατί στις περισσότερες περιπτώσεις οι τοπικές τάσεις μπορεί να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από γραμμικά πολυώνυμα. Πράγματι αν η τάση είναι τοπικά γραμμική, δηλαδή είναι $\mu_t = a_0 + a_1 t$, απαλείφεται με τις πρώτες διαφορές. Ο μετασχηματισμός των πρώτων διαφορών δίνει

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \mu_t - \mu_{t-1} + X_t - X_{t-1}$$

όπου η τάση στη νέα χρονοσειρά είναι

$$\mu_t - \mu_{t-1} = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1(t-1) = a_1\,,$$

δηλαδή σταθερή ως προς το χρόνο και άρα έχει απαλειφθεί. Γενικά αν η τάση εκφράζεται τοπικά με πολυώνυμο βαθμού p, απαλείφεται με χρήση διαφορών τάξης p, $\nabla^p Y_t$. Μάλιστα μπορεί να δειχθεί πως $\nabla^p Y_t = p!c + X_t$.

Για το παράδειγμα του γενικού δείκτη ΧΑΑ ο μετασχηματισμός των πρώτων διαφορών είναι ικανοποιητικός καθώς η νέα χρονοσειρά παρουσιάζει μόνο διακυμάνσεις γύρω από το μηδέν (δες Σχήμα 6β).

Ένας τρίτος τρόπος απαλοιφής της τάσης είναι με τη χρήση φίλτρου **κινούμενου μέσου όρου τάξης** $2q+1$ [moving average (MA) filter]. Για κάθε χρονική στιγμή *t*, $q<t\le n-q$, το στοιχείο της τάσης μ_t της χρονοσειράς $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ εκτιμάται από τον τοπικό μέσο των παρατηρήσεων στο διάστημα $[t-q, t+q]$ δηλαδή

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{j=-p}^{q} y_{t-j}\,. \tag{12}$$

Η τιμές $\{\hat{\mu}_{q+1}, \hat{\mu}_{q+2}, \ldots, \hat{\mu}_{n-q+1}\}$ αφαιρούνται από τις αντίστοιχες αρχικές παρατηρήσεις και η χρονοσειρά $\{x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_{n-q+1}\}$ που προκύπτει είναι απαλλαγμένη από τάσεις. Οι πρώτες και οι τελευταίες παρατηρήσεις παραλείπονται ή θέτονται ίσες με τις αρχικές.

Γενικά μπορεί ο κινούμενος μέσος να είναι σταθμισμένος,

$$\hat{\mu}_t = \sum_{j=-q}^{q} a_j y_{t-j}, \qquad \sum_{j=-q}^{q} a_j = 1.$$

Είναι φανερό πως ο απλός κινούμενος μέσος προκύπτει από την παραπάνω έκφραση για συντελεστές στάθμισης

$$a_j = \frac{1}{2q+1},\ j=-q,\ldots,q\,.$$

Αν η τάξη του κινούμενου μέσου είναι άρτιος αριθμός 2*q*, μπορεί να ορισθεί όπως στη σχέση (12) αλλά με στάθμιση 0.5 στις ακραίες τιμές για χρόνο *t*-*q* και *t*+*q*, δηλαδή

$$\hat{s}_t = \frac{1}{d}(0.5y_{t-d/2} + y_{t-d/2+1} + \cdots + y_{t+d/2-1} + 0.5y_{t+d/2}) \tag{13}$$

Η εκλογή του *q* παίζει σημαντικό ρόλο στην εξομάλυνση της σειράς και στη συνέχεια στην απαλοιφή της τάσης. Αν θέλουμε να απαλείψουμε μόνο πολύ αργές μεταβολές (τάσεις) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μεγάλη τάξη, ενώ για την απαλοιφή μεταβολών σε μικρότερη χρονική κλίμακα η τάξη πρέπει να είναι αντίστοιχα μικρή. Για το παράδειγμα του γενικού δείκτη ΧΑΑ, το φίλτρο MA(31) (δηλαδή για $q=31$) φαίνεται να απάλειψε τις τάσεις από τη χρονοσειρά του γενικού δείκτη και η χρονοσειρά μοιάζει περισσότερο με αυτήν από τις πρώτες διαφορές (δες Σχήμα 6β) παρά με τις χρονοσειρές των υπολοίπων από προσαρμογή πολυωνύμου (δες Σχήμα 8β). Αυξάνοντας την τάξη σε 151, μόνο πολύ αργές μεταβολές εξαλείφονται, παρόμοια με την προσαρμογή πολυωνύμου.

Τέλος θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν δεν έχουμε κάποια πληροφορία για τη μορφή της τάσης που θέλουμε να απαλείψουμε (σε ποια χρονική κλίμακα πιστεύουμε ότι οι αργές μεταβολές είναι άσχετες με το υπό μελέτη σύστημα και ορίζονται από εξωγενείς παράγοντες που δε μας ενδιαφέρει να τους εμπλέξουμε στην ανάλυση μας), τότε δεν είναι ξεκάθαρο ποια μέθοδος ή παράμετρος μεθόδου απαλοιφής τάσης είναι η πιο κατάλληλη. Στο παράδειγμα του γενικού δείκτη ΧΑΑ, συνίσταται η μέθοδος των πρώτων διαφορών (ή καλύτερα των αποδόσεων), γιατί μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το σύστημα που περιγράφει τις ημερήσιες μεταβολές του δείκτη. Αν θα θέλαμε να μελετήσουμε τις διακυμάνσεις του ημερήσιου δείκτη σε χρονικό ορίζοντα εβδομάδας ή μήνα, θα προτιμούσαμε ενδεχομένως να απαλείψουμε την τάση με κινούμενο μέσο με κατάλληλη τάξη (7 ή 30 αντίστοιχα, ή καλύτερα 5 και 22).

2.6.2 Απαλοιφή περιοδικότητας ή εποχικότητας

Υποθέτουμε τώρα πως η χρονοσειρά έχει περιοδικότητα ή εποχικότητα και η Y_t δίνεται ως

$$Y_t = s_t + X_t,$$

όπου η περίοδος της περιοδικής συνάρτησης s_t έχει γνωστή περίοδο d. Αν η περιοδικότητα αντιστοιχεί σε κάποια γνωστή περίοδο, όπως 24 ώρες ή 12 μήνες, αναφέρεται ως εποχικότητα. Όπως για την τάση, μπορεί η περιοδική συνάρτηση να είναι τέτοια που επιτρέπει την προσέγγιση της με κάποια γνωστή (παραμετρική) **περιοδική συνάρτηση**, $s_t = f(t)$, όπως π.χ. μια ημιτονοειδής συνάρτηση. Συχνά όμως η μορφή της περιοδικής συνάρτησης δεν είναι συγκεκριμένη.

Γενικά για γνωστή περίοδο d, ένας απλός τρόπος εκτίμησης της s_t είναι από τους **μέσους όρους των στοιχείων της περιοδικής συνάρτησης**, s_i $i=1,\ldots,d$**.** Αν $k = \lfloor n/d \rfloor$ είναι ο αριθμός των περιόδων στη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, τότε το κάθε στοιχείο της περιοδικής συνάρτησης s_i μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\hat{s}_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{i+jd} \ . \tag{14}$$

Ένας δεύτερος τρόπος εκτίμησης της περιοδικής συνάρτησης είναι με τον **κινούμενο μέσο όρο θέτοντας την τάξη του ίση με την περίοδο *d***. Η εξομάλυνση με το φίλτρο αυτό έχει ως αποτέλεσμα να καταστραφεί η περιοδικότητα, δηλαδή παίρνοντας τον κινούμενο μέσο όρο τάξης d σε μεγάλο βαθμό απαλείφουμε το περιοδικό στοιχείο περιόδου d. Για να εκτιμήσουμε το s_t με ακρίβεια (και στη συνέχεια να το απαλείψουμε) θα πρέπει να πάρουμε πρώτα τη διαφορά της αρχικής χρονοσειράς $\{y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_{n-q+1}\}$ και του κινούμενου μέσου $\{\hat{\mu}_{q+1}, \hat{\mu}_{q+2}, \ldots, \hat{\mu}_{n-q+1}\}$, έστω $w_t = y_t - \mu_t$ (εδώ έχουμε υποθέσει πως $d=2q+1$, αν το d είναι άρτιος χρησιμοποιούμε τη διόρθωση της σχέσης (13)). Στη συνέχεια παίρνουμε το μέσο όρο των $w_t = w_{i+jd}$ ως προς κάθε στοιχείο i για $i=1,\ldots,d$, έστω $\bar{w}_i$. Αν τα $\bar{w}_i$ για $i=1,\ldots,d$ δεν αθροίζονται στο 0, αφαιρούμε τη μέση τιμής τους και η εκτίμηση της περιοδικής συνάρτησης είναι

$$\hat{s}_i = \bar{w}_i - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} w_j, \qquad j = 1,\ldots,d \ , \tag{15}$$

όπου $\hat{s}_{t-d} = \hat{s}_t$.

Αν μας ενδιαφέρει απλά να απαλείψουμε το περιοδικό στοιχείο περιόδου d (δηλαδή δε μας ενδιαφέρει να το εκτιμήσουμε), μπορούμε να πάρουμε της διαφορές υστέρησης d, ή ***d*-διαφορές** [d-differencing]

$$\nabla_d Y_t = Y_t - Y_{t-d} = (1 - B^d) Y_t \ . \tag{16}$$

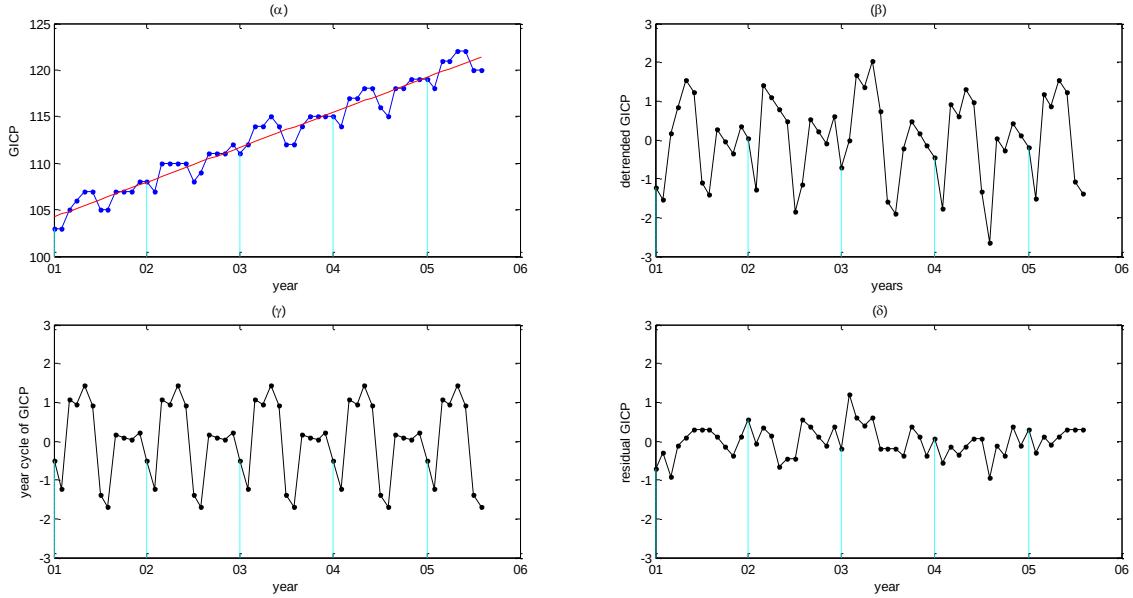
2.6.3 Απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας ή εποχικότητας

Όταν μια χρονοσειρά έχει τάση και περιοδικότητα συνδυάζονται οι μέθοδοι απαλοιφής τάσης και περιοδικότητας για την απαλοιφή και των δύο. Η σειρά που εφαρμόζεται η απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας δεν είναι γενικά καθορισμένη. Ας δούμε την απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας σ' ένα πραγματικό παράδειγμα.

Παράδειγμα

Στο Σχήμα 9α, δίνεται ο γενικός δείκτης τιμών καταναλωτή (general index for consumer price, GICP) σε μηνιαίες τιμές από τον Ιανουάριο 2001 ως τον Αύγουστο 2005. Η χρονοσειρά έχει λοιπόν μήκος $n = 56$.

Φαίνεται καθαρά, πως ο GICP παρουσιάζει σταθερή πληθωριστική τάση για όλη την περίοδο παρατήρησης αλλά και ασθενής ετήσια περιοδικότητα (εποχικότητα). Η πληθωριστική τάση μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά ως γραμμική συνάρτηση μ_t του χρόνου t (μήνα). Η προσαρμογή απλού γραμμικού μοντέλου παλινδρόμησης του μ_t ως προς το t, θεωρώντας τις παρατηρήσεις $\{y_t\}_{t=1}^{56}$ ως τιμές του μ_t, έδωσε $\mu_t = 103.9 + 0.31t$ και φαίνεται με γκρίζα γραμμή στο Σχήμα 9α.



Σχήμα 9 (α) Μηνιαίες τιμές γενικού δείκτη τιμών καταναλωτή (GICP) την περίοδο Ιανουάριος 2001 – Αύγουστος 2005 (η κάθετη διακεκομμένη γραμμή δηλώνει την αρχή του έτους). Στο διάγραμμα φαίνεται η προσαρμογή γραμμικού μοντέλου τάσης. Η ευθεία γραμμή δηλώνει την προσαρμοσμένη γραμμική τάση. (β) Η χρονοσειρά που προκύπτει από την αφαίρεση της γραμμικής τάσης στη χρονοσειρά GICP. (γ) Ο εκτιμούμενος ετήσιος κύκλος για την GICP. (δ) Η χρονοσειρά που προκύπτει από την αφαίρεση του εκτιμούμενου ετήσιου κύκλου από τη χρονοσειρά στο (β).

Αφαιρώντας αυτή τη γραμμική τάση από τη χρονοσειρά GICP βρίσκουμε τη χρονοσειρά απαλλαγμένη από τάση $y'_t = y_t - \hat{\mu}_t$ που δίνεται στο Σχήμα 9β. Αυτή είναι η κατάλληλη χρονοσειρά για ανάλυση αν θέλουμε να μελετήσουμε την μεταβολή του GICP απαλλαγμένη από τον πληθωρισμό. Εδώ φαίνεται καλύτερα η ετήσια περιοδικότητα του GICP αλλά δεν είναι προφανές με ποια περιοδική συνάρτηση του χρόνου μπορούμε να εκτιμήσουμε τον ετήσιο κύκλο [annual cycle]. Μπορούμε να εκτιμήσουμε τον ετήσιο κύκλο του GICP από τους μέσους όρους των στοιχείων της περιοδικής συνάρτησης, δηλαδή τις μέσες τιμές του κάθε μήνα για τα έτη 2001 – 2005 (ως το 2004 για τους μήνες Σεπτέμβριο – Δεκέμβριο). Η περιοδική χρονοσειρά $\{\hat{s}_t\}_{t=1}^{n}$ (του επαναλαμβανόμενου ετήσιου κύκλου) δίνεται στο Σχήμα 9γ όπου η περίοδος είναι $d = 12$. Τη μέση τιμή για τον Ιανουάριο την αφαιρούμε από τις 5 παρατηρήσεις του Ιανουαρίου (για τα έτη 2001 – 2005). Το ίδιο κάνουμε και για τους άλλους μήνες. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε τη χρονοσειρά των υπολοίπων $\{x_t\}_{t=1}^{n}$ (δες Σχήμα 9δ)

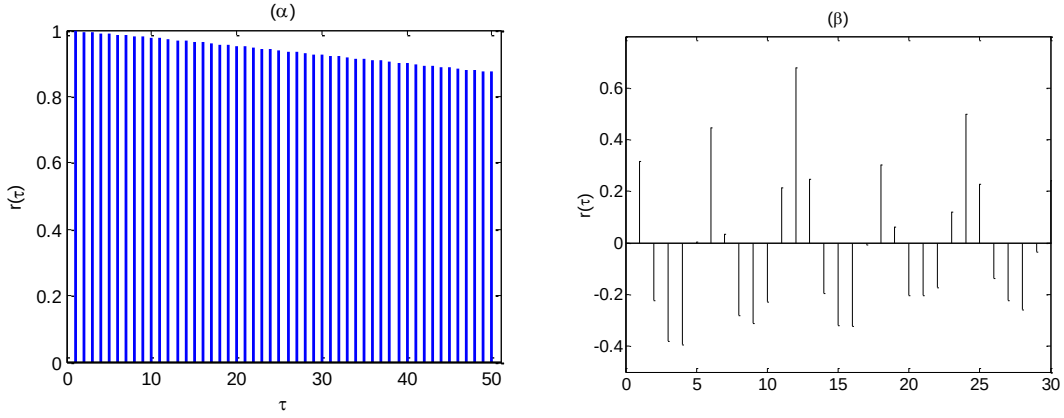
$$x_t = y'_t - \hat{s}_t = y_t - \hat{\mu}_t - \hat{s}_t .$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η χρονοσειρά είναι απαλλαγμένη από τάση και περιοδικότητα και δε φαίνεται να έχει κάποια κανονικότητα ή δομή.

Αν η χρονοσειρά $\{x_t\}_{t=1}^{n}$ είναι εντελώς τυχαία, δηλαδή δεν έχει να μας δώσει καμιά πληροφορία, τότε η ανάλυση σταματάει εδώ και περιοριζόμαστε να περιγράψουμε τη χρονική μεταβολή του GICP ως μια πληθωριστική γραμμική τάση σε συνδυασμό με έναν ετήσιο κύκλο.

Οι ορισμοί (6) και (9) της δειγματικής αυτοδιασποράς και αυτοσυσχέτισης, αντίστοιχα, έχουν νόημα όταν η χρονοσειρά είναι στάσιμη. Όταν δεν είναι στάσιμη δε μπορεί η αυτοσυσχέτιση (και η αυτοδιασπορά) να οριστούν ως συνάρτηση της υστέρησης αλλά ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή *t*.

Αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως προς την υστέρηση σε μια μη-στάσιμη χρονοσειρά με τάσεις, παρατηρούμε ότι έχει πολύ υψηλές τιμές και φθίνει πολύ αργά με την υστέρηση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ κοντινών χρονικά σημείων που είναι λόγο της τάσης. Αυτή η χαρακτηριστική μορφή της αυτοσυσχέτισης φαίνεται στο Σχήμα 10α για τη χρονοσειρά του γενικού δείκτη ΧΑΑ την περίοδο 1.1.2005 – 20.9.2005.



Σχήμα 10 (α) Αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς του γενικού δείκτη ΧΑΑ την περίοδο 1.1.2005 – 20.9.2005. (β) Αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς των μηνιαίων τιμών GICP την περίοδο Ιανουαρίου 2001 – Αυγούστου 2005, απαλλαγμένη από την πληθωριστική τάση.

Αντίστοιχα η αυτοσυσχέτιση μια (μη-στάσιμης) χρονοσειράς με έντονη περιοδικότητα ή εποχικότητα θα παρουσιάσει ταλαντώσεις με κορυφές σε υστερήσεις που είναι πολλαπλάσια της περιοδικότητας. Για παράδειγμα, παρατηρούμε στο Σχήμα 10β, πως η αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς των μηνιαίων τιμών GICP την περίοδο Ιανουαρίου 2001 – Αυγούστου 2005 (απαλλαγμένη από την πληθωριστική τάση), έχει χαρακτηριστικές κορυφές για υστέρηση 12 και 24. Επίσης παρατηρούμε πως εμφανίζει κορυφές για υστερήσεις 6 και 18, το οποίο δηλώνει την ύπαρξη και εξαμηνιαίου κύκλου, μικρότερης όμως ισχύος από τον ετήσιο.

2.7 Στατιστικός έλεγχος ανεξαρτησίας

Πριν προχωρήσουμε με την ανάλυση και την προσαρμογή μοντέλου στη στάσιμη χρονοσειρά, θα πρέπει να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο η χρονοσειρά να είναι ανεξάρτητη (ακολουθία iid τυχαίων μεταβλητών). Η κατάλληλη μεθοδολογία γι αυτό είναι να κάνουμε στατιστικό έλεγχο για τη μηδενική υπόθεση (H_0) ότι η χρονοσειρά είναι iid.

Μια στάσιμη χρονοσειρά είναι γραμμικά ασυσχέτιστη όταν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι μηδενική για κάθε υστέρηση ($\tau > 0$). Ο λευκός θόρυβος είναι μια γραμμικά ασυσχέτιστη χρονοσειρά αλλά κάθε γραμμικά ασυσχέτιστη χρονοσειρά δεν είναι λευκός θόρυβος. [Σε κάποια βιβλία ανάλυσης χρονοσειρών η γραμμικά ασυσχέτιστη χρονοσειρά με μέση τιμή 0 καλείται λευκός θόρυβος]. Μπορεί λοιπόν μια χρονοσειρά να έχει μηδενικές γραμμικές συσχετίσεις αλλά μη-μηδενικές μη-

γραμμικές συσχετίσεις. Παρόλα αυτά στην ανάλυση χρονοσειρών στα πλαίσια της υπόθεσης γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας είναι ικανοποιητικό να ελέγξουμε την ύπαρξη συσχέτισης, δηλαδή μη-μηδενικής αυτοσυσχέτισης.

Θεωρητικά η αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς λευκού θορύβου είναι μηδενική για $\tau > 0$. Πρακτικά όμως η αυτοσυσχέτιση εκτιμάται από μια πεπερασμένη χρονοσειρά (κάποιου μήκους *n*) και άρα θα έχει διακυμάνσεις γύρω από το 0. Στην Ενότητα 2.5 αναφέραμε πως η δειγματική αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς λευκού θορύβου ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή, $r_\tau \sim \mathrm{N}(0,1/n)$ και για αυτό θεωρούμε ότι η αυτοσυσχέτιση για κάποιο τ είναι στατιστικά ασήμαντη σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 αν $r_\tau \in \left[-2/\sqrt{n}, 2/\sqrt{n}\right]$. Τα παρακάτω όρια ορίζουν και την απορριπτική περιοχή (για α=0.05) για τον παραμετρικό έλεγχο σημαντικότητας για την αυτοσυσχέτιση, δηλαδή $\mathrm{H}_0 : \rho_\tau = 0$ και $\mathrm{H}_1 : \rho_\tau \neq 0$.

Αν λοιπόν η χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι λευκός θόρυβος η αυτοσυσχέτιση r_τ για κάθε τ θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα $\pm 2/\sqrt{n}$ με πιθανότητα 0.95. Με άλλα λόγια αν πάνω από 5% των τιμών r_τ βρίσκονται έξω από το παραπάνω διάσημα, τότε η H_0 μπορεί να απορριφθεί. Αντίστροφα, το 1/20 των αυτοσυσχετίσεων μπορεί "κατά τύχη" να βρίσκεται έξω από το διάστημα $\left[-2/\sqrt{n}, 2/\sqrt{n}\right]$, δηλαδή αν υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση για υστερήσεις από 1 ως 20, κατά μέσο όρο μια από αυτές θα περιμένουμε να ξεπερνάει το όριο σημαντικότητας για α=0.05.

Αντί να κάνουμε στατιστικό έλεγχο για κάθε υστέρηση *τ*, είναι ακριβέστερο να ελέγξουμε τη σημαντικότητα της r_τ για ένα εύρος υστερήσεων συγχρόνως. Αυτός είναι ο γνωστός **έλεγχος Portmanteau** (Portmanteau test). Η στατιστική *Q* για αυτόν τον έλεγχο και για κάποια μέγιστη υστέρηση *k* έχει ορισθεί ως

$$Q = n\sum_{\tau=1}^{k} r_\tau^2 \tag{17}$$

από τους Box και Pierce και διορθώθηκε ως

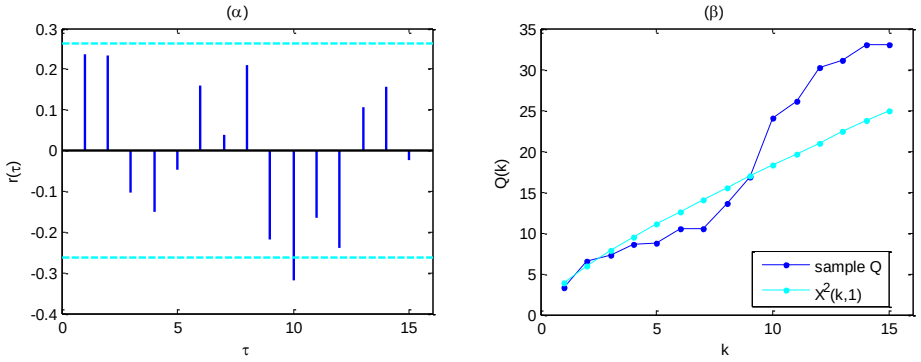
$$Q = n(n+2)\sum_{\tau=1}^{k} r_\tau^2 /(n-\tau) \tag{18}$$

από τους Ljung και Box. Έχει βρεθεί πως η στατιστική *Q* ακολουθεί τη $\mathcal{X}_k^2$ (Χι-τετράγωνο με *k* βαθμούς ελευθερίας) και έτσι μπορούμε να απορρίψουμε την H_0 αν η τιμή της *Q* που υπολογίζουμε στη χρονοσειρά παίρνει μεγάλες τιμές (δηλαδή αν για στάθμη σημαντικότητας *α*, είναι $Q > \mathcal{X}_{k;1-a}^2$).

Έχουν προταθεί και άλλοι έλεγχοι ανεξαρτησίας, όπως ο έλεγχος του σημείου καμπής ή σημείου αλλαγής πρόσημου [turning point test] και ο έλεγχος έλεγχο προσήμου διαφορών [difference sign test] και άλλοι λιγότερο γνωστοί. Επίσης στον έλεγχο ανεξαρτησίας έχουν χρησιμοποιηθεί ως στατιστικές και μη-γραμμικά μέτρα, όπως η αμοιβαία πληροφορία [mutual information]. Οι έλεγχοι αυτοί παρουσιάζουν τη δυσκολία ότι οι μη-γραμμικές στατιστικές συνήθως δεν έχουν γνωστή κατανομή κάτω από την H_0 (π.χ. κανονική ή $\mathcal{X}^2$). Το πρόβλημα αυτό λύνεται σχηματίζοντας την εμπειρική κατανομή της στατιστικής κάτω από την H_0 κάνοντας χρήση τεχνικών bootstrapping ή αντιμεταθέσεων (permutations). Αυτό το θέμα δε θα μας απασχολήσει εδώ.

Παράδειγμα

Συνεχίζουμε το προηγούμενο παράδειγμα για το γενικό δείκτη τιμών καταναλωτή GICP (δες Σχήμα 9α) και θεωρούμε τη χρονοσειρά των υπολοίπων που σχηματίστηκε με την απαλοιφή της τάσης και περιοδικότητας (δες Σχήμα 9δ). Η δειγματική αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς των υπολοίπων δίνεται στο Σχήμα 11α και το στατιστικό ελέγχου Portmanteau από τη σχέση (18) δίνεται στο Σχήμα 11β. Παρατηρούμε πως μόνο η αυτοσυσχέτιση για υστέρηση 10 είναι στατιστικά σημαντική και μάλιστα αυτή είναι η πρώτη μέγιστη υστέρηση που η τιμή του στατιστικού Q=24.06 είναι στην απορριπτική περιοχή ($\mathcal{X}^2_{10;0.95}=18.30$). Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν πως δεν υπάρχουν σημαντικές συσχετίσεις στη χρονοσειρά των υπολοίπων του δείκτη GICP, αφού για τις πρώτες 9 υστερήσεις δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση μηδενικής αυτοσυσχέτισης.



Σχήμα 11 (α) Γράφημα αυτοσυσχέτιση για τη χρονοσειρά υπολοίπων των μηνιαίων τιμών γενικού δείκτη τιμών καταναλωτή (GICP) την περίοδο Ιανουάριος 2001 – Αύγουστος 2005. Οι οριζόντιες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα όρια στατιστικής σημαντικότητας της αυτοσυσχέτισης. (β). Γράφημα του στατιστικού του ελέγχου Portmanteau (σχέση (18)) και των αντίστοιχων ορίων σημαντικότητας από την κατανομή $\mathcal{X}^2_k$ (δες ένθετο).

Ασκήσεις

1. Βρείτε την έκφραση για το μετασχηματισμό $X_t = T(Y_t)$ που σταθεροποιεί τη διασπορά της χρονοσειράς $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ όταν αυτή θεωρείται ότι είναι κάποια συνάρτηση της τάσης $\mathrm{Var}[Y_t] = f(\mu_t)$. Επίσης δείξτε τις συγκεκριμένες εκφράσεις του μετασχηματισμού T για τις περιπτώσεις της f του Πίνακας 1.

   Βοήθεια: Χρησιμοποιείστε ανάπτυξη Taylor πρώτης τάξης και ολοκληρώσετε την παράγωγο για να πάρετε την έκφραση της συνάρτησης T ως προς την f. Με αντικατάσταση της f σε κάθε περίπτωση βρίσκεται τον αντίστοιχο μετασχηματισμό.

2. Ελέγξτε αν η χρονοσειρά $X_t = \cos(\lambda t + a)$ είναι στάσιμη, όπου λ είναι σταθερά και $a \sim \mathrm{U}[-\pi, \pi]$ σταθερή όμως ως προς το χρόνο t. Κάνετε το ίδιο για τη χρονοσειρά $X_t = \cos(\lambda t + a) + Y_t$, όπου η Y_t στάσιμη χρονοσειρά με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_Y^2.

3. Έστω η $\{Z_t\}$ Γκαουσιανή iid διαδικασία με N(0,1) (δηλαδή μέση τιμή 0 και διασπορά 1) και η διαδικασία $\{X_t\}$ που ορίζεται ως

$$X_t = \begin{cases} Z_t & t \text{ άρτιος} \\ \dfrac{Z_{t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}} & t \text{ περιττός} \end{cases}$$

   Δείξτε ότι η $\{X_t\}$ είναι λευκός θόρυβος WN(0,1) αλλά όχι iid.

4. Έστω η χρονοσειρά που δίνεται από τη σχέση $X_t = a + bt$ για κάθε χρονική στιγμή t, όπου a και b σταθερές με $b \neq 0$. Δείξτε ότι για κάθε τ, $r_\tau \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

   Βοήθεια: Επικεντρωθείτε στις υψηλότερες δυνάμεις του n στην έκφραση για το r_τ.

5. Έστω η χρονοσειρά που δίνεται από τη σχέση $X_t = c\cos(\omega t)$ για κάθε χρονική στιγμή t, όπου c και ω σταθερές με $c \neq 0$ και $\omega \in (-\pi, \pi)$. Δείξτε ότι για κάθε τ, $r_\tau \to \cos(\omega\tau)$ καθώς $n \to \infty$.

   Βοήθεια: Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\sum_{t=1}^{n} \cos(\omega_k t) = 0$ όταν $\omega_k = 2\pi k / n$ και $k = 1, 2, \ldots, n/2$, και με βάση αυτήν δείξτε πως $\bar{x} \to 0$ όταν $n \to \infty$. Επίσης θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικές συναρτήσεις και την παραπάνω σχέση.

6. Οι τιμές της δειγματικής αυτοσυσχέτισης για τις 9 πρώτες υστερήσεις που υπολογίστηκαν σε μια χρονοσειρά 400 παρατηρήσεων είναι

   0.1094 -0.0201 0.0093 -0.0523 0.0314 -0.0095 -0.0602 -0.1223 -0.0858
   Μπορούμε να δεχτούμε πως η χρονοσειρά είναι λευκός θόρυβος.

7. Δίνεται η χρονοσειρά του ημερήσιου γενικού δείκτη ΧΑΑ (κλεισίματος) την περίοδο 2/1/2007 - 31/10/2011 (στήλη 7 στο αρχείο ASEJan07_Oct11.dat στην ιστοσελίδα του μαθήματος). Εξετάστε αν η χρονοσειρά των πρώτων διαφορών

είναι ανεξάρτητη. Κάνετε το ίδιο για τη χρονοσειρά των αποδόσεων. Για να ελέγξετε την ανεξαρτησία χρησιμοποιείστε τον έλεγχο Portmanteau. Αλλάζουν τα αποτελέσματα αν επαναλάβετε τον έλεγχο Portmanteau στα τετράγωνα των τιμών της χρονοσειράς των πρώτων διαφορών ή αποδόσεων. Ερμηνεύστε τα αποτελέσματα..

8. Η στοχαστική διαδικασία $X_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$, όπου ε_t μία ακολουθία ανεξάρτητων κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ_ε^2, είναι στάσιμη;

9. Δίνεται η $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, $\{Z_t\}$ λευκός θόρυβος WN(0,1), διαδικασία με συνάρτηση αυτοδιασποράς $\gamma_X(\tau)$ και παράμετρο ϕ. Αν $Y_t = \nabla X_t$, υπολογίστε για ποιες τιμές της ϕ η διασπορά της Y_t είναι μικρότερη της διασποράς της X_t.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δόθηκε μια σύντομη περιγραφή των στοχαστικών διαδικασιών και των στατιστικών τους ιδιοτήτων με έμφαση στην αυτοδιασπορά και αυτοσυσχέτιση. Η αυτοδιασπορά (καθώς και η αυτοσυσχέτιση) είναι βασικό χαρακτηριστικό των στοχαστικών διαδικασιών και ορίζει τις γραμμικές συσχετίσεις μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών (που για στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες ορίζονται για κάθε υστέρηση). Σε αυτό το κεφαλαίο θα μελετήσουμε κάποιες βασικές γραμμικές στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες και τη σχέση της αυτοσυσχέτισης με τις παραμέτρους που ορίζουν τη στοχαστική διαδικασία. Επιπλέον θα εισάγουμε τη μερική αυτοσυσχέτιση που συμπληρώνει τη γραμμική περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας.

3.1 Γενικά για γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες

Μια **γραμμική στοχαστική διαδικασία** [linear stochastic process] ή απλά **γραμμική χρονοσειρά** ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή t ως ένα άθροισμα ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών (λευκός θόρυβος)

$$X_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}, \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2) .$$

Σημειώνεται πως στη μελέτη γραμμικών χρονοσειρών και κατ' επέκταση στη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών μας ενδιαφέρει η συσχέτιση (εννοώντας της γραμμική συσχέτιση) και όχι η εξάρτηση, που είναι ισχυρότερη έννοια και εμπλέκει ενδεχομένως μη-γραμμικότητα. Για αυτό και δεν απαιτείται οι τυχαίες μεταβλητές Z_t να είναι iid αλλά απλά λευκός θόρυβος. Για να είναι η χρονοσειρά **στάσιμη** θα πρέπει το άθροισμα των συντελεστών ψ_i να μην απειρίζεται, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\psi_i| < \infty .$$

Για ευκολία στην περιγραφή θέτουμε $\psi_0 = 1$ (ρυθμίζοντας αντίστοιχα τη διασπορά σ_Z^2) και $\mu = 0$. Θεωρώντας τον τελεστή υστέρησης B η γραμμική χρονοσειρά έχει τη συμπαγή έκφραση

$$X_t = \psi(B) Z_t, \qquad \psi(B) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i B^i$$

Ο τελεστής του πολυωνύμου $\psi(B)$ μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικό φίλτρο με είσοδο το λευκό θόρυβο και έξοδο τη γραμμική χρονοσειρά. Για τα γραμμικά φίλτρα είναι γνωστό πως όταν η είσοδος είναι στάσιμη χρονοσειρά τότε και η έξοδος είναι στάσιμη χρονοσειρά.

Μπορεί να δειχθεί πως $\mathrm{E}[X_t] = 0$ (γενικά $\mathrm{E}[X_t] = \mu$) και η αυτοδιασπορά είναι

$$\gamma_X(\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_{i+\tau} \sigma_Z^2 .$$

Στον ορισμό της γραμμικής χρονοσειράς θεωρήσαμε άπειρο άθροισμα προς τη θετική και αρνητική κατεύθυνση του χρόνου. Ισοδύναμα η γραμμική χρονοσειρά ορίζεται με τον ίδιο τρόπο και για $\psi_i = 0$ όταν $i < 0$. Η έκφραση της γραμμικής χρονοσειράς

$$X_t = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \cdots = Z_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i Z_{t-i} ,$$

είναι αυτή **της διαδικασίας κινούμενου μέσου άπειρης τάξης MA(∞)** [moving average process]. Σε συμπαγή μορφή είναι

$$X_t = \psi(B) Z_t , \qquad \psi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i Z_{t-i} . \tag{19}$$

Η τυχαία μεταβλητή της γραμμικής χρονοσειράς για κάθε χρόνο *t* μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων τυχαίων μεταβλητών της χρονοσειράς

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i X_{t-i} + Z_t ,$$

και η έκφραση αυτή είναι της **αυτοπαλινδρομούμενης διαδικασίας άπειρης τάξης AR(∞)** [autoregressive process]. Η συνθήκη

$$\sum_{i=0}^{\infty} | \pi_i | < \infty$$

όπου $\pi_0 = 1$ επιτρέπει η Z_t να μπορεί να εκφρασθεί ως (άπειρο) άθροισμα της παρούσας τυχαίας μεταβλητής και προηγούμενων τυχαίων μεταβλητών της χρονοσειράς και αυτή η ιδιότητα αναφέρεται ως **αντιστρεψιμότητα** [reversibility]. Θεωρώντας και πάλι τον τελεστή υστέρησης η σχέση αυτή φαίνεται καλύτερα από τη συμπαγή έκφραση της αυτοπαλινδρόμησης άπειρης τάξης

$$\pi(B) X_t = Z_t , \qquad \pi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_0 B^i . \tag{20}$$

Θεωρώντας ότι ισχύει η αντιστρεψιμότητα έχουμε

$$X_t = \frac{1}{\pi(B)} Z_t , \qquad \psi(B) = \frac{1}{\pi(B)}$$

που δηλώνει την ισοδυναμία των δύο εκφράσεων της χρονοσειράς MA(∞) και AR(∞).

3.2 Αυτοπαλινδρομούμενες διαδικασίες

Η **αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης *p*, AR(*p*),** [autoregressive process of order *p*] ορίζεται από τον περιορισμό του αθροίσματος στην έκφραση αυτοπαλινδρόμησης της γραμμικής χρονοσειράς στους πρώτους *p* όρους

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t , \quad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2) , \tag{21}$$

όπου οι συντελεστές π_i έχουν αλλάξει σε ϕ_i, i=1,...,p. Κάνοντας και πάλι χρήση του τελεστή υστέρησης η AR(*p*) έχει τη συμπαγή έκφραση

$$\phi(B) X_t = Z_t , \tag{22}$$

όπου

$$\varphi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i B^i$$

είναι το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** [characteristic polynomial] της AR(p). Μπορεί να δειχθεί πως η AR(p) διαδικασία είναι στάσιμη όταν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, ή αντίστοιχα οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \ldots - \phi_{p-1}\lambda - \phi_p = 0$$

είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Η AR(p) διαδικασία ορίζει την τυχαία μεταβλητή X_t ως ένα γραμμικό συνδυασμό των προηγούμενων p τυχαίων μεταβλητών, $X_{t-1},\ldots X_{t-p}$, διαταραγμένο από λευκό θόρυβο. Το πρώτο μέρος (ο γραμμικός συνδυασμός των $X_{t-1},\ldots X_{t-p}$) μπορεί να θεωρηθεί το καθοριστικό ή αιτιοκρατικό μέρος [deterministic part] ενώ το δεύτερο μέρος (Z_t) ως το στοχαστικό.

3.2.1 Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης ένα

Η πιο απλή αυτοπαλινδρομούμενη στοχαστική διαδικασία είναι αυτή της τάξης ένα, AR(1),

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t, \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2), \tag{23}$$

με συνθήκη στασιμότητας $|\phi|<1$. Παρατηρείστε πως για $|\phi|=1$ η διαδικασία είναι αυτή του τυχαίου περιπάτου (όπου βέβαια τα τυχαία βήματα Z_t είναι iid και όχι μόνο λευκός θόρυβος). Σημειώνεται πως η Z_t δε συσχετίζεται με οποιοδήποτε X_s για $s<t$. Η στασιμότητα της AR(1) για $|\phi|<1$ μπορεί να δειχθεί και από τη γενική έκφραση της AR(1) ως γραμμική στοχαστική διαδικασία με διαδοχικές προς τα πίσω αντικαταστάσεις

$$X_t = Z_t + \phi Z_{t-1} + \phi^2 Z_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i} \,,$$

όπου η σχέση $|\phi|<1$ οδηγεί στη συνθήκη στασιμότητας της γραμμικής χρονοσειράς

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\phi^i| < \infty \,.$$

Από την παραπάνω σχέση του X_t έχουμε για τη διασπορά

$$\mathrm{E}[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} \sigma_Z^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi^2} \,.$$

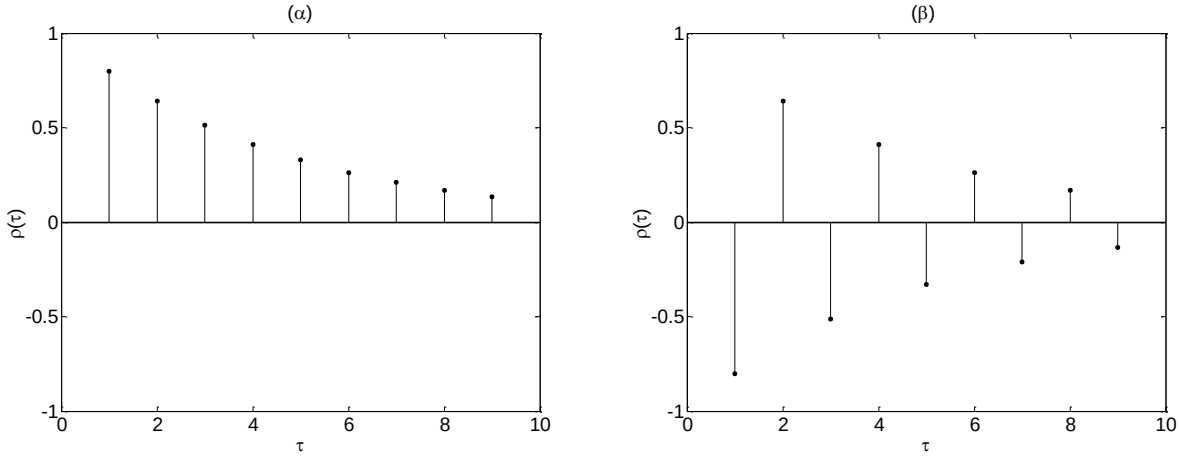
Υποθέτοντας τη στασιμότητα της AR(1) για $|\phi|<1$, προχωράμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για κάθε υστέρηση τ ως προς το συντελεστή ϕ της AR(1). Για $\tau = 1$, από την έκφραση της AR(1) στη σχέση (23) έχουμε

$$X_{t-1}X_t = X_{t-1}\left(\phi X_{t-1} + Z_t\right) \Rightarrow \mathrm{E}[X_{t-1}X_t] = \phi \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-1}Z_t]$$
$$\Rightarrow \gamma_X(1) = \phi \sigma_X^2$$
$$\Rightarrow \rho_X(1) = \phi$$

Γενικά για οποιαδήποτε υστέρηση τ έχουμε

$$X_{t-\tau}X_t = X_{t-\tau}\left(\phi X_{t-1} + Z_t\right) \Rightarrow \mathrm{E}[X_{t-\tau}X_t] = \phi\mathrm{E}[X_{t-\tau}X_{t-1}] + \mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_t]$$
$$\Rightarrow \gamma_X(\tau) = \phi\gamma_X(\tau-1)$$
$$\Rightarrow \rho_X(\tau) = \phi^\tau$$

Παρατηρούμε πως για θετική συντελεστή ϕ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης φθίνει εκθετικά ($\rho_\tau = \phi^\tau = e^{\ln\phi^\tau} = e^{\tau\ln\phi}$) και μονότονα με το τ, ενώ για αρνητικό ϕ φθίνει εκθετικά αλλά εναλλασσόμενα γύρω από το μηδέν (δες Σχήμα 12).



Σχήμα 12 (α) Γράφημα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης AR(1) χρονοσειράς για $\phi = 0.8$. (β) Το ίδιο για $\phi = -0.8$.

3.2.2 Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης δύο

Η αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης 2, AR(2), ορίζεται ως

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t, \quad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2). \tag{24}$$

Η AR(2) είναι στάσιμη όταν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, ή αντίστοιχα οι ρίζες του αντίστροφου πολυωνύμου $\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2$ είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Η λύση για τις δύο ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι

$$B_{1,2} = \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$$

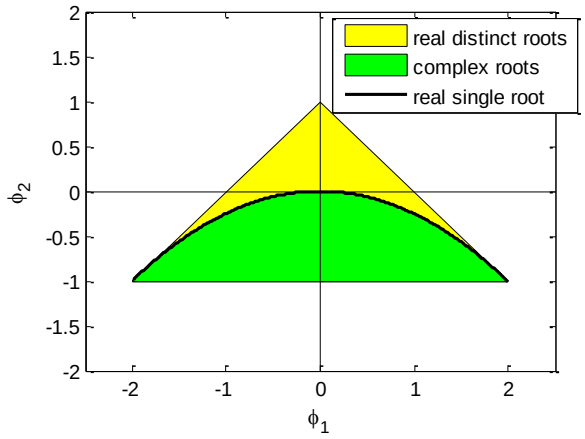
και η συνθήκη $|B_{1,2}| > 1$ μετά από πράξεις δίνει το παρακάτω σύστημα ανισοτήτων

$$\begin{aligned} &\phi_2 + \phi_1 < 1 \\ &\phi_2 - \phi_1 < 1 \\ &-1 < \phi_2 < 1 \end{aligned} \tag{25}$$

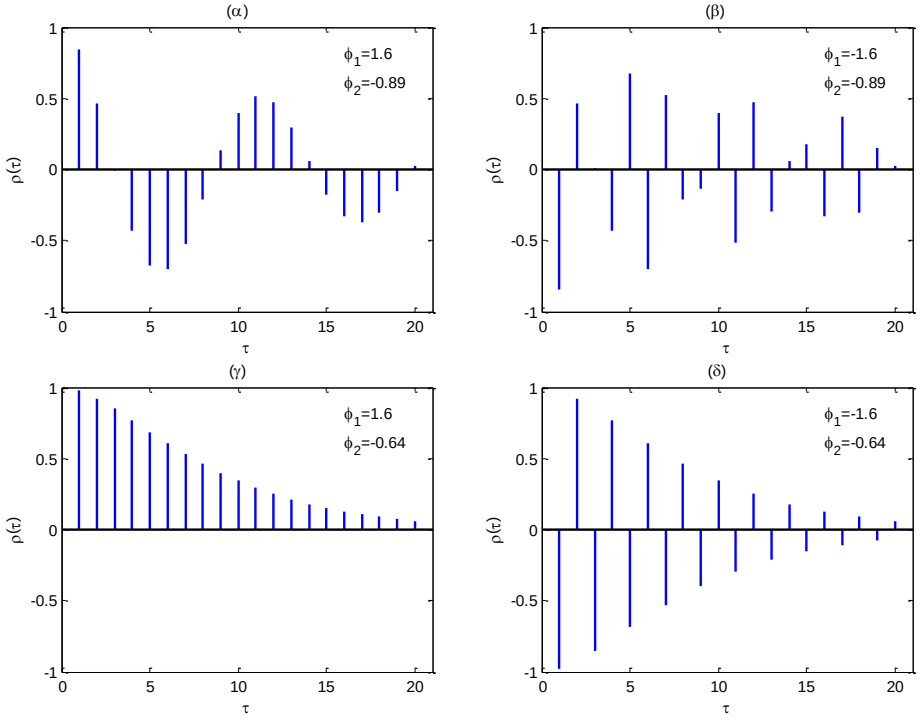
που καθορίζει την περιοχή ενός τριγώνου στο καρτεσιανό επίπεδο (ϕ_1, ϕ_2) που αντιστοιχεί σε στάσιμη διαδικασία AR(2), όπως φαίνεται στο Σχήμα 13. Ειδικότερα η AR(2) διαδικασία μπορεί να είναι στάσιμη με:

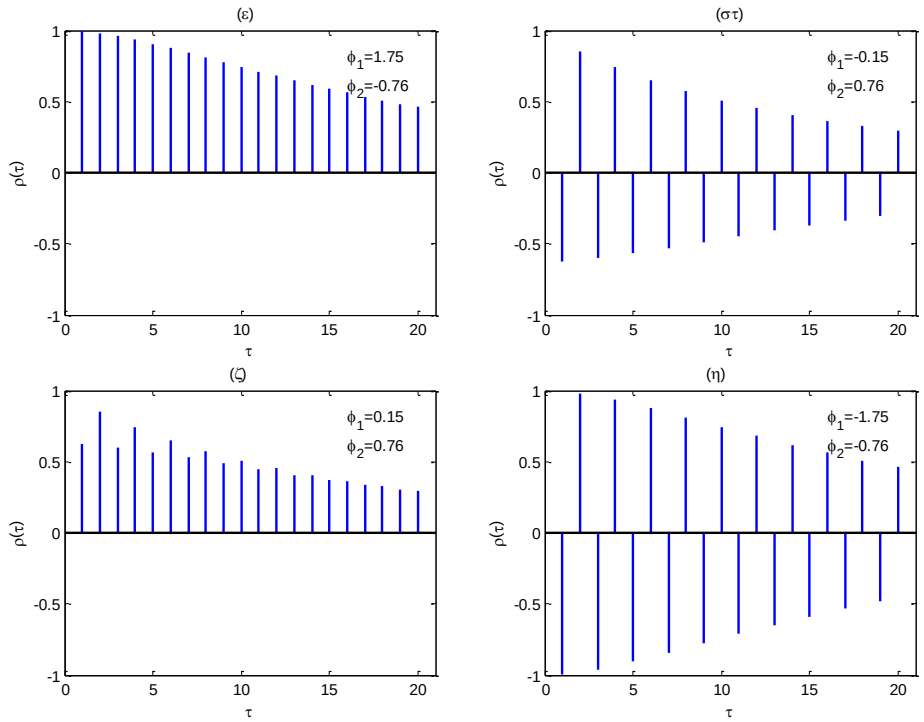
1. δύο πραγματικές ρίζες αν $\phi_1^2 + 4\phi_2 > 0$,
2. μια διπλή πραγματική ρίζα αν $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$,
3. δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες αν $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$.

Η μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης καθορίζεται από τον τύπο των δύο ριζών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14. Όταν οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές, η αυτοσυσχέτιση είναι φθίνουσα ταλάντωση ή φθίνουσα ταλάντωση με εναλλασσόμενο πρόσημο (Σχήμα 14α και β). Όταν η ρίζα είναι διπλή (και πραγματική) η αυτοσυσχέτιση φθίνει όπως και για AR(1) (Σχήμα 14γ και δ). Όταν οι ρίζες είναι διακεκριμένες και πραγματικές, η αυτοσυσχέτιση φθίνει αλλά όχι απαραίτητα μονοσήμαντα και με εναλλασσόμενο πρόσημο αν οι δύο ρίζες έχουν διαφορετικό πρόσημο (Σχήμα 14ε, στ, ζ και η).



Σχήμα 13 Συνθήκη στασιμότητας για τις παραμέτρους ϕ_1 και ϕ_2 διαδικασία AR(2).





Σχήμα 14: Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης διαδικασίας AR(2) για διάφορες τιμές των ριζών λ_1 και λ_2 του αντίστροφου χαρακτηριστικού πολυωνύμου: (α) λ_1=0.8+0.5i, λ_2=0.8-0.5i, (β) λ_1=-0.8+0.5i, λ_2=-0.8-0.5i, (γ) λ_1=0.8, λ_2=0.8, (δ) λ_1=-0.8, λ_2=-0.8, (ε) λ_1=0.8, λ_2=0.95, (στ) λ_1=0.8, λ_2=-0.95, (ζ) λ_1=-0.8, λ_2=0.95, (η) λ_1=-0.8, λ_2=-0.95. Σε κάθε σχήμα δίνονται οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών ϕ_1 και ϕ_2 της διαδικασίας AR(2).

Η ύπαρξη μιγαδικών ριζών είναι σημαντική στην ανάλυση χρονοσειρών γιατί μπορεί να εξηγήσει περιοδικές τάσεις ή *κύκλους* (cycles), που ειδικότερα στην οικονομετρία αναφέρονται ως *κύκλοι οικονομικής δραστηριότητας* (business cycles). Από τις τιμές των ϕ_1 και ϕ_2 μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση διάρκεια του στοχαστικού κύκλου d ως

$$d = \frac{360^o}{\cos^{-1}\left(\phi_1 / \left(2\sqrt{-\phi_2}\right)\right)}.$$

Όταν στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε μοντέλα που μπορούν να προσαρμοστούν σε χρονοσειρές, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι περιοδικά ή εποχικά χαρακτηριστικά μπορούμε να τα προσεγγίσουμε ακόμα και με μοντέλο στοχαστικής διαδικασίας AR(2) με μιγαδικές ρίζες χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Θα μελετήσουμε βέβαια και άλλα μοντέλα που ενδεχομένως να προσαρμόζονται καλύτερα σε χρονοσειρές με περιοδικότητα ή εποχικότητα.

Ας ορίσουμε τώρα την αυτοσυσχέτιση και διασπορά της X_t ως προς τις παραμέτρους της AR(2), ϕ_1 και ϕ_2 για την αυτοσυσχέτιση και επιπλέον διασπορά του λευκού θορύβου εισόδου σ_Z^2. Για την αυτοσυσχέτιση για υστέρηση ένα, πολλαπλασιάζοντας με X_{t-1} τα δύο μέρη της ισότητας (24) που ορίζει την AR(2) έχουμε

$$X_{t-1}X_t = X_{t-1}\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \Rightarrow$$
$$\mathrm{E}[X_{t-1}X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t-2}] + \mathrm{E}[X_{t-1}Z_t] \Rightarrow$$
$$\gamma_X(1) = \phi_1\sigma_X^2 + \phi_2\gamma_X(1) \Rightarrow \rho_X(1) = \phi_1 + \phi_2\rho_X(1)$$

Όμοια για υστέρηση 2, έχουμε $\rho_X(2) = \phi_1\rho_X(1) + \phi_2$. Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων για τ=1,2, έχουμε την έκφραση των $\rho_X(1) \equiv \rho_1$ και $\rho_X(2) \equiv \rho_2$ ως προς τους συντελεστές ϕ_1 και ϕ_2

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \qquad \rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} \tag{26}$$

και την έκφραση των ϕ_1 και ϕ_2 ως προς τις αυτοσυσχετίσεις ρ_1 και ρ_2

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad \phi_2 = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}. \tag{27}$$

Άρα για το αντίστροφο πρόβλημα του καθορισμού των συντελεστών της AR(2), που θα το συναντήσουμε στην εκτίμηση της AR(2) από παρατηρούμενη χρονοσειρά, για την εύρεση των ϕ_1 και ϕ_2 αρκούν οι αυτοσυσχετίσεις για τις δύο πρώτες υστερήσεις.

Η αυτοσυσχέτιση για κάθε υστέρηση $\tau > 2$ ορίζεται από τις αυτοσυσχετίσεις για τις προηγούμενες δύο υστερήσεις (και τους συντελεστές ϕ_1 και ϕ_2) ως

$$\rho_\tau = \phi_1\rho_{\tau-1} + \phi_2\rho_{\tau-2}. \tag{28}$$

Για τη διασπορά, πολλαπλασιάζοντας με X_t τα δύο μέρη της ισότητας (24) που ορίζει την AR(2) έχουμε

$$X_t X_t = X_t\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + Z_t\right) \;\Rightarrow\; \sigma_X^2 = \phi_1\gamma_X(1) + \phi_2\gamma_X(2) + \sigma_Z^2 \;\Rightarrow$$
$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2} \tag{29}$$

3.2.3 Αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία τάξης *p*

Τα χαρακτηριστικά της AR(2) διαδικασίας γενικεύονται για τάξη *p* (δες σχέση (21)). Η διαδικασία AR(*p*) είναι στάσιμη αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\phi(B) = 1-\phi_1 B-\phi_2 B^2 -\ldots-\phi_p B^p$$

είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου ή αντίστοιχα οι ρίζες της *χαρακτηριστικής εξίσωσης* (characteristic equation)

$$\lambda^p - \phi_1\lambda^{p-1} -\cdots-\phi_{p-1}\lambda-\phi_p = 0$$

είναι όλες μικρότερες της μονάδας σε μέγεθος. Οι ρίζες της χαρακτηριστική εξίσωσης καθορίζουν τη μορφή της αυτοσυσχέτισης και κατ' επέκταση την στοχαστική διαδικασία AR(*p*). Οι δυνατές περιπτώσεις για τις χαρακτηριστικές ρίζες είναι:

- *Μια χαρακτηριστική ρίζα να έχει μέγεθος μεγαλύτερο της μονάδας.* Τότε η AR(*p*) είναι **ασταθής** (unstable) και η χρονοσειρά που παράγεται από αυτή τη διαδικασία είναι **εκρηκτικά μη-στάσιμη** (explosive non-stationary), δηλαδή αυξάνει σε μέγεθος και τείνει γρήγορα στο άπειρο.
- *Η μεγαλύτερη χαρακτηριστική ρίζα να έχει μέγεθος μονάδα* (unit root). Η χρονοσειρά από μια τέτοια AR(*p*) διαδικασία δεν είναι επίσης στάσιμη αλλά έχει ένα ιδιαίτερο τύπο μη-στασιμότητας που λέγεται **μη-στασιμότητα μοναδιαίας ρίζας** (unit root non-stationarity). Για τάξη ένα, η διαδικασία είναι ο τυχαίος περίπατος. Τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές γιατί εξηγούν χρονοσειρές που δεν έχουν σταθερή μέση τιμή (δεν υπάρχει σταθερό επίπεδο τιμής).

Παίρνοντας τις πρώτες διαφορές μια τέτοιας χρονοσειράς η μοναδιαία ρίζα απαλείφεται.

- *Όλες οι ρίζες να έχουν μέγεθος μικρότερο της μονάδας*. Αυτή είναι η κλασική περίπτωση στάσιμης στοχαστικής διαδικασίας. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τις χαρακτηριστικές ρίζες:
  - Η πραγματική χαρακτηριστική ρίζα υποδηλώνει εκθετική φθίνουσα αυτοσυσχέτιση (δηλαδή η μνήμη της διαδικασίας χάνεται εκθετικά με την χρονική υστέρηση). Αν είναι θετική αυτό γίνεται μονότονα, ενώ αν είναι αρνητική γίνεται εναλλασσόμενα ως προς το μηδέν.
  - Δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες υποδηλώνουν την ύπαρξη κύκλου στη διαδικασία και η μνήμη της χάνεται με την χρονική υστέρηση ως κύμα που σβήνει.

Για AR διαδικασίες τάξης $p > 2$ οι χαρακτηριστικές ρίζες δρουν προσθετικά και συνθέτουν πολύπλοκες μορφές αυτοσυσχέτισης και γενικά δομής της μνήμης ης διαδικασίας. Για παράδειγμα μια διαδικασία AR(p), $p \geq 4$, με δύο ζευγάρια συζυγών μιγαδικών χαρακτηριστικών ριζών μπορεί να περιγράφει δύο κύκλους με διαφορετικές περιόδους. Γενικά όσο αυξάνει η τάξη της AR διαδικασίας μπορεί να δημιουργεί πιο σύνθετες καταστάσεις, δηλαδή πιο σύνθετες μορφές αυτοσυσχέτισης.

Ας δούμε τώρα πως ορίζεται η αυτοσυσχέτιση και διασπορά της X_t ως προς τις παραμέτρους της AR(p). Με την ίδια διαδικασία όπως για AR(2) έχουμε γενικά για υστέρηση τ

$$
\begin{aligned}
&X_{t-\tau}X_t = X_{t-\tau}\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t\right) \Rightarrow \\
&\mathrm{E}[X_{t-\tau}X_t] = \phi_1 \mathrm{E}[X_{t-\tau}X_{t-1}] + \phi_2 \mathrm{E}[X_{t-\tau}X_{t-2}] + \cdots + \phi_p \mathrm{E}[X_{t-p}X_{t-2}] + \mathrm{E}[X_{t-p}Z_t] \Rightarrow \\
&\gamma_X(\tau) = \phi_1\gamma_X(\tau-1) + \phi_2\gamma_X(\tau-2) + \cdots + \phi_p\gamma_X(\tau-p)
\end{aligned}
$$

που δίνει τη γενική έκφραση για την αυτοσυσχέτιση υστέρησης τ

$$\rho_\tau = \phi_1\rho_{\tau-1} + \phi_2\rho_{\tau-2} + \cdots + \phi_p\rho_{\tau-p}\,. \tag{30}$$

Σημειώνεται πως ισχύει $\rho_\tau = \rho_{-\tau}$ και από τη σχέση (30) έχουμε τις p εξισώσεις για τις p πρώτες υστερήσεις

$$
\begin{array}{lllll}
\rho_1 = & \phi_1 & +\phi_2\rho_1 & +\cdots & +\phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 = & \phi_1\rho_1 & +\phi_2 & +\cdots & +\phi_p\rho_{p-2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\rho_p = & \phi_1\rho_{p-1} & +\phi_2\rho_{p-2} & +\cdots & +\phi_p
\end{array}
$$

Αυτές είναι οι **κανονικές εξισώσεις** ή **εξισώσεις Yule-Walker** [normal equations or Yule-Walker equations]. Το σύστημα των εξισώσεων Yule-Walker μπορεί να γραφεί σε μορφή πίνακα και να λυθεί επίσης ως προς του συντελεστές του AR(p) ως

$$\boldsymbol{P}_p\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\rho}_p, \qquad \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{P}_p^{-1}\boldsymbol{\rho}_p \tag{31}$$

όπου

$$
\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.
$$

Γνωρίζοντας τους συντελεστές της AR(p) το σύστημα εξισώσεων Yule-Walker μπορεί να επιλυθεί ως προς τις αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2,..., ρ_p. Αντίστροφα γνωρίζοντας τις αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2,..., ρ_p το σύστημα εξισώσεων Yule-Walker μπορεί να επιλυθεί ως τους συντελεστές της AR(p) ϕ_1, ϕ_2,..., ϕ_p. Το τελευταίο θα το συναντήσουμε στην εκτίμηση των παραμέτρων της AR(p) από παρατηρούμενη χρονοσειρά.

Για τη διασπορά, πολλαπλασιάζοντας με X_t τα δύο μέρη της ισότητας (21) που ορίζει την AR(p) έχουμε

$$\begin{aligned} X_t X_t &= X_t\left(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t\right) \Rightarrow \\ \sigma_X^2 &= \phi_1\gamma_X(1) + \phi_2\gamma_X(2) + \cdots + \phi_p\gamma_X(p) + \sigma_Z^2 \Rightarrow \\ \sigma_X^2 &= \frac{\sigma_Z^2}{1-\phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \cdots - \phi_p\rho_p} \end{aligned} \tag{32}$$

3.3 Μερική αυτοσυσχέτιση

Η αυτοσυσχέτιση σε μια διαδικασία AR(p) φθίνει εκθετικά και δε μηδενίζεται μετά την υστέρηση p, δηλαδή παρόλο που η μεταβλητή $X_{t-\tau}$ για $\tau > p$ δεν συμπεριλαμβάνεται στην έκφραση που ορίζει τη X_t στη σχέση (21), συσχετίζεται με την X_t, $\text{Corr}(X_t, X_{t-\tau}) = \rho_\tau$, μέσω των χρονικά ενδιάμεσων μεταβλητών $X_{t-1},\ldots, X_{t-p}$. Θα θέλαμε να περιορίσουμε τη συσχέτιση των X_t και $X_{t-\tau}$ μόνο στην απευθείας συσχέτισης τους ουδετεροποιώντας την συσχέτιση που έχουν με τις $X_{t-1},\ldots, X_{t-\tau-1}$. Αυτή η συσχέτιση ορίζεται ως $\text{Corr}(X_t, X_{t-\tau} \mid X_{t-1},\ldots, X_{t-\tau-1})$ και αναφέρεται ως **μερική αυτοσυσχέτιση** [partial autocorrelation].

Για μια οποιοδήποτε στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}$, ένας τρόπος να εκφράσουμε τη μερική αυτοσυσχέτιση για κάποια υστέρηση τ, $\text{Corr}(X_t, X_{t-\tau} \mid X_{t-1},\ldots, X_{t-\tau-1})$, είναι να θεωρήσουμε τη σχέση (21) που ορίζει την AR(τ)

$$X_t = \phi_{\tau,1}X_{t-1} + \phi_{\tau,2}X_{t-2} + \cdots + \phi_{\tau,\tau}X_{t-\tau} + Z_t .$$

Η σχέση αυτή ερμηνεύει την επιλεγμένη παλινδρόμηση της X_t ως προς τις $X_{t-1},\ldots, X_{t-\tau-1}, X_{t-\tau}$ παρά ορίζει την $\{X_t\}$ διαδικασία ως AR(τ). Επειδή για κάθε υστέρηση τ, μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστοιχη σχέση παλινδρόμησης, οι συντελεστές έχουν ως δείκτη επιπρόσθετα το τ για να υποδηλώσει η παλινδρόμηση στην οποία αναφέρονται. Ο συντελεστής $\phi_{\tau,\tau}$ στην παραπάνω σχέση εκφράσει τη μερική αυτοσυσχέτιση των X_t και $X_{t-\tau}$. Θεωρώντας τις εξισώσεις Yule-Walker για τάξη τ και τη λύση της σχέσης (31), και ειδικότερα για το συντελεστή $\phi_{\tau,\tau}$ έχουμε

$$\phi_{\tau,\tau} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{\tau-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{\tau-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{\tau-1} & \rho_{\tau-2} & \rho_{\tau-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_\tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{\tau-2} & \rho_{\tau-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{\tau-3} & \rho_{\tau-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{\tau-1} & \rho_{\tau-2} & \rho_{\tau-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \tag{33}$$

όπου στον παρανομαστή είναι η ορίζουσα του πίνακα $\boldsymbol{P}_\tau$ και στο αριθμητή η ορίζουσα του πίνακα που έχει τις ίδιες πρώτες τ-1 στήλες όπως ο $\boldsymbol{P}_\tau$ αλλά η τελευταία στήλη του είναι το διάνυσμα $\boldsymbol{\rho}_\tau$ (δες σχέση (31)). Η σχέση (33) για τις τρεις πρώτες υστερήσεις είναι:

$$\tau = 1, \qquad \phi_{1,1} = \rho_1$$

$$\tau = 2, \qquad \phi_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\tau = 3, \qquad \phi_{3,3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Για μια AR(p) διαδικασία η μερική αυτοσυσχέτιση είναι μη-μηδενική για υστερήσεις ως και p, δηλαδή ισχύεις

$$\begin{aligned} \phi_{\tau,\tau} &\neq 0 \quad \text{για } 0 < \tau < p \\ \phi_{\tau,\tau} &= 0 \qquad \text{για } \tau \geq p \end{aligned} \tag{34}$$

Για παράδειγμα για AR(2), έχουμε για τις δύο πρώτες υστερήσεις,

$$\tau = 1, \qquad \phi_{1,1} = \rho_1$$

$$\tau = 2, \qquad \phi_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2},$$

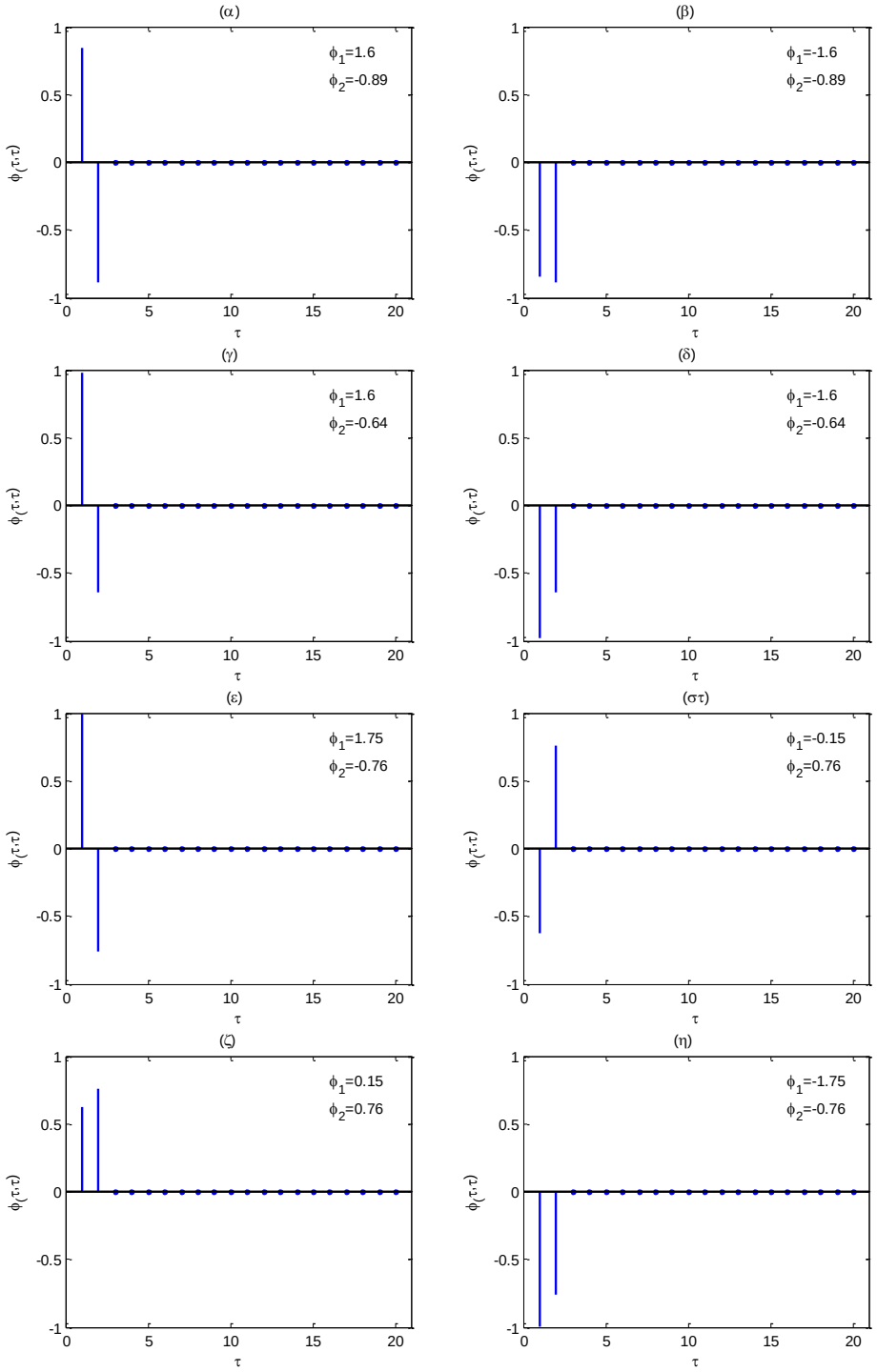
ενώ για υστέρηση 3,

$$\tau = 3, \qquad \phi_{3,3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \phi_1\rho_1 + \phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0,$$

όπου έγινε αντικατάσταση των στοιχείων της τελευταίας στήλης στον πίνακα του αριθμητή από τις σχέσεις που παρουσιάστηκαν για την αυτοσυσχέτιση της AR(2), που δηλώνουν πως η τελευταία στήλη είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων και άρα η ορίζουσα είναι μηδέν.

Η εύρεση των $\phi_{\tau,\tau}$ μπορεί να γίνει με τον **επαναληπτικό αλγόριθμος των Durbin-Levinson** [Durbin-Levinson recursive algorithm] όπου για κάθε τάξη τ οι συντελεστές $\phi_{\tau,1}, \phi_{\tau,2}, \ldots, \phi_{\tau,\tau}$ υπολογίζονται από τους συντελεστές τάξης τ-1.

Στο Σχήμα 15 δίνεται η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης για τις διαδικασίες AR(2) στο Σχήμα 14.



Σχήμα 15 Συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης διαδικασίας AR(2) για διάφορες τιμές των ριζών λ_1 και λ_2 του αντίστροφου χαρακτηριστικού πολυωνύμου: (α) λ_1=0.8+0.5i, λ_2=0.8-0.5i, (β) λ_1=-0.8+0.5i, λ_2=-0.8-0.5i, (γ) λ_1=0.8, λ_2=0.8, (δ) λ_1=-0.8, λ_2=-0.8, (ε) λ_1=0.8, λ_2=0.95, (στ) λ_1=0.8, λ_2=-0.95, (ζ) λ_1=-0.8, λ_2=0.95, (η) λ_1=-0.8, λ_2=-0.95. Σε κάθε σχήμα δίνονται οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών ϕ_1 και ϕ_2 της διαδικασίας AR(2).

3.4 Διαδικασίες κινούμενου μέσου

Η δεύτερη κλάση γραμμικών στοχαστικών διαδικασιών είναι αυτή του **κινούμενου μέσου τάξης *q*, MA(*q*)** [moving average process of order *q*]. Προκύπτει από τη σχέση

(19) της γενικής μορφής γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας, περιορίζοντας τους όρους του λευκού θορύβου στους q πιο πρόσφατους όρους

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}, \tag{35}$$

ή με χρήση του τελεστή υστέρησης

$$X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q) Z_t, \qquad X_t = \theta(B) Z_t, \tag{36}$$

όπου

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q \tag{37}$$

είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της MA(q). Η MA(q) είναι πάντα στάσιμη αφού δίνεται ως πεπερασμένο άθροισμα όρων λευκού θορύβου.

Η MA(q) διαδικασία ορίζει την τυχαία μεταβλητή X_t ως γραμμικό συνδυασμό των q πρόσφατων στοιχείων λευκού θορύβου, $Z_t, Z_{t-1}, \ldots Z_{t-q}$. Εδώ το καθοριστικό μέρος που υπήρχε στην AR(p) διαδικασία (ο γραμμικός συνδυασμός των $X_{t-1}, \ldots X_{t-p}$) αντικαθίσταται από το στοχαστικό, έτσι ώστε η μόνη πληροφορία που δίνεται για την X_t είναι από τις τυχαίες διαταράξεις στους $q+1$ πιο πρόσφατους χρόνους. Η διάρκεια της επίδρασης μιας τυχαίας διαταραχής είναι όσο και η τάξη q της MA.

Ένα σημαντικό ερώτημα για μια MA(q) διαδικασία είναι αν μπορούμε να εκφράσουμε τη Z_t ως προς τις X_s για χρόνους $s \le t$, δηλαδή να ορίσουμε την τυχαία διαταραχή Z_t γνωρίζοντας την X_t και όλες τις προηγούμενες της. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **αντιστρεψιμότητα** [invertibility] και αν ισχύει σημαίνει πως μπορούμε να αντιστρέψουμε το πολυώνυμο $\theta(B)$, ώστε $Z_t = \theta^{-1}(B) X_t$. Άρα η συνθήκη της αντιστρεψιμότητας είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\theta(B)$ να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

3.4.1 Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης ένα

Η διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης ένα, MA(1), δίνεται ως

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} = (1 - \theta B) Z_t, \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2), \tag{38}$$

και η συνθήκη αντιστρεψιμότητας είναι $|\theta| < 1$. Είναι μια αρκετά απλή διαδικασία που ορίζει τη τυχαία μεταβλητή της διαδικασίας ως τη σύνθεση της παρούσας τυχαίας διαταραχής με αυτήν της προηγούμενης χρονικής στιγμής.

Όπως και προηγουμένως για να βρούμε την αυτοσυσχέτιση για κάποια υστέρηση τ πολλαπλασιάζουμε την έκφραση της MA(1) με την $X_{t-\tau}$. Ξεκινώντας με τη διασπορά της X_t, για τ=0 έχουμε

$$X_t X_t = \left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right)\left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right) \quad \Rightarrow \sigma_X^2 = (1 + \theta^2)\sigma_Z^2. \tag{39}$$

Για υστέρηση ένα έχουμε

$$X_{t-1} X_t = \left(Z_{t-1} - \theta Z_{t-2}\right)\left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right) \quad \Rightarrow \gamma_X(1) = \theta \sigma_Z^2 \quad \Rightarrow \rho_1 = \frac{-\theta}{1 + \theta^2},$$

ενώ για υστέρηση δύο

$$X_{t-2} X_t = \left(Z_{t-2} - \theta Z_{t-3}\right)\left(Z_t - \theta Z_{t-1}\right) \quad \Rightarrow \gamma_X(2) = 0.$$

Γενικά η αυτοσυσχέτιση είναι

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases} \qquad (40)$$

Από τη σχέση της ρ_1 προκύπτει ότι η μέγιστη τιμής της είναι $\rho_1 = 0.5$ για $\theta = -1$ και η ελάχιστη $\rho_1 = -0.5$ για $\theta = 1$, δηλαδή για MA(1) έχουμε πάντοτε $|\rho_1| \leq 0.5$. Επίσης η σχέση που συνδέει τη ρ_1 με το συντελεστή θ είναι μη γραμμική και μάλιστα για κάθε ρ_1 υπάρχουν δύο λύσεις για το θ, είναι θ και $1/\theta$, από τις οποίες μόνο η μία πληροί τη συνθήκη αντιστρεψιμότητας. Δηλαδή οι δύο διαδικασίες MA(1)

$$X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}, \qquad X_t = Z'_t - 1/\theta Z'_{t-1}$$

έχουν την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (ο λευκός θόρυβος εισόδου δεν είναι ίδιος για τις δύο διαδικασίες, δες Άσκηση 2). Για παράδειγμα οι δύο MA(1)

$$X_t = Z_t - 0.4Z_{t-1}, \qquad X_t = Z'_t - 2.5Z'_{t-1}$$

έχουν συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

$$\rho_\tau = \begin{cases} -\dfrac{1}{2.9} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

Ενώ η αυτοσυσχέτιση είναι μη-μηδενική μόνο για την πρώτη υστέρηση, δε συμβαίνει το ίδιο για τη μερική αυτοσυσχέτιση. Από τη σχέση (33) για τη $\phi_{\tau,\tau}$ και υστερήσεις 1,2,3 έχουμε

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

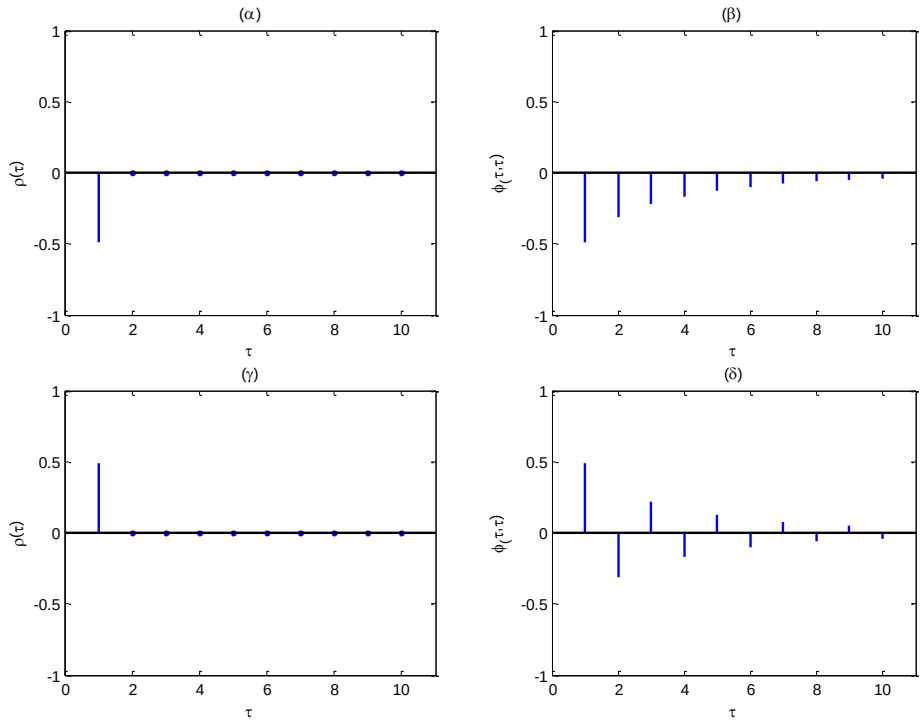
$$\phi_{2,2} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = -\frac{\theta^3}{1+\theta^2+\theta^4+\theta^6}$$

και γενικά

$$\phi_{\tau,\tau} = -\frac{\theta^\tau(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(\tau+1)}}, \qquad \tau \geq 1. \qquad (41)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης φθίνει εκθετικά με την υστέρηση τ, είτε μονότονα για $\theta > 0$ (και άρα $\rho_1 < 0$) ή εναλλασσόμενα γύρω από το μηδέν για $\theta < 0$ (και άρα $\rho_1 > 0$). Τα γραφήματα της αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης για θετικό και αρνητικό συντελεστή θ δίνονται στο Σχήμα 16.



Σχήμα 16 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ρ_τ και μερικής αυτοσυσχέτισης $\phi_{\tau,\tau}$ για διαδικασία MA(1) και θετικό και αρνητικό συντελεστή θ: (α) θ=0.8 και ρ_τ, (β) θ=0.8 και $\phi_{\tau,\tau}$, (γ) θ=-0.8 και ρ_τ, (δ) θ=-0.8 και $\phi_{\tau,\tau}$.

3.4.2 Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης δύο

Για τη διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης δύο, MA(2), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2$ και η MA(2) δίνεται ως

$$X_t=\theta(B)Z_t=Z_t-\theta_1 Z_{t-1}-\theta_2 Z_{t-2}, \qquad Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_Z^2). \tag{42}$$

Η MA(2) είναι πάντα στάσιμη. Είναι αντιστρέψιμη αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Η συνθήκη αυτή περιορίζει τις τιμές των συντελεστών θ_1 και θ_2 κατά τον ίδιο τρόπο που η συνθήκη στασιμότητας της διαδικασίας AR(2) περιορίζει τις τιμές των συντελεστών ϕ_1 και ϕ_2 (δες τις ανισότητες στην (25) και το Σχήμα 13).

Με τον ίδιο τρόπο όπως και για τη διαδικασία MA(1), υπολογίζουμε τη διασπορά και αυτοσυσχέτιση της MA(2)

$$\sigma_X^2=(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_Z^2 \tag{43}$$

$$\rho_\tau=\begin{cases}\dfrac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau=1\\[2ex] \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & \tau=2\\[2ex] 0 & \tau>2\end{cases} \tag{44}$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις, παρατηρούμε πως η αυτοσυσχέτιση μπορεί να είναι μη-μηδενική μόνο για υστέρηση ένα και δύο (οι ρ_1 και ρ_2 φράζονται σε όρια μικρότερα του 1 και μεγαλύτερα του -1 αλλά οι εκφράσεις είναι πολύπλοκες και δίνονται με βάση τα όρια των θ_1 και θ_2 για αντιστρεψιμότητα).

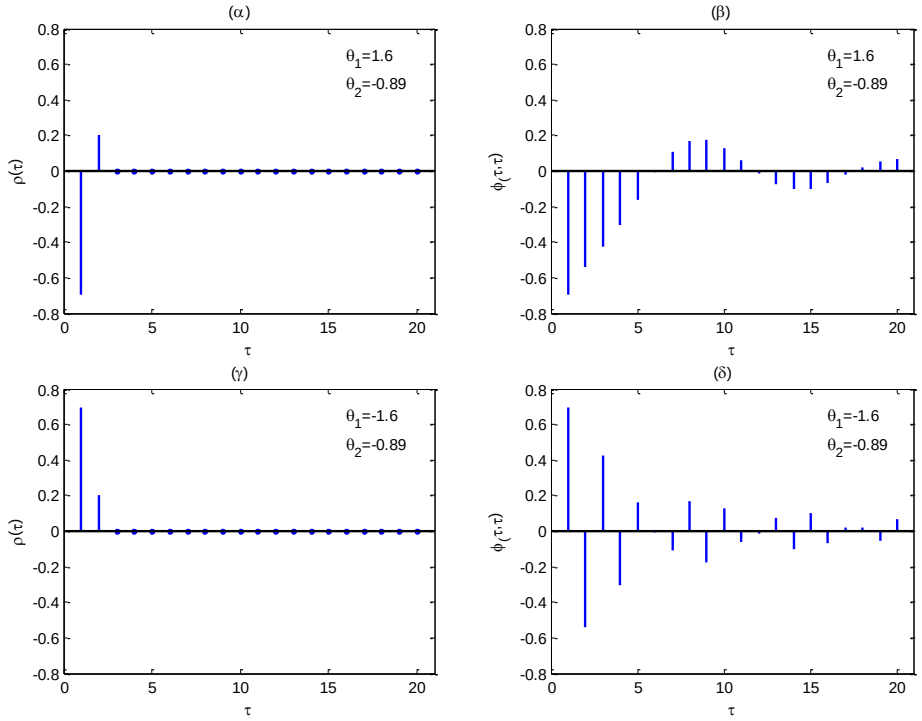
Για τη μερική αυτοσυσχέτιση, από τη σχέση (33) για τη $\phi_{\tau,\tau}$ και υστερήσεις 1,2,3 έχουμε

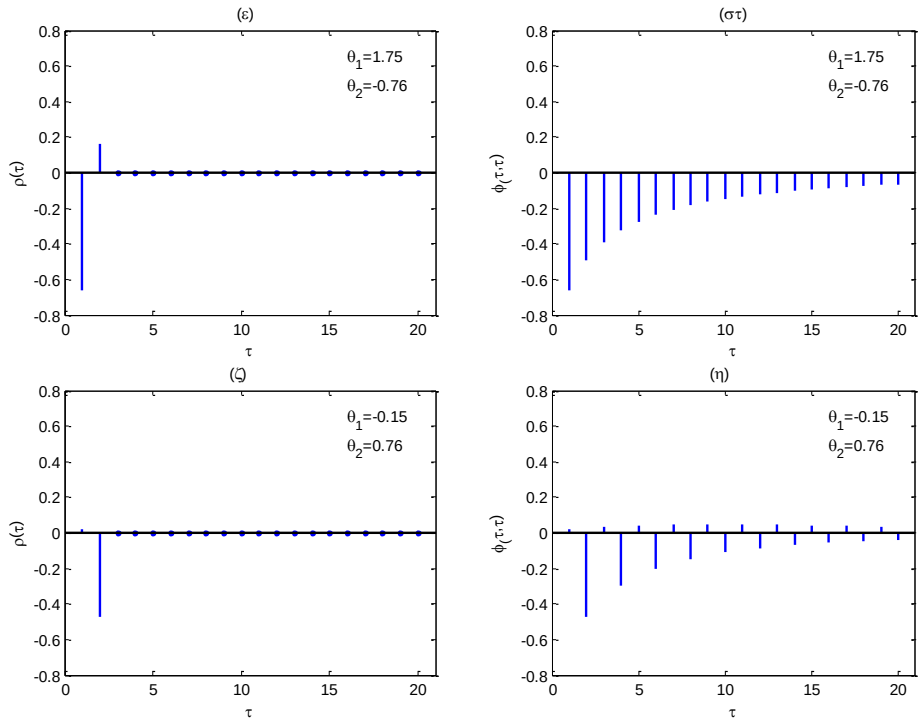
$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{2,2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{3,3} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}$$

Οι εκφράσεις των $\phi_{\tau,\tau}$ ως προς τους συντελεστές θ_1 και θ_2 είναι πολύπλοκες και δε δίνονται. Η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης της MA(2) δε μηδενίζεται απότομα όπως η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Μπορεί να φθίνει εκθετικά όπως και για τη διαδικασία MA(1), αλλά μπορεί και να παρουσιάζει φθίνουσα ταλάντωση αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι συζυγείς μιγαδικές. Η μορφή της μερικής αυτοσυσχέτισης της MA(2) είναι παρόμοια με αυτήν της αυτοσυσχέτισης της AR(2). Στο Σχήμα 17 δίνονται τα γραφήματα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης για κάποιες τιμές των ριζών του αντιστρόφου χαρακτηριστικού πολυωνύμου (οι ρίζες είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου ώστε η MA(2) να είναι αντιστρέψιμη). Στο ένθετο κάθε σχήματος δίνονται οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών θ_1 και θ_2. Οι ρίζες των αντίστροφων χαρακτηριστικών πολυωνύμων καθώς και οι τιμές των συντελεστών είναι ίδιες με αυτές για AR(2) στο Σχήμα 14 (για αυτοσυσχέτιση) και Σχήμα 15 (για μερική αυτοσυσχέτιση).





Σχήμα 17 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ρ_τ και μερικής αυτοσυσχέτισης $\phi_{\tau,\tau}$ για διαδικασίες MA(2) για διάφορες τιμές των ριζών λ_1 και λ_2 του αντίστροφου χαρακτηριστικού πολυωνύμου: (α) και (β) λ_1=0.8+0.5i, λ_2=0.8-0.5i, (γ) και (δ) λ_1=-0.8+0.5i, λ_2=-0.8-0.5i, (ε) και (στ) λ_1=0.8, λ_2=0.95, (ζ) και (η) λ_1=0.8, λ_2=-0.95. Σε κάθε σχήμα δίνονται οι αντίστοιχες τιμές των συντελεστών θ_1 και θ_2 της διαδικασίας MA(2).

3.4.3 Διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης *q*

Για τη διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q, MA(q) που δίνεται στη σχέση (36) η αυτοσυσχέτιση είναι μη-μηδενική μόνο για τις πρώτες q υστερήσεις και δίνεται ως

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2} & \tau = 1,2,\ldots,q \\ 0 & \tau > q \end{cases} \tag{45}$$

και η διασπορά είναι

$$\sigma_X^2 = (1+\theta_1^2+\cdots\theta_q^2)\sigma_Z^2 . \tag{46}$$

Η μερική αυτοσυσχέτιση φθίνει με μορφή που καθορίζεται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Οι εκφράσεις των $\phi_{\tau,\tau}$ ως προς τους συντελεστές θ_1, θ_2, ..., θ_q είναι πολύπλοκες και δε δίνονται. Η μερική αυτοσυσχέτιση για κάθε υστέρηση τ μπορεί να υπολογιστεί από τις αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2, ..., ρ_q, από τη σχέση (33).

3.5 Δυϊκή σχέση διαδικασιών AR και MA

Η μελέτη των διαδικασιών AR και MA έδειξε πως έχουν κάποιες ιδιότητες σε αντιστοιχία. Η ιδιότητα της στασιμότητας της AR αντιστοιχεί στην ιδιότητα της αντιστρεψιμότητας της MA με την ίδια συνθήκη: οι ρίζες των χαρακτηριστικών πολυωνύμων τους να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Επίσης η αυτοσυσχέτιση της AR αντιστοιχεί (σε κάποιο βαθμό) στη μερική αυτοσυσχέτιση της MA και η μερική αυτοσυσχέτιση της AR αντιστοιχεί στην αυτοσυσχέτιση της MA. Ας δούμε τη σχέση των διαδικασιών AR και MA πιο αναλυτικά.

Από τον ορισμό της διαδικασίας AR(p), $\phi(B)X_t = Z_t$, και υποθέτοντας πως είναι στάσιμη, έχουμε

$$X_t = \left[\phi(B)\right]^{-1} Z_t .$$

Θωρώντας το πολυώνυμο άπειρου βαθμού $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \ldots$, τέτοιο ώστε $\phi(B)\psi(B) = 1$ έχουμε

$$X_t = \psi(B) Z_t ,$$

δηλαδή η διαδικασία AR(p) μπορεί να εκφρασθεί ως διαδικασία MA άπειρης τάξης, MA(∞). Η παραπάνω παρατήρηση γενικεύεται στο **θεώρημα αντιπροσώπευσης του Wold** ή **διαμέριση του Wold** [Wold representation theorem or Wold's decomposition]: μια οποιαδήποτε στάσιμη στοχαστική διαδικασία μπορεί να εκφρασθεί ως MA(∞).

Αντίστοιχα από τον ορισμό της διαδικασίας MA(q), $X_t = \theta(B) Z_t$, και υποθέτοντας πως είναι αντιστρέψιμη, έχουμε

$$\left[\theta(B)\right]^{-1} X_t = Z_t .$$

Θωρώντας το πολυώνυμο άπειρου βαθμού $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 + \ldots$, τέτοιο ώστε $\pi(B)\theta(B) = 1$ έχουμε

$$\pi(B) X_t = Z_t ,$$

δηλαδή η διαδικασία MA(q) μπορεί να εκφρασθεί ως διαδικασία AR άπειρης τάξης, AR(∞). Έχουμε λοιπόν ισοδυναμία στάσιμης AR(p) με MA(∞) και αντιστρέψιμης MA(q) με AR(∞), που δηλώνει και τη δυϊκή σχέση των διαδικασιών AR και MA.

Η αυτοσυσχέτιση και μερική αυτοσυσχέτιση των AR(p) και MA(q) έχουν επίσης δυϊκή σχέση. Για διαδικασία AR(p) η αυτοσυσχέτιση ρ_τ φθίνει εκθετικά ή ως φθίνουσα ταλάντωση με την υστέρηση τ ενώ η μερική αυτοσυσχέτιση $\phi_{\tau\tau}$ μηδενίζεται για $\tau > p$. Για διαδικασία MA(q) αυτό αντιστρέφεται και η ρ_τ μηδενίζεται για $\tau > p$ ενώ η $\phi_{\tau\tau}$ φθίνει εκθετικά ή ως φθίνουσα ταλάντωση με την υστέρηση τ (σύγκρινε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης για AR(2) στο Σχήμα 14 και Σχήμα 15 με τις αντίστοιχες συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης για MA(2) στο Σχήμα 17). Αυτή η χαρακτηριστική διαφοροποίηση των διαδικασιών AR(p) και MA(q) ως προς την αυτοσυσχέτιση και μερική αυτοσυσχέτιση, μας επιτρέπει να ταυτοποιήσουμε μια διαδικασία ως AR ή MA από τη μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης.

3.6 Μικτή διαδικασία ARMA

Η διαδικασίες AR και MA έχουν διαφορετικές και συμπληρωματικές ιδιότητες, που προκύπτουν από τον ορισμό τους: η διαδικασία AR δίνεται με βάση το χαρακτηριστικό πολυώνυμο υστέρησης $\phi(B)$ του X_t, $\phi(B)X_t = Z_t$, ενώ η διαδικασία MA με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο υστέρησης $\theta(B)$ του Z_t, $X_t = \theta(B)Z_t$. Είναι φυσικό λοιπόν να θεωρήσουμε τη σύνθεση των διαδικασιών AR και MA στη μικτή **διαδικασία** ή **αυτοπαλινδρομούμενη διαδικασία κινούμενου μέσου** [autoregressive moving average process, ARMA],

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q} \qquad (47)$$

ή με χρήση των πολυωνύμων υστέρησης

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t\,. \tag{48}$$

Η διαδικασία ARMA περιέχει το AR μέρος τάξης p και το MA μέρος τάξης q, και για αυτό αναφέρεται ως ARMA(p,q). Η στασιμότητα της διαδικασίας ARMA ορίζεται από το AR μέρος, δηλαδή είναι στάσιμη αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\phi(B)$ έχει ρίζες εκτός του μοναδιαίου κύκλου και τότε μπορεί να εκφρασθεί και ως

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} Z_t\,.$$

Αντίστοιχα η αντιστρεψιμότητα της διαδικασίας ARMA ορίζεται από το MA μέρος, δηλαδή είναι αντιστρέψιμη αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\theta(B)$ έχει ρίζες εκτός του μοναδιαίου κύκλου και τότε μπορεί να εκφρασθεί και ως

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} X_t = Z_t\,.$$

Η αυτοσυσχέτιση της διαδικασίας ARMA(p,q) μπορεί να υπολογισθεί με τον ίδιο τρόπο, όπως για AR(p) και MA(q), πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέρη της ισότητας (47) με $X_{t-\tau}$ για κάθε υστέρηση τ και εφαρμόζοντας τον τελεστή της μέσης τιμής. Έχουμε

$$X_{t-\tau}X_t = X_{t-\tau}(\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}) \;\Rightarrow$$

$$\gamma_X(\tau) = \phi_1\gamma_X(\tau-1) + \cdots + \phi_p\gamma_X(\tau-p) + \mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_t] - \theta_1\mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_{t-1}] - \cdots - \theta_q\mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_{t-q}]$$

Η ακριβής έκφραση για τους όρους $\mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_{t-j}]$ για $j = 0,\ldots,q$, μπορεί να υπολογιστεί με αντικαταστάσεις του $X_{t-\tau}$ και άλλων όρων μεγαλύτερης υστέρησης που προκύπτουν, με αποτέλεσμα για $\tau \le q$ η αυτοδιασπορά γ_τ και αυτοσυσχέτιση ρ_τ να έχουν αρκετά πολύπλοκη έκφραση, που δε δίνεται εδώ. Η μορφή της αυτοσυσχέτισης για $\tau \le q$ δίνεται από τη μίξης της αυτοσυσχέτισης που θα είχαμε για την AR(p) και για την MA(q). Για $\tau > q$, δεν υπάρχουν όροι $\mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_{t-j}]$ στην έκφραση της αυτοδιασποράς και έχουμε

$$\gamma_\tau = \phi_1\gamma_{\tau-1} + \cdots + \phi_p\gamma_{\tau-p}$$

και αντίστοιχα για την αυτοσυσχέτιση έχουμε

$$\rho_\tau = \phi_1\rho_{\tau-1} + \cdots + \phi_p\rho_{\tau-p}, \qquad \tau > q \tag{49}$$

όπως και για διαδικασία AR(p).

3.6.1 Μικτή διαδικασία ARMA(1,1)

Θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά την αυτοσυσχέτιση και μερική αυτοσυσχέτιση της πιο απλής μικτής διαδικασίας με τάξη ένα για το AR και το MA μέρος, δηλαδή τη ARMA(1,1). Η ARMA(1,1) ορίζεται με τις παρακάτω ισοδύναμες εκφράσεις

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1}, \quad (1-\phi B)X_t = (1-\theta B)Z_t, \quad X_t = \frac{(1-\theta B)}{(1-\phi B)} Z_t\,,$$

με συνθήκη στασιμότητας $|\phi| < 1$ και συνθήκη αντιστρεψιμότητας $|\theta| < 1$.

Για την αυτοσυσχέτιση έχουμε

$$X_{t-\tau}X_t = X_{t-\tau}(\phi X_{t-1} + Z_t - \theta Z_{t-1}) \;\Rightarrow\; \gamma_\tau = \phi\gamma_{\tau-1} + \mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_t] - \theta\mathrm{E}[X_{t-\tau}Z_{t-1}]\,.$$

Από την παραπάνω σχέση της αυτοδιασποράς για $\tau = 0$ και $\tau = 1$ έχουμε

$$\sigma_X^2 = \gamma_0 = \phi\gamma_1 + \sigma_Z^2 - \theta(\phi - \theta)\sigma_Z^2$$
$$\gamma_1 = \phi\gamma_0 - \theta\sigma_Z^2$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων ως προς γ_0 και γ_1 έχουμε την έκφραση για τη διασπορά

$$\sigma_X^2 = \gamma_0 = \frac{1+\theta^2-2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma_Z^2 \tag{50}$$

και την αυτοδιασπορά υστέρησης ένα

$$\gamma_1 = \frac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1-\phi^2}\sigma_Z^2.$$

Για $\tau > 1$ από τη σχέση (49) έχουμε $\gamma_\tau = \phi\gamma_{\tau-1}$. Άρα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της ARMA(1,1) είναι

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta} & \tau = 1 \\ \phi\rho_{\tau-1} & \tau \geq 2 \end{cases} \tag{51}$$

Η μερική αυτοσυσχέτιση $\phi_{\tau\tau}$ φθίνει με την υστέρηση όπως για MA(1). Οι ακριβείς εκφράσεις των $\phi_{\tau\tau}$ για κάθε υστέρηση τ δίνονται από τη σχέση (33).

Γενικά μια ARMA(p,q) διαδικασία μπορεί ακόμα και για μικρές τάξεις p και q να παρουσιάσει μορφές αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης που μια διαδικασία AR ή MA μπορεί να έχει μόνο για μεγάλη τάξη p ή q αντίστοιχα. Για παράδειγμα μια AR(p) διαδικασία έχει φθίνουσα αυτοσυσχέτιση και άρα μη-μηδενική για αρκετά μεγάλες υστερήσεις, αλλά η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης μηδενίζεται για υστερήσεις $\tau > p$. Προσθέτοντας μόνο έναν όρο Z_{t-1} στην έκφραση της AR(p), παίρνουμε τη διαδικασία ARMA(p,1) που έχει επίσης φθίνουσα μερική αυτοσυσχέτιση που δε μηδενίζεται για $\tau > p$. Ακόμα λοιπόν και η απλή διαδικασία ARMA(1,1) έχει συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης που δε μηδενίζονται για υστερήσεις $\tau > 1$.

Ασκήσεις

Σε όλες τις ασκήσεις παρακάτω η $\{Z_t\}$ είναι διαδικασία λευκού θορύβου, $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma_Z^2)$.

1. Δίνονται οι παρακάτω στοχαστικές διαδικασίες

   a) $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$.

   b) $X_t - 0.9X_{t-1} = Z_t + 0.6Z_{t-1} - 0.1Z_{t-2}$.

   c) $X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = Z_t - 0.9Z_{t-1}$

   d) $X_t - 0.4X_{t-1} - X_{t-2} + 0.6X_{t-3} = Z_t$

   e) $X_t - 1.5X_{t-1} + 0.6X_{t-2} = Z_t + 0.4Z_{t-1} + 0.6Z_{t-2} - 1.1Z_{t-3}$

   i) Διερευνείστε αν η κάθε μια από αυτές είναι στάσιμη καθώς και αν είναι αντιστρέψιμη.

   ii) Για αυτές που βρήκατε πως είναι στάσιμες υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης καθώς και τη συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης και κάνετε τα γραφήματα τους.

   iii) Για αυτές που βρήκατε πως είναι στάσιμες, υπολογίστε τους 4 πρώτους συντελεστές ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, στην έκφραση της γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i Z_{t-i}$.

2. Για τη διαδικασία MA(1), $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$ με διασπορά λευκού θορύβου σ_Z^2, γνωρίζουμε πως υπάρχει άλλη διαδικασία MA(1) με συντελεστή $1/\theta$ που έχει την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Ποια είναι η διασπορά του λευκού θορύβου για τη δεύτερη διαδικασία MA(1);

3. Δείξτε πως η γραμμική στοχαστική διαδικασία MA(∞), $X_t = Z_t + c(Z_{t-1} + Z_{t-2} + \cdots)$ όπου c μια σταθερά, είναι μη-στάσιμη, ενώ η διαδικασία που προκύπτει από τις πρώτες διαφορές, $Y_t = X_t - X_{t-1}$, είναι στάσιμη. Τι διαδικασία είναι η Y_t;

4. Για ποιές τιμές της σταθεράς c η διαδικασία AR(2) $X_t = X_{t-1} + cX_{t-2} + Z_t$ είναι στάσιμη; Για ποιες τιμές της c η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι φθίνουσα ταλάντωση;

5. Δείξτε πως η διαδικασία AR(3) $X_t = X_{t-1} + cX_{t-2} - cX_{t-3} + Z_t$ είναι μη-στάσιμη ανεξάρτητα από την τιμή της σταθεράς c.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε ότι η χρονοσειρά αποτελεί την πραγματοποίηση μιας στοχαστικής διαδικασίας, δηλαδή κάποιου συστήματος που οδηγείται από θόρυβο. Ειδικότερα θα θεωρήσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία και άρα και η χρονοσειρά που εξετάζουμε είναι γραμμική, δηλαδή δεν περιέχει μη-γραμμικές συσχετίσεις. Θα προσπαθήσουμε να προσαρμόσουμε γραμμικά μοντέλα στη χρονοσειρά για να κάνουμε προβλέψεις. Θα μελετήσουμε επίσης τη διαδικασία Box-Jenkins για την πρόβλεψη μη-στάσιμων γραμμικών χρονοσειρών.

Ας δώσουμε πρώτα το γενικό πλαίσιο για την προσαρμογή γραμμικών μοντέλων. Είναι βασικό να κατανοήσουμε ότι το μοντέλο αποτελεί την εκτίμηση της στοχαστικής διαδικασίας (και γενικά του συστήματος) που υποθέτουμε πως έχει παράγει την παρατηρούμενη χρονοσειρά. Τα βασικά χαρακτηριστικά στοχαστικών διαδικασιών και οι βασικοί τύποι διαδικασιών ανακεφαλαιώνονται στον Πίνακας 2 με αντιστοίχηση στην εκτίμηση τους από παρατηρούμενη χρονοσειρά.

στάσιμη στοχαστική διαδικασία (χρονοσειρά) $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$	στάσιμη χρονοσειρά n παρατηρήσεων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
Χαρακτηριστικά και εκτίμηση τους	
μέση τιμή μ	δειγματική μέση τιμή $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$
αυτοδιασπορά $\gamma_\tau = \mathrm{E}\left[(X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)\right]$	δειγματική αυτοδιασπορά $c_\tau = \frac{1}{n}\sum_{t=\tau+1}^{n}(x_t x_{t-\tau} - \bar{x}^2),\ \tau = 0,1,\ldots,n-1$
αυτοσυσχέτιση $\rho_\tau = \gamma(\tau)/\gamma(0)$	δειγματική αυτοσυσχέτιση $r_\tau = c(\tau)/c(0)$
μερική αυτοσυσχέτιση $\phi_{\tau,\tau}$	δειγματική μερική αυτοσυσχέτιση - εκτίμηση της παραμέτρου $\phi_{\tau,\tau}$
Τύποι διαδικασιών και εκτίμηση τους [μοντέλα] [$Z_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_Z^2)$]	
AR(p): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$	Εκτίμηση τάξης p και παραμέτρων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$
MA(q): $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$	Εκτίμηση τάξης q και παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$
ARMA(p,q): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$	Εκτίμηση τάξεων p, q και παραμέτρων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$

Πίνακας 2 Γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες (χαρακτηριστικά και τύποι διαδικασιών) σε αντιστοίχηση με την εκτίμηση τους από παρατηρούμενες χρονοσειρές.

Όταν καλούμαστε να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο σε μια παρατηρούμενη χρονοσειρά θα πρέπει να επιλέξουμε μια κλάση μοντέλων ή να δοκιμάσουμε διαφορετικές κλάσεις μοντέλων. Στα πλαίσια της μεγάλης κλάσης των γραμμικών στοχαστικών διαδικασιών θα πρέπει πρώτα να διερευνήσουμε ποιος από τους τύπους διαδικασιών AR, MA και ARMA είναι πιο κατάλληλος. Στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε και άλλες κλάσεις μη-γραμμικών στοχαστικών διαδικασιών και δυναμικών συστημάτων. Στη συνέχεια θα πρέπει να επιλέξουμε την πιο κατάλληλη τάξη της επιλεγμένης γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας και τέλος θα πρέπει να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους για κάθε διαδικασία, όπως δίνονται στον Πίνακας 2. Στην παρουσίαση παρακάτω θα ακολουθήσουμε αντίστροφη σειρά ξεκινώντας από την εκτίμηση των παραμέτρων για κάθε τύπο γραμμικών στάσιμων στοχαστικών διαδικασιών.

4.1 Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα

Υποθέτουμε πως η χρονοσειρά των παρατηρήσεων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ έχει δημιουργηθεί από στοχαστική διαδικασία AR(p) για κάποια τάξη p. Η εκτίμηση των παραμέτρων της AR(p), $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$, μας δίνει το **αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο τάξης *p*** [autoregressive model of order p]. Παρακάτω παρουσιάζονται δύο μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων της AR(p), η μια με βάση την εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης και η άλλη με ελαχιστοποίηση του σφάλματος προσαρμογής.

4.1.1 Μέθοδος ροπών ή Yule Walker

Η **μέθοδος ροπών** ή **μέθοδος Yule Walker** [method of moments or Yule Walker] χρησιμοποιεί τις εξισώσεις Yule Walker και την επίλυση τους ως προς τις παραμέτρους $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$, καθώς και την αντίστοιχη εξίσωση για τις διασπορές ως προς τη σ_Z^2 (δες σχέσεις (31) και (32)). Απλά αντικαθίστανται οι θεωρητικές αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2,..., ρ_p από τις εκτιμήσεις τους r_1, r_2,..., r_p, και η διασπορά της παρατηρούμενης μεταβλητής σ_X^2 από την εκτίμηση της s_X^2. Οι εξισώσεις Yule-Walker μετά την αντικατάσταση είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} \tag{52}$$

και σε μορφή μεταβλητών πινάκων $\boldsymbol{R}_p \hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{r}_p$. Η εκτίμηση των παραμέτρων δίνεται ως $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{R}_p^{-1} \boldsymbol{r}_p$, όπου $\hat{\boldsymbol{\phi}} = [\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_p]$. Για τη διασπορά έχουμε με αντικατάσταση των εκτιμήσεων στη σχέση (32)

$$s_X^2 = \frac{s_Z^2}{1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \cdots - \hat{\phi}_p r_p} \tag{53}$$

και η εκτίμηση της διασποράς του λευκού θορύβου εισόδου είναι $s_Z^2 = s_X^2 (1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \cdots - \hat{\phi}_p r_p)$.

Η μέθοδος Yule-Walker έχει ένα βασικό μειονέκτημα: χρησιμοποιεί την εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης που έχει μεροληψία αλλά και γενικά δεν έχει καλές στατιστικές

ιδιότητες (μεγάλη διασπορά, ευαίσθητη σε ακραίες παρατηρήσεις). Για αυτό και δεν προτιμάται για την εκτίμηση των παραμέτρων του AR(p) αλλά παρουσιάζεται εδώ για να τονισθεί η σχέση των όρων αυτοσυσχέτισης για υστερήσεις ως και p με τις παραμέτρους του μοντέλου.

4.1.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η **μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων** [method of ordinary least squares, OLS] είναι η κλασική μέθοδος εκτίμησης παραμέτρων σε προβλήματα παλινδρόμησης. Τα μοντέλα παλινδρόμησης ορίζουν μια μεταβλητή (εξαρτημένη) ως συνάρτηση κάποιων άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών. Στα γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική δηλαδή η εξαρτημένη μεταβλητή δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των ανεξάρτητων μεταβλητών. Ένα μοντέλο AR(p) μπορεί να θεωρηθεί ως μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης, όπου η εξαρτημένη μεταβλητή είναι η τυχαία μεταβλητή της χρονοσειράς σε μια χρονική στιγμή t, x_t, και οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι τυχαίες μεταβλητές της χρονοσειράς σε προηγούμενους χρόνους, δηλαδή $x_{t-1},\ldots,x_{t-p}$. Άρα μπορεί απευθείας να εφαρμοσθεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, όπως και σε γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης.

Ας θεωρήσουμε τη γενική μορφή της στοχαστικής διαδικασίας AR(p) για μέση τιμή μ

$$X_t-\mu=\phi_1(X_{t-1}-\mu)+\phi_2(X_{t-2}-\mu)+\cdots+\phi_p(X_{t-p}-\mu)+Z_t\,.$$

Στη γενική μορφή θα πρέπει να εκτιμήσουμε και τη μέση τιμή μ. Θεωρώντας πως η παραπάνω εξίσωση ισχύει για τη χρονοσειρά $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ και για χρόνους $\{p+1,p+2,\ldots,n\}$, έχουμε n-p σφάλματα προσαρμογής να ελαχιστοποιήσουμε, $z_{p+1},z_{p+2},\ldots,z_n$. Η εκτίμηση των παραμέτρων $\mu,\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$ δίνεται από την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων $S(\mu,\phi_1,\ldots\phi_p)$

$$\min S(\mu,\phi_1,\ldots\phi_p)=\min\sum_{t=p+1}^{n}\left(x_t-\mu-\phi_1(x_{t-1}-\mu)-\ldots-\phi_p(x_{t-p}-\mu)\right)^2$$

ως προς τις παραμέτρους $\mu,\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$, και η λύση είναι οι εκτιμήσεις $\hat{\mu},\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2,\ldots,\hat{\phi}_p$. Η λύση για την εκτίμηση της μέσης τιμής είναι $\hat{\mu}\simeq\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_t$, που πρακτικά σημαίνει πως η κλασική εκτίμηση του μέσου όρου είναι ικανοποιητική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ασφάλεια. Η εκτίμηση της διασποράς των σφαλμάτων δίνεται ως $s_Z^2=\frac{1}{n-p}\sum_{t=p+1}^{n}\hat{z}_t^2$, όπου τα σφάλματα προσαρμογής είναι

$$\hat{z}_t=(x_t-\hat{\mu})-\hat{\varphi}_1(x_{t-1}-\hat{\mu})-\ldots-\hat{\varphi}_p(x_{t-p}-\hat{\mu}),\quad t=p+1,\ldots,n\,.$$

Ας δούμε την εφαρμογή της OLS στην περίπτωση μοντέλου AR(1) $X_t-\mu=\phi_1(X_{t-1}-\mu)+Z_t$. Η συνάρτηση ελαχιστοποίησης σφαλμάτων είναι

$$S(\mu,\phi_1)=\sum_{t=2}^{n}\left(x_t-\mu-\phi_1(x_{t-1}-\mu)\right)^2$$

και δίνει τη λύση για τη μέση τιμή

$$\hat{\mu}=\frac{\overline{x}_{(2)}-\hat{\varphi}\overline{x}_{(1)}}{1-\hat{\varphi}},\quad \text{όπου } \overline{x}_{(1)}=\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}x_{t-1},\quad \overline{x}_{(2)}=\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n}x_t\,,$$

που δηλώνει ότι ισχύει $\hat{\mu} \simeq \bar{x}$. Για το συντελεστή του AR(1) η λύση είναι

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \hat{\mu})(x_{t-1} - \hat{\mu})}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \hat{\mu})^2} \simeq \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-1} - \bar{x})}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \bar{x})^2},$$

η οποία μοιάζει αλλά δεν είναι ίδια με τη λύση που θα περιμέναμε από τη μέθοδο Yule-Walker, $\hat{\varphi} \simeq \frac{c_1}{c_0} = r_1$, αφού στον παρανομαστή της παραπάνω σχέσης το άθροισμα ξεκινά από t=2 και όχι από t=1, όπως στον ορισμό του c_0. Τέτοιες διαφορές υπάρχουν και για μεγαλύτερη τάξη p. Φυσικά αυτές οι διαφορές σβήνουν καθώς το μήκος της χρονοσειράς n αυξάνει.

Η μέθοδος OLS χρησιμοποιεί n-p εξισώσεις για την τυχαία μεταβλητή για ένα χρονικό βήμα μπροστά. Οι γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες έχουν την ιδιότητα να καθορίζονται ισοδύναμα προς τα εμπρός και προς τα πίσω, δηλαδή στη θετική και αρνητική φορά του χρόνου. Άρα ισοδύναμα μπορούμε να θεωρήσουμε το ίδιο μοντέλο αντιστρέφοντας το χρόνο. Αυτή η ιδιότητα έχει χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση της μεθόδου OLS, συνδυάζοντας τα σφάλματα προσαρμογής του μοντέλου προς τα εμπρός και προς τα πίσω (forward - backward approach). Αυτή είναι η μέθοδος που χρησιμοποιεί ως προεπιλογή το υπολογιστικό περιβάλλον Matlab. Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων του AR(p), όπως ο αλγόριθμος Burg. Όλες αυτές οι μέθοδοι θεωρούνται προσεγγίσεις της κλασσικής (και θεμελιώδους) μεθόδου εκτίμησης παραμέτρων, της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood, ML), που εφαρμόζεται με συνθήκη ή χωρίς συνθήκη ως προς τις αρχικές τιμές της χρονοσειράς. Η μέθοδος ML είναι γενική και εφαρμόζεται επίσης για μοντέλα τύπου MA και ARMA.

4.1.3 Προσδιορισμός τάξης *p* μοντέλου AR

Από τη μελέτη των γραμμικών στοχαστικών διαδικασιών στο προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε πως η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης μιας διαδικασίας AR(p) μηδενίζεται για υστερήσεις $\tau > p$ (δες Ενότητα 3.3). Άρα ένας τρόπος για να προσδιορίσουμε την τάξη p του μοντέλου AR που θέλουμε να προσαρμόσουμε στη χρονοσειρά είναι να υπολογίσουμε την **εκτίμηση της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης,** $\hat{\phi}_{\tau,\tau}$**,** για ένα εύρος υστερήσεων $\tau = 1,\ldots,\tau_{\max}$, και να θέσουμε ως τάξη p τη μέγιστη υστέρηση μη-μηδενικής μερικής αυτοσυσχέτισης. Με τον όρο μη-μηδενική μερική αυτοσυσχέτιση εννοούμε τη στατιστικά σημαντική μερική αυτοσυσχέτιση, που ελέγχεται με το όριο στατιστικής σημαντικότητας που έχουμε και για την αυτοσυσχέτιση, δηλαδή $\pm 1.96/\sqrt{n}$ για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Η εκτίμηση της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης για κάποια υστέρηση τ, $\hat{\phi}_{\tau,\tau}$, γίνεται με την εκτίμηση του συντελεστή ϕ_τ του AR μοντέλου τάξης τ προσαρμοσμένου στη χρονοσειρά. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των εκτιμήσεων της μερικής αυτοσυσχέτισης για τις τρεις πρώτες υστερήσεις, υποθέτουμε τα μοντέλα

$$x_t = \phi_{1,1}x_{t-1} + z_t$$
$$x_t = \phi_{1,2}x_{t-1} + \phi_{2,2}x_{t-2} + z_t$$
$$x_t = \phi_{1,3}x_{t-1} + \phi_{2,3}x_{t-2} + \phi_{3,3}x_{t-3} + z_t$$

για τάξεις 1, 2 και 3, αντίστοιχα, εκτιμούμε τις παραμέτρους τους (ξεχωριστά για κάθε ένα από τα μοντέλα AR(1), AR(2) και AR(3)) και οι εκτιμήσεις $\hat{\phi}_{1,1}$, $\hat{\phi}_{2,2}$ και $\hat{\phi}_{3,3}$, είναι οι ζητούμενες τιμές, όπου στο δείκτη της κάθε παραμέτρου προστέθηκε η τιμή της τάξης του αντίστοιχου μοντέλου για να ξεχωρίζουν.

Παρατηρούμε πως $\hat{\phi}_{1,1} = r_1$, δηλαδή για υστέρηση 1 η μερική αυτοσυσχέτιση είναι ίδια με την αυτοσυσχέτιση. Για $\tau = 2$, η μερική αυτοσυσχέτιση $\hat{\phi}_{2,2}$ δηλώνει την συνεισφορά του x_{t-2} που προστίθεται στην συνεισφορά του x_{t-1} για τον προσδιορισμό του x_t. Με τον ίδιο τρόπο εξηγείται η μερική αυτοσυσχέτιση για μεγαλύτερες υστερήσεις. Έτσι αν η χρονοσειρά μπορεί πράγματι να προέρχεται από μια στοχαστική διαδικασία τύπου AR(*p*), ο συντελεστής $\hat{\phi}_{p,p}$ δεν είναι μηδενικός, ενώ για υστερήσεις (ή τάξεις μοντέλου) $\tau > p$, οι συντελεστές $\hat{\phi}_{\tau,\tau}$ θα είναι (στατιστικά) μηδενικοί. Άρα χρησιμοποιώντας το κριτήριο της μερικής αυτοσυσχέτισης μπορούμε να προσδιορίσουμε την τάξη του AR μοντέλου από την υστέρηση στην οποία παρατηρείται η δραστική πτώση (cut off) από μη-μηδενική σε μηδενική μερική αυτοσυσχέτιση. Συνοψίζοντας, το κριτήριο της μερικής αυτοσυσχέτισης προσδιορίζει την τάξη *p* του μοντέλου AR από τη συνθήκη

$$\hat{\phi}_{p,p} \neq 0 \text{ και } \hat{\phi}_{\tau,\tau} = 0 \text{ για } \tau > p,$$

όπου η μηδενική και μη-μηδενική μερική αυτοσυσχέτιση ορίζεται στατιστικά όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Το παραπάνω κριτήριο χρησιμοποιείται αποκλειστικά για τον προσδιορισμό (ή εκτίμηση) της τάξης AR μοντέλου. Υπάρχουν άλλα κριτήρια για την τάξη του μοντέλου, όπου ως τάξη εννοούμε το πλήθος των παραμέτρων του μοντέλου που πρέπει να εκτιμηθούν για να προσδιοριστεί πλήρως το μοντέλο. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στην πιθανοφάνεια [likelihood] των δεδομένων με βάση το μοντέλο. Ως δείκτης πιθανοφάνειας μπορεί να θεωρηθεί η διασπορά των υπολοίπων (σφάλματα προσαρμογής) s_z^2 από την προσαρμογή του μοντέλου. Τα κριτήρια προσπαθούν να ισορροπήσουν τη μείωση του σφάλματος που επιτυγχάνεται με ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο (με περισσότερους όρους και άρα παραμέτρους) βάζοντας ποινή στην πολυπλοκότητα του μοντέλου. Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται με μια συνάρτηση κόστους της τάξης του μοντέλου που θα πρέπει να ελαχιστοποιείται στην σωστή τάξη του μοντέλου, και περιέχει το σφάλμα προσαρμογής και κάποιον όρο ποινής για την πολυπλοκότητα του μοντέλου (δηλαδή της τάξης). Παραθέτονται παρακάτω τρία από τα πιο γνωστά κριτήρια που κάνουν χρήση του σφάλματος προσαρμογής, όπου στις μαθηματικές εκφράσεις των κριτηρίων ό όρος s_z^2 είναι η εκτιμώμενη διασπορά των σφαλμάτων και *p* είναι η τάξη του μοντέλου για την οποία υπολογίζεται η τιμή του κριτηρίου (εδώ είναι η τάξη του μοντέλου AR):

1. **Κριτήριο πληροφορίας του Akaike** [Akaike information criterion (AIC)]

$$\mathrm{AIC}(p) = \ln(s_z^2) + \frac{2p}{n}.$$

2. **Κριτήριο Μπεϋζιανής πληροφορίας** (Scwartz) [Bayesian information criterion (BIC)]

$$\mathrm{BIC}(p) = \ln(s_z^2) + \frac{p\ln(n)}{n}.$$

3. **Κριτήριο τελικού σφάλματος πρόβλεψης** [Final prediction error (FPE)]

$$\mathrm{FPE}(p) = s_z^2 \frac{n+p}{n-p}.$$

Για κάθε ένα από τα παραπάνω κριτήρια η τάξη του μοντέλου είναι η τιμή p για την οποία η συνάρτηση του κριτηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή. Είναι φανερό ότι όσο μεγαλώνει η τάξη p του μοντέλου τα σφάλματα προσαρμογής γίνονται μικρότερα, το s_z^2 μικραίνει, και για πολύ μεγάλες τάξεις το μοντέλο προσαρμόζεται σε διακυμάνσεις που δεν αντανακλούν πραγματικές συσχετίσεις αλλά περισσότερο το λευκό θόρυβο. Γι αυτό, για παράδειγμα στη σχέση για το κριτήριο AIC, υπάρχει ο δεύτερος όρος ποινής [penalty term], ο οποίος δρα αρνητικά και αυξάνει τη συνάρτηση AIC όταν η τάξη του μοντέλου αυξάνει. Υπολογίζοντας το κριτήριο AIC για ικανά μεγάλο αριθμό τάξεων μοντέλου επιλέγουμε εκείνη την τάξη p που δίνει την ελάχιστη τιμή του AIC.

Παράδειγμα

Ας δούμε ένα παράδειγμα για την εκτίμηση και προσαρμογή AR μοντέλου σε μια πραγματική χρονοσειρά, το ρυθμό μεταβολής του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ) των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (ΗΠΑ). Οι τιμές είναι τετραμηνιαίες, από το δεύτερο τετράμηνο του 1947 ως το πρώτο τετράμηνο του 1991. Η εποχικότητα έχει διορθωθεί (αφαιρώντας τον εποχικό κύκλο). Η χρονοσειρά των 176 παρατηρήσεων και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της δίνονται στο Σχήμα 18α και β, και τα δύο σχήματα υποδεικνύουν πως η χρονοσειρά είναι στάσιμη, απαλλαγμένη από αργές τάσεις και εποχικότητα, και φαίνεται να έχεις ασθενείς συσχετίσεις καθώς η αυτοσυσχέτιση για τις δύο πρώτες υστερήσεις είναι έξω από τα όρια σημαντικότητας.

Για να ορίσουμε την τάξη p του μοντέλου AR που θέλουμε να προσαρμόσουμε στη χρονοσειρά του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ των ΗΠΑ, υπολογίζουμε τη συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης και του κριτηρίου AIC για τάξεις (υστερήσεις) από 1 ως 20 και τα σχετικά γραφήματα δίνονται στο Σχήμα 18γ και δ.

Η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης είναι στατιστικά σημαντική για τ=1 και οριακά για τ=3. Η συνάρτηση του κριτηρίου AIC έχει ένα πρώτο (τοπικό) ελάχιστο στο p=3 και στη συνέχεια έχει ένα δεύτερο (σφαιρικό) ελάχιστο στο p=17. Παρόλο που φαίνεται να έχει απότομη πτώση για p=17 δε θα εμπιστευόμασταν μια τόσο μεγάλη τάξη για το AR μοντέλο, ειδικότερα όταν κάτι τέτοιο δεν υποδεικνύεται και από τη συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης. Ίσως η πιο κατάλληλη επιλογή εδώ είναι p=3. Σημειώνεται όμως πως σε πραγματικά προβλήματα δεν είναι ξεκάθαρο ποια τάξη θα πρέπει να επιλέξουμε.

Προσαρμόζουμε λοιπόν στη χρονοσειρά μοντέλο AR(3) και το εκτιμούμενο μοντέλο είναι

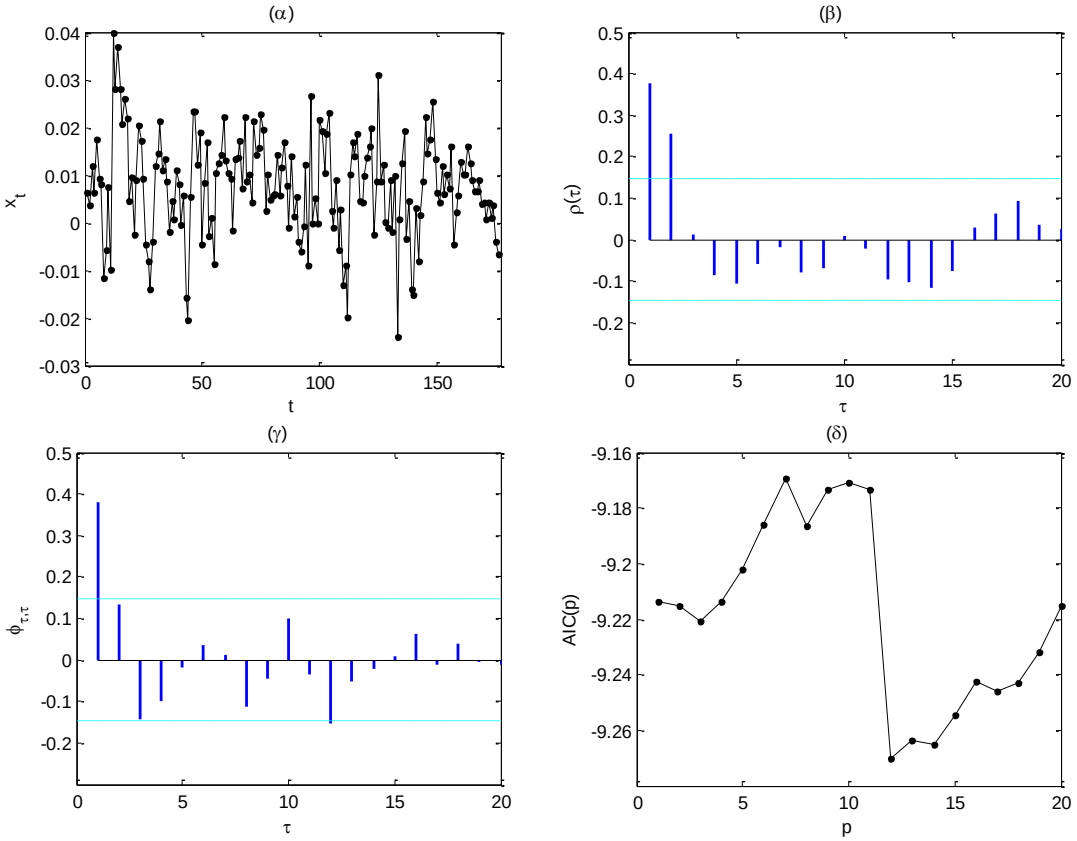
$$x_t = 0.0047 + 0.35x_{t-1} + 0.18x_{t-2} - 0.14x_{t-3} + z_t.$$

με εκτιμούμενη τυπική απόκλιση του λευκού θορύβου $s_z = \hat{\sigma}_z = 0.0098$.

[Για την εκτίμηση, αφαιρέσαμε πρώτα τη μέση τιμή των 176 παρατηρήσεων από κάθε παρατήρηση (βρέθηκε $\bar{x} = 0.0077$) και σε αυτήν τη χρονοσειρά εκτιμήσαμε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τους συντελεστές $\hat{\phi}_1 = 0.35$, $\hat{\phi}_2 = 0.18$ και $\hat{\phi}_3 = -0.14$, και ο σταθερός όρος υπολογίστηκε ως $\hat{\phi}_0 = \hat{\mu}\left(1-\hat{\phi}_1-\hat{\phi}_2-\hat{\phi}_3\right) = 0.0047$. Από το μοντέλο αυτό υπολογίστηκε για κάθε χρονική στιγμή $t = 3,\ldots,176$ ο εκτιμούμενος ρυθμός μεταβολής

$$\hat{x}_t = 0.0047 + 0.35x_{t-1} + 0.18x_{t-2} - 0.14x_{t-3}$$

και στη συνέχεια τα **σφάλματα** ή **υπόλοιπα** [residuals] εκτίμησης $\hat{z}_t = x_t - \hat{x}_t$. Η διασπορά αυτών των σφαλμάτων είναι η εκτίμηση της διασποράς του λευκού θορύβου στο μοντέλο AR(3), $s_z^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 0.0000989$.]



Σχήμα 18 (α) Η χρονοσειρά του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ των ΗΠΑ. (β) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για αυτήν τη χρονοσειρά. (γ) Η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης. (δ) Το κριτήριο AIC. Στα σχήματα (β) και (γ) οι οριζόντιες διακεκομμένες γραμμές δίνουν τα όρια σημαντικότητας για την r_τ και $\phi_{\tau,\tau}$ αντίστοιχα, για α=0.05.

Παρακάτω παρατίθεται μια λεπτομερέστερη ανάλυση του μοντέλου που προσαρμόστηκε. Οι χαρακτηριστικές ρίζες του εκτιμούμενου AR(3) μοντέλου είναι $\lambda_1 = -0.52$, $\lambda_2 = 0.44 + 0.20i$ και $\lambda_3 = 0.44 - 0.20i$. Με βάση αυτές τις χαρακτηριστικές ρίζες κάποιος θα μπορούσε να οδηγηθεί σε συμπεράσματα για το ρυθμό μεταβολής του ΑΕΠ των ΗΠΑ (ίσως και εσφαλμένα γιατί το μοντέλο AR(3) μπορεί να μην είναι κατάλληλο να περιγράψει πλήρως τη διαδικασία ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ!). Θα μπορούσε λοιπόν κάποιος να πει πως η αρνητική πραγματική χαρακτηριστική ρίζα υποδηλώνει εκθετική πτώση στη χρονική συσχέτιση του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ. Το ζευγάρι συζυγών μιγαδικών χαρακτηριστικών ριζών υποδηλώνει την ύπαρξη στοχαστικού οικονομικού κύκλου, που δικαιολογείται από τις περιόδους μεταβολής και ύφεσης που έχει γνωρίσει η οικονομία των ΗΠΑ. Η τετραγωνική εξίσωση που έχει τις δύο μιγαδικές ρίζες είναι $1 - a_1\lambda + a_2\lambda^2 = 0$ με $a_1 = 0.87$ και $a_2 = -0.27$. Η μέση διάρκεια του στοχαστικού κύκλου d μπορεί να υπολογιστεί ως

$$d = \frac{360^o}{\cos^{-1}\left(a_1 / \left(2\sqrt{-a_2}\right)\right)} = \frac{360^o}{\cos^{-1}\left(0.87 / \left(2\sqrt{0.27}\right)\right)} = 10.83,$$

που είναι περίπου 3 έτη. Υποστηρίζεται στη βιβλιογραφία πως αυτή η περίοδος οικονομικού κύκλου συναντάται σε ρυθμούς μεταβολής ΑΕΠ εθνικών οικονομιών.

4.1.4 Διάγνωση καταλληλότητας AR μοντέλου

Για να είναι χρήσιμο ένα μοντέλο, όπως τα AR μοντέλα που μελετάμε εδώ, θα πρέπει να αντλεί όλη την πληροφορία που περιέχει η χρονοσειρά, έτσι ώστε τα

υπόλοιπα (ή σφάλματα) από το μοντέλο να είναι λευκός θόρυβος. Για να ελέγξουμε την καταλληλότητα του μοντέλου, κάνουμε έλεγχο ανεξαρτησίας στη σειρά των υπολοίπων, $\{\hat{z}_t\}_{t=p+1}^{n}$ (δες Ενότητα 2.7).

Για το παραπάνω παράδειγμα κάναμε έλεγχο ανεξαρτησίας στη χρονοσειρά των υπολοίπων από τα AR(p) μοντέλα για $p = 1,\ldots,10$ χρησιμοποιώντας τον έλεγχο σημαντικών αυτοσυσχετίσεων Portmanteau (για μέγιστη υστέρηση από 1 ως 10). Η μηδενική υπόθεση ανεξαρτησίας δεν απορρίφθηκε με κανένα έλεγχο και για καμιά χρονοσειρά υπολοίπων. Οριακή απόρριψη μπορούσε να γίνει μόνο για τη χρονοσειρά των υπολοίπων από το μοντέλο AR(1), σε στάθμη σημαντικότητας $\alpha = 0.10$ για τον έλεγχο Portmanteau. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι όλα τα μοντέλα AR είναι επαρκή και δεν αφήνουν συσχετισμένα υπόλοιπα. Ακόμα και το πιο απλό μοντέλο AR(1), που αναδεικνύει η μερική αυτοσυσχέτιση ως το πιο κατάλληλο, φαίνεται να εξηγεί ικανοποιητικά τη δυναμική της χρονοσειράς.

Συνήθως στην ανάλυση χρονοσειρών επιλέγουμε το πιο απλό μοντέλο που φαίνεται να είναι και επαρκές από το διαγνωστικό έλεγχο γιατί μας οδηγεί σε πιο ασφαλείς προβλέψεις.

4.2 Μοντέλα κινούμενου μέσου

Ο λευκός θόρυβος εισόδου σε ένα μοντέλο, όπως στα AR μοντέλα που είδαμε παραπάνω, περιλαμβάνει οποιοδήποτε εξωτερικό παράγοντα που δε γνωρίζουμε ή δε μπορούμε να προσδιορίσουμε. Σε ορισμένες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε αν η επίδραση του παράγοντα αυτού μπορεί να συνεχίζει να υφίσταται και σε επόμενες χρονικές στιγμές. Η κατάλληλη στοχαστική διαδικασία που περιγράφει αυτήν την κατάσταση είναι η διαδικασία κινούμενου μέσου, όπου η μεταβλητή ενδιαφέροντος σε μια χρονική στιγμή t, X_t, ορίζεται ως γραμμικός συνδυασμός του λευκού θορύβου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Αυτή είναι η διαδικασία κινούμενου μέσου MA.

Στη συνέχεια υποθέτουμε πως η χρονοσειρά των παρατηρήσεων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ έχει δημιουργηθεί από στοχαστική διαδικασία MA(q) για κάποια τάξη q

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}, \qquad Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma_Z^2).$$

Η εκτίμηση των παραμέτρων της MA(q), $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$, μας δίνει το **μοντέλο κινούμενου μέσου τάξης *q*** [moving average model of order q]. Παρακάτω παρουσιάζονται οι μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων της AR(p) που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 4.1 προσαρμοσμένες για μοντέλα κινούμενου μέσου.

4.2.1 Μέθοδος ροπών

Η μέθοδος ροπών (που δεν αναφέρεται εδώ ως μέθοδος Yule Walker επειδή δε χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Yule Walker, δες 4.1.1), προϋποθέτει την εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q$ για υστερήσεις ως και q (την τάξη του MA μοντέλου), $r_1, r_2, \ldots, r_q$, καθώς και την εκτίμηση της διασποράς του θορύβου εισόδου σ_Z^2, s_Z^2. Αντικαθιστώντας τις εκτιμήσεις της αυτοσυσχέτισης στη σχέση που ορίζει την αυτοσυσχέτιση της MA(q) στοχαστικής διαδικασίας για υστερήσεις $\tau \le q$ (σχέση (45)) έχουμε

$$r_\tau = \frac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2}, \quad \tau = 1,\ldots,q \tag{54}$$

Το παραπάνω σύστημα q εξισώσεων είναι μη-γραμμικό ως προς τις παραμέτρους $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$, και δεν υπάρχει μοναδική λύση για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_q$. Θα πρέπει να επιλεχθούν οι τιμές που διατηρούν τη συνθήκη της αντιστρεψιμότητας. Για την εκτίμηση των παραμέτρων χρησιμοποιείται συνήθως ο λεγόμενος αλγόριθμος καινοτομίας [innovation algorithm].

Η εκτίμηση s_Z^2 της διασποράς του θορύβου εισόδου δίνεται με αντικατάσταση των εκτιμώμενων παραμέτρων στη σχέση (46) για τη διασπορά της MA(q) διαδικασίας

$$s_Z^2 = \frac{s_X^2}{1+\hat{\theta}_1^2+\cdots\hat{\theta}_q^2} \tag{55}$$

Ας δούμε την εκτίμηση με τη μέθοδο των ροπών για μοντέλο MA(1), $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$, θεωρώντας μηδενική μέση τιμή της χρονοσειράς. Από τη σχέση (40) για την αυτοσυσχέτιση MA(1) διαδικασίας και αντικατάσταση της εκτίμησης αυτοσυσχέτισης έχουμε

$$r_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

Η λύση για τ=1 είναι

$$\text{αν } |r_1| > 0.5 \;\Rightarrow\; \hat{\theta} = \frac{r_1}{|r_1|}$$

$$\text{αν } |r_1| \leq 0.5 \;\Rightarrow\; r_1\hat{\theta}^2 + \hat{\theta} + r_1 = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\theta}_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$$

Σημειώνεται πως ενώ για MA(1) διαδικασία έχουμε $\rho_1 \leq 0.5$, η εκτίμηση r_1 από μια χρονοσειρά μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 0.5. Για $|r_1| \leq 0.5$, έχουμε δύο λύσεις και επιλέγουμε τη λύση $|\hat{\theta}| < 1$, που δίνει αντιστρεψιμότητα.

Για τη διασπορά του θορύβου εισόδου έχουμε από τη σχέση (55) την εκτίμηση

$$s_Z^2 = \frac{s_X^2}{1+\hat{\theta}^2}.$$

4.2.2 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων εκτιμά τις παραμέτρους $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$ από την προσαρμογή του μοντέλου MA(q) στη χρονοσειρά και στη συνέχεια την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος τετραγώνων των σφαλμάτων προσαρμογής

$$\min S(\mu,\theta_1,\ldots\theta_q) = \min \sum_{t=q+1}^{n} (x_t - \mu + \theta_1 z_{t-1} + \ldots + \theta_q z_{t-q})^2 \tag{56}$$

ως προς τα $\mu,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$ (όπου θεωρούμε και πάλι πως θα εκτιμήσουμε και τη μέση τιμή της χρονοσειράς μ από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος). Η

συνάρτηση σφάλματος είναι μη-γραμμική ως προς τις παραμέτρους και για αυτό απαιτείται η χρήση κάποιας αριθμητικής μεθόδου βελτιστοποίησης. Έχοντας τις εκτιμήσεις $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_q$, καθώς και την εκτίμηση της διασποράς της χρονοσειράς s_X^2, εκτιμούμε τη διασπορά του θορύβου εισόδου s_Z^2 από τη σχέση (55).

Ας δούμε την εκτίμηση με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για το μοντέλο MA(1). Θεωρούμε $z_0 = 0$ και χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση από τον ορισμό του MA(1), $z_t = x_t + \theta z_{t-1}$, για να εκφράσουμε τη μεταβλητή λευκού θορύβου εισόδου για κάθε χρονική στιγμή t ως προς τις παρατηρούμενες τιμές της χρονοσειράς, δηλαδή

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = x_2 + \theta z_1 = x_2 + \theta x_1$$

$$z_3 = x_3 + \theta z_2 = x_3 + \theta(x_2 + \theta x_1) = x_3 + \theta x_2 + \theta^2 x_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_n = x_n + \theta z_{n-1} = x_n + \theta x_{n-1} + \theta^2 x_{n-2} + \cdots + \theta^{n-2} x_2 + \theta^{n-1} x_1$$

Με αντικατάσταση των εκφράσεων στο άθροισμα τετραγώνων των όρων z_t, έχουμε την παρακάτω έκφραση για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος

$$\min \sum_{t=1}^{n} z_t^2 = \min \left\{ x_1^2 + (x_2 + x_1\theta)^2 + (x_3 + x_2\theta + x_1\theta^2)^2 \ldots + (x_n + x_{n-1}\theta + \cdots + x_1\theta^{n-1})^2 \right\}$$

που γίνεται

$$\min \left\{ a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{2n-2}\theta^{2n-2} \right\}.$$

Από την παραπάνω έκφραση (ως πολυώνυμο της άγνωστης παραμέτρου θ), η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δίνει $2n$-3 λύσεις, και θα πρέπει να επιλέξω τη λύση $|\hat{\theta}|<1$. Για αυτό απαιτείται προγραμματισμός λύσης ελαχίστων τετραγώνων με τον περιορισμό $|\hat{\theta}|<1$ για αντιστρεψιμότητα.

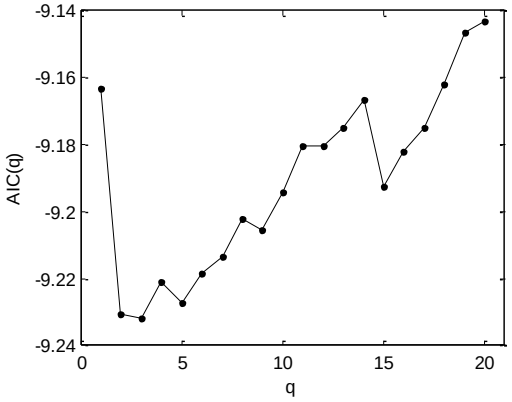
4.2.3 Προσδιορισμός τάξης του MA μοντέλου

Η παρατήρηση ότι η αυτοσυσχέτιση μηδενίζεται για υστερήσεις μεγαλύτερες από την τάξη q μιας διαδικασίας MA(q) χρησιμοποιείται ως κριτήριο επιλογής της τάξης του MA μοντέλου. Προσδιορίζουμε λοιπόν την τάξη του μοντέλου από τη μεγαλύτερη υστέρηση που αντιστοιχεί σε στατιστικά μη-μηδενική αυτοσυσχέτιση. Σημειώνεται ότι ο προσδιορισμός τάξης MA μοντέλων με τη μεγαλύτερη υστέρηση μη-μηδενικής αυτοσυσχέτισης αντιστοιχεί στον προσδιορισμό τάξης AR μοντέλων με τη μεγαλύτερη υστέρηση μη-μηδενικής μερικής αυτοσυσχέτισης.

Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν και τα κριτήρια πληροφορίας, π.χ. το AIC, όπως και για τα AR μοντέλα.

Παράδειγμα

Σε συνέχεια του παραδείγματος της προσαρμογής AR μοντέλου στη χρονοσειρά του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ των ΗΠΑ, θα προσαρμόσουμε στην ίδια χρονοσειρά MA μοντέλο. Για να ορίσουμε την τάξη q του μοντέλου MA, θα βασιστούμε στο γράφημα της αυτοσυσχέτισης (Σχήμα 18β), αλλά και στο γράφημα του κριτηρίου AIC για προσαρμοσμένο μοντέλο MA τάξεων (υστερήσεων) από 1 ως 20, που δίνεται στο Σχήμα 19.



Σχήμα 19 Το γράφημα της συνάρτηση του κριτηρίου AIC για μοντέλα MA τάξης *q*.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι στατιστικά σημαντική για υστερήσεις ως και τ=2, και η συνάρτηση του κριτηρίου AIC έχει ελάχιστο στο q=3, του οποίου όμως η τιμή είναι κοντά στην τιμή για q=2. Συνδυάζοντας τα δύο κριτήρια επιλογής τάξης μοντέλου MA, ας επιλέξουμε την τάξη q=2 ως πιο κατάλληλη.

Προσαρμόζουμε λοιπόν στη χρονοσειρά μοντέλο MA(2) και το εκτιμούμενο μοντέλο είναι

$$x_t = 0.0077 + z_t + 0.312 z_{t-1} + 0.272 z_{t-2}, \qquad t = 1,\ldots,176$$

όπου ο μέσος όρος της χρονοσειράς είναι $\bar{x} = 0.0077$. Η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης των **σφαλμάτων (υπολοίπων)** βρέθηκε να είναι $s_z = 0.00983$. Παρατηρούμε πως η τυπική απόκλιση των σφαλμάτων δε διαφέρει σημαντικά στα μοντέλα AR(3) και MA(2) που προσαρμόσαμε.

Για τη διάγνωση καταλληλότητας του μοντέλου MA(q) που προσαρμόζουμε σε μια χρονοσειρά κάνουμε την ίδια διαδικασία όπως για μοντέλα AR (δες Ενότητα 4.1.4), δηλαδή έλεγχο ανεξαρτησίας στη σειρά των υπολοίπων, $\{\hat{z}_t\}_{t=q+1}^{n}$.

4.3 Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα κινούμενου μέσου

Θεωρητικά μια χρονοσειρά μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά με ένα AR μοντέλο ή ένα MA μοντέλο αν επιτρέψουμε οσοδήποτε μεγάλη τάξη. Πρακτικά θα θέλαμε να αποφύγουμε ένα μοντέλο AR ή MA με μεγάλη τάξη. Γι αυτό η λύση είναι να συνδυάσουμε τους δύο τύπους μοντέλων, βασιζόμενοι στο ότι μια χρονοσειρά μπορεί να αναλυθεί σε δύο μέρη, στο αιτιοκρατικό (το AR μέρος) και στο στοχαστικό (το MA μέρος). Φυσική επέκταση λοιπόν των μοντέλων τύπου AR και MA είναι ο συνδυασμός τους, τα **αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα κινούμενου μέσου** ή **μικτά μοντέλα** (autoregressive moving average, ARMA). Η γενική μορφή ενός ARMA μοντέλου είναι

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + z_t - \theta_1 z_{t-1} - \cdots - \theta_q z_{t-q}. \qquad (57)$$

Η τάξη του μοντέλου δίνεται από την τάξη του AR μέρους και του MA μέρους και για αυτό συμβολίζεται ως ARMA(p,q). Το στοιχείο της χρονοσειράς για κάθε χρονική στιγμή t, ορίζεται από το γραμμικό συνδυασμό p προηγούμενων στοιχείων της χρονοσειράς (AR μέρος) αλλά και από το γραμμικό συνδυασμό q προηγούμενων στοιχείων λευκού θορύβου (MA μέρος), που δηλώνουν τις τυχαίες διακυμάνσεις (εξωτερικές επιδράσεις στο υπό μελέτη σύστημα) τις τελευταίες q χρονικές στιγμές. Με τα ARMA μοντέλα πετυχαίνουμε να διατηρήσουμε χαμηλή την τάξη του μοντέλου. Για παράδειγμα μια μεγάλη τάξη ενός AR μοντέλου εκφράζεται στο MA μέρος μικρής τάξης του ARMA μοντέλου.

Η μερική αυτοσυσχέτιση και η αυτοσυσχέτιση δεν επιτρέπουν τον προσδιορισμό των τάξεων *p* και *q* του ARMA μοντέλου, όπως στην περίπτωση του AR μοντέλου και MA μοντέλου αντίστοιχα. Για αυτό η εκτίμηση των τάξεων *p* και *q* μπορεί να γίνει από κριτήρια πληροφορίας, όπως το AIC, για συνδυασμούς τιμών των *p* και *q*.

Η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται με τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των παραμέτρων MA μοντέλου.

Η καταλληλότητα προσαρμογής ενός ARMA μοντέλου στη χρονοσειρά γίνεται όπως και για τα AR και MA μοντέλα με έλεγχο ανεξαρτησίας στη σειρά των υπολοίπων.

Ας δούμε την εκτίμηση των παραμέτρων ϕ_0, ϕ, θ (όπου $\phi_0 = \mu(1-\phi)$), με τη μέθοδο των ροπών για μοντέλο ARMA(1,1), $X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t - \theta Z_{t-1}$. Πρώτα εκτιμώνται τα $\rho_1, \rho_2, \sigma_X^2$ με τις εκτιμήσεις από τη χρονοσειρά r_1, r_2, s_X^2. Από τη σχέση (51) για την αυτοσυσχέτιση ARMA(1,1) διαδικασίας και με αντικατάσταση της εκτίμησης αυτοσυσχέτισης έχουμε

$$r_\tau = \begin{cases} \dfrac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta} & \tau = 1 \\ \phi r_{\tau-1} & \tau \geq 2 \end{cases}$$

Από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων μπορούμε να εκτιμήσουμε τα ϕ και θ, π.χ. επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων για τ=1,2 ως προς τα ϕ και θ. Επίσης από τη σχέση (50) και με αντικατάσταση των εκτιμήσεων, έχουμε για τη διασπορά των σφαλμάτων

$$s_Z^2 = \frac{1-\hat{\phi}^2}{1+\hat{\theta}^2-2\hat{\phi}\hat{\theta}} s_X^2 .$$

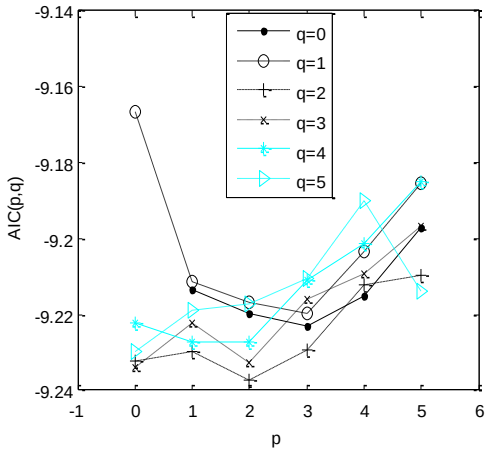
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, δημιουργώ τις αναδρομικές σχέσεις, ξεκινώντας από την πρώτη χρονική στιγμή ένα και θέτοντας $z_0 = 0$ (για ευκολία θέτω επίσης $x_0 = \mu = 0$). Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= x_2 - \phi x_1 + \theta z_1 = x_2 + (\theta-\phi)x_1 \\
z_3 &= x_3 - \phi x_2 + \theta z_2 = x_3 + (\theta-\phi)x_2 + \theta(\theta-\phi)x_1 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
z_n &= x_n - \phi x_{n-1} + \theta z_{n-1} = x_n - (\theta-\phi)x_{n-1} + \theta(\theta-\phi)x_{n-2} + \cdots + \theta^{n-2}(\theta-\phi)x_1
\end{aligned}$$

και αντικαθιστούμε τα σφάλματα στη συνάρτηση του αθροίσματος τετραγώνων των σφαλμάτων $\sum_{t=1}^{n} z_t^2$. Η ελαχιστοποίηση τη συνάρτησης αυτής για την εύρεση λύσης ως προς τα ϕ και θ γίνεται με μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού με περιορισμούς για αντιστρεψιμότητα και στασιμότητα.

Παράδειγμα

Παραπάνω προσαρμόσαμε AR μοντέλο και MA μοντέλο στη χρονοσειρά του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ των ΗΠΑ. Θα προσαρμόσουμε τώρα ARMA μοντέλο. Για να ορίσουμε την τάξη *p* του AR μέρους και την τάξη *q* του MA μέρους, θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο AIC για προσαρμοσμένο μοντέλο ARMA(*p*,*q*) όπου *p*,*q*=0,1,2,3,4,5 (δες Σχήμα 20).



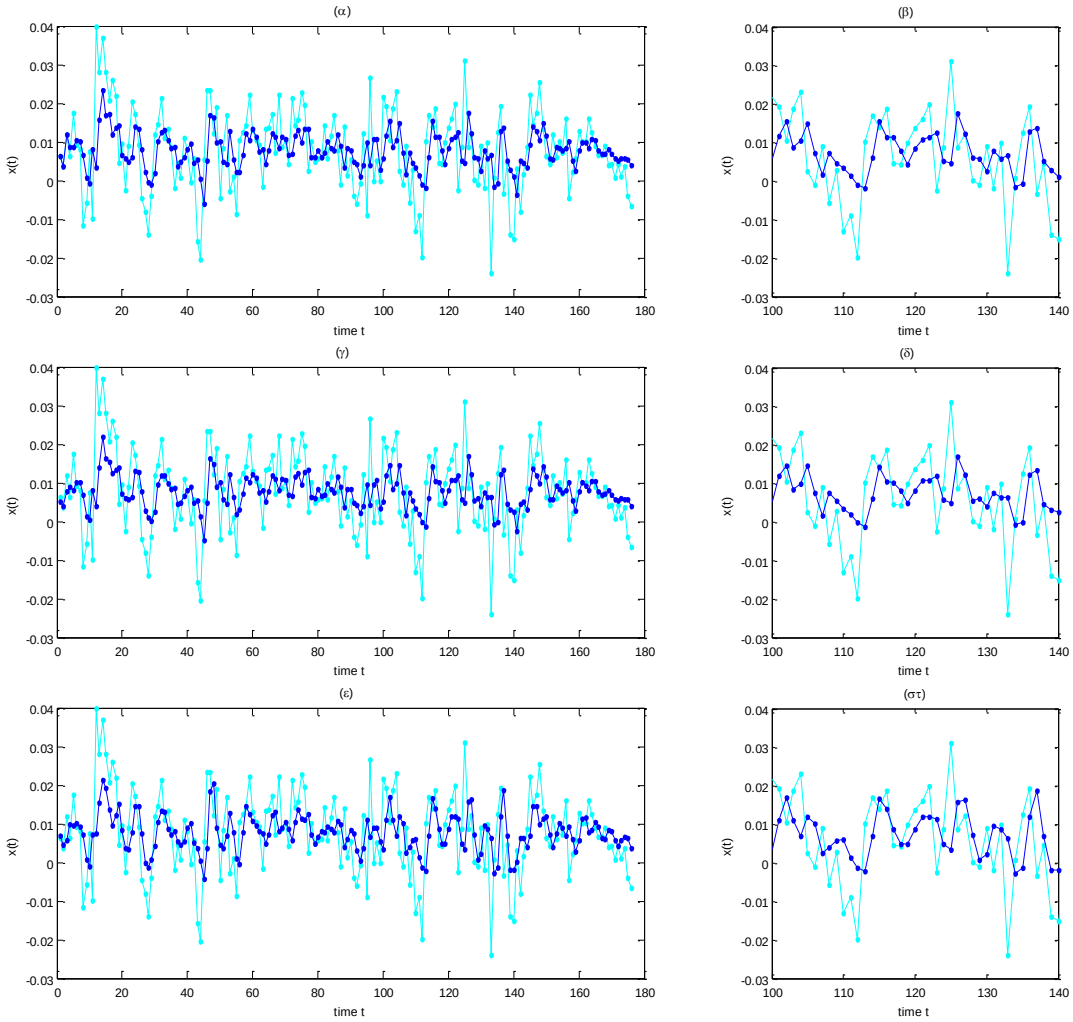
Σχήμα 20 Το γράφημα της συνάρτησης του κριτηρίου AIC για μοντέλα ARMA(*p*,*q*) όπου η κάθε καμπύλη δηλώνει την τιμή του AIC ως προς την τάξη του AR μέρους *p* για διαφορετική τάξη του MA μέρους *q*, όπως δίνεται στο ένθετο.

Η ελάχιστη τιμή του AIC πετυχαίνεται για p=2 και q=2 και για αυτό επιλέγουμε το μοντέλο ARMA(2,2). Προσαρμόζουμε λοιπόν μοντέλο ARMA(2,2) στη χρονοσειρά και οι εκτιμούμενες παράμετροι είναι $\hat{\phi}_1 = 0.614$, $\hat{\phi}_2 = -0.455$, $\hat{\theta}_1 = 0.301$ και $\hat{\theta}_2 = -0.600$. Το εκτιμούμενο μοντέλο είναι

$$\hat{x}_t = 0.0065 + 0.614x_{t-1} - 0.455x_{t-2} + z_t - 0.301z_{t-1} + 0.600z_{t-2}, \qquad t = 1,\ldots,176$$

όπου ο μέσος όρος της χρονοσειράς είναι $\bar{x} = 0.0077$, η εκτίμηση της διασποράς των σφαλμάτων (υπολοίπων) είναι $s_z^2 = 0.000097$ και της τυπικής απόκλισης $s_z = 0.00983$, όσο και για το MA(2) μοντέλο.

Παρατηρούμε πως η τυπική απόκλιση των σφαλμάτων δε διαφέρει σημαντικά στα τρία μοντέλα AR(3), MA(2) και ARMA(2,2) που προσαρμόσαμε. Πράγματι όπως φαίνεται στο Σχήμα 21, οι εκτιμώμενες τιμές της x_t από τα τρία μοντέλα δε φαίνεται να διαφέρουν.



Σχήμα 21 (α) Προσαρμογή μοντέλου AR(3) στη χρονοσειρά του ρυθμού μεταβολής του ΑΕΠ των ΗΠΑ, όπου με γκρι (γαλάζια) γραμμή είναι η χρονοσειρά και με μαύρο (μπλε) η προσαρμογή της. (β) Μεγέθυνση του χρονικού παραθύρου [100, 140] τετράμηνα στο (α). (γ) και (δ) το ίδιο για μοντέλο MA(2). (ε) και (στ) το ίδιο για μοντέλο ARMA(2,2).

Συνοψίζοντας για τα μοντέλα τύπου AR, MA και ARMA παραθέτονται κάποια γενικά σχόλια.

- Στις εφαρμογές προτιμούνται τα AR μοντέλα από τα MA μοντέλα γιατί υποθέτουν κάποια βραχυπρόθεσμη μνήμη στο σύστημα και μπορούν έτσι να δώσουν καλύτερη φυσική ερμηνεία του συστήματος, καθώς και να κάνουν καλύτερες προβλέψεις (για το τελευταίο δες το επόμενο κεφάλαιο).
- Στην πράξη δεν υπάρχει η έννοια του βέλτιστου μοντέλου και συνήθως υπάρχουν περισσότερα από ένα μοντέλα που αποδίδουν το ίδιο καλά, π.χ. ένα ARMA(p,q) με μικρά p και q προσαρμόζεται στα δεδομένα εξίσου καλά όπως και ένα AR(p) ή ένα MA(q) μεγάλης τάξης.
- Η προσαρμογή μοντέλων μεγάλης τάξης αποφεύγεται γιατί ενώ φαινομενικά μπορεί να είναι καλύτερη, δεν αντιστοιχεί μόνο σε πληροφορία του συστήματος αλλά και σε θόρυβο, γνωστό ως *υπερ-προσαρμογή* [over-fitting]. Εάν σε κάποια δεδομένα προσαρμόσουμε π.χ. ένα AR(3) μοντέλο και τα σφάλματα της προσαρμογής είναι λευκός θόρυβος, τότε το ίδιο αναμένεται να συμβαίνει και για μοντέλα μεγαλύτερης τάξης, αλλά το ότι θα εκτιμήσουμε περισσότερες παραμέτρους δε σημαίνει και ότι θα εξηγήσουμε καλύτερα τα δεδομένα.

4.4 Μοντέλο χρονοσειράς με τάση

Τα μοντέλα τύπου ARMA (που συμπεριλαμβάνουν τα AR και MA) είναι κατάλληλα για στάσιμες χρονοσειρές. Όταν η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη μπορούμε να την κάνουμε στάσιμη και να εφαρμόσουμε τα μοντέλα τύπου ARMA.

Αν η μη-στασιμότητα οφείλεται σε τάσεις, στο ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 περιγράψαμε κάποιους τρόπους για να την κάνουμε στάσιμη. Ας θεωρήσουμε μια μη-στάσιμη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ με τάσεις. Η απλή μέθοδος των πρώτων διαφορών δίνει μια νέα χρονοσειρά, $x_t = y_t - y_{t-1}$. Είναι γνωστό πως οι πρώτες διαφορές σε χρονοσειρά τυχαίου περίπατου δίνουν χρονοσειρά iid. Στη γενική περίπτωση όμως οι πρώτες διαφορές δίνουν μια στάσιμη χρονοσειρά $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ με συσχετίσεις που μπορούν να περιγραφούν από μοντέλα τύπου ARMA(*p*,*q*). Αν η $\{x_t\}$ δεν είναι στάσιμη, επαναλαμβάνουμε το μετασχηματισμό των πρώτων διαφορών μέχρι να προκύψει στάσιμη χρονοσειρά. Στα χρηματοοικονομικά οι χρονοσειρές τιμών, π.χ. των μετοχών, δεν είναι στάσιμες, αλλά οι χρονοσειρές των αποδόσεων ή των λογαριθμικών αποδόσεων (μετασχηματισμοί με βάση τις πρώτες διαφορές) μπορούν να θεωρηθούν στάσιμες, τουλάχιστον ως προς την τάση (πρώτη ροπή).

Ας εξετάσουμε τη στασιμότητα της αρχικής χρονοσειράς $\{y_t\}$ από το AR μοντέλο που προσαρμόζεται σε αυτήν. Όπως έχει αναφερθεί, εξαιρώντας την ειδική περίπτωση της εκρηκτικά μη-στάσιμης χρονοσειράς (όταν μια χαρακτηριστική ρίζα του AR μοντέλου έχει μέγεθος μεγαλύτερο της μονάδας), αν η χρονοσειρά έχει τάσεις περιμένουμε η μεγαλύτερη χαρακτηριστική ρίζα του AR μοντέλου να έχει μέγεθος πολύ κοντά στη μονάδα. Η απαλοιφή της μοναδιαίας χαρακτηριστικής ρίζας [unit root] αντιστοιχεί ακριβώς στο μετασχηματισμό των πρώτων διαφορών. Πράγματι αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο εκφρασθεί ως προς τις ρίζες του, ένας από τους όρους γινομένου θα είναι (1-B), δηλαδή για ρίζα μονάδα, που αντιστοιχεί στις πρώτες διαφορές, $x_t = y_t - y_{t-1} = (1-B)y_t$. Σε ειδικές περιπτώσεις που υπάρχει διπλή ή πολλαπλή μοναδιαία ρίζα, επαναλαμβάνεται ο μετασχηματισμός των πρώτων διαφορών τόσες φορές όσες φορές εμφανίζεται η μοναδιαία ρίζα.

Ο συνδυασμός μετασχηματισμού πρώτων διαφορών σε μια μη-στάσιμη χρονοσειρά και μοντέλου ARMA αναφέρεται και ως **ολοκληρωμένο αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο κινούμενου μέσου** ή **ολοκληρωμένο μικτό μοντέλο** [autoregressive integrated moving average model, ARIMA]. Επιτρέποντας *d* επαναλήψεις των πρώτων διαφορών για να φτάσουμε σε στάσιμη χρονοσειρά και να προσαρμόσουμε κάποιο ARMA(*p*,*q*) μοντέλο, τα μοντέλα ARIMA συμβολίζονται ως ARIMA(*p*,*d*,*q*).

Ας ορίσουμε πως και πότε χαρακτηρίζουμε μια στοχαστική διαδικασία $\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ ως διαδικασία ARIMA(*p*,*d*,*q*). Θεωρούμε πως η $\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ είναι μη-στάσιμη διαδικασία και παρουσιάζει τάση. Εξετάζουμε αν η χρονοσειρά (στοχαστική διαδικασία) που προκύπτει από τις πρώτες διαφορές, $X_t = Y_t - Y_{t-1}$ μπορεί να θεωρηθεί στάσιμη. Αν όχι συνεχίζουμε πάλι με πρώτες διαφορές (διαφορές δεύτερης τάξης) και έχουμε $X_t' = X_t - X_{t-1} = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$. Με τον τρόπο αυτό συνεχίζουμε μέχρι να δεχθούμε πως για κάποια τάξη *d*, η χρονοσειρά $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ που ορίζεται ως

$$X_t = \nabla^d Y_t = (1-B)^d Y_t$$

είναι στάσιμη. Θεωρούμε λοιπόν πως η $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ μπορεί να περιγραφεί ως κάποια διαδικασία ARMA(p,q), $\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$. Άρα η $\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ μπορεί να οριστεί ως

$$\phi(B)\nabla^d Y_t = \theta(B)Z_t \quad \text{ή} \quad \phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)Z_t \tag{58}$$

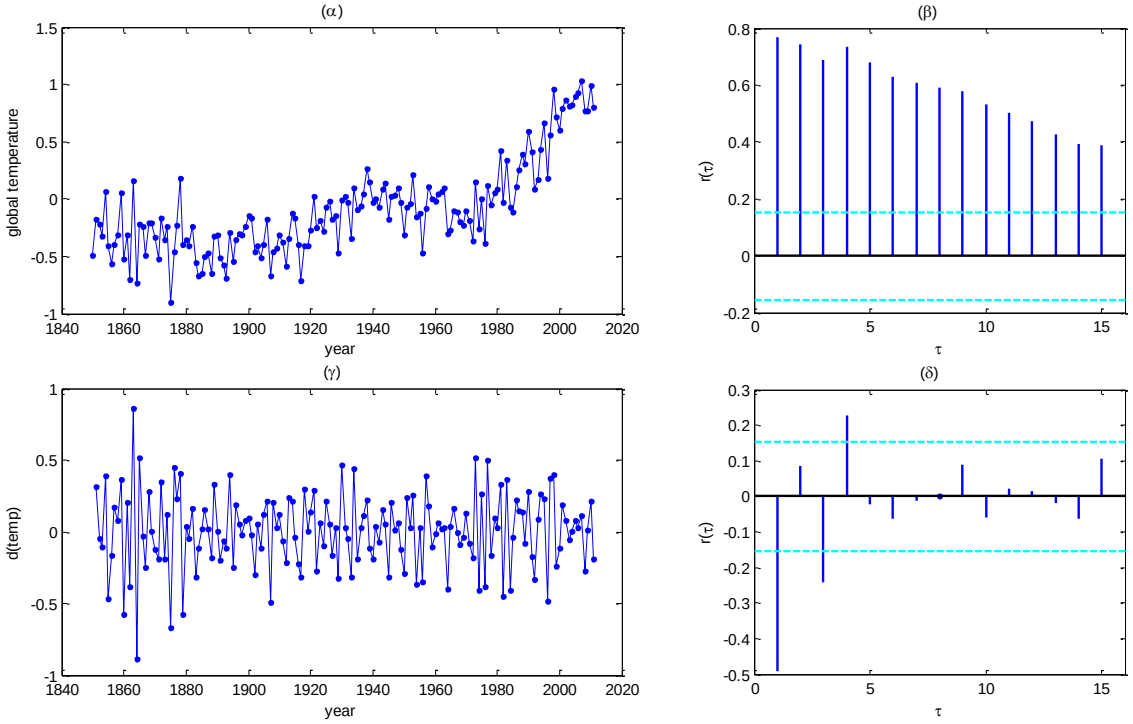
Η παραπάνω σχέση δηλώνει πως η $\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ARMA(p,q) διαδικασία που έχει όμως μοναδιαία ρίζα με πολλαπλότητα όσο η τάξη d. Για αυτό δηλώνεται ως διαδικασία ARIMA(p,d,q).

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα εκτίμησης μοντέλου σε χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ που έχει τάση, η διαδικασία που ακολουθούμε είναι γνωστή ως **Box-Jenkins**, γιατί οι Box και Jenkins πρότειναν πρώτοι μια ολοκληρωμένη διαδικασία εκτίμησης γραμμικών μοντέλων τύπου ARMA σε μη-στάσιμες χρονοσειρές. Η διαδικασία αυτή είναι επέκταση της διαδικασίας που περιγράφηκε παραπάνω στα πλαίσια των στάσιμων χρονοσειρών (μοντέλα AR, MA και ARMA) και περιλαμβάνει την επιλογή τάξης μοντέλου, την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου και τη διάγνωση της καταλληλότητας του μοντέλου. Παρακάτω δίνεται η ολοκληρωμένη διαδικασία στα πλαίσια της γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών.

1. Κατασκευάζουμε το γράφημα της χρονοσειράς $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ (διάγραμμα ιστορίας) και της αυτοσυσχέτισης.
2. Αν η αυτοσυσχέτιση για κάθε υστέρηση είναι στατιστικά ασήμαντη, η χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί λευκός θόρυβος και η προσαρμογή γραμμικού μοντέλου δεν έχει νόημα. Ενδεχομένως ένα μη-γραμμικό μοντέλο να προσαρμόζεται στα δεδομένα. (Για αυτό προτείνεται να γίνει έλεγχος ανεξαρτησίας με μη γραμμικές στατιστικές). Αν η αυτοσυσχέτιση είναι ισχυρή και φθίνει αργά με την υστέρηση τότε η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη και παίρνουμε τις πρώτες διαφορές. Αν η αυτοσυσχέτιση συνεχίζει να μη φθίνει παίρνουμε πάλι πρώτες διαφορές.
3. Στη στάσιμη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών τάξης d $\{x_{d+1}, x_{d+2}, \ldots, x_n\}$ που έχει προκύψει από το Βήμα 2 προσαρμόζεται μοντέλο AR, MA ή ARMA τάξης που έχει επιλεχτεί κατάλληλα χρησιμοποιώντας τη μερική αυτοσυσχέτιση (για AR μοντέλο), την αυτοσυσχέτιση (για MA μοντέλο) ή κάποιο κριτήριο πληροφορίας.
4. Προσαρμόζουμε το μοντέλο στη χρονοσειρά και ελέγχουμε την καταλληλότητα του (διαγνωστικό έλεγχος). Κυρίως ελέγχουμε αν η χρονοσειρά των υπολοίπων είναι λευκός θόρυβος.
5. Έχοντας καταλήξει στο πιο κατάλληλο μοντέλο ARMA(p,q) για τη χρονοσειρά πρώτων διαφορών τάξης d, $\{x_{d+1}, x_{d+2}, \ldots, x_n\}$, εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του $x_t = (1-B)^d y_t$ που ορίζει το μοντέλο ARIMA(p,d,q) για τη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Ειδικότερα χρησιμοποιούμε το ARMA(p,q) για να κάνουμε πρόβλεψη στη $\{x_{d+1}, x_{d+2}, \ldots, x_n\}$ και μετασχηματίζουμε τις προβλέψεις πίσω στην αρχική χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Παράδειγμα

Μια από τις χρονοσειρές που έχουν μελετηθεί σχετικά με το γνωστό πρόβλημα του θερμοκηπίου, δηλαδή της αύξησης της θερμοκρασίας της γης, είναι ο ετήσιος δείκτης της λεγόμενης ανωμαλίας [anomaly] στη θερμοκρασία εδάφους στο βόρειο ημισφαίριο σε πλέγμα 5ο x 5ο την περίοδο 1850-2011. Ως ανωμαλία ορίζεται η διαφορά θερμοκρασίας από κάποια θερμοκρασία αναφοράς. Η χρονοσειρά αυτή δίνεται στο Σχήμα 22α.

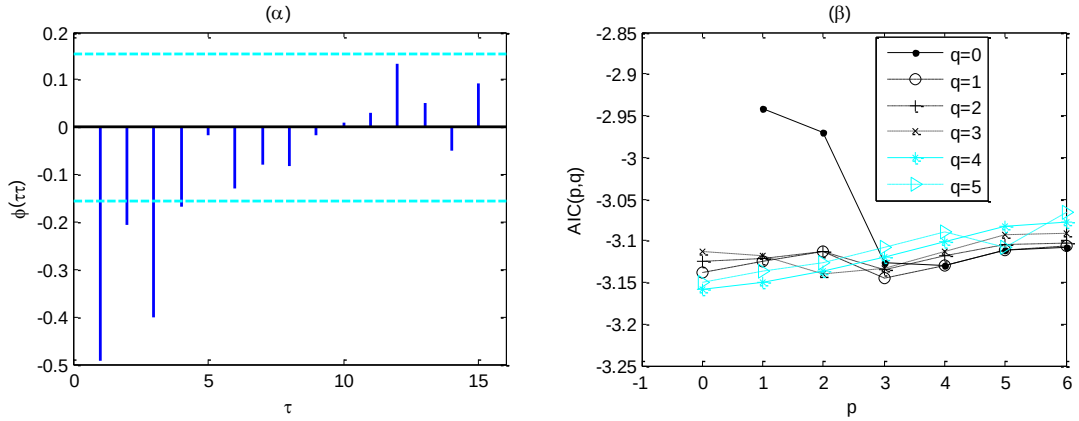


Σχήμα 22 (α) Η χρονοσειρά του ετήσιου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης [πηγή: http://www.cru.uea.ac.uk/cru/data/temperature]. (β) Το γράφημα της αυτοσυσχέτισης για τη χρονοσειρά στο (α). (γ) Η χρονοσειρά των πρώτων διαφορών του ετήσιου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης. (δ) Το γράφημα της αυτοσυσχέτισης για τη χρονοσειρά στο (γ).

Είναι φανερό πως η χρονοσειρά του ετήσιου δείκτη για τη θερμοκρασίας της γης, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $n = 162$, παρουσιάζει αυξητική τάση στην τελευταία περίοδο (μετά το 1980) αλλά και κάποιες λιγότερα έντονες τάσεις σε προηγούμενες περιόδους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η αυτοσυσχέτιση να φθίνει πολύ αργά με την υστέρηση (δες Σχήμα 22β). Αυτή η μορφή του γραφήματος της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης αποτελεί ξεκάθαρη ένδειξη μη-στασιμότητας που οφείλεται στην ύπαρξη τάσης. Η τάση αυτή είναι δύσκολο να θεωρηθεί ως καθοριστική, δηλαδή να περιγραφεί με κάποιο μοντέλο του χρόνου και χαρακτηρίζεται ως στοχαστική. Για την απαλοιφή της λοιπόν η πιο ασφαλής προσέγγιση είναι να πάρουμε τις πρώτες διαφορές. Η χρονοσειρά $\{x_2, x_2, \ldots, x_n\}$ των πρώτων διαφορών παρουσιάζεται στο Σχήμα 22γ και η αυτοσυσχέτιση της στο Σχήμα 22δ. Παρατηρούμε πως η χρονοσειρά των πρώτων διαφορών που αντιστοιχεί στις μεταβολές του ετήσιου δείκτη θερμοκρασίας δεν παρουσιάζει τάσεις και η αυτοσυσχέτιση της φθίνει γρήγορα στο 0. Η ύπαρξη στατιστικά σημαντικών αυτοσυσχετίσεων για κάποιες υστερήσεις υποδηλώνει πως η χρονοσειρά των μεταβολών του ετήσιου δείκτη για τη θερμοκρασίας της γης δεν είναι λευκός θόρυβος αλλά στάσιμη χρονοσειρά με ασθενείς αυτοσυσχετίσεις.

Για να ορίσουμε γραμμικό μοντέλο τύπου ARMA για τη χρονοσειρά των μεταβολών του δείκτη θερμοκρασίας υπολογίζουμε τη μερική αυτοσυσχέτιση και το κριτήριο του AIC, όπως δίνονται στο Σχήμα 23. Το κριτήριο AIC έχει ελάχιστο για p=0 και q=4, δηλαδή για μοντέλο MA(4). Αυτό συμφωνεί και με το κριτήριο αυτοσυσχέτισης, όπου η μεγαλύτερη υστέρηση στατιστικά σημαντικής αυτοσυσχέτισης είναι 4. Βέβαια η επιλογή αυτή δεν είναι ξεκάθαρη. Για παράδειγμα, θα μπορούσε κάποιος να θεωρήσει μοντέλο AR(3), καθώς για p=3 και q=0 η

τιμή του AIC έχει μειωθεί στο ίδιο περίπου επίπεδο όπως και για άλλες μεγαλύτερες τάξεις των *p* και *q*, και η μερική αυτοσυσχέτιση είναι στατιστικά σημαντική για υστέρηση 3 (είναι επίσης οριακά στατιστική σημαντική για υστέρηση 4 και στατιστικά μη-σημαντική για μεγαλύτερες υστερήσεις).



Σχήμα 23 (α) Μερική αυτοσυσχέτιση για τη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών του ετήσιου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης. (β) Το κριτήριο AIC για μοντέλα ARMA(*p*,*q*) για την ίδια χρονοσειρά, όπου η κάθε καμπύλη δηλώνει την τιμή του AIC ως προς την τάξη του AR μέρους *p* για διαφορετική τάξη του MA μέρους *q*, όπως δίνεται στο ένθετο.

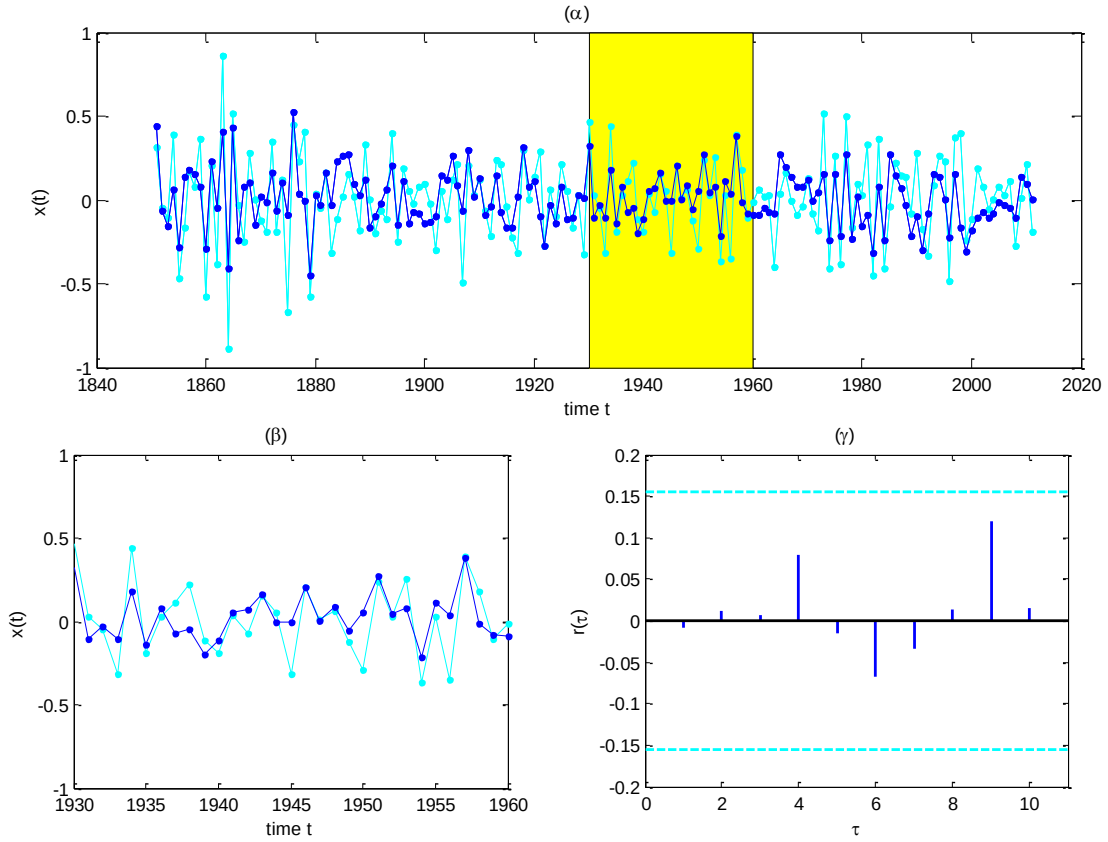
Προσαρμόζουμε λοιπόν στη χρονοσειρά $\{x_2, x_2, \ldots, x_n\}$ μοντέλο MA(4) και το εκτιμούμενο μοντέλο είναι

$$x_t = 0.008 + z_t - 0.758 z_{t-1} - 0.022 z_{t-2} - 0.219 z_{t-3} + 0.275 z_{t-4}, \qquad t = 2, \ldots, 176$$

όπου ο μέσος όρος της χρονοσειράς είναι $\bar{x} = 0.008$. Η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης των **σφαλμάτων (υπολοίπων)** βρέθηκε να είναι $s_z = 0.2035$ (διασπορά $s_z^2 = 0.0414$). Το αντίστοιχο μοντέλο για την αρχική χρονοσειρά του ετήσιου δείκτη για τη θερμοκρασίας της γης $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ είναι ARIMA(0,1,4)

$$(1-B)Y_t = \theta_4(B) Z_t .$$

Στο Σχήμα 24α δίνεται η χρονοσειρά των μεταβολών του δείκτη θερμοκρασίας και η προσαρμογή της με το μοντέλο MA(4) και στο Σχήμα 24β δίνεται σε μεγέθυνση ένα τμήμα της χρονοσειράς με την προσαρμογή της. Σύμφωνα με τα κριτήρια επιλογής μοντέλου, αυτή η προσαρμογή είναι η καλύτερη που μπορούμε να πετύχουμε με γραμμικά μοντέλα. Πράγματι ο διαγνωστικό έλεγχος δείχνει πως το μοντέλο MA(4) είναι επαρκές, όπως φαίνεται από το γράφημα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης των υπολοίπων της προσαρμογής του μοντέλου MA(4) στο Σχήμα 24γ. Οι τιμές της αυτοσυσχέτισης για όλες τις υστερήσεις από 1 ως 10 είναι μέσα στα όρια μη-σημαντικότητας και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα υπόλοιπα προσαρμογής είναι λευκός θόρυβος.



Σχήμα 24 (α) Προσαρμογή του μοντέλου MA(4) στη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών του ετήσιου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης, όπου με γκρι (γαλάζια) γραμμή είναι η χρονοσειρά και με μαύρο (μπλε) η προσαρμογή της.

4.5 Μοντέλο χρονοσειράς με εποχικότητα

Η διαδικασία Box-Jenkins εφαρμόζεται για τη μοντελοποίηση μη-στάσιμης χρονοσειράς, αλλά ουσιαστικά περιορίζεται σε χρονοσειρά με τάση. Όπως έχει ήδη αναφερθεί η χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί μη-στάσιμη όταν έχει εποχικότητα (χρησιμοποιούμε τον όρο αυτό και για περιοδικότητα με γνωστή περίοδο). Η διαδικασία σε αυτήν την περίπτωση είναι παρόμοια, αλλά αντί για την απαλοιφή της τάσης απαλείφουμε την εποχικότητα. Ξεχωρίζουμε τρεις πιθανές περιπτώσεις για χρονοσειρές χωρίς τάση αλλά με εποχικότητα:

1. Η εποχικότητα εμφανίζεται χωρίς συσχέτιση μεταξύ των εποχικών κύκλων.
2. Υπάρχει συσχέτιση μόνο μεταξύ των εποχικών κύκλων.
3. Υπάρχει συσχέτιση αλλά και τάση μεταξύ εποχικών κύκλων.

Οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις είναι οι αντίστοιχες για λευκό θόρυβο, ARMA και ARIMA διαδικασίες αν αντί για συνεχόμενες τυχαίες μεταβλητές (χρονικό βήμα 1) θεωρήσουμε τις μεταβλητές με χρονικό βήμα την περίοδο s της εποχικότητας. Θεωρούμε λοιπόν την εξάρτηση μεταξύ εποχικών κύκλων αντί συνεχόμενων παρατηρήσεων σε μια χρονοσειρά με εποχικότητα.

4.5.1 Εποχικότητα χωρίς συσχέτιση μεταξύ εποχικών κύκλων

Έστω η χρονοσειρά των παρατηρήσεων $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ που δεν έχει τάση αλλά έχει εποχικότητα (ή περιοδικότητα με γνωστή περίοδο). Υποθέτουμε πως η εποχικότητα δεν εμπλέκεται με την υποκείμενη στοχαστική διαδικασία, δηλαδή η παρατηρούμενη χρονοσειρά αποτελεί άθροισμα της πραγματοποίησης μιας

στοχαστικής διαδικασίας και μιας περιοδικής συνάρτησης με περίοδο *s*. Αυτή η περίπτωση παρουσιάζεται συχνά όταν μελετάμε συστήματα που αναφέρονται σε χρονικές περιόδους που περιέχουν εποχικούς κύκλους χωρίς αυτοί να επηρεάζουν την εξέλιξη τους αλλά να αλλάζουν το επίπεδο τιμών της χρονοσειράς κατά σταθερό τρόπο ως προς τον εποχικό κύκλο. Για παράδειγμα η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας σε μια βιομηχανική μονάδα μπορεί να περιγράφεται με κάποια στοχαστική διαδικασία στην οποία όμως προστίθεται μια διακύμανση ετήσιας διάρκειας και σταθερής ως προς τα έτη, που οφείλεται στις διαφορετικές ανάγκες ηλεκτρικής ενέργειας σε διαφορετικές εποχές του έτους. Σε τέτοιες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει απλά να απαλείψουμε την περιοδική συνάρτηση και να προχωρήσουμε με την ανάλυση της χρονοσειράς απαλλαγμένης από την εποχικότητα. Για αυτόν τον σκοπό εφαρμόζουμε μια από τις διαδικασίες απαλοιφής περιοδικότητας που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.6.2. Επιγραμματικά παρουσιάζονται παρακάτω αυτές οι διαδικασίες, όπου η περιοδική συνάρτηση περιόδου *s* που θέλουμε να εκτιμήσουμε αποτελείται από τα στοιχεία s_i, i=1,...,s:

- Η εκτίμηση του περιοδικού στοιχείου s_i δίνεται από τους μέσους όρους των τιμών του στοιχείου στη χρονοσειρά, $s_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{i+js}$. Στη συνέχεια η εποχικότητα απαλείφεται αφαιρώντας το περιοδικό στοιχείο σε κάθε χρονική στιγμή t από το αντίστοιχο στοιχείο της παρατηρούμενης χρονοσειράς, $x_t = y_t - s_t$.
- Η εποχικότητα απαλείφεται με εξομάλυνση συμμετρικού κινούμενου μέσου τάξης *s*. Αν η περίοδος *s* είναι περιττός αριθμός τότε η χρονοσειρά απαλλαγμένη από εποχικότητα είναι $x_t = \frac{1}{s}\sum_{i=-(s-1)/2}^{(s-1)/2} y_{t+i}$, ενώ αν είναι άρτιος αριθμός είναι $x_t = \frac{1}{s}(0.5y_{t-s/2} + y_{t-s/2+1} + \cdots + y_{t+s/2-1} + 0.5y_{t+s/2})$.
- Η εποχικότητα απαλείφεται παίρνοντας τις διαφορές υστέρησης *s* (*s*-διαφορές), $X_t = \nabla_s Y_t = (1-B^s)Y_t = Y_t - Y_{t-s}$.

4.5.2 Εποχικότητα με συσχέτιση μόνο μεταξύ εποχικών κύκλων

Όπως παραπάνω θεωρούμε πως η χρονοσειρά των παρατηρήσεων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (χρησιμοποιούμε αυτόν το συμβολισμό αντί του $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ γιατί δε θα εφαρμόσουμε εδώ κάποιο μετασχηματισμό) δεν έχει τάση αλλά έχει εποχικότητα (ή περιοδικότητα με γνωστή περίοδο). Επιπλέον υποθέτουμε πως υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των εποχικών κύκλων αλλά όχι μεταξύ των στοιχείων στον ίδιο κύκλο εποχικότητας. Για παράδειγμα η ωριαία κατανάλωση ενέργειας σε μια περιοχή ακολουθεί συγκεκριμένο πρότυπο σε ένα 24ωρο (π.χ. μείωση από τα μεσάνυχτα στις πρωινές ώρες, υψηλότερη χρήση τις απογευματινές και βραδινές ώρες), όπου δεν περιμένουμε να υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ συνεχόμενων ωρών του 24ώρου, αλλά ίσως να υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ κάποιας ώρας του 24ώρου με την αντίστοιχη ώρα σε προηγούμενα 24ωρα. Άρα έχουμε 24 προβλήματα ανάλυσης χρονοσειρών, ένα για κάθε ώρα του 24ωρου με μήκος χρονοσειράς τις ημέρες για τις οποίες έχουμε μετρήσεις. Σε τέτοια προβλήματα, ουσιαστικά έχουμε *s* χρονοσειρές να αναλύσουμε, όπου *s* η περίοδος της εποχικότητας, με χρονικό βήμα μεταξύ των παρατηρήσεων της κάθε χρονοσειράς να είναι επίσης *s*. Για κάθε στοιχείο με σειρά i, i=1,...,s, του

εποχικού κύκλου η χρονοσειρά είναι $\{x_i, x_{i+s}, x_{i+2s}, \ldots, x_{i+ks}\}$, όπου k είναι οι εποχικοί κύκλοι στην παρατηρούμενη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Θεωρώντας πως η στοχαστική διαδικασία για χρονικό βήμα s είναι ίδια ανεξάρτητα για κάθε στοιχείο εποχικότητας με δείκτη i, i=1,...,s. Υποθέτοντας ότι η στοχαστική διαδικασία είναι γραμμική, το μοντέλο που προσαρμόζουμε είναι **ARMA(P,Q)$_s$**, όπου P είναι η τάξη του αυτοπαλινδρομούμενου (AR) μέρους και Q είναι η τάξη του μέρους κινούμενου μέσου (MA) και τα μέρη αυτά ορίζονται για χρονικό βήμα s. Οι συμβολισμοί των τάξεων είναι διαφορετικοί για να ξεχωρίζουν από τις αντίστοιχες τάξεις του ARMA(p,q) όπου το χρονικό βήμα είναι ένα. Η μαθηματική έκφραση του μοντέλου είναι

$$X_{i+st} = \Phi_1 X_{i+s(t-1)} + \cdots + \Phi_P X_{i+s(P-1)} + Z_{i+st} - \Theta_1 Z_{i+s(t-1)} - \cdots - \Theta_Q Z_{i+s(Q-1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, s$$

και θεωρώντας το χρόνο σε βήματα s, $t = Ps+1, Ps+2, \ldots, n$,

$$X_t = \Phi_1 X_{t-s} + \cdots + \Phi_P X_{t-Ps} + Z_t - \Theta_1 Z_{t-s} - \cdots - \Theta_Q Z_{t-Qs} \tag{59}$$

Σε μορφή πολυωνύμου το μοντέλο ARMA(P,Q)$_s$ για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι

$$\Phi(B^s) X_t = \Theta(B^s) Z_t .$$

4.5.3 Εποχικότητα με συσχέτιση και τάση μόνο μεταξύ εποχικών κύκλων

Η τελευταία περίπτωση είναι αυτή της Παραγράφου 4.5.3 αλλά θεωρούμε επίσης πως υπάρχει και εποχική τάση, δηλαδή τάση που εμφανίζεται όμως μόνο μεταξύ των εποχικών κύκλων για τις χρονικές στιγμές t, t+s, t+2s, ... Σε αυτήν την περίπτωση επεκτείνουμε το μοντέλο ARMA(P,Q)$_s$ σε ARIMA(P,D,Q)$_s$ γενικά, αλλά συνήθως η παράμετρος ολοκλήρωσης D είναι ένα. Το μοντέλο ARIMA(P,*1*,Q)$_s$ για τη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ έχει τη μαθηματική έκφραση με μορφή πολυωνύμου

$$\Phi(B^s)(1-B^s) Y_t = \Theta(B^s) Z_t . \tag{60}$$

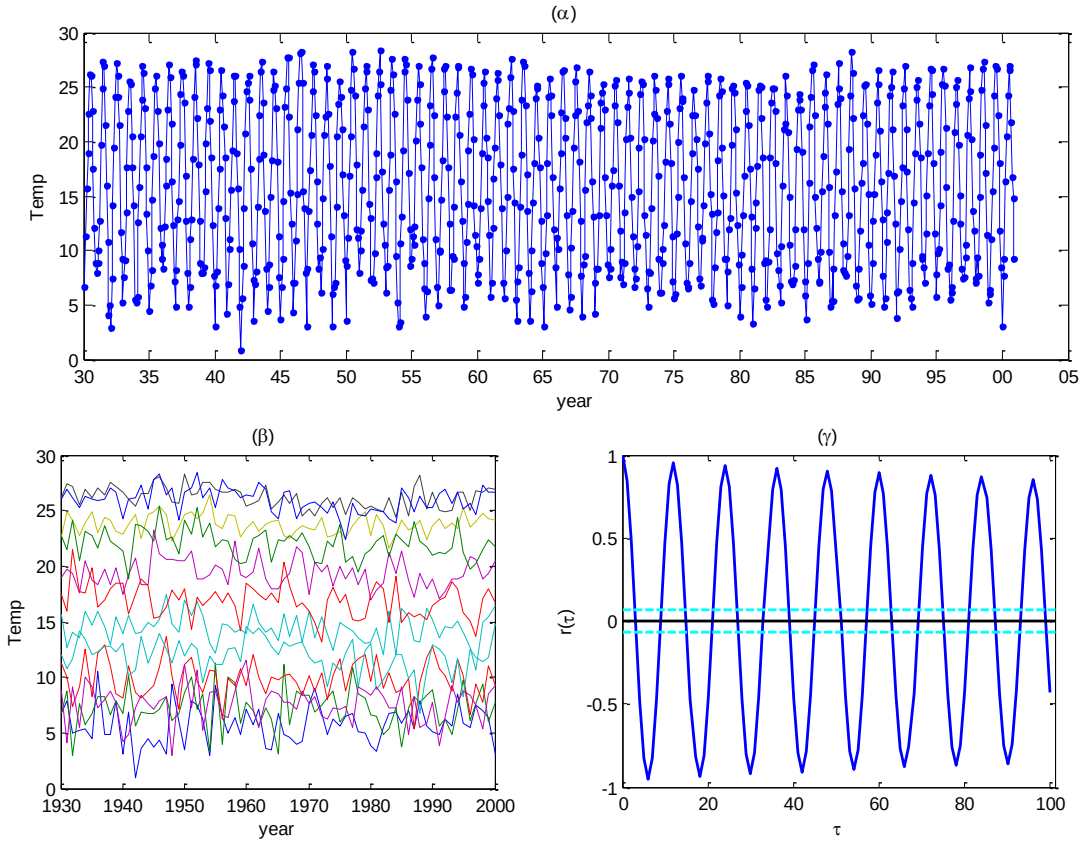
Το μοντέλο αυτό (όπως και το μοντέλο ARIMA(p,1,q)) ουσιαστικά δηλώνει δύο στάδια στη μοντελοποίηση. Πρώτα παίρνουμε τις s-διαφορές στη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $x_t = \nabla_s y_t = (1-B^s) y_t = y_t - y_{t-s}$, και προκύπτει η χρονοσειρά $\{x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n\}$ απαλλαγμένη από "εποχική τάση". Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το μοντέλο ARMA(P,Q)$_s$ στη χρονοσειρά $\{x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n\}$.

Παράδειγμα

Θα μελετήσουμε μοντέλα για τη μέση μηνιαία θερμοκρασία στην περιοχή της Θεσσαλονίκης. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ένα μέρος της καταγραφής μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών του σταθμού Θεσσαλονίκης την περίοδο 1930 - 2000.

ΕΤΟΣ	ΙΑΝΟΥΑΡ	ΦΕΒΡΟΥΑΡ	ΜΑΡΤΙΟΣ	ΑΠΡΙΛ	ΜΑΙΟΣ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥΓΟΥΣΤ	ΣΕΠΤΕΜΒ	ΟΚΤΩΒΡ	ΝΟΕΜΒΡ	ΔΕΚΕΜΒΡ
1930	6,7	6,7	11,3	15,7	19	22,6	26,2	26	22,8	17,5	12,1	8,9
1931	7,9	8,8	10	12,7	19,7	24,9	27,4	26,9	21,5	16	10,8	4,1
1932	5	2,9	7,4	14,1	19,4	24,1	27,2	26,1	24,1	21,5	11,7	9,2
1933	5,2	7,6	9,1	13,5	17,6	22,8	25,5	25,3	20,5	17,7	14,2	5,5
1934	5,3	5,7	12,6	15,9	20,5	23,9	26,9	26,3	23,1	17,6	13,4	10
1935	4,5	6,8	8,2	14,7	18,7	24,9	26,1	26	22,8	19,8	12,1	9,2
1936	10,5	8,3	12,2	16	18,4	23	27,1	25,9	21,6	16,3	12,3	7,2
1937	4,8	8,2	12,9	14,5	19,7	24,4	26,4	26	23,6	16,9	12,8	8
1938	4,8	6,6	11	12,9	18,4	24,1	27,5	27,1	22,2	17,9	12,8	8,8
1939	7,9	7,9	8,5	15,5	19,8	23,1	27,2	26,6	21,9	18,5	12,3	7,7
1940	3,1	6,8	8,1	13,9	17,5	22,9	26,6	24,3	21,4	18,5	13	4,2
1941	6,9	10,2	11	15,6	19,2	23,7	26	26	18,9	15,7	10,1	4,8
1942	0,9	5,6	8,6	13,9	20,7	24,6	25,4	26,1	23,8	17,5	10,7	7,3

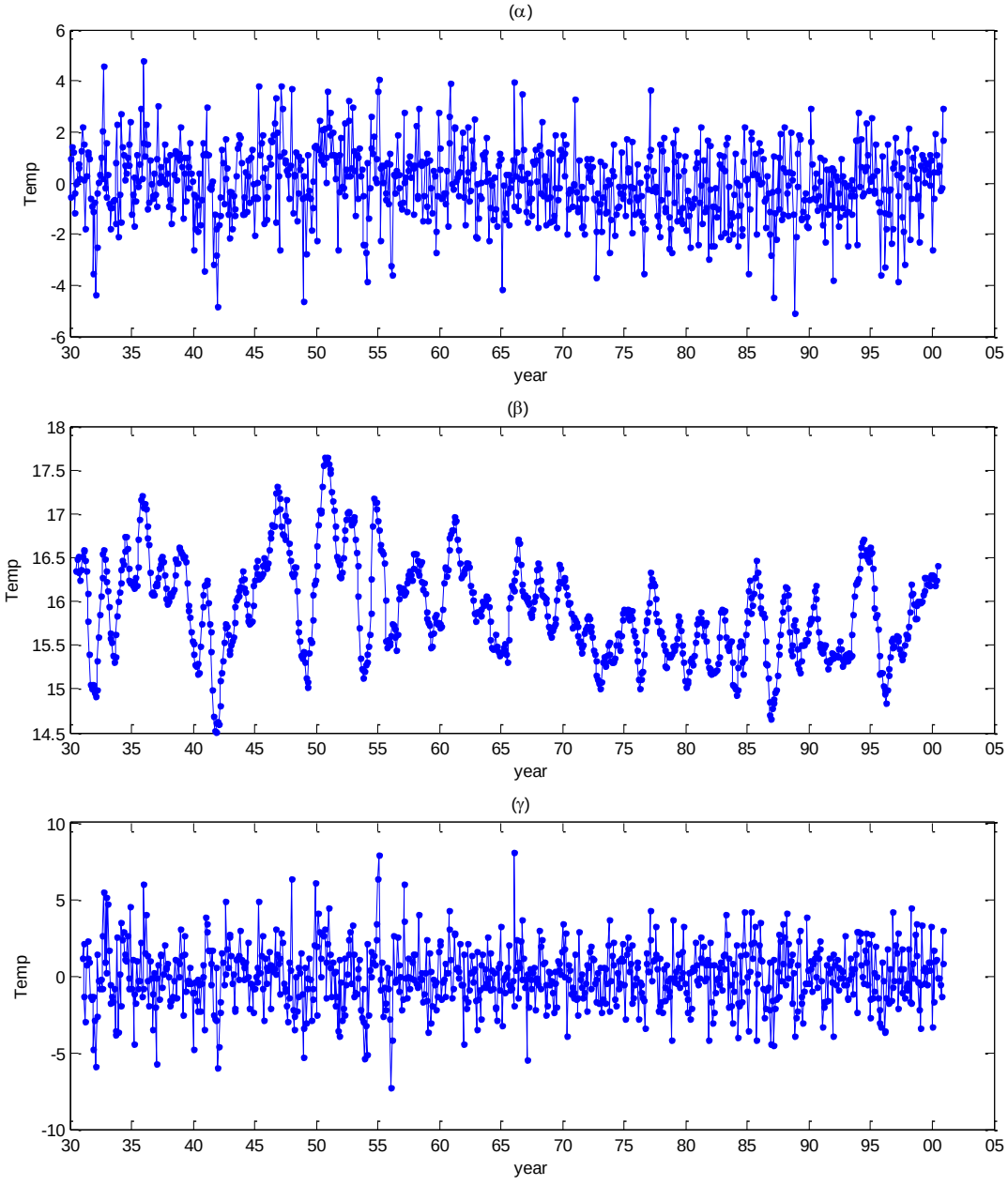
Η χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ έχει συνολικό μήκος $n = 71*12 = 852$. Το γράφημα της χρονοσειράς και της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της δίνονται στο Σχήμα 25.



Σχήμα 25 (α) Η χρονοσειρά των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών του σταθμού Θεσσαλονίκης την περίοδο 1930 - 2000. (β) Τα ίδια δεδομένα όπως στο (α) αλλά ως 12 χρονοσειρές, μια για κάθε μήνα. (γ) Το γράφημα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για τη χρονοσειρά στο (α).

Όπως είναι αναμενόμενο η χρονοσειρά έχει έντονη περιοδικότητα περιόδου 12, δηλαδή έχει ετήσιους εποχικούς κύκλους. Αν μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις μεταβολές θερμοκρασίας από μήνα σε μήνα, θα θέλαμε πρώτα να ουδετεροποιήσουμε τη μεταβολή θερμοκρασίας που οφείλεται σε αυτήν την εποχικότητα (οι καλοκαιρινοί μήνες είναι οι πιο θερμοί και οι χειμωνιάτικοι οι πιο ψυχροί). Ακολουθώντας αυτήν την κατεύθυνση, εφαρμόζουμε τις τρεις διαδικασίες απαλοιφής εποχικότητας της Παραγράφου 4.5.1, και οι χρονοσειρές που προκύπτουν δίνονται στο Σχήμα 26. Παρατηρούμε οι τρεις αυτές

χρονοσειρές διαφέρουν μεταξύ τους, γεγονός που δείχνει ότι η κάθε μέθοδος απαλοιφής εποχικότητας δίνει διαφορετικά αποτελέσματα. Μεγαλύτερη απόκλιση έχει η μέθοδος με χρήση του κινούμενου μέσου τάξης 12 που παρουσιάζει ισχυρότερες θετικές αυτοσυσχετίσεις (αργές μεταβολές). Δε θα προχωρήσουμε στην ανάλυση κάποιας από τις τρεις αυτές χρονοσειρές, αλλά θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στις συσχετίσεις των ίδιων μηνών σε συνεχόμενα έτη.

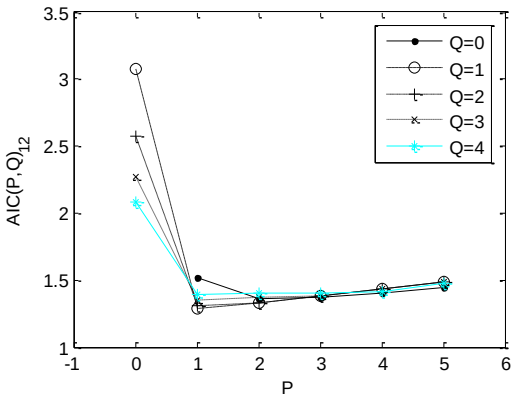


Σχήμα 26 (α) Η χρονοσειρά των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών του σταθμού Θεσσαλονίκης την περίοδο 1930 - 2000 απαλλαγμένη από εποχικότητα, αφαιρώντας τη μέση εποχικότητα. (β) Όπως στο (α) αλλά με χρήση του κινούμενου μέσου τάξης 12. (γ) Όπως στο (α) αλλά με χρήση της διαφοράς υστέρησης 12.

Στο Σχήμα 25β δίνονται τα δεδομένα μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών του σταθμού Θεσσαλονίκης, αλλά ως 12 χρονοσειρές, δηλαδή μια χρονοσειρά για κάθε μήνα (με χρονικό βήμα ενός έτους). Παρατηρούμε ότι η χρονοσειρά μέσων θερμοκρασιών για κάθε μήνα βρίσκεται σε διαφορετικό επίπεδο τιμών. Μπορεί κάποιος να αναλύσει την κάθε μια από τις 12 χρονοσειρές ανεξάρτητα και με ενδεχομένως διαφορετικό μοντέλο, αλλά εδώ θα θεωρήσουμε πως η εξέλιξη της μέσης θερμοκρασίας κάθε μήνα ακολουθεί την ίδια στοχαστική διαδικασία που θα εκτιμήσουμε με μοντέλο ARMA$(P,Q)_s$ για s=12. Οι 12

χρονοσειρές στο Σχήμα 25β φαίνεται να έχουν παρόμοια μορφή (πέρα από τη διαφορά ως προς τη μέση τιμή) το οποίο ενισχύει την παραπάνω παραδοχή. Η βασική διαφορά αυτής της προσέγγισης από την προσέγγιση της ξεχωριστής ανάλυσης σε κάθε μια από τις 12 χρονοσειρές είναι πως η εκτίμηση γίνεται σε μια χρονοσειρά που περιλαμβάνει όλες τις μέσες μηνιαίες τιμές θερμοκρασιών.

Για τη διερεύνηση του κατάλληλου μοντέλου ARMA(P,Q)$_{12}$ δοκιμάζουμε τέτοια μοντέλα για εύρος τιμών των τάξεων P και Q και υπολογίζουμε την τιμή του AIC για κάθε μοντέλο. Τα αποτελέσματα δίνονται στο Σχήμα 27 και δείχνουν πως πολλοί διαφορετικοί συνδυασμοί τάξεων P και Q μειώνουν το AIC στο κατώτερο επίπεδο με το ελάχιστο να επιτυγχάνεται για P=1 και Q=1.

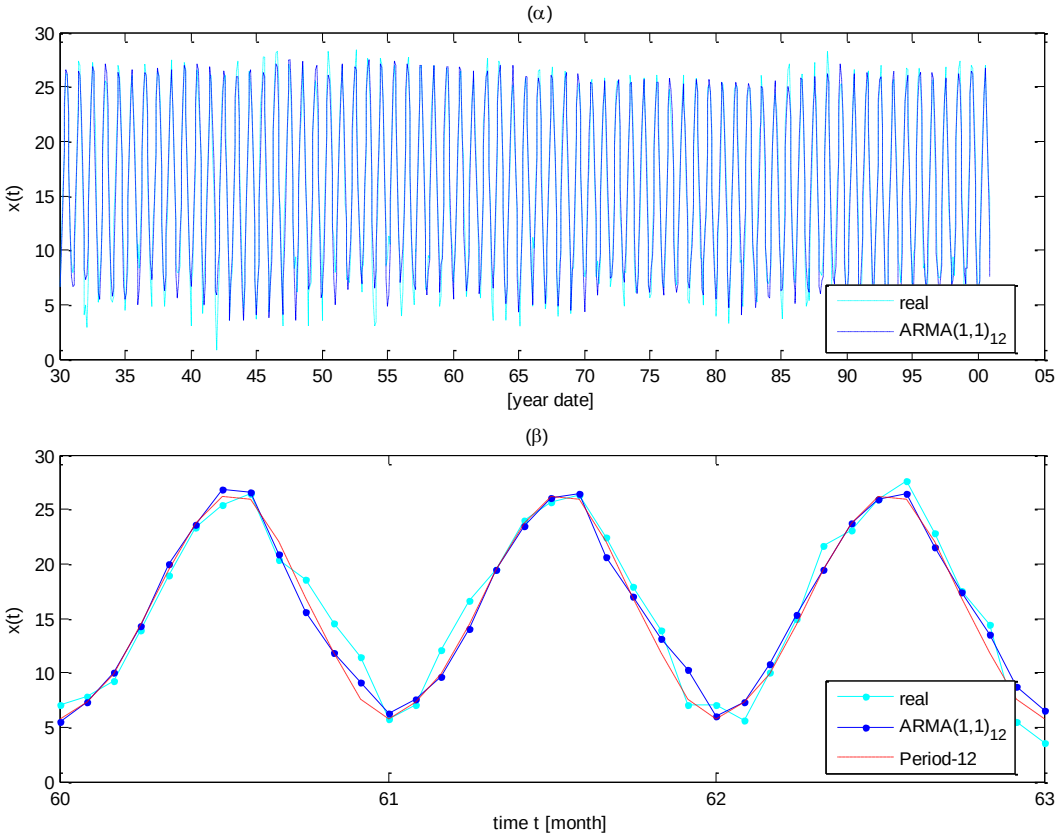


Σχήμα 27 Το γράφημα της συνάρτησης του κριτηρίου AIC για μοντέλα ARMA(P,Q)$_{12}$ για τη χρονοσειρά των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών του σταθμού Θεσσαλονίκης την περίοδο 1930 - 2000, όπου η κάθε καμπύλη δηλώνει την τιμή του AIC ως προς την τάξη του εποχικού AR μέρους P για διαφορετική τάξη του εποχικού MA μέρους Q, όπως δίνεται στο ένθετο.

Η προσαρμογή του μοντέλου ARMA(1,1)$_{12}$ έδωσε (μέση τιμή $\bar{x} = 15.928$)

$$x_t = 0.0075 + 0.9995 x_{t-12} + z_t - 0.5242 z_{t-12}\,.$$

με τυπική απόκλιση σφαλμάτων $s_z = 1.603$ (διασπορά $s_z^2 = 2.571$). Η προσαρμοσμένες τιμές στις αρχικές τιμές της χρονοσειράς των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών του σταθμού Θεσσαλονίκης δίνεται στο Σχήμα 28α. Η προσαρμογή διατηρεί την εποχικότητα και μάλιστα με μικρές αποκλίσεις από τις πραγματικές τιμές όπως φαίνεται στη μεγέθυνση για την τριετία 1960-1962. Αυτό μπορεί να φαίνεται εντυπωσιακό, αλλά αν προσέξουμε καλύτερα το μοντέλο, παρατηρούμε πως ο συντελεστής του εποχικού AR(1) είναι $\Phi_1 = 0.9995$, δηλαδή πάρα πολύ κοντά στη μονάδα. Η φυσική εξήγηση αυτού του αποτελέσματος είναι πως η μέση μηνιαία θερμοκρασία για κάθε μήνα προσδιορίζεται από την αντίστοιχη τιμή του μήνα το προηγούμενο έτος, γεγονός που δηλώνει έντονη περιοδικότητα. Πράγματι αν αντί του μοντέλου ARMA(1,1)$_{12}$ προσαρμόζαμε τον εποχικό κύκλο (με εκτίμηση για κάθε μήνα τη μέση τιμή από τις τιμές του μήνα σε όλα τα έτη) η προσαρμογή θα ήταν εξίσου καλή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 28β. Μάλιστα η αντίστοιχη τυπική απόκλιση των σφαλμάτων είναι $s_z = 1.427$, που δείχνει να μειώνει το σφάλμα προσαρμογής.



Σχήμα 28 (α) Προσαρμογή του μοντέλου ARMA(1,1)$_{12}$ στη χρονοσειρά των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών του σταθμού Θεσσαλονίκης την περίοδο 1930 - 2000, όπου με γκρι (γαλάζια) γραμμή είναι η χρονοσειρά και με μαύρο (μπλε) η προσαρμογή της. (β) Το παραπάνω γράφημα περιορισμένο στην τριετία 1960-1962, όπου έχει προστεθεί και ο εποχικός κύκλος όπως εκτιμήθηκε από τις μέσες τιμές του κάθε μήνα.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε πως η χρονοσειρά των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών της Θεσσαλονίκης χαρακτηρίζεται με έντονη εποχικότητα, αλλά δε φαίνεται να υπάρχουν άλλες εξαρτήσεις της θερμοκρασίας από το ένα έτος στο επόμενο.

4.6 Μοντέλο χρονοσειράς με τάση και εποχικότητα

Η πιο περίπλοκη περίπτωση μη-στάσιμης χρονοσειράς είναι να περιέχει τάση και εποχικότητα περιόδου *s* και μάλιστα να υπάρχει και εποχική τάση, δηλαδή τάση όχι μόνο μεταξύ των συνεχόμενων παρατηρήσεων της χρονοσειράς (χρονικό βήμα ένα) αλλά και μεταξύ αντίστοιχων παρατηρήσεων σε συνεχόμενου κύκλους εποχικότητας (χρονικό βήμα *s*). Το κατάλληλο μοντέλο για μια τέτοια χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ είναι ο συνδυασμός του γενικού μοντέλου $\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)Z_t$ για χρονοσειρά με τάση και του γενικού μοντέλου $\Phi(B^s)(1-B^s)^D Y_t = \Theta(B^s)Z_t$ για χρονοσειρά με εποχικότητα. Το πρώτο μοντέλο περιέχει δύο στάδια. Το πρώτο στάδιο είναι η απαλοιφή τάσης στη αρχική χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ εφαρμόζοντας *d* φορές τις πρώτες διαφορές, από την οποία προκύπτει η χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ($(1-B)^d Y_t = X_t$). Το δεύτερο στάδιο είναι η μοντελοποίηση των εξαρτήσεων μεταξύ συνεχόμενων παρατηρήσεων $x_{t-2}, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}$ με μοντέλο ARMA(*p*,*q*) ($\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$). Το δεύτερο μοντέλο περιέχει τα ίδια δύο στάδια αλλά για χρονικό βήμα *s*, δηλαδή εφαρμόζοντας *D* φορές τις *s*-διαφορές ($(1-B^s)^D Y_t = X_t$) και

μοντέλο ARMA$(P,Q)_s$ για τις εξαρτήσεις στις παρατηρήσεις $x_{t-2s}, x_{t-s}, x_t, x_{t+s}, x_{t+2s}$ ($\Phi(B^s)X_t = \Theta(B^s)Z_t$).

Η σύνθεση των δύο παραπάνω μοντέλων δίνει το **εποχικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο SARIMA$(p,d,q)\times(P,D,Q)_s$**

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)Z_t \qquad (61)$$

Στην πράξη τα μοντέλα αυτά έχουν κάπως πιο απλή μορφή, αφού η τάξη των πρώτων διαφορών είναι d=1 και η τάξη των s-διαφορών είναι D=0, δηλαδή μοντέλο **SARIMA$(p,1,q)\times(P,Q)_s$**

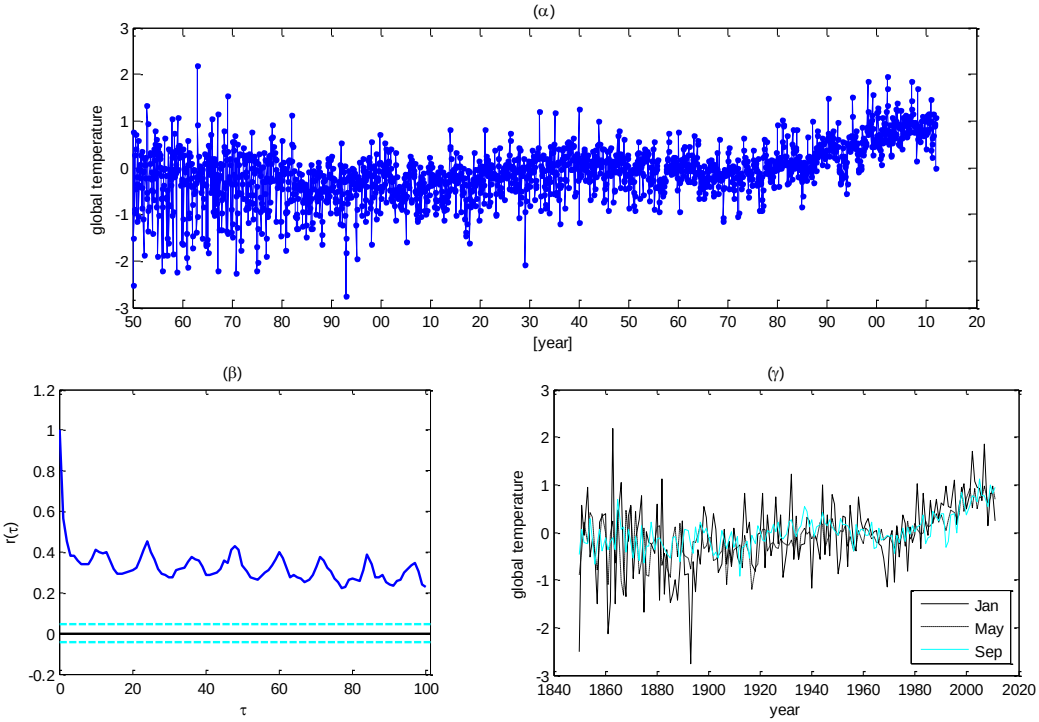
$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)Z_t .$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τάση στη χρονοσειρά (ή αυτή έχει απαλειφθεί με κάποιον τρόπο), αλλά υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ των παρατηρήσεων (χρονικό βήμα ένα) και μεταξύ των εποχικών κύκλων (χρονικό βήμα s), το μοντέλο είναι εποχικό ARMA, **SARMA$(p,q)\times(P,Q)_s$**

$$\phi(B)\Phi(B^s)Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)Z_t . \qquad (62)$$

Παράδειγμα

Επανερχόμαστε στο παράδειγμα της Ενότητας 4.4, αλλά αντί για τον ετήσιο μελετούμε το μηνιαίο δείκτη για τη θερμοκρασία της γης (ανωμαλία στη θερμοκρασία εδάφους στο βόρειο ημισφαίριο σε πλέγμα 5° x 5°) την περίοδο 1/1850-12/2011.

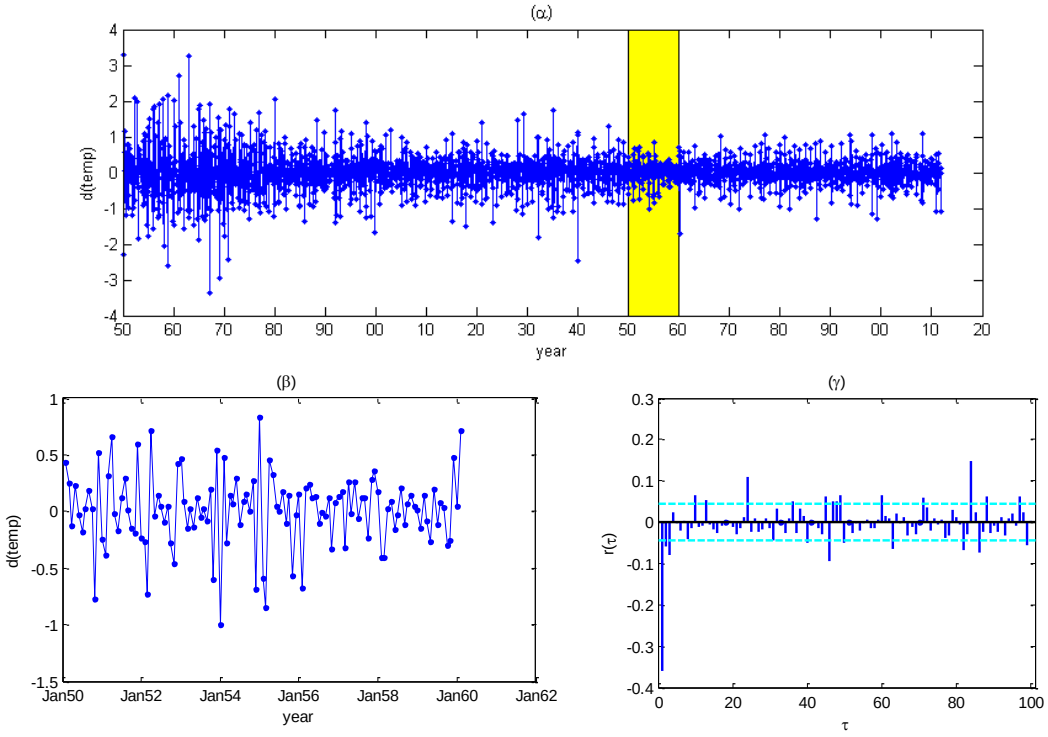


Σχήμα 29 (α) Η χρονοσειρά του μηνιαίου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης την περίοδο 1/1850 - 12/2011 [πηγή: http://www.cru.uea.ac.uk/cru/data/temperature]. (β) Το γράφημα της αυτοσυσχέτισης για τη χρονοσειρά στο (α). (γ) Χρονοσειρές του δείκτη για τη θερμοκρασία της γης για τους μήνες Ιανουάριο, Μάιο και Σεπτέμβριο, όπως δίνεται στο ένθετο.

Η μορφή της χρονοσειράς του μηνιαίου δείκτη θερμοκρασίας που δίνεται στο Σχήμα 29α είναι ίδια με αυτή του ετήσιου δείκτη στο Σχήμα 22α, αλλά σε κάθε ετήσια τιμή αντιστοιχούν 12 μηνιαίες τιμές. Η ομοιότητα με τον ετήσιο δείκτη είναι πιο εμφανής όταν κάνουμε το γράφημα της χρονοσειρά για κάθε μήνα ξεχωριστά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 29γ για τους μήνες Ιανουάριο, Μάιο και Ιούνιο.

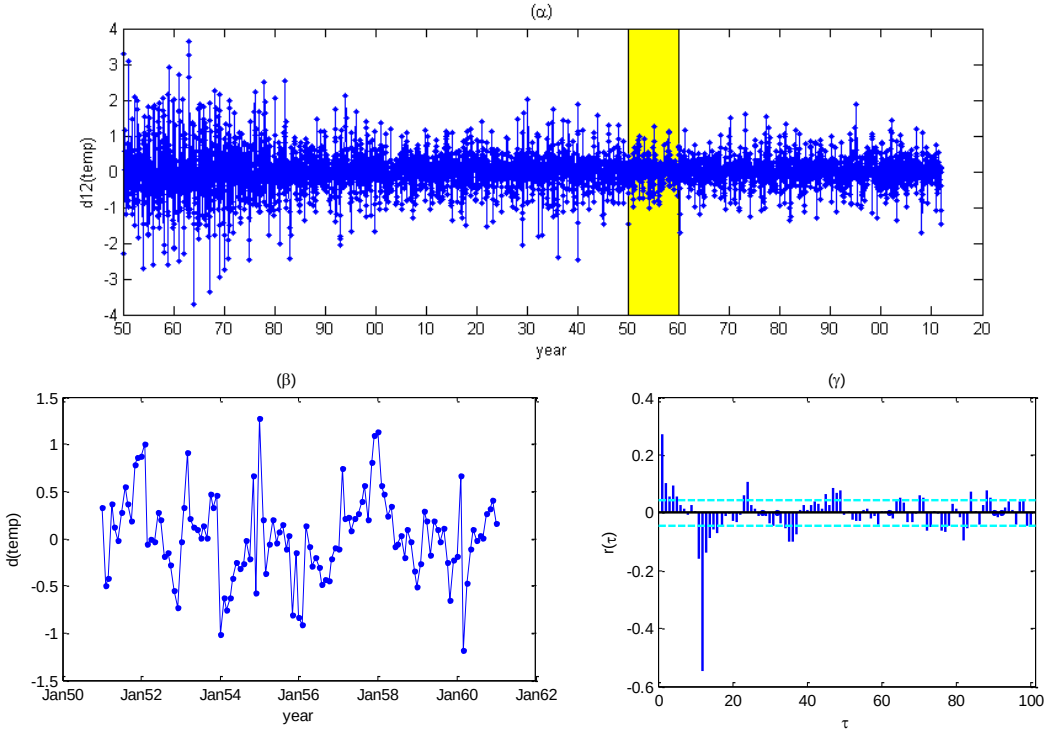
Ο εποχικός κύκλος δε φαίνεται στο γράφημα της αρχικής χρονοσειράς του μηνιαίου δείκτη παγκόσμιας θερμοκρασίας στο Σχήμα 29α, αλλά φαίνεται στο γράφημα της αυτοσυσχέτισης της στο Σχήμα 29β, όπου το τοπικό μέγιστο εμφανίζεται για κάθε πολλαπλάσιο της υστέρησης 12. Επίσης παρατηρούμε πως η αυτοσυσχέτιση παρόλο που δεν είναι υψηλή φθίνει πολύ αργά αφού ακόμα και μετά από υστέρηση 8 ετών παραμένει σε επίπεδο υψηλότερο του 0.2 και πολύ πάνω από το όριο σημαντικότητας. Εδώ έχουμε λοιπόν την περίπτωση ύπαρξης τάσης και εποχικότητας.

Ας ξεκινήσουμε με την απαλοιφή της αργής τάσης παίρνοντας πρώτες διαφορές. Η χρονοσειρά που προκύπτει δίνεται στο Σχήμα 30α και η μεγέθυνση σε ένα χρονικό παράθυρο μιας δεκαετίας δίνεται στο Σχήμα 30β. Όπως ήταν αναμενόμενο η αργή τάση έχει απαλειφθεί, αλλά φαίνεται να έχει απαλειφθεί και η εποχικότητα, καθώς δεν υπάρχουν εμφανείς εποχικοί κύκλοι στη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών. Αυτό φαίνεται και από το γράφημα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης στο Σχήμα 30γ. Το γράφημα αυτό δείχνει να υπάρχουν σημαντικές αυτοσυσχετίσεις για τις πρώτες υστερήσεις αλλά και για την υστέρηση 24, που δηλώνει πως ίσως ένα μοντέλο SARMA$(p,q)\times(P,Q)_s$ είναι κατάλληλο.



Σχήμα 30 (α) Η χρονοσειρά των πρώτων διαφορών του μηνιαίου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης την περίοδο 1/1850 - 12/2011. Η γκρίζα επιφάνεια δηλώνει το χρονικό παράθυρο το οποίο εμφανίζεται σε μεγέθυνση στο (β). (γ) Το γράφημα της αυτοσυσχέτισης για τη χρονοσειρά στο (α).

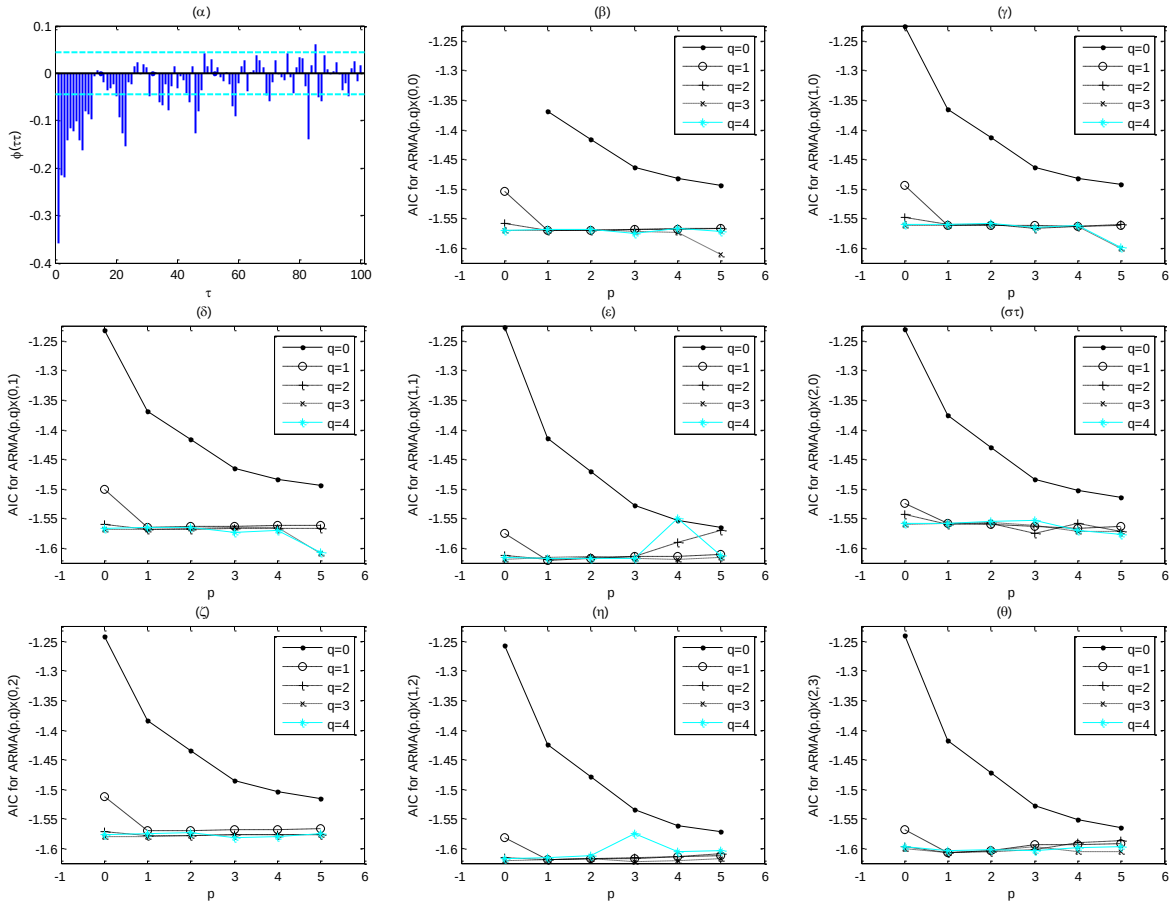
Πριν προχωρήσουμε στη διερεύνηση του παραπάνω μοντέλου, ας μελετήσουμε και το ενδεχόμενο να έχουμε "εποχική τάση", δηλαδή τάση μεταξύ των εποχικών κύκλων περιόδου 12. Για αυτό παίρνουμε τις διαφορές υστέρησης 12 και η χρονοσειρά που προκύπτει δίνεται στο Σχήμα 31α και η μεγέθυνση σε μια δεκαετία στο Σχήμα 31β. Παρατηρούμε πως έχει απαλειφθεί η αργή τάση αλλά σε αντίθεση με το μετασχηματισμό των πρώτων διαφορών εμφανίζονται κορυφές κάθε 12 μήνες. Αυτό είναι εμφανές στο γράφημα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης στο Σχήμα 31γ, που σχηματίζει ταλάντωση με αρκετά υψηλή σε μέγεθος αρνητική τιμή για υστέρηση 12. Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει και ενδεχόμενη συσχέτιση μεταξύ των εποχικών κύκλων.



Σχήμα 31 (α) Η χρονοσειρά των διαφορών υστέρησης 12 του μηνιαίου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης την περίοδο 1/1850 - 12/2011. Η γκρίζα επιφάνεια δηλώνει το χρονικό παράθυρο το οποίο εμφανίζεται σε μεγέθυνση στο (β). (γ) Το γράφημα της αυτοσυσχέτισης για τη χρονοσειρά στο (α).

Επιστρέφουμε στη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών για να διερευνήσουμε κατάλληλο μοντέλο SARMA$(p,q)\times(P,Q)_s$. Για αυτό υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης και το γράφημα της δίνεται στο Σχήμα 32α. Παρατηρούμε πως υπάρχουν σημαντικές μερικές αυτοσυσχετίσεις για μεγάλες υστερήσεις και φαίνεται να εμφανίζονται σημαντικές μερικές αυτοσυσχετίσεις σε υστερήσεις που είναι κοντά σε πολλαπλάσια του 12. Αυτό δηλώνει εξάρτηση της τιμής της θερμοκρασίας (ή πιο σωστά της μεταβολής της τιμής της θερμοκρασίας) σε προηγούμενες μήνες αλλά και σε μήνες προηγούμενων ετών.

Υπολογίσαμε το κριτήριο AIC για συνδυασμούς τιμών των τάξεων του SARMA$(p,q)\times(P,Q)_s$ και ειδικότερα για p,q=0,...,5 και P,Q=0,...,3. Κάποια αποτελέσματα δίνονται στο Σχήμα 32, όπου δίνονται οι τιμές του AIC για το εύρος τιμών των p, q για κάποια ζεύγη τιμών των P και Q. Παρατηρούμε πως το ελάχιστο επίπεδο τιμών του AIC πετυχαίνεται με πολλούς συνδυασμούς τιμών των τάξεων. Η ελάχιστη τιμή του AIC -1.622 επιτυγχάνεται για το μοντέλο SARMA$(3,3)\times(1,2)_{12}$ (δες Σχήμα 32ε). Υπάρχουν όμως και άλλοι συνδυασμοί μικρότερων τάξεων που πετυχαίνουν τιμή του AIC κοντά σε αυτήν την ελάχιστη τιμή, όπως το μοντέλο SARMA$(1,2)\times(1,1)_{12}$ που δίνει AIC=-1.618 (δες Σχήμα 32η).



Σχήμα 32 (α) Το γράφημα της μερικής αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς των πρώτων διαφορών του μηνιαίου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης την περίοδο 1/1850 - 12/2011. (β)-(θ) Το γράφημα της συνάρτησης του κριτηρίου AIC για μοντέλα SARMA(*p*,*q*)×(*P*,*Q*)$_{12}$ για τη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών, όπου η κάθε καμπύλη δηλώνει την τιμή του AIC ως προς την τάξη του AR μέρους *p* για διαφορετική τάξη του MA μέρους *q*, όπως δίνεται στο ένθετο. Οι τάξεις (*P*,*Q*) των εποχικών AR και MA είναι: (0,0) στο (β), (1,0) στο (γ), (0,1) στο (δ), (1,1) στο (ε), (2,0) στο (στ), (0,2) στο (ζ), (1,2) στο (η) και (2,3) στο (θ).

Το πρώτο μοντέλο SARMA(3,3)×(1,2)$_{12}$ που δίνει το ελάχιστο AIC είναι

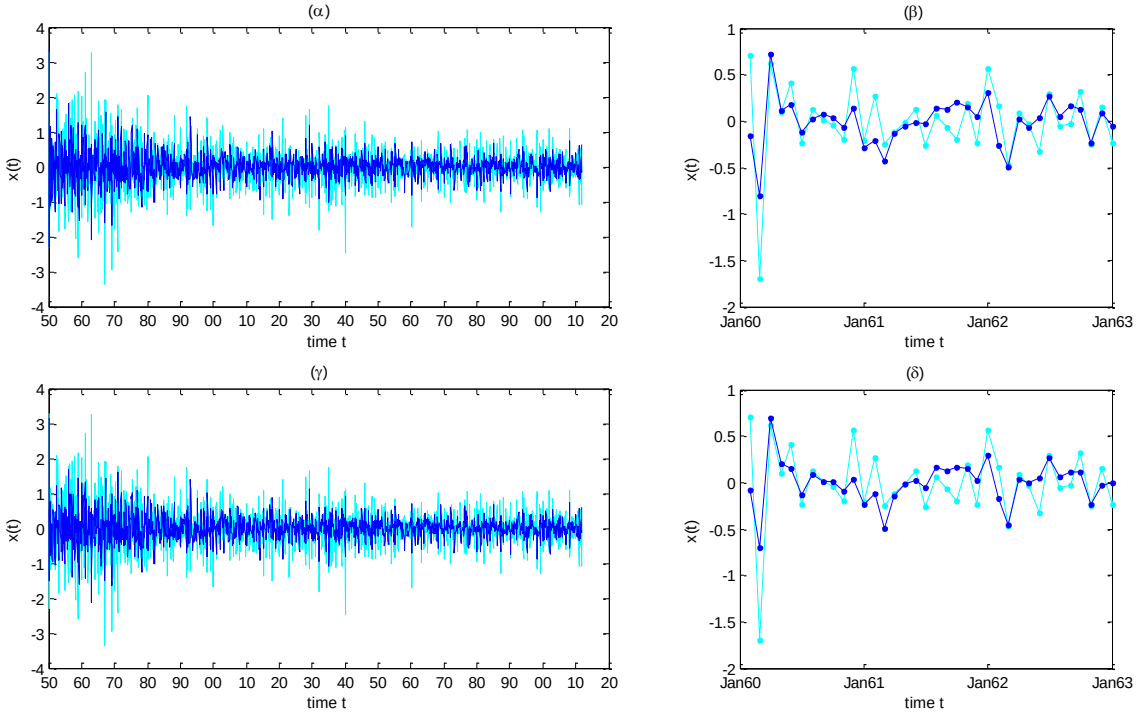
$$x_t = -1.12x_{t-1} - 0.70x_{t-2} + 0.22x_{t-3} + 0.95x_{t-12} + 1.11x_{t-13} + 0.70x_{t-14} - 0.18x_{t-15} + z_t + 0.42z_{t-1} - 0.22z_{t-2} - 0.95z_{t-3} - 1.01z_{t-12} - 0.48z_{t-13} + 0.23z_{t-14} + 0.93z_{t-15} + 0.13z_{t-24} + 0.08z_{t-25} - 0.05z_{t-26} - 0.08z_{t-27}$$

όπου ο μέσος όρος της χρονοσειράς είναι $\overline{x} = 0.0013$ και η τυπική απόκλιση των σφαλμάτων εκτιμάται ως $s_z = 0.445$. Αντίστοιχα το δεύτερο μοντέλο SARMA(1,2)×(1,1)$_{12}$ που δίνει AIC κοντά στο ελάχιστο είναι

$$x_t = 0.35x_{t-1} + 0.98x_{t-12} - 0.34x_{t-13} + z_t - 1.04z_{t-1} + 0.1z_{t-2} - 0.93z_{t-12} + 0.99z_{t-13} - 0.12z_{t-14}$$

με μέσο όρο τον ίδιο και τυπική απόκλιση των σφαλμάτων $s_z = 0.446$. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μοντέλο, παρόλο που δεν είναι το βέλτιστο σύμφωνα με το κριτήριο AIC δίνει σφάλματα με λίγο μεγαλύτερη τυπική απόκλιση αλλά έχει πολύ πιο απλή μαθηματική έκφραση. Η ελάχιστη βελτίωση στη μείωση σφάλματος που πετυχαίνεται με την προσθήκη των επιπλέον όρων στο πρώτο μοντέλο κρίνεται σημαντική με το κριτήριο του AIC λόγω της μικρής ποινής που δίνει στην αυξημένη πολυπλοκότητα του μοντέλου όταν η χρονοσειρά είναι μεγάλη. Τα γραφήματα προσαρμογής δείχνουν πως πράγματι τα δύο μοντέλα δίνουν

πρακτικά τις ίδιες εκτιμήσεις των τιμών της χρονοσειράς των πρώτων διαφορών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 33.



Σχήμα 33 (α) Προσαρμογή μοντέλου SARMA(3,3)×(1,2)$_{12}$ στη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών του μηνιαίου δείκτη για τη θερμοκρασία της γης την περίοδο 1/1850 - 12/2011, όπου με γκρι (γαλάζια) γραμμή είναι η χρονοσειρά και με μαύρο (μπλε) η προσαρμογή της. (β) Μεγέθυνση του χρονικού παραθύρου της τριετίας 1960-1962 στο (α). (γ) και (δ) το ίδιο για μοντέλο SARMA(1,2)×(1,1)$_{12}$.

Ασκήσεις

1. Όρισε το γραμμικό μοντέλο τύπου AR ή MA καθώς και την τάξη του από τη δειγματική αυτοσυσχέτιση που δίνεται παρακάτω, αιτιολογώντας την επιλογή σου. [Βοήθεια: Η μερική αυτοσυσχέτιση μπορεί να υπολογισθεί από την αυτοσυσχέτιση με τον τύπο (33).]

   a) n=30

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_τ	0.80	0.69	0.54	0.41	0.27	0.19	0.18	0.14	0.09	0.01

   b) n=50

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_τ	0.47	-0.18	-0.22	-0.10	-0.09	-0.17	-0.14	0.05	0.16	0.12

   c) n=100

τ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_τ	0.52	-0.34	-0.78	-0.49	0.15	0.53	0.32	-0.1	-0.29	-0.12

2. Για τις χρονοσειρές της παραπάνω άσκησης υπολόγισε το μοντέλο που επέλεξες με τη μέθοδο των ροπών (Yule-Walker).

3. Προσάρμοσε κατάλληλο γραμμικό μοντέλο ARMA για τη χρονοσειρά του ανθρώπινου καρδιακού ρυθμού (χρονική απόσταση μεταξύ δύο τύπων της καρδιάς). Τα δεδομένα δίνονται στο αρχείο RR.dat στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

4. Προσάρμοσε κατάλληλο γραμμικό μοντέλο με εποχικότητα (SARMA) για τη χρονοσειρά του ετήσιου πληθυσμού των λύγκων (lynx, είδος καναδέζικου λύκου). Τα δεδομένα δίνονται στο αρχείο lynx.dat στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

5. Προσάρμοσε κατάλληλο γραμμικό μοντέλο ARIMA για τη χρονοσειρά του ημερήσιων δείκτη κλεισίματος του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ) την περίοδο από 1/1/2007 ως 31/10/2011. Τα δεδομένα δίνονται στο αρχείο ase.dat στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

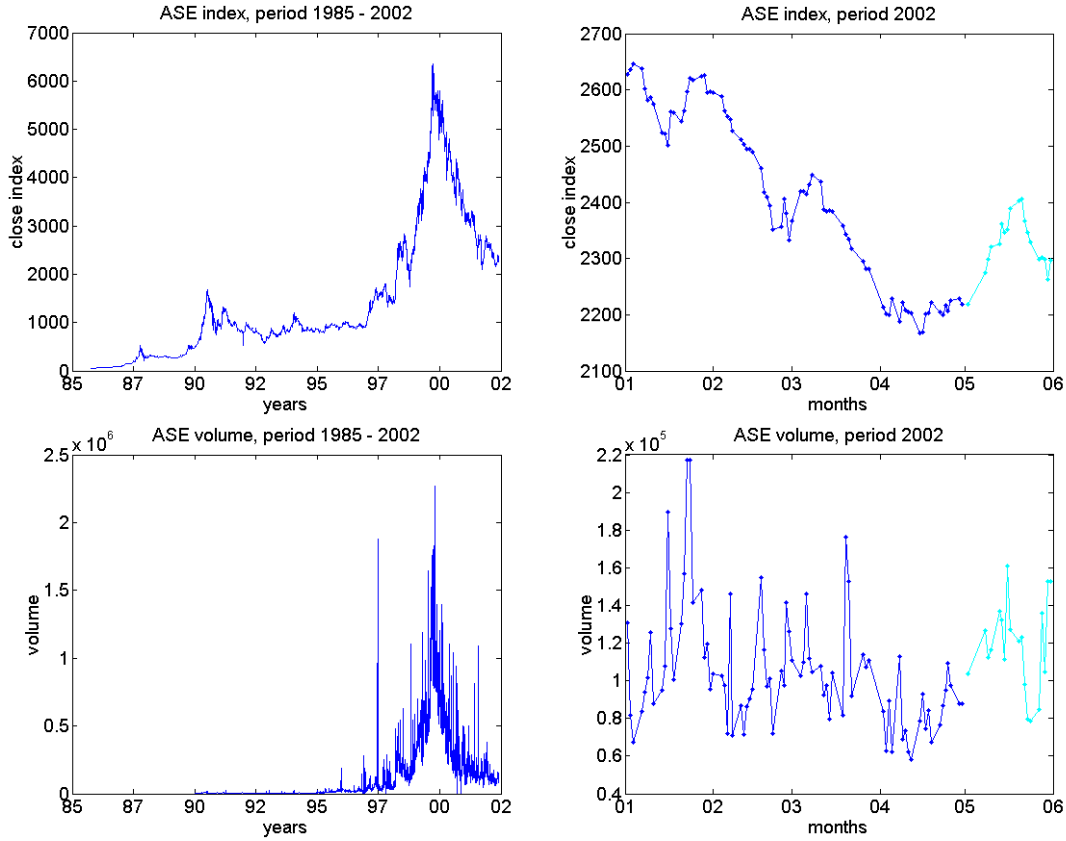
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Ο βασικός σκοπός της μελέτης των μοντέλων για χρονικές σειρές (όπως AR, MA, ARMA, ARIMA, SARIMA) είναι η **πρόβλεψη** (*prediction, forecasting*). Η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μιας παρατηρούμενης χρονοσειράς είναι σημαντικό πρόβλημα για πολλές εφαρμογές. Ενδεικτικά αναφέρονται δύο παραδείγματα:

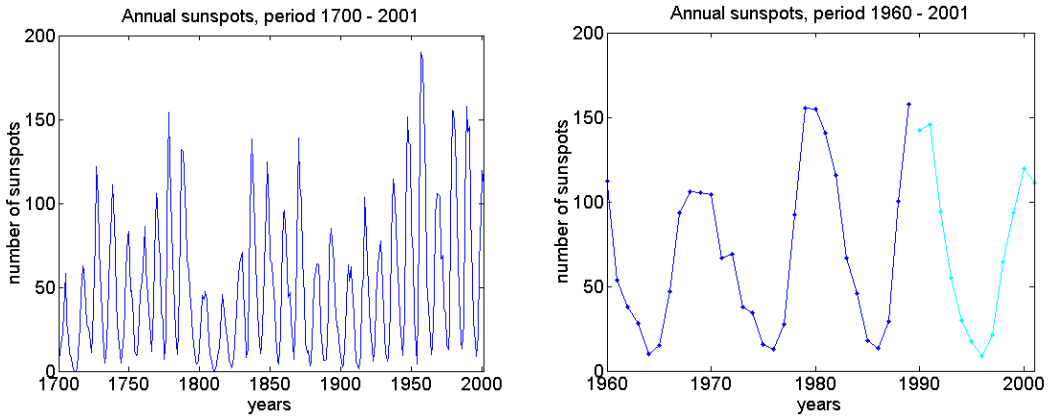
Δείκτης κι όγκος συναλλαγών Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ)

Για ευνόητους λόγους η πρόβλεψη χρηματιστηριακών δεικτών, όπως ο δείκτης κι ο όγκος συναλλαγών ΧΑΑ, έχει μεγάλο ενδιαφέρον.



Ηλιακές κηλίδες

Ο αριθμός των ηλιακών κηλίδων επηρεάζει το κλίμα της γης γι αυτό κι έχει μεγάλη σημασία η πρόβλεψη του αριθμού των ηλιακών κηλίδων για τα επόμενα έτη.



Για να κάνουμε την πρόβλεψη χρησιμοποιούμε τις παρατηρήσεις μέχρι τη παρούσα χρονική στιγμή. Θεωρώντας την παρατηρούμενη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ από μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$, το πρόβλημα που μελετάμε είναι η πρόβλεψη της χρονοσειράς για k χρονικά βήματα μπροστά από τη χρονική στιγμή n, που συμβολίζεται $x_n(k)$, ενώ η πραγματική αλλά άγνωστη σε εμάς τιμή στη χρονική στιγμή $n+k$ είναι x_{n+k}. Το **σφάλμα πρόβλεψης** (*prediction error*) είναι

$$e_n(k) = x_{n+k} - x_n(k) \tag{63}$$

Με αναφορά στη στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$, η πρόβλεψη $X_n(k)$ είναι η εκτίμηση του στοιχείου X_{n+k} της $\{X_n\}$ με βάση τα προηγούμενα στοιχεία της $\{X_n\}$, δηλαδή η βέλτιστη πρόβλεψη είναι $X_n(k) = \mathrm{E}[X_{n+k} \mid X_n, X_{n-1}, \ldots]$. Επιθυμητές ιδιότητες καλής εκτίμησης, δηλαδή καλής πρόβλεψης εδώ, είναι:

- η *αμεροληψία* (unbiasedness) $\mathrm{E}[X_n(k)] = X_{n+k}$,
- η *αποτελεσματικότητα* (efficiency), δηλαδή η μικρή **διασπορά λάθους πρόβλεψης** $\mathrm{Var}[\varepsilon_n(k)] = \mathrm{Var}[X_{n+k} - X_n(k)]$.

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ιδιότητες, ενδιαφερόμαστε για την πρόβλεψη εκείνη που ελαχιστοποιεί το **μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης** $\mathrm{E}\left[\left(X_{n+k} - X_n(k)\right)^2\right]$ για κάθε βήμα πρόβλεψης k. [Ποια είναι η σχέση των τριών ιδιοτήτων;]

Για να αξιολογήσουμε την απόδοση ενός μοντέλου πρόβλεψης σε μια χρονοσειρά για k χρονικά βήματα μπροστά υπολογίζουμε κάποιο μέτρο που συγκεντρώνει τα σφάλματα πρόβλεψης για έναν ικανοποιητικό αριθμό χρονικών στιγμών. Κάνουμε λοιπόν προβλέψεις για k χρονικά βήματα μπροστά σε έναν αριθμό γνωστών παρατηρήσεων για χρόνους $n+1, n+2, \ldots, n+l$, δηλαδή υπολογίζουμε τα $x_n(k), x_{n+1}(k), \ldots, x_{n+l-k}(k)$. Έχοντας τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές $x_{n+k}, x_{n+1+k}, \ldots, x_{n+l}$ υπολογίζουμε τα σφάλματα πρόβλεψης για k χρονικά βήματα μπροστά $e_n(k), e_{n+1}(k), \ldots, e_{n+l-k}(k)$. Υπάρχουν διάφορα στατιστικά μέτρα που συγκεντρώνουν τα σφάλματα πρόβλεψης, όπως η εκτίμηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (*mean square error*, **mse**) [Πως;]

$$\mathrm{mse}(k) = \frac{1}{l-k+1} \sum_{j=n}^{n+l-k} e_j(k)^2 = \frac{1}{l-k+1} \sum_{j=n}^{n+l-k} \left(x_{j+k} - x_j(k)\right)^2 .$$

Συχνά χρησιμοποιείται η **ρίζα** του **μέσου τετραγωνικού σφάλματος** (*root mean square error*, **rmse**)

$$\mathrm{rmse}(k) = \sqrt{\frac{1}{l-k+1}\sum_{j=n}^{n+l-k} e_j(k)^2} = \sqrt{\frac{1}{l-k+1}\sum_{j=n}^{n+l-k}\left(x_{j+k} - x_j(k)\right)^2}\,. \qquad (64)$$

Ένα χρήσιμο μέτρο σφάλματος πρόβλεψης όταν θέλουμε να συγκρίνουμε μοντέλα πρόβλεψης σε διαφορετικές χρονοσειρές είναι η **κανονοικοποίηση του rmse** (*normalized root mean square error*, **nrmse**) διαιρώντας το rmse με τη δειγματική τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων της χρονοσειράς (ή πιο σωστά των παρατηρήσεων που χρησιμοποιούνται στο σχηματισμό των σφαλμάτων)

$$\mathrm{nrmse}(k) = \frac{\sqrt{\frac{1}{l-k+1}\sum_{j=n}^{n+l-k}\left(x_{j+k} - x_j(k)\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{l-k+1}\sum_{j=n}^{n+l-k}\left(x_{j+k} - \bar{x}\right)^2}}$$

όπου $\bar{x}$ είναι η δειγματική μέση τιμή των $x_{n+k}, x_{n+1+k}, \ldots, x_{n+l}$. Τιμές του nrmse κοντά στο 0 δηλώνουν πολύ καλή πρόβλεψη ενώ τιμές του nrmse κοντά γύτω από το 1 δηλώνουν ότι η πρόβλεψη είναι τόσο καλή όσο αν προβλέπαμε με τη μέση τιμή. [Γιατί;]

Στη συνέχεια, θα κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση κάποιων απλών τεχνικών πρόβλεψης και θα μελετήσουμε την πρόβλεψη με ARIMA μοντέλα (συμπεριλαμβάνοντας φυσικά τα μοντέλα AR, MA και ARMA). Για ευκολία, θα χρησιμοποιήσουμε καταχρηστικά συμβολισμούς που αναφέρονται στο δείγμα, όπως x_t, για να συμβολίσουμε επίσης τις μεταβλητές, π.χ. X_t, όταν θέλουμε να δώσουμε γενικές σχέσεις για τις προβλέψεις και τα σφάλματα πρόβλεψης.

5.1 Απλές τεχνικές πρόβλεψης

5.1.1 Αιτιοκρατική τάση (deterministic trend)

Ξεκινώντας με την πιο απλή περίπτωση, υποθέτουμε πως η πληροφορία στη χρονοσειρά δίνεται μόνο από **χρονικές τάσεις** (*trends*), που είτε τις γνωρίζουμε ή τις εκτιμούμε, δηλαδή

$$x_t = \mu_t + z_t\,, \qquad (65)$$

όπου μ_t είναι μια αιτιοκρατική συνάρτηση του χρόνου t (τάση) και z_t είναι ο λευκός θόρυβος.

Η πρόβλεψη γίνεται με την *επέκταση* (extrapolation) του αιτιοκρατικού όρου σε μελλοντικούς χρόνους, δηλαδή η πρόβλεψη του x_{n+k} είναι

$$x_n(k) = \mathrm{E}\left[\mu_{n+k} + z_{n+k} \mid x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1\right] = \ldots = \mu_{n+k}\,. \quad [\text{Γιατί;}] \qquad (66)$$

Το σφάλμα πρόβλεψης είναι $e_n(k) = z_{n+k}$ [Γιατί;]. Άρα $e_n(k)$ είναι λευκός θόρυβος με διασπορά σ_z^2.

Επέκταση καθολικών τάσεων (extrapolation of global trends)

Μια εύκολη προσαρμογή της συνάρτησης αιτιοκρατικής τάσης καθολικά (σε όλη τη χρονοσειρά) μπορεί να γίνει με πολυώνυμο κάποιας τάξης m,

$$p_m(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m\,. \qquad (67)$$

Πολλών ειδών καμπύλες μπορεί να προσαρμόζουν καλά στα δεδομένα, όπως οι πολυωνυμικές καμπύλες όταν το m είναι μεγάλο, αλλά δίνουν πολύ διαφορετικές

προβλέψεις όταν επεκτείνονται σε μελλοντικά χρονικά βήματα. Στην πράξη, τέτοιες προβλέψεις είναι γενικά φτωχές. Ειδικά, τα πολυώνυμα υψηλής τάξης, ξεφεύγουν γρήγορα προς το συν ή πλην άπειρο όταν επεκτείνονται έξω από το διάστημα παρατήρησης για το οποίο έγινε η εκτίμηση των παραμέτρων τους.

Επέκταση τοπικών τάσεων (extrapolation of local trends)

Ένας τρόπος για να βελτιώσουμε την απόδοση της επέκτασης τάσης είναι να κάνουμε την προσαρμογή του μοντέλου, όπως αυτό της (65), χρησιμοποιώντας μόνο τις σχετικά πρόσφατες παρατηρήσεις. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε την επίδραση των παλαιών παρατηρήσεων στην εκτίμηση του μοντέλου πρόβλεψης. Αυτό βελτιώνει τα μοντέλα πρόβλεψης που δίνονται ως συναρτήσεις του χρόνου.

Για χρονικές σειρές με αιτιοκρατικό εποχικό όρο, $x_t = s_t + z_t$, ή με αιτιοκρατικό εποχικό όρο και αιτιοκρατική τάση, $x_t = \mu_t + s_t + z_t$, η πρόβλεψη γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο, δηλαδή επεκτείνοντας σε μελλοντικούς χρόνους τους αιτιοκρατικούς όρους που εκτιμούμε με κάποια συνάρτηση του χρόνου *t*.

5.1.2 Εκθετική ομαλοποίηση

Ένας άλλος απλός τρόπος πρόβλεψης είναι να εκτιμήσουμε το x_{n+k} από το σταθμισμένο άθροισμα των προηγούμενων παρατηρήσεων της χρονοσειράς

$$x_n(k) = c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \cdots + c_{n-1} x_1 = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x_{n-j}\,, \tag{68}$$

όπου οι συντελεστές c_j είναι τα βάρη με $\sum_{j=0}^{n-1} c_j = 1$. Είναι φυσικό να θέλουμε να δώσουμε περισσότερο βάρος στις πρόσφατες παρατηρήσεις και να διαλέξουμε να φθίνουν τα βάρη πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο, $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_{n-1}$. Μια τέτοια επιλογή των βαρών είναι

$$c_j = \alpha(1-\alpha)^j, \qquad j = 0,1,\ldots,n-1, \qquad 0 < \alpha < 1\,, \tag{69}$$

όπου δε χρειάζεται να ορίσουμε το κάθε c_j ξεχωριστά παρά μόνο το α. Τα βάρη αυτά φθίνουν εκθετικά κι η επιλογή του α ορίζει πόσο γρήγορα φθίνουν (αν $\alpha \approx 1$ ουσιαστικά μόνο οι πολύ πρόσφατες παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη). Για να ενημερώσουμε την πρόβλεψη *k* χρονικών βημάτων κάθε φορά που μια νέα παρατήρηση είναι διαθέσιμη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναδρομική σχέση

$$x_{n+1}(k) = \alpha x_{n+1} + (1-\alpha) x_n(k)\,. \quad \text{[Πως προκύπτει;]} \tag{70}$$

5.2 Πρόβλεψη στάσιμων χρονικών σειρών με γραμμικά μοντέλα

Πρώτα θα θεωρήσουμε ότι η χρονοσειρά για την οποία θέλουμε να κάνουμε προβλέψεις είναι στάσιμη, ή την έχουμε κάνει στάσιμη με κάποια από τις μεθόδους που μελετήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τα γραμμικά μοντέλα που στάσιμων χρονικών σειρών που μελετήσαμε είναι τα μοντέλα AR, MA και ARMA. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα μοντέλα για να κάνουμε προβλέψεις. Παρακάτω θα θεωρήσουμε επίσης πως η χρονοσειρά έχει μέση τιμή 0 (ώστε να αποφύγουμε την ύπαρξη σταθερού όρου στα μοντέλα πρόβλεψης). Πρακτικά αυτό γίνεται αφαιρώντας τη δειγματική μέση τιμή των παρατηρήσεων της χρονοσειράς από την κάθε παρατήρηση. Για να σχηματίσουμε την πραγματική πρόβλεψη που αφορά την

παρατηρούμενη μεταβλητή, προσθέτουμε τη δειγματική μέση τιμή στην προβλεπόμενη τιμή από το μοντέλο.

5.2.1 Πρόβλεψη με αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα (AR)

AR(1) μοντέλο

Ας αρχίσουμε με το πιο απλό γραμμικό αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο, το AR(1)

$$x_t = \phi\, x_{t-1} + z_t\,. \tag{71}$$

Για την πρόβλεψη της επόμενης χρονικής στιγμής όταν γνωρίζουμε τη χρονοσειρά ως τη χρονική στιγμή *n*, έχουμε από την υπόθεση του AR(1) μοντέλου

$$x_{n+1} = \phi\, x_n + z_{n+1}\,. \tag{72}$$

Η βέλτιστη πρόβλεψη ενός χρονικού βήματος όταν δίνεται $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι

$$x_n(1) = \phi\, x_n\,. \qquad \text{[Γιατί;]} \tag{73}$$

Για δύο χρονικά βήματα εμπρός έχουμε $x_{n+2} = \phi\, x_{n+1} + z_{n+2}$. Αντικαθιστώντας το x_{n+1} με την πρόβλεψη $x_n(1)$ και χρησιμοποιώντας την (73) παίρνουμε $x_n(2) = \phi\, x_n(1) = \phi^2 x_n$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία βρίσκουμε ότι η πρόβλεψη για *k* χρονικά βήματα είναι

$$x_n(k) = \phi^k x_n\,. \tag{74}$$

Το σφάλμα πρόβλεψης για ένα χρονικό βήμα είναι $e_n(1) = z_{n+1}$, δηλαδή το $e_n(1)$ είναι λευκός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_z^2. Για *k* χρονικά βήματα η διασπορά του σφάλματος γίνεται

$$\mathrm{Var}\left[e_n(k)\right] = \sigma_z^2 \frac{1-\phi^{2k}}{1-\phi^2}\,. \qquad \text{[Γιατί;]} \tag{75}$$

AR(*p*) μοντέλο

Υποθέτουμε πως η παρατηρούμενη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι η πραγματοποίηση μιας διαδικασίας AR(*p*), ή πιο ρεαλιστικά, πιστεύουμε πως το μοντέλο AR(*p*) εξηγεί ικανοποιητικά τη χρονοσειρά.

Το μοντέλο AR(*p*) για το x_{n+1} είναι

$$x_{n+1} = \phi_1 x_n + \cdots + \phi_p x_{n-p+1} + z_{n+1}\,. \tag{76}$$

Η βέλτιστη πρόβλεψη ενός χρονικού βήματος, $x_n(1)$, με βάση τη σειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι

$$x_n(1) = \phi_1 x_n + \cdots + \phi_p x_{n-p+1} \tag{77}$$

και το αντίστοιχο σφάλμα πρόβλεψης είναι $e_n(1) = z_{n+1}$. [Γιατί;] Παρατηρούμε ότι η πρόβλεψη του x_{n+1} είναι το αιτιοκρατικό μέρος του AR μοντέλου.

Γενικά για *k* χρονικά βήματα η πρόβλεψη είναι

$$x_n(k) = \phi_1 x_n(k-1) + \cdots + \phi_p x_n(k-p)\,, \tag{78}$$

όπου κάθε τιμή $x_n(j)$ είναι γνωστή είτε από προηγούμενη πρόβλεψη ή απευθείας από τη χρονοσειρά, δηλαδή για $j > 0$ το $x_n(j)$ είναι μια από τις προβλέψεις $x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(k-1)$ που έχουν προηγηθεί και για $j \le 0$ είναι

$x_n(j) = x_{n+j} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Η πρόβλεψη συνίσταται και πάλι στο αιτιοκρατικό μέρος του AR μοντέλου για το x_{n+k}, όπου οι άγνωστες παρατηρήσεις (ή θεωρητικά μεταβλητές) $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k-1}$ έχουν αντικατασταθεί από τις αντίστοιχες προβλέψεις.

Το σφάλμα πρόβλεψης για k χρονικά βήματα δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του λευκού θορύβου στους χρόνους $n+1, \ldots, n+k$

$$e_n(k) = \sum_{j=0}^{k-1} b_j z_{n+k-j}\,, \tag{79}$$

όπου κάθε b_j ορίζεται από τις παραμέτρους του μοντέλου (b_0 =1). [Πως;] Έτσι λοιπόν το $e_n(k)$ έχει μηδενική μέση τιμή [Γιατί;] και διασπορά

$$\mathrm{Var}\left[e_n(k)\right] = \sigma_z^2 \sum_{j=0}^{k-1} b_j^2\,. \tag{80}$$

Από την παραπάνω διασπορά πρόβλεψης μπορούν να σχηματιστούν **όρια πρόβλεψης** (*prediction bounds, tolerance intervals*) για δεδομένο επίπεδο σημαντικότητας α

$$x_n(k) \pm c_{1-\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}\left[e_n(k)\right]}\,, \tag{81}$$

όπου $c_{1-\alpha/2}$ είναι κατάλληλη κρίσιμη τιμή. Για παράδειγμα, αν $z_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma_z^2)$ τότε το $c_{1-\alpha/2}$ είναι η κρίσιμη τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής, δηλαδή για το 95% διάστημα πρόβλεψης θα χρησιμοποιήσουμε το $c_{0.025} = z_{0.975} = 1.96$.

5.2.2 Πρόβλεψη με μοντέλα μέσου όρου (MA)

MA(1) μοντέλο

Το μοντέλο MA(1) για χρόνο *n+1* είναι

$$x_{n+1} = z_{n+1} + \theta\, z_n\,. \tag{82}$$

Για να βρούμε την πρόβλεψη για ένα ή περισσότερα χρονικά βήματα χρησιμοποιούμε ότι η τυχαία μεταβλητή z_t είναι ανεξάρτητη του x για χρόνους μικρότερους του t και έτσι έχουμε

$$\mathrm{E}\left[\, z_{n+j} \mid x_n, x_{n-1}, \ldots \right] = \begin{cases} 0 & \text{αν } j > 0 \\ z_{n+j} & \text{αν } j \le 0 \end{cases} \tag{83}$$

και η πρόβλεψη είναι

$$x_n(k) = \begin{cases} \theta\, z_n & \text{για } k = 1 \\ 0 & \text{για } k > 1 \end{cases}\,. \text{ [Γιατί;]} \tag{84}$$

Το σφάλμα πρόβλεψης είναι

$$e_n(k) = \begin{cases} z_{n+1} & \text{για } k = 1 \\ x_{n+k} & \text{για } k > 1 \end{cases}\,. \tag{85}$$

Παρατηρούμε πως όλες οι προβλέψεις για χρόνους μεγαλύτερους του 1 είναι 0. Γενικά οι προβλέψεις για χρόνους μεγαλύτερους από την τάξη του MA μοντέλου είναι 0, όπως δίνεται παρακάτω.

MA(*q*) μοντέλο

Θεωρώντας το MA(q) μοντέλο για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, η επόμενη παρατήρηση δίνεται ως

$$x_{n+1} = z_{n+1} + \theta_1 z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+1}. \tag{86}$$

Η βέλτιστη πρόβλεψη ενός βήματος $x_n(1)$ είναι

$$x_n(1) = \theta_1 z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+1} \tag{87}$$

και το αντίστοιχο σφάλμα πρόβλεψης είναι $e_n(1) = z_{n+1}$. [Γιατί;] Γενικά για k χρονικά βήματα η πρόβλεψη είναι

$$x_n(k) = \begin{cases} \theta_k z_n + \theta_{k+1} z_{n-1} + \cdots + \theta_q z_{n-q+k} & \text{αν } k \le q \\ 0 & \text{αν } k > q \end{cases} \tag{88}$$

Το σφάλμα της πρόβλεψης των k βημάτων είναι όπως και για το AR μοντέλο για $k \le p$ αν αντικαταστήσουμε τα b_j με τα θ_j (δες (79) και (80)).

Τα σφάλματα $z_n, z_{n-1,} z_{n-2,} \ldots$, μπορούν να υπολογιστούν από τις παρατηρήσεις $x_n, x_{n-1,} x_{n-2,} \ldots$, όπου οι αρχικές τιμές $z_1, z_2, \ldots, z_q$ είναι 0. Ειδικότερα για να βρούμε τα $z_{q+1}, z_{q+2}, \ldots, z_n$, λύνουμε την εξίσωση του MA(q) για $t=q$ ως προς z_{q+1} (δηλαδή εδώ είναι $z_{q+1} = x_{q+1}$ [Γιατί;]) και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για χρόνους $t = q+1, \ldots n-1$.

5.2.3 Πρόβλεψη με αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα μέσου όρου (ARMA)

Θεωρώντας το ARMA(p,q) μοντέλο για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, η επόμενη παρατήρηση δίνεται ως

$$x_{n+1} = \phi_1 x_n + \cdots + \phi_p x_{n-p+1} + z_{n+1} + \theta_1 z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+1}. \tag{89}$$

Η βέλτιστη πρόβλεψη για ένα χρονικό βήμα όταν δίνονται τα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι

$$x_n(1) = \phi_1 x_n + \cdots + \phi_p x_{n-p+1} + \theta_1 z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+1} \tag{90}$$

και το σφάλμα της πρόβλεψης είναι $e_n(1) = z_{n+1}$.

Γενικά για k χρονικά βήματα η βέλτιστη πρόβλεψη είναι

$$x_n(k) = \begin{cases} \phi_1 x_n(k-1) + \cdots + \phi_p x_n(k-p) + \theta_k z_n + \cdots + \theta_q z_{n-q+k} & \text{αν } k \le q \\ \phi_1 x_n(k-1) + \cdots + \phi_p x_n(k-p) & \text{αν } k > q \end{cases} \tag{91}$$

Η πρόβλεψη με ARMA μοντέλο είναι η σύνθεση των προβλέψεων με το AR μέρος και το MA μέρος (δες (78) και (88)).

5.3 Πρόβλεψη μη-στάσιμων χρονικών σειρών με γραμμικά μοντέλα

Οι προβλέψεις στη χρονοσειρά που κάναμε στάσιμη από μια μη-στάσιμη χρονοσειρά θα πρέπει να μετασχηματιστούν κατάλληλα για να αναφέρονται στην αρχική χρονοσειρά. Όταν λοιπόν η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη για να εφαρμόσουμε την πρόβλεψη με τα μοντέλα της προηγούμενης παραγράφου πρέπει να κάνουμε τα εξής βήματα:

1. να μετασχηματίσουμε τη χρονοσειρά σε στάσιμη :
   μη-στάσιμη $\{x_t\} \to \{y_t\}$ στάσιμη,

2. να κάνουμε την πρόβλεψη του y_{n+k} με κάποιο μοντέλο, π.χ. AR, έστω $y_n(k)$,

3. να μετασχηματίσουμε την πρόβλεψη $y_n(k)$ για την στάσιμη χρονοσειρά στην πρόβλεψη $x_n(k)$ για την αρχική μη-στάσιμη χρονοσειρά.

Στη συνέχεια θα δούμε πως εφαρμόζονται τα παραπάνω βήματα. Υποθέτουμε πως η χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ δεν είναι στάσιμη. Το κλασικό μοντέλο για το x_t είναι

$$x_t = \mu_t + s_t + y_t, \tag{92}$$

όπου μ_t είναι η συνάρτηση τάσης, s_t είναι η περιοδική ή εποχική συνάρτηση και y_t είναι μια στάσιμη χρονοσειρά απαλλαγμένη από τάσεις και περιοδικότητες. Τυπικά μοντέλα για τη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ είναι τα μοντέλα AR, MA και ARMA.

Σκοπός μας είναι, δοθέντων των $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, να βρούμε την πρόβλεψη για ένα χρονικό βήμα ή γενικά για k χρονικά βήματα μπροστά, δηλαδή να προβλέψουμε το x_{n+k} που ορίζεται ως

$$x_{n+k} = \mu_{n+k} + s_{n+k} + y_{n+k}. \tag{93}$$

Αν διαλέξουμε να ***εκτιμήσουμε*** τα μ_t και s_t ως συναρτήσεις του χρόνου t (π.χ. να προσαρμόσουμε στο μ_t ένα πολυώνυμο, δες (67)), τότε μπορούμε να επεκτείνουμε τις εκτιμήσεις στο χρόνο $n+k$ για να βρούμε τα μ_{n+k} και s_{n+k}. Σ' αυτήν την περίπτωση, αφαιρούμε από τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, τις εκτιμήσεις της τάσης και περιοδικότητας και προκύπτουν οι τιμές των $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (πρώτο βήμα). Στη συνέχεια προβλέπουμε το y_{n+k} με χρήση κάποιου μοντέλου τύπου AR, MA ή ARMA (δεύτερο βήμα). Η πρόβλεψη $x_n(k)$ προκύπτει απευθείας από την πρόβλεψη $y_n(k)$ και τις επεκτάσεις τάσης και περιοδικότητας μ_{n+k} και s_{n+k} (τρίτο βήμα) ως

$$x_n(k) = \mu_{n+k} + s_{n+k} + y_n(k). \tag{94}$$

Αν διαλέξουμε να ***απαλείψουμε*** τα μ_t και s_t χρησιμοποιώντας διαφορές τότε στην ουσία αυτή η πρόβλεψη με τα παραπάνω τρία βήματα είναι η πρόβλεψη με μοντέλα ARIMA ή SARIMA. Οι γενικοί τύποι για τις προβλέψεις με αυτά τα μοντέλα είναι πολύπλοκοι αλλά κάποιος μπορεί να καταλάβει πως γίνεται η πρόβλεψη με ARIMA μοντέλο θεωρώντας το ARIMA($p,1,q$). Παίρνοντας τις πρώτες διαφορές με υστέρηση ένα, από την αρχική χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ προκύπτει η χρονοσειρά $\{y_2, y_3, \ldots, y_n\}$, όπου $y_t = x_t - x_{t-1}$, σχηματίζοντας έτσι το πρώτο βήμα της διαδικασίας πρόβλεψης μη-στάσιμων χρονοσειρών. Εφαρμόζοντας το μοντέλο ARMA(p,q) στην $\{y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ βρίσκουμε την πρόβλεψη για ένα χρονικό βήμα $y_n(1)$ (δεύτερο βήμα) και η πρόβλεψη για την αρχική χρονοσειρά (τρίτο βήμα) είναι

$$x_n(1) = x_n + y_n(1) \quad \underline{[\text{Γιατί;}]} \tag{95}$$

Το σφάλμα πρόβλεψης του x_{n+1}, $e_n(1)$, είναι το ίδιο με το σφάλμα πρόβλεψης του y_{n+1}. <u>[Γιατί;]</u> Γενικά η πρόβλεψη για k χρονικά βήματα είναι

$$x_n(k) = x_n(k-1) + y_n(k), \tag{96}$$

όπου $y_n(k)$ είναι η πρόβλεψη του y_{n+k} με το μοντέλο ARMA(p,q) και το $x_n(k-1)$ είναι γνωστό από την πρόβλεψη του x_{n+k-1}.

Για ARIMA(p,d,q) ή SARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)_s$ η διαδικασία της πρόβλεψης του x_{n+1} είναι παρόμοια, δηλαδή βρίσκουμε την πρόβλεψη $y_n(1)$ με μοντέλο τύπου ARMA και την προσθέτουμε στην κατάλληλη έκφραση των τελευταίων

παρατηρήσεων $x_n, x_{n-1}, \ldots,$ σύμφωνα με τις τιμές των d και D. Η πρόβλεψη για k χρονικά βήματα μπορεί να υπολογισθεί αναδρομικά.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε την πρόβλεψη και τα όρια πρόβλεψης χρονοσειράς με το μοντέλο του τυχαίου περιπάτου.

2. Για μια χρονοσειρά με μέση τιμή $\mu = 10.8$ εκτιμήθηκε μοντέλο AR(1) με παράμετρο $\phi = -0.5$ και διασπορά λευκού κανονικού θορύβου $\sigma_z^2 = 1$. Έστω ότι είναι γνωστό ότι $x_n = 10.2$.

   (α) Υπολογίστε την πρόβλεψη και τα 95% όρια πρόβλεψης για χρόνους *n+1*, *n+2*, *n+3*.

   (β) Σχηματίστε το κατάλληλο διάγραμμα με τις προβλέψεις στο (α). Σχολιάστε πως περιμένετε να συνεχιστούν οι προβλέψεις και τα όρια πρόβλεψης για βήματα *k>n+3*.

3. Για τα ίδια δεδομένα της άσκησης 2 ($\mu = 10.8$, $\sigma_z^2 = 1$, $x_n = 10.2$), θεωρούμε το μοντέλο MA(1) με $\theta = 0.5$ και $z_n = 0$.

   (α) Υπολογίστε την πρόβλεψη και τα 95% όρια πρόβλεψης για χρόνους *n+1*, *n+2*, *n+3*.

   (β) Σχηματίστε το κατάλληλο διάγραμμα με τις προβλέψεις στο (α). Συγκρίνετε τις προβλέψεις με αυτές του AR(1) στην άσκηση 2.

4. Για το δείκτη Dow-Jones (Αύγ. 28 – Δεκ. 18, 1972) εκτιμήθηκε το μοντέλο ARIMA(1,1,0):

   $$(1-0.4471B)(1-B)x_t = z_t + 0.0739,\ z_t \sim \text{WN}(0,1.455) \text{ για } t = 1,2,\ldots,78.$$

   Οι τιμές του δείκτη Dow-Jones είναι για 15.12.72, $x_{n-1} = 1034.69$ και για 18.12.72, $x_n = 1022.05$. Υπολογίστε την πρόβλεψη και τα 95% όρια πρόβλεψης του δείκτη για μια και δύο χρονικές στιγμές μπροστά.

5. Υποθέτουμε το μοντέλο AR(2) με σταθερό όρο $\mu = 5$, συντελεστές $\phi_1 = 1.8$ και $\phi_2 = -0.8$ και διασπορά λευκού κανονικού θορύβου $\sigma_z^2 = 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι είναι γνωστές οι παρατηρήσεις $x_{99} = 7.4$, $x_{100} = 6.26$.

   (α) Γράψτε το γενικό τύπο της πρόβλεψης *k* βημάτων με αυτό το μοντέλο.

   (β) Υπολογίστε την πρόβλεψη και τα 95% όρια πρόβλεψης των x_{101}, x_{102} και x_{103}.

   (γ) Σχηματίστε το κατάλληλο διάγραμμα με τις προβλέψεις στο (α). Σχολιάστε πως περιμένετε να συνεχιστούν οι προβλέψεις και τα όρια πρόβλεψης των x_{104}, x_{105} κτλ.

6. Έστω το μοντέλο ARMA(1,1):

   $$x_t = \mu + \phi(x_{t-1} - \mu) + z_t + \theta\, z_{t-1},\quad z_t \sim \text{WN}(0,\sigma_z^2).$$

   (α) Υπολογίστε την πρόβλεψη και τα 95% όρια πρόβλεψης για *k* χρονικές στιγμές μπροστά.

(β) Για το παραπάνω μοντέλο εκτιμήθηκαν οι παράμετροι ως εξής: $\sigma_z^2 = 0.5$, $\mu = 2.5$, $\phi = 1.01$ και $\theta = -0.5$. Αν $x_n = 2.3$ προβλέψτε το x_{n+1}, το x_{n+2} καθώς και το x_{n+k} για *k* πολύ μεγάλο.

7. Θεωρούμε το μοντέλο ARIMA(0,1,1) $(1-B)x_t = (1+\theta B)z_t$.

(α) Γράψε τον τύπο που δίνει την πρόβλεψη για *k* βήματα.

(β) Υπολόγισε τα 95% όρια πρόβλεψης για *k* βήματα που δίνει αυτό το μοντέλο.

(γ) Για *k=1*, διερευνείστε τη σχέση του μοντέλου με το μοντέλο της εκθετικής ομαλοποίησης.

(δ) Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση της χρονοσειράς της συγκέντρωσης μιας ουσίας σε μια χημική διεργασία. Η παράμετρος του MA μέρους εκτιμήθηκε ως $\theta = -0.7$ και η διασπορά του θορύβου ως $\sigma_z^2 = 0.1$. Δίνονται οι παρατηρήσεις στις χρονικές στιγμές 1 ως 10 ως:

17.0, 16.6, 16.3, 16.1, 17.1, 16.9, 16.8, 17.4, 17.1, 17.0

Προβλέψτε τις επόμενες 5 προβλέψεις με τα αντίστοιχα 95% όρια πρόβλεψης, ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή 8 (δηλαδή $x_8(1), x_8(2), ..., x_8(5)$) και τη χρονική στιγμή 10 (δηλαδή $x_{10}(1), x_{10}(2), ..., x_{10}(5)$). Τι παρατηρείτε;

(ε) Με βάση τις παραπάνω προβλέψεις, ποια είναι η διαφορά της πρόβλεψης με μοντέλο ARIMA(0,1,1) από την πρόβλεψη με μοντέλο MA(1);

8. Δίνονται οι παρατηρήσεις

7 -2 -5 7 -9 6 -3 -2

Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από μια AR διαδικασία με μέση τιμή 0 και ο λευκός θόρυβος z_t έχει κανονική κατανομή. Προσαρμόστηκαν τα μοντέλα AR(1) και AR(2) στην παραπάνω χρονοσειρά και εκτιμήθηκαν οι παράμετροι τους: $\hat{\phi} = 0.7$ για το AR(1) και $\hat{\phi}_1 = -1.4$, $\hat{\phi}_2 = -0.8$ για το AR(2).

(α) Επιλέξτε ένα από τα δύο μοντέλα χρησιμοποιώντας το κριτήριο AIC

βοήθεια: κριτήριο AIC: $\mathrm{AIC}(p) = n\log(\hat{\sigma}_z^2) + 2p$

(β) Κάνετε προβλέψεις για τις χρονικές στιγμές 9 και 10 με το καταλληλότερο μοντέλο (σημειακή εκτίμηση και 95% όρια πρόβλεψης).

9. Θεωρείστε το παρακάτω μοντέλο
$(1-\phi B)(1-B)x_t = (1+\theta B)z_t$, $z_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma_z^2)$ και z_t είναι IID.

(α) Θεωρώντας ως αφετηρία πρόβλεψης τη χρονική στιγμή *n*, βρείτε τη σημειακή πρόβλεψη *k* βημάτων μπροστά $x_n(k)$ του x_{n+k}.

(β) Βρείτε τη διασπορά του σφάλματος πρόβλεψης για ένα και δύο βήματα μπροστά.

10. Υποθέτουμε πως οι παρατηρήσεις μιας χρονοσειράς $y_t \;{}_{t=1}^{100}$ δίνονται από το σύστημα

$$Y_t = a + bt + X_t, \qquad X_t = \phi X_{t-4} + e_t$$

όπου e_t είναι iid N(0,1). Δίνονται επίσης οι τιμές $a = 5$, $b = 0.5$, $\phi = 0.8$.

(α) Οι 4 τελευταίες τιμές της χρονοσειράς $y_t \ {}_{t=1}^{100}$ είναι

97	98	99	100
53.2	53.3	58.5	52.7

Προβλέψετε τις τιμές της χρονοσειράς για χρόνους 101 και 104 (δηλαδή $x_{100}(1)$ και $x_{100}(4)$) δίνοντας τη μέση πρόβλεψη και τα όρια της πρόβλεψης για 95% επίπεδο εμπιστοσύνης.

(β) Κάνετε μακροπρόθεσμη πρόβλεψη με το παραπάνω μοντέλο (μέση πρόβλεψη και τα όρια της πρόβλεψης για 95% επίπεδο εμπιστοσύνης).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Η ανάλυση χρονοσειρών στο πεδίο των συχνοτήτων είναι συμπληρωματική της ανάλυσης στο πεδίο του χρόνου, αλλά μπορεί να διερευνήσει χαρακτηριστικά που δεν εντοπίζονται εύκολα με την ανάλυση στο πεδίο του χρόνου. Αυτά τα χαρακτηριστικά έχουν κυρίως σχέση με περιοδικότητες που συνυπάρχουν στη χρονοσειρά.

Υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά είναι στάσιμη (stationary).

Βασικό στοιχείο της γραμμικής ανάλυσης είναι η μελέτη της αυτοσυσχέτισης (ή αυτοσυνδιασποράς) που συνοψίζει τις συσχετίσεις σε διάφορες υστερήσεις, δηλαδή χρόνους. Ισοδύναμα μπορούμε να μελετήσουμε το φάσμα ισχύος, δηλαδή την κατανομή της 'ισχύος' της χρονοσειράς σε όλες τις δυνατές συχνότητες. Για παράδειγμα αν η χρονοσειρά έχει έντονη περιοδικότητα με περίοδο *k*, τότε η αυτοσυσχέτιση δείχνει αυξημένη συσχέτιση για υστέρηση *k* και, αντίστοιχα, το φάσμα ισχύος δείχνει έντονη ισχύ για συχνότητα 1/*k*. Βέβαια οι χρονοσειρές δεν είναι συνήθως απλά διακριτά περιοδικά ή συνεχή ημιτονοειδή σήματα και η ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων προσπαθεί να εντοπίσει συχνότητες που έχουν μεγαλύτερη σημασία (δηλαδή ισχύ) από άλλες.

6.1 Γενικά

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

- $\{X_n\}$: η χρονοσειρά ορισμένη θεωρητικά ως στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο *n* (συνήθως υποθέτουμε $-\infty < n < \infty$).
- $\{X(t)\}$: η χρονοσειρά ορισμένη θεωρητικά ως στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο *t* (συνήθως υποθέτουμε $-\infty < t < \infty$).
- $\{x_n\}$: η παρατηρούμενη χρονοσειρά, δηλαδή μια πραγματοποίηση της διακριτής στοχαστικής διαδικασίας $\{X_n\}$, ή της συνεχούς στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t)\}$ που παρατηρείται σε διακριτές χρονικές στιγμές $n = t\tau_s$, όπου τ_s είναι ο χρόνος δειγματοληψίας.
- *N*: το μήκος της παρατηρούμενης χρονοσειράς $\{x_n\}$. Συνήθως θα θεωρούμε ότι η χρονοσειρά δίνεται ως $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$.

Σειρές Fourier

Μπορούμε να φανταστούμε μια χρονοσειρά μήκους *N* ως μια σειρά από κύκλους περιόδου $2,3,\ldots,T$. Η συχνότητα ορίζεται ως το αντίστροφο της περιόδου. Οι αντίστοιχες συχνότητες είναι $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{T}$ ή σε γωνιακές συχνότητες (σε ακτίνες ανά

μονάδα χρόνου) $\frac{2\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\ldots,\frac{2\pi}{T}$. Η θεμελιώδης συχνότητα ταλάντωσης, δηλαδή η συχνότητα της πρώτης αρμονικής ταλάντωσης, είναι $f=1/T$ και αντίστοιχα η θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα είναι $\omega=2\pi/T=2\pi f$.

Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε μια χρονοσειρά ως μια *περιοδική κυματομορφή* (periodic waveform) περιόδου το πολύ T που δίνεται από τη ***σειρά Fourier***

$$X_n=a_0+\sum_{k=1}^{M}\left(a_k\cos(2\pi kfn)+b_k\sin(2\pi kfn)\right), \tag{97}$$

όπου a_0 είναι η μέση τιμή, a_k και b_k είναι τα πλάτη για την κάθε συνημιτονοειδή και ημιτονοειδή ταλάντωση στις αρμονικές συχνότητες $k\omega=2\pi kf$ αντίστοιχα και το M μπορεί να τείνει στο άπειρο. Για μια μη-περιοδική χρονοσειρά μήκους N η υψηλότερη δυνατή περίοδος είναι $T=N\tau_s$. Στην πράξη ο αριθμός των ταλαντώσεων M περιορίζεται από τη χαμηλότερη συχνότητα $f=1/(N\tau_s)$ (που είναι η θεμελιώδη συχνότητα) και από την υψηλότερη συχνότητα $f_s=1/(2\tau_s)$.

Για ευκολία στους μαθηματικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ισοδύναμη εκθετική μορφή της σειράς Fourier της (97)

$$X_n=\sum_{k=-M}^{M}d_k\,\mathrm{e}^{i2\pi kfn}, \tag{98}$$

όπου

$$d_k=\begin{cases}(a_k+ib_k)/2, & k<0\\ a_0, & k=0\\ (a_k-ib_k)/2, & k>0\end{cases}. \quad \text{[Γιατί;]}$$

Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε σε κάθε αρμονική συχνότητα $2\pi kf$ μια τριγωνομετρική μορφή και ισοδύναμα μια μιγαδική μορφή. Το πλάτος της μιγαδικής μορφής είναι $|d_k|=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ και η φασική γωνία είναι $\phi_k=-\tan^{-1}(a_k/b_k)$.

Τα πλάτη $|d_k|$ (για όλο το φάσμα των συχνοτήτων) εκφράζουν τα γραμμικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς ενώ αν υπάρχουν επιπλέον μη-γραμμικές συσχετίσεις αυτές διατηρούνται στις φασικές γωνίες ϕ_k. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τα πλάτη, δηλαδή θα περιοριστούμε στη γραμμική ανάλυση της χρονοσειράς στο πεδίο των συχνοτήτων.

Μετασχηματισμός Fourier

Αν υποθέσουμε ότι ο χρόνος είναι συνεχής ($\tau_s\to 0$ και t συνεχής) κι η χρονοσειρά είναι μια συνεχής κυματομορφή με υψηλότερη περίοδο T, τότε το πλάτος κάθε μιας από τις M αρμονικές ταλαντώσεις μπορεί να βρεθεί από την (98) ότι είναι

$$d_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\,\mathrm{e}^{-i2\pi kft}\,\mathrm{d}t\,. \tag{99}$$

Καθώς η περίοδος T αυξάνει, το διάστημα $\mathrm{d}f=1/T$ μεταξύ των συχνοτήτων των ταλαντώσεων μικραίνει. Αφήνοντας την περίοδο να τείνει στο άπειρο, θεωρώντας δηλαδή ότι η κυματομορφή δεν είναι περιοδική, και διαιρώντας με $\mathrm{d}f$ στην

παραπάνω σχέση, ορίζουμε το ***μετασχηματισμό Fourier*** για ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων *f*

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\,\mathrm{e}^{-i2\pi ft}\,\mathrm{d}t\,. \tag{100}$$

Αν ο χρόνος δεν είναι συνεχής και έχουμε μια χρονοσειρά *N* στοιχείων, τότε ορίζεται ο ***διακριτός μετασχηματισμός Fourier*** με επίσης N στοιχεία ως

$$\mathcal{F}_D(f) = \sum_{n=1}^{N} X_n\,\mathrm{e}^{-i2\pi fn}, \quad -1/2 < f < 1/2\,. \tag{101}$$

Συνήθως υποθέτουμε ότι η συχνότητα παίρνει τιμές στο διάστημα $(-1/2,1/2)$ αλλά όταν δίνεται ο χρόνος δειγματοληψίας τ_s η συχνότητα ορίζεται στο $(-1/(2\tau_s),1/(2\tau_s))$ και το άθροισμα στην (101) πολλαπλασιάζεται με τ_s.

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων *N* είναι δύναμη του 2, ο υπολογισμός του $\mathcal{F}_D(f)$ μπορεί να γίνει με πολύ λιγότερες πράξεις ($N\log N$ αντί για N^2) με τη χρήση του αλγορίθμου του *Γρήγορου Μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform, FFT)*. Ακόμα κι όταν το μήκος της χρονοσειράς δεν είναι δύναμη του 2, μπορούμε να προσθέσουμε κατάλληλο αριθμό μηδενικών στο τέλος της χρονοσειράς για να το πετύχουμε (αυτό δεν επηρεάζει τη συνάρτηση $\mathcal{F}_D(f)$ παρά μόνο την ευκρίνεια της ως προς τη συχνότητα *f*).

Τα στοιχεία του μετασχηματισμού Fourier $\mathcal{F}(f)$ ή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier $\mathcal{F}_D(f)$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Κάθε μιγαδικός αριθμός $\mathcal{F}(f)$ δίνεται ως $\mathcal{F}(f) = R(f) + iI(f)$, έχει μέτρο $|\mathcal{F}(f)| = \sqrt{R(f)^2 + I(f)^2}$ και φασική γωνία $\phi(f) = \tan^{-1}(I(f)/R(f))$.

Αντίστοιχα, ορίζεται κι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier που μεταφέρει την πληροφορία που περιέχεται στο φάσμα συχνοτήτων ($\mathcal{F}(f)$ ή $\mathcal{F}_D(f)$) πίσω στο πεδίο του χρόνου (X_n).

6.2 Φάσμα Ισχύος στοχαστικής διαδικασίας

Θεωρούμε τη διακριτή εργοδική στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$ για $-\infty < n < \infty$ με συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $\gamma_x(k)$ που ορίζεται για θετικές και αρνητικές τιμές της υστέρησης *k* και ικανοποιεί τη συνθήκη $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_x(k)| < \infty$. Επίσης θα θεωρούμε πάντα πως η μέση τιμή της $\{X_n\}$ είναι 0.

Το **φάσμα ισχύος** ορίζεται από το ***θεώρημα Wiener-Khintchine*** ως ο (διακριτός) μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς $\gamma_x(k)$

$$\mathcal{P}_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_x(k)\,\mathrm{e}^{-i2\pi fk}, \quad -1/2 < f < 1/2\,. \tag{102}$$

Επίσης το φάσμα ισχύος δίνεται από το τετράγωνο του μέτρου των μιγαδικών τιμών του διακριτού μετασχηματισμού Fourier της X_n, δηλαδή ως

$$\mathcal{P}_x(f) = \lim_{M\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{2M+1}\left|\sum_{n=-M}^{M} X_n\,\mathrm{e}^{-i2\pi fn}\right|^2\right], \tag{103}$$

όπου $\mathrm{E}[x]$ είναι η μέση τιμή του x. Αυτός ο ορισμός είναι η βάση για την εκτίμηση τους φάσματος ισχύος με τη μέθοδο του ***περιοδογράμματος***. Οι δύο ορισμοί του φάσματος ισχύος της (102) και της (103) είναι ισοδύναμοι όταν η συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης φθίνει ικανοποιητικά γρήγορα. Κάποιες ιδιότητες και παρατηρήσεις για το φάσμα ισχύος:

- $\mathcal{P}_x(f)$ είναι συνεχής μη-αρνητική συνάρτηση και παίρνει πραγματικές τιμές [Γιατί;].
- $\mathcal{P}_x(f)$ είναι άρτια συνάρτηση, $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_x(-f)$ [Γιατί;].
- Η αυτοσυνδιασπορά δίνεται ως συνάρτηση του $\mathcal{P}_x(f)$ από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή ως

$$\gamma_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{P}_x(f)\, \mathrm{e}^{i2\pi fk} \mathrm{d}\, f\,.$$

Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του $\gamma_x(k)$ επειδή ο υπολογισμός του $\mathcal{P}_x(f)$ είναι πιο γρήγορος, ειδικά με τη χρήση του FFT.

- Η διασπορά της διαδικασίας (ή ολική ισχύς όπως λέγεται με αναφορά στο πεδίο των συχνοτήτων) ορίζεται εναλλακτικά από το $\mathcal{P}_x(f)$ και ισχύει

$$\gamma_x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{P}_x(f) \mathrm{d}\, f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 = \sigma_x^2,$$

δηλαδή η ολική ισχύς είναι ίδια είτε την υπολογίσουμε στο πεδίο του χρόνου ή στο πεδίο των συχνοτήτων. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι γνωστό ως το **Θεώρημα του Parseval**.

- Ο όρος $\mathcal{P}_x(f) \mathrm{d}\, f$ δηλώνει τη συνεισφορά στην ολική ισχύ από τα στοιχεία της διαδικασίας με συχνότητες στο διάστημα $(f, f + \mathrm{d}\, f)$. Αν σε αυτό το διάστημα αντιστοιχεί κορυφή του $\mathcal{P}_x(f)$ αυτό δηλώνει ότι τα στοιχεία σε αυτό το διάστημα συχνοτήτων συνεισφέρουν σημαντικά στην ολική ισχύ.
- Η ερμηνεία του $\mathcal{P}_x(f)$ είναι αντίστοιχη με αυτή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$. Δεν έχει νόημα να υπολογίσουμε τη συνάρτηση για κάποια συγκεκριμένη τιμή αλλά για ένα διάστημα τιμών.
- Αν ορίσουμε το $\mathcal{P}_x(f)$ ως τη συνάρτηση Fourier της αυτοσυσχέτισης $\rho_x(k)$ αντί της αυτοσυνδιασποράς $\gamma_x(k)$, τότε η ενέργεια που παίρνουμε ολοκληρώνοντας την $\mathcal{P}_x(f)$ είναι 1 και η $\mathcal{P}_x(f)$ έχει τις ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Συνήθως όμως θεωρούμε την $\mathcal{P}_x(f)$ ως μετασχηματισμό Fourier της $\gamma_x(k)$.
- Στη βιβλιογραφία, ο τύπος του $\mathcal{P}_x(f)$ μπορεί να βρεθεί με διαφορετικούς συντελεστές του αθροίσματος της (102), όπως $1/(2\pi)$ ή $1/\sqrt{2\pi}$ (αυτό προκύπτει από διαφορετικό ορισμό του μετασχηματισμού Fourier).

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα φάσματα κάποιων απλών συστημάτων.

Φάσμα ισχύος λευκού θορύβου

Το φάσμα ισχύος του λευκού θορύβου, $\{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_z^2)$ είναι

$$\mathcal{P}_z(f) = \sigma_z^2, \qquad -1/2 < f < 1/2, \quad \text{[Γιατί;]} \tag{104}$$

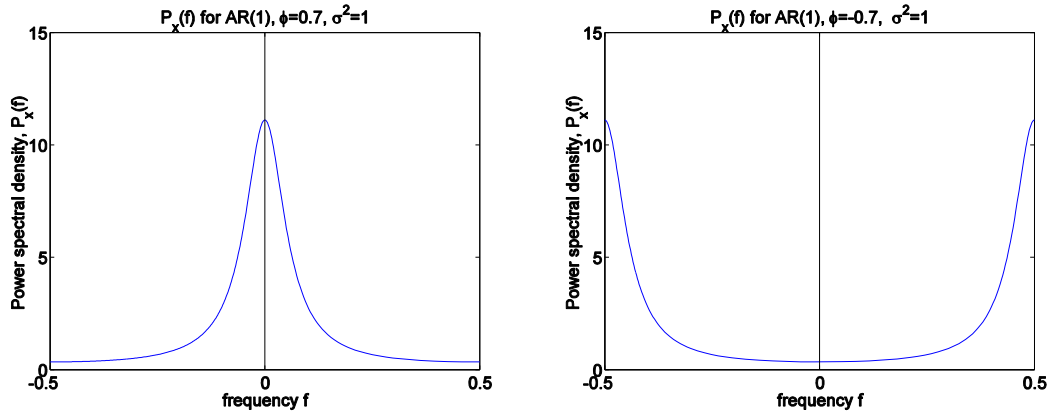
δηλαδή κάθε συχνότητα του φάσματος συχνοτήτων συνεισφέρει το ίδιο στη διασπορά της διαδικασίας.

Φάσμα ισχύος AR(1)

Το φάσμα ισχύος μιας διαδικασίας AR(1) ($x_t = \phi\, x_{t-1} + z_t$, $z_t \sim \text{WN}(0, \sigma_z^2)$) είναι

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{\sigma_z^2}{1 - 2\phi\cos(2\pi f) + \phi^2}, \qquad -1/2 < f < 1/2 \quad \text{[Γιατί;]} \tag{105}$$

Στα δύο παρακάτω σχήματα δίνεται το $\mathcal{P}_x(f)$ του AR(1) για $\phi = 0.7$ και $\phi = -0.7$.



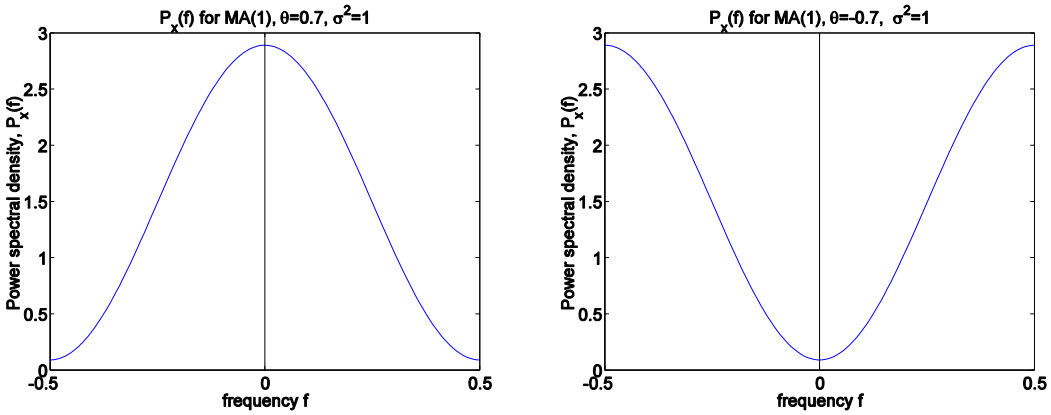
Για θετικό συντελεστή ϕ του AR(1) η ισχύς δίνεται από τις χαμηλές συχνότητες (η χρονοσειρά φαίνεται πιο ομαλοποιημένη) ενώ για αρνητικό ϕ η ισχύ βρίσκεται στις υψηλές συχνότητες (η χρονοσειρά δείχνει διαταραχές σε μικρή χρονική κλίμακα).

Φάσμα ισχύος MA(1)

Το φάσμα ισχύος μιας διαδικασίας MA(1) ($x_t = z_t + \theta\, z_{t-1}$, $z_t \sim \text{WN}(0, \sigma_z^2)$) είναι

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_z^2(1 + 2\theta\cos(2\pi f) + \theta^2), \qquad -1/2 < f < 1/2 \quad \text{[Γιατί;]} \tag{106}$$

Στα δύο παρακάτω σχήματα δίνεται το $\mathcal{P}_x(f)$ του MA(1) για $\theta = 0.7$ και $\theta = -0.7$.



Όμοια είναι τα συμπεράσματα για θετικό κι αρνητικό συντελεστή θ του MA(1) αλλά η κορυφή στο *f=0* για $\theta = 0.7$ του MA(1) είναι πιο χαμηλή και πλατιά από

αυτήν για $\phi = 0.7$ του AR(1). Επίσης στην κορυφή του AR(1) για *f=0* και $\phi = 0.7$ αντιστοιχεί κοιλάδα του MA(1) για *f=0* και $\theta = -0.7$.

6.3 Εκτίμηση φάσματος ισχύος

Λόγω της σημασίας του φάσματος ισχύος στη μελέτη χρονοσειράς (ή σήματος για τους μηχανικούς) έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι εκτίμησης του. Συνήθως χωρίζουμε τις μεθόδους σε τρεις κύριες κλάσεις:

11. **Κλασικές ή μη-παραμετρικές μέθοδοι εκτίμησης**: η εκτίμηση του φάσματος ισχύος γίνεται απευθείας από τη χρονοσειρά (σήμα). Τέτοιες μέθοδοι είναι για παράδειγμα το *περιοδόγραμμα* (*periodogram*) και η μέθοδος *Welch*.
12. **Μοντέρνες ή παραμετρικές μέθοδοι**: η εκτίμηση του φάσματος ισχύος γίνεται μέσα από την εκτίμηση των παραμέτρων του γραμμικού μοντέλου που προσαρμόζεται στη χρονοσειρά. Τέτοιες μέθοδοι είναι αυτές που βασίζονται στην εκτίμηση των παραμέτρων του AR μοντέλου, όπως η μέθοδος *Yule-Walker (αυτοσυσχέτισης)* και η μέθοδος *Burg*.
13. **Μέθοδοι υποχώρου ή μέθοδοι υψηλής ευκρίνειας**: η εκτίμηση αφορά τις συχνότητες που έχουν υψηλή ισχύ παρά το φάσμα ισχύος και βασίζεται στην ανάλυση ιδιοτιμών του πίνακα συσχέτισης. Τέτοιες μέθοδοι είναι η *ταξινόμηση πολλαπλών σημάτων* (*multiple signal classification* (MUSIC) *method*) και η *μέθοδος των ιδιοδιανυσμάτων* (*eigenvector* (EV) *method*). Αυτές οι μέθοδοι είναι κατάλληλες σε φάσματα χρονοσειρών περιοδικού τύπου για τον εντοπισμό της ακριβής συχνότητας ημιτονοειδών ταλαντώσεων που καλύπτονται από θόρυβο. Δε θα ασχοληθούμε αναλυτικά με αυτές τις μεθόδους.

6.3.1 Κλασική εκτίμηση φάσματος ισχύος

Οι μέθοδοι κλασικής εκτίμησης βασίζονται στους δύο ορισμούς του φάσματος ισχύος, το περιοδόγραμμα (δες (103)) και το μετασχηματισμό Fourier της αυτοδιασποράς (δες (102)).

6.3.1.1 Περιοδόγραμμα

Η εκτίμηση με το περιοδόγραμμα προκύπτει από τον ορισμό της (103) παραλείποντας τη μέση τιμή και χρησιμοποιώντας μόνο τις διαθέσιμες παρατηρήσεις $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ (υποθέτουμε πως οι παρατηρήσεις για αρνητικούς χρόνους ή χρόνους μεγαλύτερους του N είναι 0 και επίσης αφαιρούμε από τις παρατηρήσεις το μέσο όρο). Η εκτίμηση είναι

$$P_{\text{Per}}(f) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-i2\pi fn}\right|^2, \qquad -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}. \tag{107}$$

Η αντίστοιχη και ισοδύναμη εκτίμηση από τον ορισμό της (102) είναι

$$P_{\text{Per}}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}_x(k)\mathrm{e}^{-i2\pi fk}, \qquad -\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}, \tag{108}$$

όπου $\hat{\gamma}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1} x_{n+k}x_n$ για $0 < k < N-1$ και $\hat{\gamma}_x(-k) = \hat{\gamma}_x(k)$. Η (108) μπορεί να υπολογισθεί από την (107).

Το περιοδόγραμμα εκφράζει το τετράγωνο του πλάτους του διακριτού μετασχηματισμού Fourier μιας πραγματοποίησης της υπό μελέτης διαδικασίας.

Ιδιότητες της $P_{\text{Per}}(f)$

Για να δούμε αν το περιοδόγραμμα $P_{\text{Per}}(f)$ αποτελεί ικανοποιητική εκτίμηση του φάσματος ισχύος της διαδικασίας $\mathcal{P}_x(f)$, εξετάζουμε τις στατιστικές ιδιότητες του.

Μέση τιμή του $P_{\text{Per}}(f)$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[P_{\text{Per}}(f)\right] &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \mathrm{E}\left[\hat{\gamma}_x(k)\right] \mathrm{e}^{-i2\pi fk} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1-\frac{|k|}{N}\right) \gamma_{\mathrm{x}}(k) \mathrm{e}^{-i2\pi fk} \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w_B(k) \gamma_{\mathrm{x}}(k) \mathrm{e}^{-i2\pi fk} = W_B(f) * \mathcal{P}_x(f) \end{aligned} \tag{109}$$

όπου $w_B(k)$ ονομάζεται το **τριγωνικό ή Bartlett παράθυρο υστέρησης** (*lag window*) κι ορίζεται ως

$$w_B(k) = \begin{cases} 1-\dfrac{|k|}{N} & |k| < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Το $W_B(f)$ είναι το **Bartlett παράθυρο φάσματος** κι προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier του $w_B(k)$

$$W_B(f) = \mathcal{F}\left[w_B(k)\right] = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\pi fN)}{\sin(\pi f)}\right)^2.$$

Το σύμβολο * δηλώνει τη συνέλιξη των δύο συναρτήσεων συχνότητας

$$W_B(f) * \mathcal{P}_x(f) = \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f-\lambda)\mathcal{P}_x(\lambda)\mathrm{d}\lambda\,.$$

Παρατηρήσεις:

- Ισχύει $\lim_{N\to\infty} w_B(k) = 1$ και επομένως $\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left[P_{\text{Per}}(f)\right] = \mathcal{P}_x(f)$, δηλαδή $P_{\text{Per}}(f)$ είναι **ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια** του $\mathcal{P}_x(f)$.
- Από τη συνέλιξη του πραγματικού φάσματος ισχύος με το Bartlett παράθυρο φάσματος προκύπτει ότι η εκτίμηση $P_{\text{Per}}(f)$ δίνει κατά μέσο όρο μια πιο εξομαλυμένη μορφή του πραγματικού φάσματος ισχύος.

Διασπορά και συνδιασπορά του $P_{\text{Per}}(f)$

Ο ακριβής υπολογισμός της συνδιασποράς (για δύο συχνότητες f_1 και f_2) και της διασποράς του $P_{\text{Per}}(f)$ δεν είναι δυνατός γενικά για μια οποιαδήποτε διαδικασία. Η συνδιασπορά μπορεί όμως να υπολογιστεί προσεγγιστικά από τους τύπους για Gaussian λευκό θόρυβο, $\{z_n\}_0^{N-1}$, $z_n \sim \mathrm{N}(0, \sigma_z^2)$, και ισχύει

$$\mathrm{Cov}\left[P_{\text{Per}}(f_1), P_{\text{Per}}(f_2)\right] \approx \mathcal{P}_x(f_1)\mathcal{P}_x(f_2)\left(\left(\frac{\sin(\pi(f_1+f_2)N)}{N\sin(\pi(f_1+f_2))}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\pi(f_1-f_2)N)}{N\sin(\pi(f_1-f_2))}\right)^2\right).$$

Η διασπορά του $P_{\text{Per}}(f)$ προκύπτει από τον παραπάνω τύπο για $f_1 = f_2$

$$\text{Var}\left[P_{\text{Per}}(f)\right] \approx \left(\mathcal{P}_x(f)\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\sin(2\pi f N)}{N \sin(2\pi f)}\right)^2\right).$$

Παρατηρήσεις:

- Για συχνότητες που δεν είναι κοντά στο 0 ή στο $\pm\frac{1}{2}$ η διασπορά προσεγγιστικά απλοποιείται ως $\text{Var}\left[P_{\text{Per}}(f)\right] \approx \left(\mathcal{P}_x(f)\right)^2$, δηλαδή η τυπική απόκλιση του $P_{\text{Per}}(f)$ είναι όση περίπου η μέση τιμή του (πολύ μεγάλη).
- Για λευκό θόρυβο, η διασπορά του $P_{\text{Per}}(f)$ είναι της τάξης του σ_z^4 (το φάσμα λευκού θορύβου είναι $\mathcal{P}_x(f) = \sigma_z^2$) και γενικά για μια διαδικασία η διασπορά του $P_{\text{Per}}(f)$ είναι της τάξης του σ_x^4 και ανεξάρτητη του *N*.
- Η διασπορά του $P_{\text{Per}}(f)$ δε μηδενίζεται ασυμπτωτικά (όταν $N \to \infty$), δηλαδή $P_{\text{Per}}(f)$ **δεν είναι συνεπής εκτιμήτρια** του $\mathcal{P}_x(f)$.
- Για αρμονικές συχνότητες του $\frac{1}{N}$, δηλαδή $f_1 = \frac{k}{N}$, $f_2 = \frac{l}{N}$ και $k \neq l$, ισχύει $\text{Cov}\left[P_{\text{Per}}(f_1), P_{\text{Per}}(f_2)\right] = 0$, που σημαίνει ότι οι τιμές του περιοδογράμματος για συχνότητες με απόσταση κάποιο πολλαπλάσιο του $1/N$ είναι ασυσχέτιστες. [Γιατί;] Όταν λοιπόν το *N* αυξάνει, έρχονται οι ασυσχέτιστες τιμές του $P_{\text{Per}}(f)$ πιο κοντά.
- Το περιοδόγραμμα παρουσιάζει συνεχείς ακανόνιστες διακυμάνσεις όταν το *N* αυξάνει γιατί η διασπορά τείνει προς μια μη-μηδενική σταθερά και οι ασυσχέτιστες τιμές του $P_{\text{Per}}(f)$ έρχονται πιο κοντά.
- Μια διαδικασία $\{x_n\}$ Gaussian έγχρωμου θορύβου (π.χ. μια διαδικασία AR με Gaussian λευκό θόρυβο εισόδου) προσεγγιστικά μπορεί να δημιουργηθεί στέλνοντας λευκό θόρυβο σε ένα γραμμικό σύστημα, που ας το συμβολίζουμε γενικά $h(z)$. Τότε αν $H(f)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $h(z)$ ισχύει

$$\mathcal{P}_x(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_z(f) = |H(f)|^2 \sigma_z^2$$

και η διασπορά του περιοδογράμματος είναι

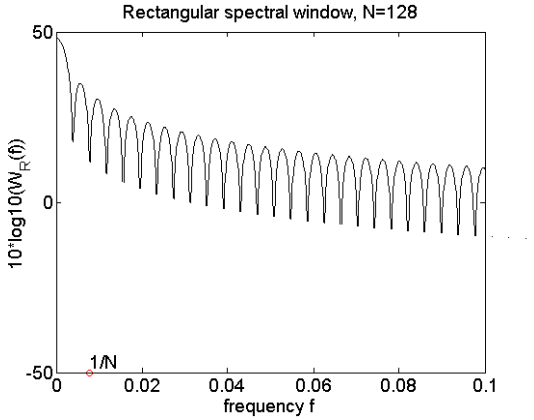
$$\text{Var}\left[P_{\text{Per}}(f)\right] \approx |H(f)|^4 \sigma_z^4 \left(1 + \left(\frac{\sin(2\pi f N)}{N \sin(2\pi f)}\right)^2\right).$$

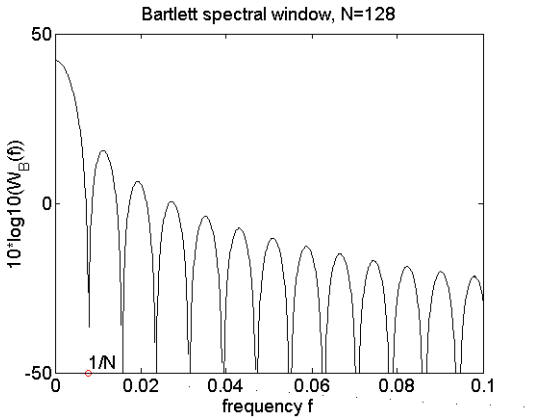
Φασματική διαρροή

Η εμφάνιση του παραθύρου Bartlett στη μέση τιμή του $P_{\text{Per}}(f)$ στην (109) μπορεί να εξηγηθεί και με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε την χρονοσειρά $\{x_n\}_0^{N-1}$ ως το γινόμενο της άπειρης χρονοσειράς $\{x_{\infty,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ (πραγματοποίηση της διαδικασίας) με το ***ορθογώνιο παράθυρο δεδομένων*** (*data window*) $w_R(n)$ που παίρνει την τιμή 1 για χρόνους 0,1,…,*N*-1 και 0 αλλού, δηλαδή ισχύει

$$x_n = x_{\infty,n} \cdot w_R(n).$$

Από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων x_n μεταξύ τους στην (107) προκύπτει το τριγωνικό παράθυρο υστέρησης Bartlett ως το γινόμενο δύο ορθογωνίων παραθύρων και το αντίστοιχο φασματικό παράθυρο Bartlett από την αντιστοιχία γινόμενου στο πεδίο του χρόνου με συνέλιξη στο πεδίο των συχνοτήτων. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται το φασματικά ορθογώνιο παράθυρο και το φασματικό Bartlett παράθυρο.





Για καλύτερη ερμηνεία ενός διαγράμματος φάσματος ισχύος, δίνεται συνήθως το φάσμα ισχύος $P(f)$ σε dB, δηλαδή ως $10\log_{10}(P(f))$. Τα δύο σχήματα δείχνουν έναν ***κύριο λοβό*** (*main lobe*) γύρω από τη συχνότητα 0 και μια ακολουθία από ***πλευρικούς λοβούς*** (*side lobes*) με το ύψος τους να μικραίνει καθώς απομακρύνονται από το $f=0$. Οι πλευρικοί λοβοί σχηματίζουν αυτό που ονομάζεται ***φασματική διαρροή*** (*spectral leakage*). Συγκρίνοντας τα δύο φασματικά παράθυρα παρατηρούμε ότι στο παράθυρο Bartlett το ύψος των πλευρικών λοβών μικραίνει και τείνει πιο γρήγορα στο 0 αλλά το πλάτος τους είναι διπλάσιο από αυτό του ορθογώνιου φασματικού παραθύρου. Ως ***πλάτος λοβού*** **(***lobe width***)** ορίζουμε τη διαφορά της συχνότητας της κορυφής του λοβού από τη συχνότητα που αντιστοιχεί σε μείωση της κορυφής στο μισό, δηλαδή κατά 3dB. Το πλάτος λοβού είναι της τάξης *1/N*.

Η δημιουργία των πλευρικών λοβών και της φασματικής διαρροής δε σχετίζεται με τον αριθμό των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του περιοδογράμματος αλλά μόνο με το μήκος της χρονοσειράς. Η ύπαρξη πλευρικών λοβών δηλώνει τη μεροληψία της εκτίμησης του $\mathcal{P}_x(f)$.

Ευκρίνεια

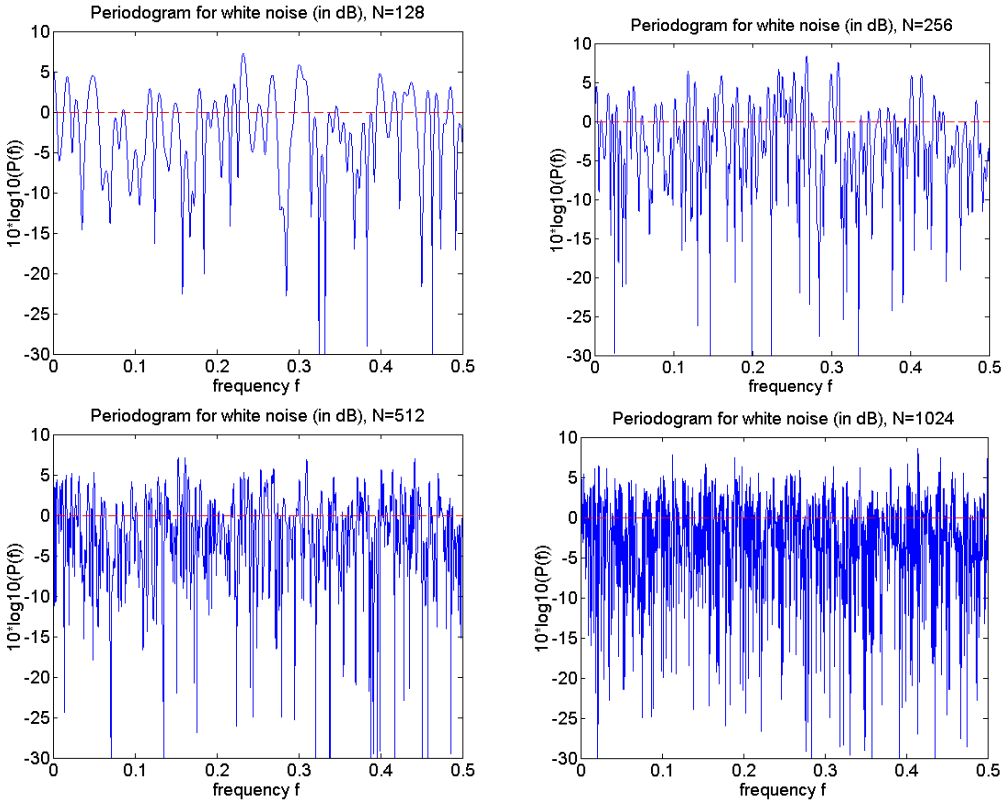
Γενικά η ***ευκρίνεια*** (*resolution*) αναφέρεται στην ικανότητα να μπορεί η εκτιμήτρια του φάσματος ισχύος (εδώ το περιοδόγραμμα $P_{\text{Per}}(f)$) να ξεχωρίσει τα φασματικά χαρακτηριστικά και είναι βασική ιδιότητα της απόδοσης της εκτιμήτριας. Για να διακρίνονται δύο ημιτονοειδής ταλαντώσεις που συνυπάρχουν στο σήμα και έχουν κοντινές συχνότητες θα πρέπει η διαφορά των δύο συχνοτήτων τους να είναι μικρότερη του πλάτους του κύριου λοβού του κάθε ημιτονοειδούς. Συγκεκριμένα για δύο συχνότητες f_1 και f_2 η συνθήκη ευκρίνειας είναι

$$\Delta f = f_1 - f_2 > \frac{1}{N}.$$

Η ευκρίνεια συνδέεται με την συνδιασπορά (ή συσχέτιση) του $P_{\text{Per}}(f)$. Η παραπάνω συνθήκη ευκρίνειας δηλώνει επίσης το όριο που οι f_1 και f_2 είναι ασυσχέτιστες.

Παραδείγματα:

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνεται το περιοδόγραμμα λευκού Gaussian θορύβου για *N=128, 256, 512* και *1024*. Η διακεκομμένη οριζόντια γραμμή δηλώνει το πραγματικό φάσμα ισχύος $\mathcal{P}_x(f)$. Η ευκρίνεια βελτιώνεται με την αύξηση του *N*. Αυτό φαίνεται από την ελάττωση του πλάτους των λοβών καθώς το *N* αυξάνει από 128 σε 256. Η σταθερή διασπορά του $P_{\text{Per}}(f)$ που δεν επηρεάζεται από το *N* σε συνδυασμό με το ότι η μικρότερη απόσταση ασυσχέτιστων συχνοτήτων είναι *1/N*, δίνει αυτήν την αυξημένη διακύμανση του $P_{\text{Per}}(f)$ με την αύξηση του *N*.

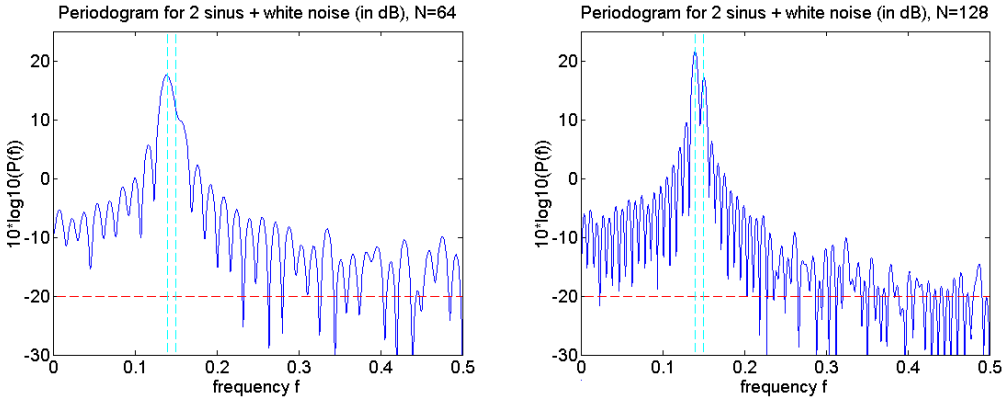


2. Θεωρούμε την περιοδική χρονοσειρά με θόρυβο που δίνεται ως το άθροισμα δύο ημιτονοειδών ταλαντώσεων, με συχνότητες $f_1 = 0.14$, $f_2 = 0.15$ και πλάτη $A_1 = 2$ και $A_2 = 1$ αντίστοιχα, και Gaussian λευκού θορύβου με διασπορά $\sigma_z^2 = 0.01$

$$x_n = A_1 \sin(2\pi f_1 n) + A_2 \sin(2\pi f_2 n) + z_n, \quad z_n \sim \text{WN}(0, \sigma_z^2).$$

Το φάσμα ισχύος $\mathcal{P}_x(f)$ της $\{x_{\infty,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ είναι στο επίπεδο του $\sigma_z^2 = 0.01$ κι έχει δύο παλμούς Dirac (δέλτα) στις συχνότητες f_1 και f_2. Για κάποιο πεπερασμένο μήκος *N* οι παλμοί Dirac προσεγγίζονται από τους κύριους λοβούς του $P_{\text{Per}}(f)$ στις συχνότητες f_1 και f_2 και οφείλονται στο ορθογώνιο παράθυρο μήκους *N* που αντιστοιχεί στις *N* διαθέσιμες παρατηρήσεις. Επιπλέον σχηματίζονται πλευρικοί λοβοί που αντιστοιχούν στη φασματική διαρροή και δυσκολεύουν στον εντοπισμό των δύο φασματικών χαρακτηριστικών της χρονοσειράς, ιδιαίτερα όταν το επίπεδο του θορύβου είναι υψηλό. Στα δύο παρακάτω σχήματα δίνεται το $P_{\text{Per}}(f)$ για $N = 64$

και $N=128$, όπου οι κατακόρυφες διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν τους παλμούς Dirac στις συχνότητες f_1 και f_2. Παρατηρούμε ότι όταν το N είναι αρκετά μικρό (για $N=64$) η συνθήκη ευκρίνειας δεν ικανοποιείται και οι δύο χαρακτηριστικές συχνότητες της χρονοσειράς δε διακρίνονται. Επίσης στα δύο σχήματα φαίνεται η φασματική διαρροή (η εμφάνιση των πλευρικών λοβών). Αν το επίπεδο θορύβου ήταν μεγαλύτερο ή αντίστοιχα τα πλάτη των ταλαντώσεων μικρότερα η φασματική διαρροή θα μπορούσε να κρύψει τις κορυφές του φάσματος ισχύος στις δύο χαρακτηριστικές συχνότητες.



Από τις παραπάνω παρατηρήσεις και τα δύο παραδείγματα συμπεραίνουμε ότι για να πετύχουμε καλύτερη εκτίμηση του $\mathcal{P}_x(f)$ (δηλαδή μικρότερη διασπορά στην εκτίμηση του και ελάττωση των πλευρικών λοβών) χρειάζεται να ομαλοποιήσουμε το περιοδόγραμμα $P_{\text{Per}}(f)$. Η ομαλοποίηση δικαιολογείται επίσης και ως η εξισορρόπηση της απαλοιφής της μέσης τιμής από τον ορισμό του $\mathcal{P}_x(f)$ στην (103) που οδηγεί στον ορισμό του $P_{\text{Per}}(f)$ στην (107).

Οι τεχνικές ομαλοποίησης του $P_{\text{Per}}(f)$ επικεντρώνονται στη μείωση της φασματικής διαρροής και της διασποράς του $P_{\text{Per}}(f)$ με κόστος την αύξηση της μεροληψίας ή την ελάττωση της ευκρίνειας ή και τα δύο. Τέτοιες τεχνικές δίνουν το Bartlett περιοδόγραμμα, το τροποποιημένο περιοδόγραμμα (modified periodogram), το περιοδόγραμμα Welch και το περιοδόγραμμα Blackman-Tukey.

Σημειώνεται ότι η αύξηση του μήκους N της χρονοσειράς βελτιώνει την ευκρίνεια αλλά δε μειώνει τη φασματική διαρροή.

6.4 *Παραμετρική εκτίμηση φάσματος ισχύος*

Υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί ως πραγματοποίηση μιας γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας τύπου ARMA(p,q) που δίνεται με μια από τις τρεις παρακάτω ισοδύναμες εκφράσεις

$$\begin{aligned} x_n &= \phi_1 x_{n-1} + \cdots \phi_p x_{n-p} + z_n + \theta_1 z_{n-1} + \cdots \theta_q z_{n-q} \\ \phi_p(B) x_n &= \theta_q(B) z_n \\ x_n &= \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} z_n = h(B) z_n \end{aligned} \qquad (110)$$

όπου z_n είναι λευκός θόρυβος, $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ και $\theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ είναι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα του AR και MA μέρους αντίστοιχα και $h(B)$ είναι το γραμμικό σύστημα με είσοδο το λευκό θόρυβο

και έξοδο τη χρονοσειρά που παρατηρούμε. Ο μετασχηματισμός Fourier του $h(B)$ δίνει τη ***συνάρτηση μεταφοράς*** (*transfer function*) του συστήματος $H(f)$ (συγκεκριμένα προκύπτει από το z-μετασχηματισμό για τιμές του z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, $z = \mathrm{e}^{i2\pi f}$ για $-\frac{1}{2} < f < \frac{1}{2}$). Η συνάρτηση $H(f)$ δίνεται ως

$$H(f) = H(\mathrm{e}^{-i2\pi f}) = \frac{1 + \sum_{k=1}^{q} \theta_k \mathrm{e}^{-i2\pi fk}}{1 - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \mathrm{e}^{-i2\pi fk}}. \tag{111}$$

Το φάσμα ισχύος $\mathcal{P}_x(f)$ δίνεται ως

$$\mathcal{P}_x(f) = \left|H(f)\right|^2 \mathcal{P}_z(f) = \left|H(f)\right|^2 \sigma_z^2 = H(\mathrm{e}^{-i2\pi f}) H(\mathrm{e}^{i2\pi f}) \sigma_z^2 \tag{112}$$

Το $\mathcal{P}_x(f)$ μιας ARMA διαδικασίας υπολογίζεται αν γνωρίζουμε τις παραμέτρους της ARMA διαδικασίας, δηλαδή τα $\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_p,\sigma_z^2$. Στην πράξη η παραμετρική εκτίμηση του $\mathcal{P}_x(f)$ γίνεται από το μοντέλο τύπου ARMA που επιλέγουμε (μέσω της (111) και (112)) εκτιμώντας τις παραμέτρους του από τη χρονοσειρά. Αν $\hat{\phi}_1,\ldots,\hat{\phi}_p,\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_p,\hat{\sigma}_z^2$ είναι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του ARMA μοντέλου, η εκτίμηση του $\mathcal{P}_x(f)$ είναι

$$P_{\mathrm{ARMA}}(f) = \frac{\hat{\sigma}_z^2 \left|1 + \sum_{k=1}^{q} \hat{\theta}_k \mathrm{e}^{-i2\pi fk}\right|^2}{\left|1 - \sum_{k=1}^{p} \hat{\phi}_k \mathrm{e}^{-i2\pi fk}\right|^2} = \frac{\hat{\sigma}_z^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{q} \hat{\theta}_k \mathrm{e}^{-i2\pi fk}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{q} \hat{\theta}_k \mathrm{e}^{i2\pi fk}\right)}{\left(1 - \sum_{k=1}^{p} \hat{\phi}_k \mathrm{e}^{-i2\pi fk}\right)\left(1 - \sum_{k=1}^{p} \hat{\phi}_k \mathrm{e}^{i2\pi fk}\right)} \tag{113}$$

Από την (113) εύκολα προκύπτει και η έκφραση για τις εκτιμήτριες $P_{\mathrm{AR}}(f)$ και $P_{\mathrm{MA}}(f)$ του μοντέλου AR και του μοντέλου MA αντίστοιχα.

Σε προηγούμενα παραδείγματα δόθηκε η μορφή του $\mathcal{P}_x(f)$ για διαδικασίες AR(1) και MA(1). Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το φάσμα ισχύος για δύο ακόμα απλές ARMA διαδικασίες.

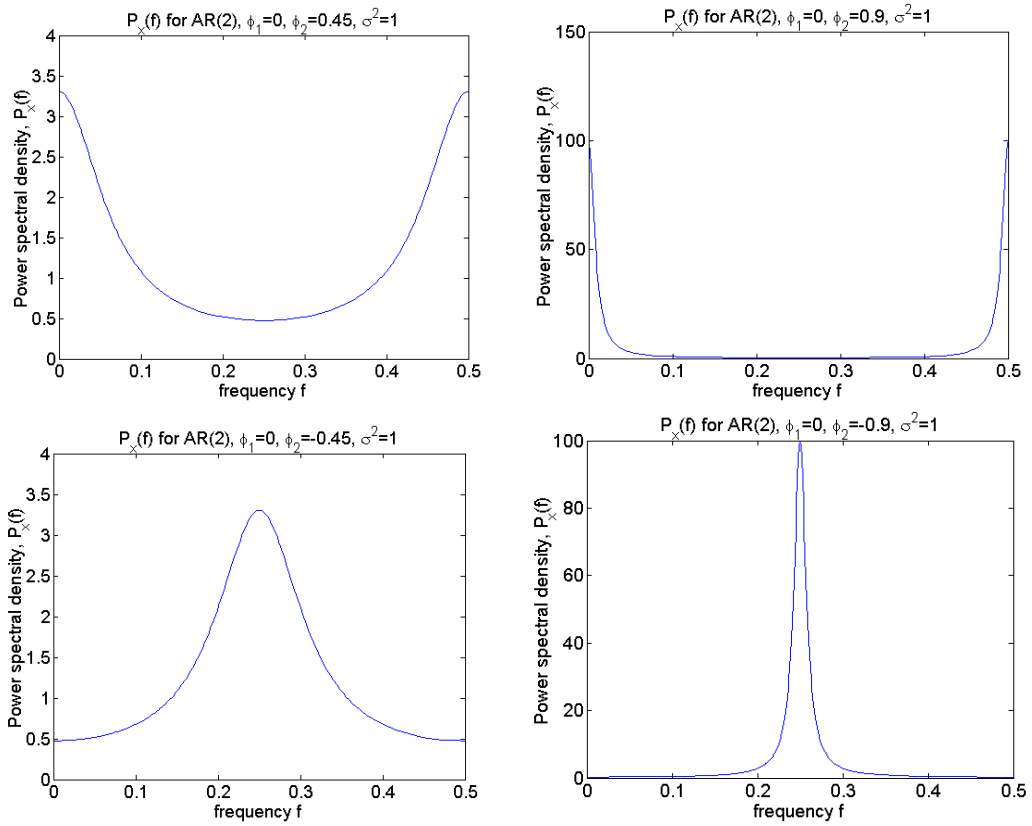
Φάσμα ισχύος AR(2)

Για το φάσμα ισχύος $\mathcal{P}_x(f)$ μιας AR(2) διαδικασίας από την (113) έχουμε [Γιατί;]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x(f) &= \frac{\sigma_z^2}{(1 - \phi_1 \mathrm{e}^{i2\pi f} - \phi_1 \mathrm{e}^{i4\pi f})(1 - \phi_1 \mathrm{e}^{-i2\pi f} - \phi_1 \mathrm{e}^{-i4\pi f})} \\ &= \frac{\sigma_z^2}{1 + \phi_1^2 + 2\phi_2 + \phi_2^2 + 2(\phi_1\phi_2 - \phi_1)\cos(2\pi f) - 4\phi_2 \cos^2(2\pi f)} \end{aligned} \tag{114}$$

Στα παρακάτω σχήματα δίνεται το $\mathcal{P}_x(f)$ για 4 διαδικασίες AR(2) με $\phi_1 = 0$, $\sigma_z^2 = 1$ και $\phi_2 = 0.45, 0.90, -0.45, -0.90$ αντίστοιχα. Για τις θετικές τιμές του ϕ_2 οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\phi_2(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$ είναι πραγματικοί αριθμοί ενώ για τις αρνητικές τιμές του ϕ_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί [Γιατί;]. Όταν οι ρίζες του $\phi_2(B)$ είναι πραγματικές το φάσμα ισχύος $\mathcal{P}_x(f)$ έχει κορυφή μόνο στη συχνότητα

$f=0$ ή στη συχνότητα $f=1/2$ (όπως για AR(1) αν έχει μια διπλή πραγματική ρίζα) ή και στις δύο (αν έχει δύο πραγματικές ρίζες) ανάλογα με τις τιμές των ϕ_1 και ϕ_2. Όταν οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές το $\mathcal{P}_x(f)$ έχει κορυφή σε κάποια άλλη συχνότητα f_0 που μπορεί να βρεθεί από τη συνάρτηση του φάσματος ισχύος στην (114) [Πως;]. Στο αριθμητικό παράδειγμα, όταν η τιμή του ϕ_2 μεγαλώνει κατά απόλυτη τιμή η αυτοσυσχέτιση γίνεται πιο ισχυρή για κάποιες υστερήσεις με αποτέλεσμα το φάσμα να έχει υψηλότερες κορυφές. Παρατηρούμε ότι για $\phi_2=-0.90$ η κορυφή είναι πολύ υψηλή και η διαδικασία AR(2) έχει έντονη περιοδικότητα.

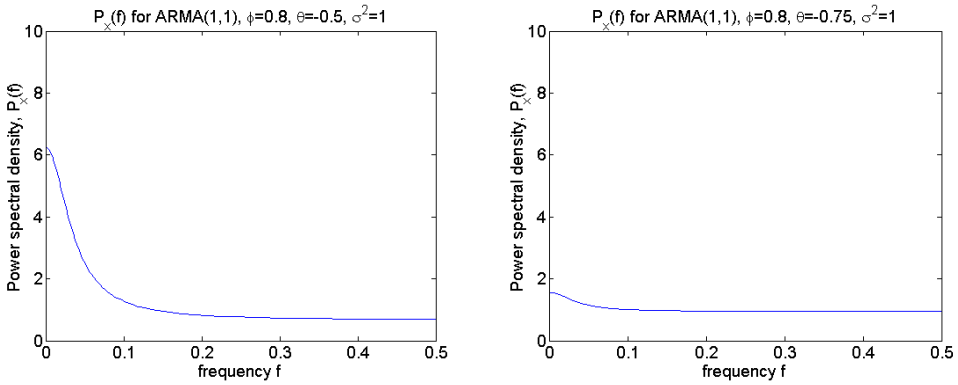


Φάσμα ισχύος ARMA(1,1)

Για μια διαδικασία ARMA(1,1) το φάσμα ισχύος είναι (δες (113))

$$\mathcal{P}_x(f)=\frac{\sigma_z^2(1+\theta\,\mathrm{e}^{-i2\pi f})(1+\theta\,\mathrm{e}^{i2\pi f})}{(1-\phi\,\mathrm{e}^{i2\pi f})(1-\phi\,\mathrm{e}^{-i2\pi f})}=\frac{\sigma_z^2(1+2\theta\cos(2\pi f)+\theta^2)}{(1-2\phi\cos(2\pi f)+\phi^2)}. \qquad (115)$$

Η μορφή του $\mathcal{P}_x(f)$ μιας διαδικασίας ARMA(1,1) μοιάζει με αυτό των AR(1) και MA(1). Όταν όμως οι συντελεστές $-\phi$ και θ τείνουν προς την ίδια τιμή το $\mathcal{P}_x(f)$ τείνει να γίνει επίπεδο χωρίς κορυφή, όπως φαίνεται στα παρακάτω δύο σχήματα. Αυτό συμβαίνει γιατί το MA(1) μέρος ορίζει «κοιλάδα» στο φάσμα ισχύος στην ίδια συχνότητα (εδώ είναι $f=0$) που το AR(1) μέρος ορίζει κορυφή. Αποτέλεσμα είναι το ένα μέρος (AR ή MA) να μηδενίζει το άλλο όταν οι τιμές $-\phi$ και θ είναι ίδιες, αλλιώς σχηματίζεται κορυφή ή «κοιλάδα» ανάλογα με το ποια από τις δύο παραμέτρους είναι μεγαλύτερη.



Είδαμε κάποιες βασικές μορφές του φάσματος ισχύος που μπορούν να δώσουν τα μοντέλα τύπου ARMA για μικρές τάξεις. Για μεγάλες τάξεις, δηλαδή μεγάλες τιμές των *p* (για μοντέλα AR) ή *q* (για μοντέλα MA) ή και τα δύο (για μοντέλα ARMA), το αντίστοιχο φάσμα ισχύος μπορεί να έχει πιο πολύπλοκη μορφή.

Παρατηρήσεις:

- Θεωρητικά μπορούμε να προσεγγίσουμε οποιοδήποτε φάσμα ισχύος με φάσμα τύπου AR ή MA χρησιμοποιώντας ικανοποιητικά μεγάλη τάξη (γενίκευση των θεωρημάτων του Kolmogorov και Wolds αντίστοιχα).
- Η εκτίμηση του φάσματος ισχύος με μοντέλα τύπου AR προτιμάται όταν το φάσμα ισχύος παρουσιάζει κορυφές για αυτό και χρησιμοποιούνται συχνά στις εφαρμογές.
- Τα μοντέλα τύπου MA χρησιμοποιούνται λιγότερο. Είναι πιο κατάλληλα όταν το φάσμα ισχύος που θέλουμε να εκτιμήσουμε παρουσιάζει «κοιλάδες».
- Η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου AR γίνεται με κάποιες από τις γνωστές μεθόδους, όπως Yule-Walker, Burg, αυτοδιασποράς (covariance) και τροποποιημένης αυτοδιασποράς (modified covariance).
- Οι παραμετρικές μέθοδοι δίνουν πιο ομαλά και ακριβή φάσματα ισχύος από τις κλασικές μεθόδους αλλά υποθέτουν κάποιο συγκεκριμένο μοντέλο για τη χρονοσειρά που μπορεί να μην είναι κατάλληλο.

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η εκτιμήτρια $P_{\mathrm{Per}}(f)$ του $\mathcal{P}_x(f)$ είναι αμερόληπτη όταν η χρονοσειρά είναι από λευκό θόρυβο και ασυμπτωτικά αμερόληπτη όταν η χρονοσειρά είναι από μια διαδικασία MA(1).
2. Έστω η παρακάτω εκτίμηση του περιοδογράμματος

$$P(f) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} \hat{\gamma}_x(k) \mathrm{e}^{-i2\pi fk}, \qquad M \le N,$$

όπου N το μήκος της χρονοσειράς [Το $P(f)$ είναι το περιοδόγραμμα Blackman-Tukey, που σταθμίζει την αυτοδιασπορά στην εκτίμηση του περιοδογράμματος (δες (108)) με κάποιο παράθυρο $w(k)$. Εδώ το παράθυρο είναι ορθογώνιο, δηλαδή $w(k)=1$ για $|k|<M$ και $w(k)=0$ για $M \le |k| \le N$, όπου το M ορίζει το παράθυρο υστέρησης]. Δείξτε ότι:

   a. Αν το παράθυρο υστέρησης έχει μήκος $M < N$, τότε το $P(f)$ είναι το ίδιο με το φάσμα ισχύος $P_{\mathrm{MA}}(f)$ ενός μοντέλου MA(*M-1*).
   b. Το $P(f)$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη εκτιμήτρια του φάσματος ισχύος διαδικασίας MA(2).

3. Βρείτε το φάσμα ισχύος μιας MA(2) διαδικασίας με $\sigma_z^2 = 1$ και παραμέτρους:
   a. $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = -0.40.$
   b. $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = -0.80.$
   c. Συγκρίνετε αυτά τα δύο φάσματα ισχύος (στο a. και b.) με τα φάσματα ισχύος μιας διαδικασίας AR(2) με $\phi_1 = 0,\ \phi_2 = 0.40,$ και $\phi_1 = 0,\ \phi_2 = 0.80,$ αντίστοιχα.
4. Για το φάσμα ισχύος ενός AR(2) μοντέλου με μιγαδικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, ορίστε τη συχνότητα f_0 που αντιστοιχεί στην κορυφή του $P_{\mathrm{AR}}(f)$ ως προς τις παραμέτρους ϕ_1 και ϕ_2. Στη συνέχεια υπολογίστε τη συχνότητα f_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:
   a. $\phi_1 = 0,\ \phi_2 = -0.40.$
   b. $\phi_1 = 0.9,\ \phi_2 = -0.80.$
   c. Υπολογίστε επίσης την f_0 με την ίδια διαδικασία για $\phi_1 = 0.2,\ \phi_2 = 0.2$ και σχολιάστε για τη μορφή του φάσματος ισχύος σε αυτήν την περίπτωση.
   d. Για κάθε μια από τις 3 παραπάνω περιπτώσεις υπολογίστε την κορυφή ή τις κορυφές του φάσματος ισχύος $P_{\mathrm{AR}}(f)$ και σχηματίστε το διάγραμμα του.
5. Στη χρονοσειρά των ηλιακών κηλίδων προσαρμόσαμε μοντέλο AR(2) και εκτιμήσαμε τις παραμέτρους του ως $\phi_1 = 1.318,\ \phi_2 = -0.634,$ και $\sigma_z^2 = 289.2$.
   a. Υπολογίστε το φάσμα ισχύος $P_{\mathrm{AR}}(f)$ του AR(2) μοντέλου και σχηματίστε το αντίστοιχο διάγραμμα του φάσματος ισχύος.
   b. Βρείτε τη συχνότητα και περίοδο που αντιστοιχεί στην κορυφή του $P_{\mathrm{AR}}(f)$.
6. Έστω η AR(3) διαδικασία $x_t - 0.99x_{t-3} = z_t$, όπου z_t είναι Gaussian λευκός θόρυβος με διασπορά 1.

c. Βρείτε το φάσμα ισχύος αυτής της διαδικασίας και σχηματίστε το κατάλληλο διάγραμμα για το φάσμα ισχύος.

d. Συνιστά το φάσμα ισχύος ότι η χρονοσειρά αποτελείται από ταλαντώσεις; Αν ναι με ποια περίοδο;

7. Προσαρμόστηκαν τα μοντέλα AR(1) και AR(2) σε μια χρονοσειρά και εκτιμήθηκαν οι παράμετροι τους: $\hat{\phi} = 0.7$ για το AR(1) και $\hat{\phi}_1 = -1.4$, $\hat{\phi}_2 = -0.8$ για το AR(2) (θεωρείστε $\sigma_z^2 = 1$).

   Δώστε τη μορφή της εκτίμησης του φάσματος ισχύος της χρονοσειράς από το AR(2) μοντέλο και σχεδιάστε το φάσμα ισχύος.

8. Δίνονται οι παρατηρήσεις

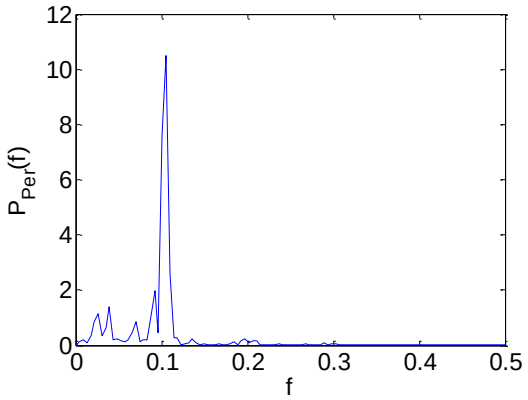
   7 -2 -5 7 -9 6 -3 -2

   Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις προέρχονται από μια AR διαδικασία με μέση τιμή 0 και ο λευκός θόρυβος a_i έχει κανονική κατανομή. Υπολογίστε και σχεδιάστε την εκτίμηση φάσμα ισχύος με μοντέλο AR(2).

9. Για μια χρονοσειρά 110 παρατηρήσεων εκτιμήθηκε το παρακάτω AR(2) μοντέλο

   $x_t = 1.0 + 1.4x_{t-1} - 0.8x_{t-2} + z_t$, $z_t \sim \mathrm{N}(0, 0.5)$.

   Επίσης η εκτίμηση του φάσματος ισχύος του συστήματος με το περιοδόγραμμα υπολογίστηκε και δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



   a. Εκτιμείστε το φάσμα ισχύος παραμετρικά χρησιμοποιώντας το AR(2) μοντέλο.

   b. Συγκρίνετε την εκτίμηση σας με το περιοδόγραμμα και σχολιάστε αν συμφωνούν οι δύο εκτιμήσεις.

10. Υποθέτουμε πως οι παρατηρήσεις μιας χρονοσειράς $x_t \,{}_{t=1}^{100}$ δίνονται από το σύστημα

$$X_t = 0.8X_{t-4} + z_t$$

   όπου z_t είναι iid N(0,1). Σχηματίστε την εκτίμηση του φάσματος ισχύος χρησιμοποιώντας το AR(4) μοντέλο. Συγκεκριμένα, για να το σχηματίσετε θα πρέπει υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης αυτού του φάσματος ισχύος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΜΟΝΤΕΛΑ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ

Μέχρι τώρα μελετήσαμε γραμμικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών, όπως την αυτοσυσχέτιση $r_x(k)$ και ισοδύναμα το φάσμα ισχύος $P_x(f)$, και γραμμικά μοντέλα χρονοσειρών όπως τα μοντέλα τύπου ARMA. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που μπορεί να μιμηθεί ένα γραμμικό μοντέλο περιορίζονται στη μέση τιμή, στη διασπορά και στην αυτοσυσχέτιση. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι αρκετά για να ορίσουν πλήρως μια κανονική διαδικασία, αλλά δεν αποτελούν ικανοποιητική περιγραφή μιας μη-κανονικής διαδικασίας από την οποία μπορεί να προκύπτει η χρονοσειρά. Για την πλήρη ανάλυση της χρονοσειράς θα πρέπει να διερευνήσουμε την κοινή συνάρτηση κατανομής της υποκείμενης διαδικασίας. Η μη-γραμμική ανάλυση κινείται σε αυτήν την κατεύθυνση και περιλαμβάνει τη μελέτη μη-γραμμικών χαρακτηριστικών και μοντέλων.

Για την κατανόηση της χρησιμότητας της μη-γραμμικής ανάλυσης είναι χρήσιμο να δούμε κάποια πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της γραμμικής ανάλυσης.

Πλεονεκτήματα

1. Τα γραμμικά μοντέλα έχουν απλή μορφή και είναι υπολογιστικά εύκολα και κατανοητά.
2. Η γραμμική ανάλυση βασίζεται στην πιθανοκρατική θεωρία κανονικών διαδικασιών που είναι πλήρως κατανοητή και η στατιστική συμπερασματολογία για κανονικά γραμμικά μοντέλα έχει αναπτυχθεί πλήρως (π.χ. παραμετρικά διαστήματα εμπιστοσύνης πρόβλεψης).
3. Τα μοντέλα είναι ικανοποιητικά για πολλές εφαρμογές και γι αυτό έχουν «επιβιώσει» για πάνω από 70 χρόνια!

Μειονεκτήματα

1. Τα μοντέλα τύπου ARMA περιγράφουν κανονικές διαδικασίες και άρα δεν προσφέρονται για την περιγραφή χρονοσειρών με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά όπως: έντονη ασυμμετρία ως προς την κατανομή των δεδομένων, διαφορετική μορφή αν ο χρόνος αντιστραφεί (time irreversibility), «ξεσπάσματα» (outbursts), δηλαδή τάση προς πιο ακραίες τιμές, σε άτακτα χρονικά διαστήματα.
2. Το αιτιοκρατικό μέρος των ARMA μοντέλων (δηλαδή το μοντέλο που προκύπτει αφαιρώντας το στοχαστικό μέρος), δηλαδή $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \ldots + \phi_p X_{t-p}$ ή $\phi_p(B) X_t = 0$, μπορεί να δώσει περιορισμένες καταστάσεις του υπό μελέτη δυναμικού συστήματος (απαλλαγμένου από θόρυβο):

   α. *σταθερό οριακό σημείο* (stable limit point) αν οι ρίζες του $\phi_p(B)$ είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες της μονάδας,

   β. *ασταθές σύστημα* (unstable system) αν τουλάχιστον μία ρίζα του $\phi_p(B)$ είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερη της μονάδας,

γ. ταλάντωση μεταξύ σημείων που εξαρτώνται από τις αρχικές τιμές αν μια τουλάχιστον ρίζα έχει απόλυτη τιμή τη μονάδα και οι άλλες είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερες της μονάδας.

Τα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα μπορούν να δημιουργούν ποικίλες καταστάσεις χωρίς την επίδραση του θορύβου, τις οποίες τα γραμμικά μοντέλα αδυνατούν να περιγράψουν. Αντίστροφα, αυτό σημαίνει ότι μπορεί τα δεδομένα να κρύβουν μεγαλύτερη δομή από αυτήν που μπορεί να ανακαλύψει ένα γραμμικό σύστημα.

Θα μελετήσουμε δύο κατευθύνσεις της μη-γραμμικής ανάλυσης. Η πρώτη είναι καθαρά στατιστική, βασίζεται στο πρώτο μειονέκτημα των γραμμικών μοντέλων και αφορά την επέκταση των γνωστών ARMA μοντέλων με σκοπό την περιγραφή μη-κανονικών μορφών χρονοσειρών καθώς και κάποιων μορφών μη-στάσιμων χρονοσειρών. Η δεύτερη κατεύθυνση σχετίζεται κυρίως με το δεύτερο μειονέκτημα και αφορά τη διερεύνηση και εκτίμηση χαρακτηριστικών που αναδεικνύουν σύνθετες (μη-γραμμικές) δομές και δίνουν περισσότερη πληροφορία για το υπό μελέτη σύστημα. Για το σκοπό αυτό επιστρατεύονται μέθοδοι που πηγάζουν από τη θεωρία των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χάους.

7.1 Επεκτάσεις των γραμμικών αυτοπαλινδρομούμενων μοντέλων

Για μια χρονοσειρά $\{X_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$, η γενική μορφή ενός μοντέλου αυτοπαλινδρόμησης είναι

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}, \varepsilon_t), \tag{116}$$

όπου $\{\varepsilon_t\}$ είναι λευκός θόρυβος. Γενικά δε συμπεριλαμβάνεται σε αυτήν την ανάλυση το μέρος του κινούμενου μέσου (MA) αλλά εύκολα μπορεί να προστεθεί στον ορισμό του κάθε μοντέλου που παρουσιάζεται σε αυτήν την παράγραφο. Συνήθως θεωρούμε το θόρυβο *προσθετικό* (additive) και το μοντέλο τότε γίνεται

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}) + \varepsilon_t. \tag{117}$$

Σε αυτήν την περίπτωση το αιτιοκρατικό μέρος, που ονομάζεται και *σκελετός* του στοχαστικού συστήματος ορίζεται από μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, όπου

$$\boldsymbol{X}_{t-1} = \left[X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}\right] \in \mathbb{R}^p.$$

Ας υποθέσουμε και πάλι για ευκολία ότι η μέση τιμή της χρονοσειράς είναι 0. Το μοντέλο AR(*p*) αντιστοιχεί στην πιο απλή μορφή της συνάρτησης *f*,

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Πολλές κλάσεις μη-γραμμικών αυτοπαλινδρομούμενων μοντέλων προκύπτουν από αυτό το απλό γραμμικό μοντέλο θεωρώντας ότι οι παράμετροι $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ δεν είναι σταθερές αλλά είτε μεταβάλλονται σε ένα συγκεκριμένο σύνολο τιμών ή είναι τυχαίες μεταβλητές.

7.1.1 Τμηματικά Μοντέλα

Τα τμηματικά μοντέλα ή μοντέλα «κατωφλιού» (threshold models) βασίζονται στην αρχή ότι για κάθε χρονική στιγμή *t* η συνάρτηση *f* έχει μια έκφραση από ένα σύνολο δυνατών εκφράσεων για την *f*, που καθορίζεται από την περιοχή του $\mathbb{R}^p$ όπου βρίσκεται το $\boldsymbol{X}_{t-1}$, ή επιλέγεται με πιθανοκρατικά κριτήρια.

Αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα με αυτό-διεγερμένο κατώφλι (self-exciting threshold autoregressive models, SETAR)

Θεωρούμε το AR μοντέλο με l διαφορετικά σύνολα τιμών για τις παραμέτρους του $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_p$, που αντιστοιχούν σε l περιοχές του $\mathbb{R}^p$, δηλαδή το X_t δίνεται από το AR μοντέλο με παραμέτρους $\phi_1^{(j)},\phi_2^{(j)},\ldots,\phi_p^{(j)}$, όταν το $\boldsymbol{X}_{t-1}$ ανήκει στην περιοχή R_j για $j=1,\ldots,l$. Οι l περιοχές αποτελούν διαμερισμό του $\mathbb{R}^p$. Για τον καθορισμό των περιοχών επιλέγεται μια συνιστώσα X_{t-d} για κάποια υστέρηση d και ο διαμερισμός του $\mathbb{R}^p$ προκύπτει από το διαχωρισμό του συνόλου $\mathbb{R}$ των τιμών του X_{t-d}. Για ένα σύνολο τιμών τεμαχισμού του $\mathbb{R}$, $\{r_0,r_1,\ldots,r_{l-1},r_l\}$, $-\infty=r_0<r_1<\cdots<r_l=+\infty$, ο διαμερισμός του $\mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_l$, όπου $R_i=(r_{i-1},r_i]$, $i=1,\ldots,l$. Το SETAR μοντέλο είναι

$$X_t=\phi_1^{(j)}X_{t-1}+\phi_2^{(j)}X_{t-2}+\ldots\phi_p^{(j)}X_{t-p}+\theta^{(j)}\varepsilon_t,\quad \text{όταν}\quad X_{t-d}\in R_j. \qquad (118)$$

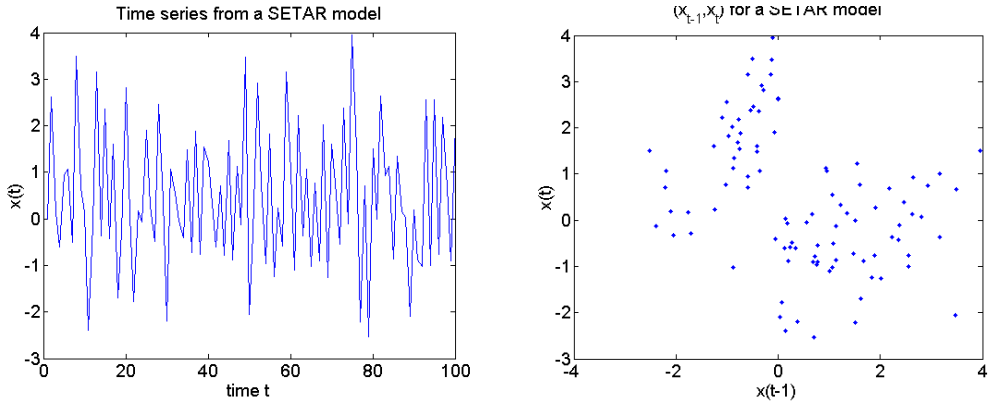
Στη γενίκευση της (118) επιτρέψαμε να αλλάζει με το κατώφλι και ο συντελεστής του λευκού θορύβου ε_t (δηλαδή η διασπορά του ε_t).

Παράδειγμα

Μια πραγματοποίηση του SETAR μοντέλου για $p=1$ και $l=2$ είναι

$$X_t=\begin{cases}2.0+0.6X_{t-1}+\varepsilon_t & \text{αν } X_{t-1}\le 0\\ -1.0+0.4X_{t-1}+\varepsilon_t & \text{αν } X_{t-1}>0\end{cases}\qquad \varepsilon_t\sim \mathrm{N}(0,1)$$

και δίνεται στο παρακάτω σχήμα (αριστερά). Το διάγραμμα διασποράς (X_{t-1},X_t) στο διπλανό σχήμα δείχνει την κατανομή των σημείων στις δύο περιοχές του διαμερισμού.



AR μοντέλα με πιθανοκρατική επιλογή του κατωφλιού

Γι αυτού του είδους τα μοντέλα η επιλογή του κατωφλιού, δηλαδή του συγκεκριμένου συνόλου τιμών των παραμέτρων $\phi_1^{(j)},\phi_2^{(j)},\ldots,\phi_p^{(j)}$ για $j=1,\ldots,l$, δεν εξαρτάται από το $\boldsymbol{X}_{t-1}$ αλλά δίνεται με κάποια πιθανότητα π_j, όπου $\pi_1+\pi_2+\cdots\pi_l=1$.

Εκθετικά AR μοντέλα (exponential autoregressive models, EAR)

Για να καταλάβουμε τη δομή των EAR μοντέλων ας θεωρήσουμε το παρακάτω EAR μοντέλο για $p=2$

$$X_t = \phi_1^{(j)} X_{t-1} + \phi_2^{(j)} X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad j = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \pi \\ 2 & \text{με πιθανότητα } 1-\pi \end{cases}.$$

Η δομή του μοντέλου μπορεί να αλλάζει με κάποια πιθανότητα. Αν για παράδειγμα είναι $\phi_1^{(1)} = \alpha_1$, $\phi_2^{(1)} = 0$, $\phi_1^{(2)} = 0$, $\phi_2^{(2)} = \alpha_2$, το X_t ορίζεται από το X_{t-1} με πιθανότητα π ή από το X_{t-2} με πιθανότητα $1-\pi$. Με αυτόν τον τρόπο το EAR μπορεί να γενικευτεί για $p > 2$.

AR μοντέλα με περιοδικούς συντελεστές (AR models with periodic coefficients)

Τέτοια μοντέλα μπορεί να είναι χρήσιμα όταν το σύστημα αλλάζει κατάσταση περιοδικά, όπως για παράδειγμα σε μετεωρολογικά φαινόμενα. Ένα απλό παράδειγμα είναι

$$X_t = \phi_1^{(j)} X_{t-1} + \phi_2^{(j)} X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad j = \begin{cases} 1 & \text{όταν } t = 2k \\ 2 & \text{όταν } t = 2k+1 \end{cases}$$

Οι πιθανότητες για τις δύο μορφές του μοντέλου είναι ίσες.

AR μοντέλα με Μαρκοβιανούς συντελεστές (Markov chain driven AR models)

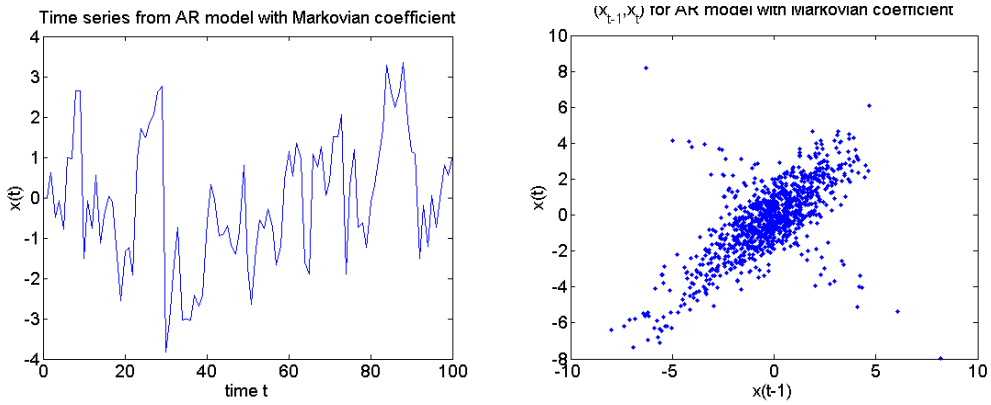
Η επιλογή του τμηματικού μοντέλου γίνεται σύμφωνα με έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης από το ένα κατώφλι στο άλλο. Αν J_t είναι το τμήμα (κατώφλι) τη χρονική στιγμή t, όπου $J_t = j \in \{1,2,\ldots,l\}$, τότε $\{J_t\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα στο $\{1,2,\ldots,l\}$. Το J_t δίνεται σύμφωνα με τον $l \times l$ πίνακα μετάβασης $P(J_t = j \mid J_{t-1} = i)$ για $i, j = 1,2,\ldots,l$, που ορίζει την πιθανότητα να είναι $J_t = j$ όταν $J_{t-1} = i$.

Παράδειγμα

Το μοντέλο

$$X_t = \phi^{(J_t)} X_{t-1} + \varepsilon_t$$

αποτελεί τροποποίηση του AR(1) μοντέλου, ώστε η παράμετρος ϕ να παίρνει τις τιμές $\phi^{(1)} = -0.9$ και $\phi^{(2)} = 0.9$ σύμφωνα με τον πίνακα μετάβασης $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ (J_{t-1} στη γραμμή και J_t στη στήλη). Παρακάτω δίνεται μια χρονοσειρά ($N = 100$) και το διάγραμμα διασποράς ($N = 1000$) από αυτό το μοντέλο.



Τμηματικά πολυωνυμικά μοντέλα (piecewise polynomial models)

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο τάξης p (των $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-p}$) και βαθμού $m > 1$ (για $m = 1$ έχουμε το AR(1)). Για να είναι χρήσιμο ένα τέτοιο

μοντέλο θα πρέπει να είναι ευσταθές. Για την ευστάθεια του AR μοντέλου εξετάσαμε αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, που σχηματίζεται από τον σκελετό του μοντέλου, είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Για τα πολυωνυμικά μοντέλα η ανάλυση ευστάθειας είναι πιο πολύπλοκη.

Παράδειγμα (λογιστική απεικόνιση)

Θεωρούμε το πολυώνυμο πρώτης τάξης και δευτέρου βαθμού (σκελετός του πολυωνυμικού μοντέλου παλινδρόμησης)

$$X_t = aX_{t-1}(1-X_{t-1}), \quad a \neq 1 \text{ και } X_t \in [0,1].$$

Το σύστημα που δίνεται από αυτήν την εξίσωση έχει δύο σημεία ισορροπίας, 0 και $(a-1)/a$ [Γιατί;]. Μπορούμε και γραφικά να διαπιστώσουμε ότι το 0 είναι πάντα ασταθές σημείο ισορροπίας. Αν στον σκελετό της εξίσωσης προσθέσουμε θόρυβο το σύστημα γίνεται ασταθές αν εμφανιστούν αρνητικές τιμές του X_t. Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να τροποποιήσουμε το σύστημα, εισάγοντας κατώφλι στην τιμή 0, ώστε να αποτρέψουμε αρνητικές τιμές του X_t.

Μπορούμε να ορίσουμε τμηματικά πολυωνυμικά μοντέλα χρησιμοποιώντας την αρχή του κατωφλίου με τον ίδιο τρόπο που ορίσαμε τα τμηματικά γραμμικά AR μοντέλα.

Κλασματικά αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα (fractional autoregressive models, FAR)

Τα κλασματικά μοντέλα σχηματίζονται από το λόγο δύο πολυωνυμικών μοντέλων. Όταν τα πολυώνυμα είναι πρώτου βαθμού έχουμε το FAR μοντέλο βαθμού ένα

$$X_t = \frac{a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-1}^{j}}{b_0 + \sum_{j=1}^{q} b_j X_{t-1}^{j}} + \varepsilon_t,$$

όπου $0 \le p \le q+1,\ a_p \neq 0,\ b_q \neq 0$.

7.1.2 AR μοντέλα με τυχαίους συντελεστές

Εδώ θα θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ μεταβάλλονται με το χρόνο *t* αλλά με τυχαίο τρόπο και ανεξάρτητα από τις τιμές των X_t.

Ένας τρόπος να σχηματίσουμε αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο με τυχαίους συντελεστές είναι να θεωρήσουμε το θόρυβο πολλαπλασιαστικό αντί για αθροιστικό. Ένα απλό παράδειγμα είναι το AR(1) μοντέλο με πολλαπλασιαστικό λευκό θόρυβο

$$X_t = \varepsilon_t X_{t-1}.$$

Γενικά τα *αυτοπαλινδρομούμενα μοντέλα με τυχαίους συντελεστές* (random coefficient autoregressive models, RCA) έχουν τη μορφή

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \left(b_i + B_i(t)\right) X_{t-i} + \varepsilon_t, \tag{119}$$

όπου $\phi_i = b_i + B_i(t)$ και

- τα b_i για κάθε $i = 1,2,\ldots,p$ είναι σταθερά,

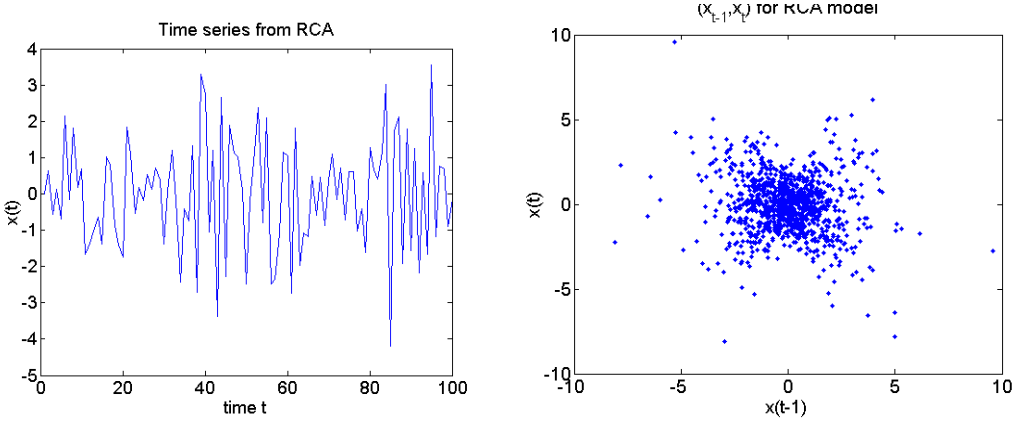
- τα $B_1(t), B_2(t), \ldots, B_p(t)$ είναι ανεξάρτητα του ε_t και του X_t, έχουν μέση τιμή 0 και συνδιασπορά $\boldsymbol{C}$.

Παράδειγμα

Δίνεται το RCA μοντέλο τάξης 1

$$X_t = \left(-0.1 + B_1(t)\right) X_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

όπου $B_1(t) \sim \mathrm{N}(0, 0.9^2)$ και $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$. Μια χρονοσειρά από αυτό το μοντέλο με το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς δίνεται παρακάτω.



7.1.3 Διγραμμικά μοντέλα

Τα *διγραμμικά μοντέλα* (bilinear models, BL) είναι μια κλάση μοντέλων που βρίσκονται μεταξύ των ARMA μοντέλων (με σταθερές παραμέτρους) και των μοντέλων με τυχαίες παραμέτρους. Δίνονται ως

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \left(a_i + A_i(t)\right) X_{t-i} + \varepsilon_t , \qquad A_i(t) = \sum_{k=1}^{s} b_{ik} \varepsilon_{t-k} \ . \tag{120}$$

Η διαφορά των BL μοντέλων από τα RCA μοντέλα είναι ότι οι συντελεστές $\phi_i = a_i + A_i(t)$ δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητοι του X_t. Το επίθετο «διγραμμικά» που τους προσδίδεται οφείλεται στο ότι:

(i) το X_t είναι γραμμικό ως προς τα X_s, $s < t$, για σταθερά ε_s, $s \le t$

(ii) το X_t είναι γραμμικό ως προς τα ε_s, $s \le t$, για σταθερά X_s, $s < t$.

Οι χρονοσειρές από BL μοντέλα μοιάζουν με αυτές από τα RCA μοντέλα.

Η επέκταση του AR(1) μοντέλου σε BL μοντέλο πρώτου βαθμού είναι

$$X_t = \varphi\, X_{t-1} + b\varepsilon_{t-1} X_{t-1} + \varepsilon_t .$$

7.1.4 AR μοντέλα με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα

Τα AR μοντέλα είναι ομοσκεδαστικά, δηλαδή το X_t έχει σταθερή διασπορά, αφού ο λευκός θόρυβος ε_t έχει σταθερή διασπορά. Σε κάποιες εφαρμογές, κυρίως στην οικονομία, αυτός ο περιορισμός δεν είναι επιθυμητός. Μια πρώτη προσέγγιση προς τη μεταβλητότητα της διασποράς του X_t γίνεται με τα μοντέλα SETAR, όπου ο όρος ε_t αντικαθίσταται με τον όρο $\theta^{(j)}\varepsilon_t$ και η διασπορά του ε_t (και κατ' επέκταση του X_t) μεταβάλλεται κατά ποσό που ορίζεται από τις l διαφορετικές τιμές του συντελεστή $\theta^{(j)}$, μια για κάθε κατώφλι.

Μια άλλη προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε το παρακάτω μοντέλο πολλαπλασιαστικού θορύβου

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{V_t}\,, \quad V_t = \gamma + \phi_1 X_{t-1}^2 + \cdots + \phi_p X_{t-p}^2\,, \tag{121}$$

όπου $\gamma > 0$, $\phi_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,p$. Υποθέτουμε πως ο λευκός θόρυβος ε_t ακολουθεί κανονική κατανομή. Αυτό είναι το *παλινδρομούμενο μοντέλο με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα* (autoregressive model with conditional heteroscedasticity, ARCH). Αν η χρονοσειρά $\{X_t\}$ ακολουθεί το μοντέλο ARCH, η $\{X_t^2\}$ ακολουθεί το BL μοντέλο. [Γιατί;]

Αν απαλείψουμε τη συνθήκη της κανονικότητας του λευκού θορύβου και τροποποιήσουμε τον ορισμό του V_t σε

$$V_t = \gamma + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \psi_i V_{t-i}\,, \qquad \psi_i \geq 0\,,$$

τότε το μοντέλο αυτό είναι το *γενικευμένο ARCH* (generalized ARCH, GARCH).

Ακόμα πιο σύνθετα μοντέλα σχηματίζονται από το συνδυασμό των μοντέλων που παρουσιάστηκαν σε αυτήν την παράγραφο. Γενικά μπορεί κάποιος να προχωρήσει σε τροποποιήσεις του γραμμικού AR μοντέλου, αλλά θα πρέπει να υπάρχουν κάποια χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που συνηγορούν γι αυτήν την επιλογή.

7.1.5 Διαδικασία ανάλυσης με στατιστικά μη-γραμμικά μοντέλα

Η διαδικασία της ανάλυσης με στατιστικά μη-γραμμικά μοντέλα είναι ίδια όπως και με τα γραμμικά μοντέλα και συνίσταται στην επιλογή του μοντέλου, στην εκτίμηση των παραμέτρων του και στο διαγνωστικό έλεγχο της καταλληλότητας του μοντέλου.

Για την επιλογή του κατάλληλου μοντέλου θα πρέπει να μελετήσουμε κατάλληλα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά. Σε αυτά θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο. Αν πρέπει να διαλέξουμε μεταξύ M υποψηφίων μοντέλων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποιο κριτήριο καταλληλότητας, όπως το κριτήριο πληροφορίας του Akaike (Akaike information criterion, AIC), με τον ίδιο τρόπο που το χρησιμοποιήσαμε για τα μοντέλα τύπου ARMA. Έστω $\boldsymbol{x}$ το διάνυσμα των παρατηρήσεων της χρονοσειράς που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των παραμέτρων $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ του μοντέλου m, από μια σειρά M υποψήφιων μοντέλων ($m = 1,2,\ldots,M$). Τότε αν $g\left(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_m(\boldsymbol{x})\right)$ είναι η συνάρτηση μεγίστης πιθανοφάνειας για το μοντέλο m και r είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων ορισμένων παραμέτρων του μοντέλου, τότε το AIC ορίζεται ως

$$\mathrm{AIC}(m) = -2\ln g\left(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}}_m(\boldsymbol{x})\right) + 2r\,. \tag{122}$$

Η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου γίνεται με τις γνωστές μεθόδους, δηλαδή τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας και τη μέθοδο των (δεσμευμένων) ελαχίστων τετραγώνων. Και οι δύο μέθοδοι έχουν δυσκολίες στην εφαρμογή τους που ποικίλουν με τη μορφή του μοντέλου. Για παράδειγμα τα μοντέλα SETAR παρουσιάζουν ασυνέχειες λόγω των παραμέτρων κατωφλίου και οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων του μοντέλου αποκλίνουν σημαντικά από την κανονική κατανομή.

Ο διαγνωστικός έλεγχος αφορά, όπως και για τα γραμμικά μοντέλα, την εξέταση των υπολοίπων από την προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα. Τα χαρακτηριστικά των υπολοίπων που ελέγχονται είναι:

- *οι συσχετίσεις*: Τα υπόλοιπα θα πρέπει να είναι ασυσχέτιστα για να θεωρείται το μη-γραμμικό μοντέλο ικανοποιητικό. Αυτό ελέγχεται με τους γνωστούς ελέγχους ανεξαρτησίας, όπως για παράδειγμα εξετάζοντας αν η αυτοσυσχέτιση των υπολοίπων είναι μέσα στα όρια του λευκού θορύβου.
- *η κανονικότητα*: Έχοντας διαλέξει κάποιο μη-γραμμικό μοντέλο είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι ο θόρυβος ε_t έχει κανονική κατανομή. Άρα αν το μη-γραμμικό μοντέλο είναι σωστό θα πρέπει τα υπόλοιπα να έχουν κανονική κατανομή. Αυτό ελέγχεται ποιοτικά με το ιστόγραμμα των υπολοίπων ή το γράφημα κανονικής πιθανότητας (Q-Q γράφημα). Μπορεί επίσης να γίνει στατιστικός έλεγχος υπόθεσης (π.χ. X^2 έλεγχος καλής προσαρμογής, έλεγχος με στατιστικές το δείκτη λοξότητας και το δείκτη κυρτότητας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

8.1 Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών και δυναμικά συστήματα

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναλύσουμε τη χρονοσειρά κάτω από την υπόθεση ότι αυτή παράγεται από ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα που ενδεχομένως περιέχει και θόρυβο. Υποθέτουμε λοιπόν πως το αιτιοκρατικό μέρος της στοχαστικής διαδικασίας (ο σκελετός) είναι αυτό που κατά κύριο λόγο διαμορφώνει τη χρονοσειρά. Γι αυτό θέλουμε να μελετήσουμε χαρακτηριστικά του αιτιοκρατικού δυναμικού συστήματος, να το περιγράψουμε με κατάλληλο μοντέλο και να πετύχουμε έτσι καλύτερες προβλέψεις.

Η μεθοδολογία που θα μελετήσουμε αφορά τα παρακάτω θέματα:

- Ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων.
- Εκτίμηση χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος (διάσταση ελκυστή, εκθέτες Lyapunov).
- Μη-γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης.

8.1.1 Δυναμικά συστήματα και χρονοσειρές

Σύντομη περιγραφή δυναμικών συστημάτων

Θεωρούμε πως το υπό μελέτη σύστημα που παρατηρούμε μέσω μιας χρονοσειράς είναι αιτιοκρατικό κι όχι στοχαστικό, όπως κάναμε μέχρι τώρα. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι είναι ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα, διακριτό ή συνεχές, που ορίζεται από κάποιες εξισώσεις διαφορών ή διαφορικές εξισώσεις, αντίστοιχα. Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε πως ξεκινώντας από κάποια αρχική συνθήκη το σύστημα δίνεται (σε συνεχή ή διακριτό χρόνο) ως

$$\boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{f}^t(\boldsymbol{s}_0), \tag{123}$$

όπου

- $\boldsymbol{s}_t$: το διάνυσμα θέσης (κατάστασης) του συστήματος τη χρονική στιγμή t, $\boldsymbol{s}_t \in \mathbb{R}^d$, όπου d είναι η διάσταση του Ευκλείδειου χώρου καταστάσεων του συστήματος (γενικότερα ο χώρος μπορεί να είναι μια πολλαπλότητα).
- $\boldsymbol{s}_0$: το διάνυσμα θέσης για χρόνο 0 (αρχική συνθήκη).
- $\boldsymbol{f}^t : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, η συνάρτηση του συστήματος που απεικονίζει το $\boldsymbol{s}_0$ στο $\boldsymbol{s}_t$.
- t : συνεχής ή διακριτός χρόνος.

Τα δυναμικά συστήματα που αφορούν την ανάλυση χρονοσειρών είναι *συστήματα απώλειας ενέργειας* (dissipative systems), δηλαδή αν εφαρμόσουμε ένα τέτοιο σύστημα σε κάποιο όγκο αυτός συνεχώς θα μικραίνει. Κάθε τροχιά ενός συστήματος απώλειας ενέργειας περιορίζεται στο χώρο $\mathbb{R}^d$ και έλκεται από κάποιο αναλλοίωτο

σύνολο σημείων που λέγεται ***ελκυστής*** (attractor). Η τροχιά του συστήματος καταλήγει ασυμπτωτικά σε αυτόν τον ελκυστή. [Το παραπάνω δεν είναι ακριβές για κάθε σύστημα, καθώς μπορεί να μην ισχύει για κάθε αρχική συνθήκη, αλλά μόνο γι αυτές που ανήκουν στη λεγόμενη *βάση έλκυσης* (basis of attraction). Αυτό όμως δεν θα μας απασχολήσει αφού θεωρούμε ότι η χρονοσειρά είναι η (μονοδιάστατη) παρατήρηση μιας τροχιάς που ανήκει στον ελκυστή.]

Ο ελκυστής μπορεί να είναι:

- ένα *ευσταθές σημείο ισορροπίας* του συστήματος (stable equilibrium point),
- ένα πεπερασμένο σύνολο τέτοιων σημείων (για περιοδικές τροχιές διακριτών συστημάτων),
- ένας *οριακός κύκλος* (limit cycle, για περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων),
- ένας *τόρος* (torus, για ψευδο-περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων)
- κάποιο άλλο μη-πεπερασμένο σύνολο σημείων που λέγεται ***παράξενος ελκυστής*** (strange attractor).

Οι παράξενοι ελκυστές παρουσιάζουν την ιδιότητα της ***αυτο-ομοιότητας*** (self-similarity) σε διαφορετικές κλίμακες του χώρου, είναι δηλαδή ***μορφοκλασματικά σύνολα*** (fractals). Τα μορφοκλασματικά σύνολα χαρακτηρίζονται από τη *μορφοκλασματική διάσταση* (fractal dimension), που είναι ένας μη-ακέραιος αριθμός και δηλώνει το βαθμό αυτό-ομοιότητας. Η μορφοκλασματική διάσταση είναι πάντα μικρότερη της τοπολογικής διάστασης της πολλαπλότητας (ή της Ευκλείδειας διάστασης αν η πολλαπλότητα είναι ο Ευκλείδειος χώρος) στην οποία βρίσκεται ο ελκυστής. Οι παράξενοι ελκυστές σχηματίζονται από τις τροχιές δυναμικών συστημάτων που παρουσιάζουν ***ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες*** (sensitivity to initial conditions) και λέγονται ***χαοτικά δυναμικά συστήματα*** (chaotic dynamical systems).

Τα χαοτικά δυναμικά συστήματα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί λόγω της ιδιότητας της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες, κοντινές τροχιές τους αποκλίνουν πολύ γρήγορα με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν στοχαστική συμπεριφορά. Αντίστροφα, πολλά πραγματικά συστήματα που φαίνονται τυχαία ίσως να έχουν αιτιοκρατική μη-γραμμική κι ενδεχομένως χαοτική δομή. Αυτό σημαίνει ότι χρησιμοποιώντας κατάλληλες μεθόδους που βασίζονται στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και του χάους έχουμε τη δυνατότητα να εξηγήσουμε και να προβλέψουμε τέτοια συστήματα (σε μικρό χρονικό ορίζοντα).

<u>Χρονοσειρές από δυναμικά συστήματα</u>

Μια χρονοσειρά $\{x_i\}$ για $i=1,\ldots,N$, μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από ένα δυναμικό σύστημα ως η προβολή x_t κάθε σημείου $\boldsymbol{s}_t$ της τροχιάς του συστήματος, δηλαδή

$$x_t = h(\boldsymbol{s}_t), \tag{124}$$

όπου η συνάρτηση προβολής $h:\mathbb{R}^{\mathrm{d}} \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται και *συνάρτηση παρατήρησης* (observation function). Για ροές, δηλαδή λύσεις διαφορικών εξισώσεων, όπου ο χρόνος είναι συνεχής, η παρατήρηση γίνεται με κάποιο *χρόνο δειγματοληψίας* (sampling time) τ_s και ο πραγματικός χρόνος που αντιστοιχεί σε μια παρατήρηση x_i είναι $i\tau_s$.

Το σύστημα μπορεί να περιέχει θόρυβο, ο οποίος διαχωρίζεται σε δύο τύπους:

1. *Θόρυβος παρατήρησης ή μέτρησης* (observational / measurement noise)

$$x_t = h(\boldsymbol{s}_t) + w_t, \tag{125}$$

όπου το w_t θεωρείται συνήθως λευκός και προσθετικός θόρυβος, ασυσχέτιστος με το x_t και το $\boldsymbol{s}_t$.

2. *Δυναμικός θόρυβος ή θόρυβος συστήματος* (dynamical / system noise)

$$\boldsymbol{s}_t = f^t(\boldsymbol{s}_0) + \varepsilon_t, \tag{126}$$

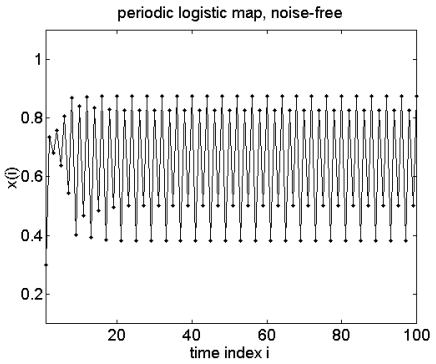
όπου το ε_t θεωρείται επίσης λευκός και συνήθως προσθετικός θόρυβος, ασυσχέτιστος με το $\boldsymbol{s}_u$ για κάθε $u \le t$.

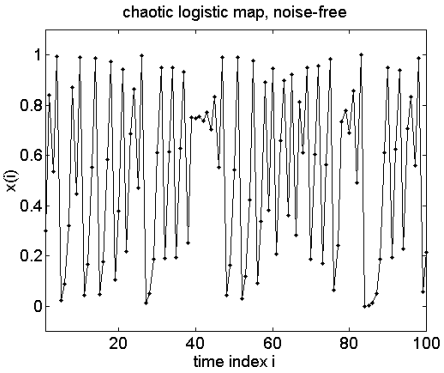
Μερικά γνωστά δυναμικά συστήματα

Λογιστική απεικόνιση:

$$s_{t+1} = a s_t (1 - s_t).$$

Για διαφορετικές τιμές του $a \in [2,4]$ η απεικόνιση γίνεται σταθερή, περιοδική (καλύπτει όλο το φάσμα των περιόδων) και απεριοδική, δηλαδή χαοτική. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζονται δύο χρονοσειρές της λογιστικής απεικόνισης, η μία (αριστερά) για $a = 3.52$ που δίνει περίοδο 4 και η άλλη (δεξιά) για $a = 4.0$ που δίνει χάος.

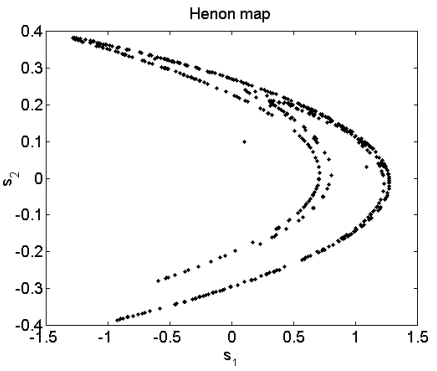


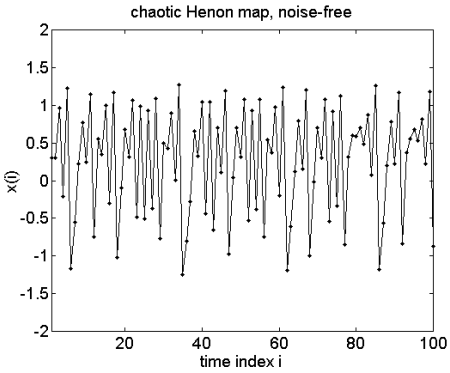


Απεικόνιση Henon:

$$s_{t+1} = 1 - a s_t^2 + b s_{t-1}.$$

Αυτό είναι ένα διακριτό σύστημα δύο μεταβλητών και είναι χαοτικό για $a = 1.4$ και $b = 0.3$. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται ο ελκυστής (αριστερά) και η χρονοσειρά (δεξιά) της απεικόνισης σε χαοτική κατάσταση.

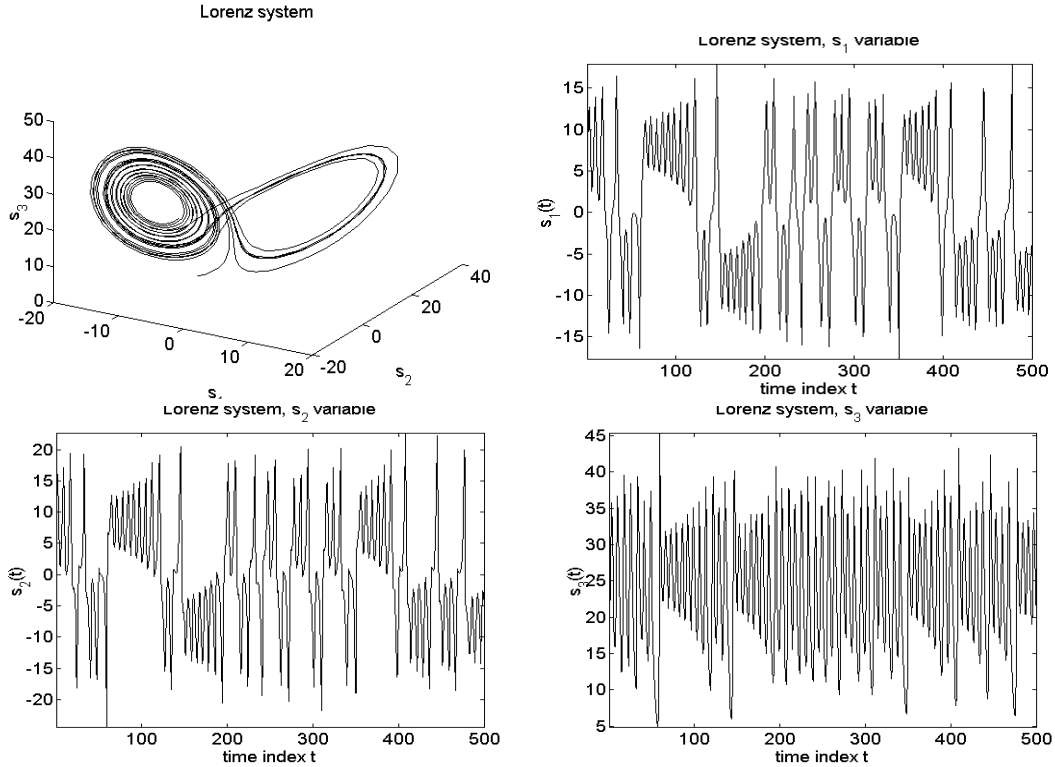




Σύστημα Lorenz

$$\dot{s}_1 = a(s_2 - s_1)$$
$$\dot{s}_2 = b s_1 - s_2 - s_1 s_3$$
$$\dot{s}_3 = -c s_3 + s_1 s_2$$

Αυτό είναι ένα συνεχές σύστημα τριών μεταβλητών και για τις τιμές των παραμέτρων $a=10,\ b=28,\ c=\frac{8}{3},$ το σύστημα είναι χαοτικό. Στα παρακάτω σχήματα δίνεται μια εικόνα του ελκυστή του συστήματος Lorenz και χρονοσειρές από τις τρεις μεταβλητές του συστήματος.



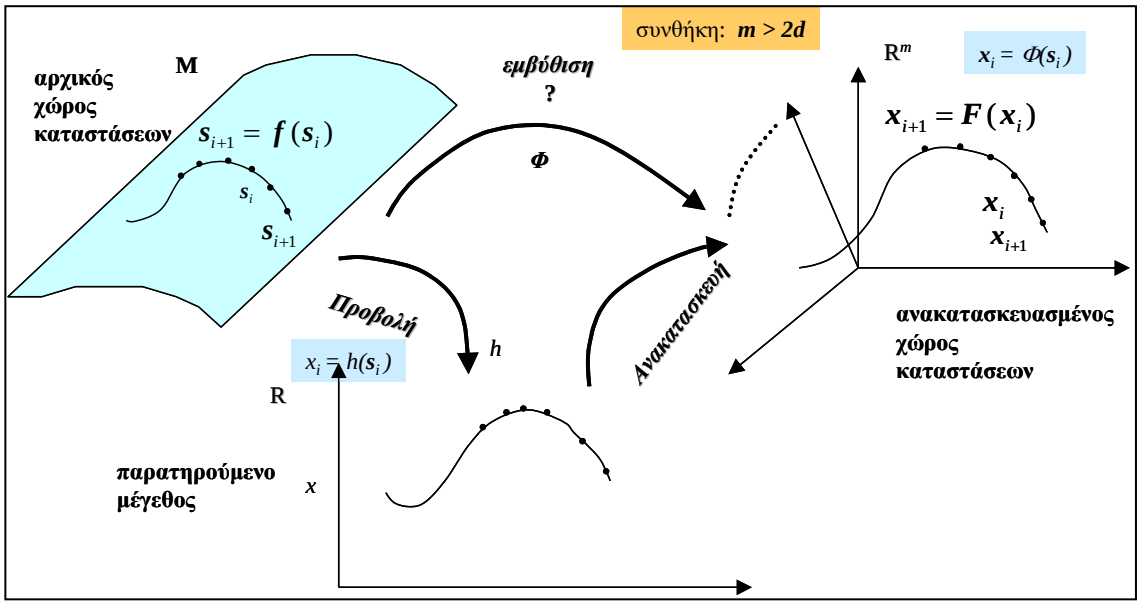
Σε μια πρώτη προσέγγιση θα θέλαμε ίσως να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση του συστήματος $\boldsymbol{f}^t$ (ή $\boldsymbol{f}$ για ένα χρονικό βήμα), τη διάσταση του χώρου καταστάσεων *d* στο οποίο βρίσκονται οι τροχιές που παράγει το σύστημα καθώς και τη συνάρτηση παρατήρησης *h*. Δεν είναι όμως δυνατόν από την παρατήρηση μιας μονοδιάστατης μεταβλητής x_t που αφορά το υπό μελέτη σύστημα να αντλήσουμε όλες αυτές τις πληροφορίες, δηλαδή να πετύχουμε αντιστροφή και από την προβολή στο $\mathbb{R}$ να γυρίσουμε στο χώρο των καταστάσεων $\mathbb{R}^d$. Μπορούμε όμως να φτιάξουμε ένα είδωλο του αρχικού ελκυστή όπως θα δούμε παρακάτω.

8.1.2 Ανακατασκευή χώρου καταστάσεων

Το θεώρημα του Takens επιτρέπει κάτω από κάποιες συνθήκες να κατασκευάσουμε ένα καινούριο χώρο καταστάσεων διάστασης *m* στον οποίο οι ανακατασκευασμένες τροχιές $\{\boldsymbol{x}_i\}\in\mathbb{R}^m$ από τη χρονοσειρά $\{x_i\}$, δηλαδή ο ανακατασκευασμένος ελκυστής, διατηρεί τις τοπολογικές ιδιότητες του αρχικού ελκυστή και το ανακατασκευασμένο δυναμικό σύστημα, $\boldsymbol{x}_{i+1}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i)$, έχει τα ίδια δυναμικά χαρακτηριστικά με το αρχικό σύστημα, $\boldsymbol{s}_{i+1}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}_i)$, δηλαδή επιτυγχάνεται ***εμβύθιση*** (embedding) $\boldsymbol{\Phi}$ του αρχικού συστήματος στο ανακατασκευασμένο σύστημα, $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{s}_i)$. Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα παρουσιάζεται το πρόβλημα της ανακατασκευής του χώρου καταστάσεων από τη χρονοσειρά.

Το θεώρημα του Takens δίνει τη συνθήκη $m\geq 2D+1$ για την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων, όπου *D* είναι η μορφοκλασματική διάσταση του ελκυστή. Αν η

διάσταση m του ανακατασκευασμένου χώρου καταστάσεων δεν είναι ικανοποιητικά μεγάλη, τότε ο ανακατασκευασμένος ελκυστής δεν «απλώνεται» πλήρως αλλά παρουσιάζει *αυτό-τομές* (intersections) κι άρα δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό ελκυστή. (Σημειώνεται ότι ένα δυναμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει δύο λύσεις για την ίδια αρχική συνθήκη κι άρα δε μπορούν δύο τροχιές του να τέμνονται).



Η συνθήκη βεβαιώνει ότι στον Ευκλείδειο χώρο διάστασης m όπου $m \geq 2D+1$ δε θα υπάρχουν αυτό-τομές του ελκυστή. Θα πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι το θεώρημα του Takens αναφέρεται σε χρονοσειρές με άπειρο μήκος και χωρίς θόρυβο. Στην πράξη αυτές οι συνθήκες φυσικά δε συναντώνται και γι αυτό τα αποτελέσματα της ανακατασκευής μπορούν να θεωρηθούν μόνο προσεγγιστικά.

Η ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων γίνεται απλά με τη δημιουργία σημείων $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m$ από τις μονοδιάστατες παρατηρήσεις $\{x_i\}$ για $i = 1,\ldots,N$. Η πιο απλή μέθοδος ανακατασκευής του χώρου καταστάσεων είναι η ***μέθοδος των υστερήσεων*** (method of delays) και τα σημεία $\boldsymbol{x}_i$ σχηματίζονται απλά ως

$$\boldsymbol{x}_i = \left[x_i, x_{i-\tau}, \ldots, x_{i-(m-1)\tau} \right]^t. \tag{127}$$

Οι παράμετροι της ανακατασκευής είναι:

1. Η ***διάσταση εμβύθισης*** (embedding dimension) m που ορίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων που γίνονται συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος.
2. Η ***υστέρηση*** (delay) τ που ορίζει με ποια χρονική διαφορά επιλέγονται οι m παρατηρήσεις για χρόνους μικρότερους της χρονικής στιγμής i (εννοώντας σε πραγματικό χρόνο τη χρονική στιγμή $i\tau_s$ αν $\tau_s \neq 1$).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πληροφορία που διοχετεύεται από τη χρονοσειρά στο κάθε ανακατασκευασμένο διάνυσμα $\boldsymbol{x}_i$ καλύπτει το χρονικό παράθυρο

$$\tau_w = (m-1)\tau. \tag{128}$$

Για να επιτευχθεί σωστή ανακατασκευή θα πρέπει το παράθυρο αυτό να μην είναι ούτε πολύ μικρό, αλλιώς δε θα έχει χρησιμοποιηθεί αρκετή πληροφορία, ούτε πολύ

μεγάλο, αλλιώς θα υπάρχει περιττή πληροφορία που θα περιπλέξει την ανακατασκευή.

Για την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους m και τ. Παρακάτω παρουσιάζονται κάποιες μέθοδοι εκτίμησης των m και τ.

Επιλογή του τ

Το πρόβλημα επιλογής κατάλληλου τ παρουσιάζεται όταν οι παρατηρήσεις έχουν γίνει με μικρό χρόνο δειγματοληψίας τ_s και διαδοχικές παρατηρήσεις δε διαφέρουν σημαντικά. Σε μια τέτοια περίπτωση αν χρησιμοποιήσουμε μικρό τ δημιουργείται *πλεονασμός πληροφορίας* (redundancy of information) και διαδοχικές συνιστώσες είναι περίπου ίδιες. Από την άλλη, αν διαλέξουμε μεγάλο τ η δυναμική του συστήματος, όπως αυτή προβάλλεται στη χρονοσειρά, αποκόπτεται (irrelevance). Δεν είναι ξεκάθαρο που βρίσκονται τα όρια μικρού και μεγάλου τ και κάποιος θα μπορούσε ακόμα και να αμφισβητήσει την εγκυρότητα των κριτηρίων του πλεονασμού και της αποκοπής της πληροφορίας για τη δυναμική του συστήματος. Παρ' όλα αυτά έχει επικρατήσει να θεωρείται ως καλύτερη επιλογή η μικρότερη τιμή του τ που καθιστά τις συνιστώσες του $\boldsymbol{x}_i$ ασυσχέτιστες:

1. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης, επιλέγεται ο χρόνος τ για τον οποίο μηδενίζεται η αυτοσυσχέτιση για πρώτη φορά, $r_x(\tau)=0$. Αν δε φθίνει γρήγορα προς το 0, επιλέγεται από τη σχέση $r_x(\tau)=1/\mathrm{e}$.
2. Η συνάρτηση ***αμοιβαίας πληροφορίας*** (mutual information) *I(X,Y)* μετράει την γραμμική και μη γραμμική συσχέτιση δύο μεταβλητών *X* και *Y* και δίνεται ως

$$I(X,Y)=\sum_{x,y} p_{XY}(x,y)\log\frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}, \tag{129}$$

όπου $p_X(x)$ είναι η πιθανότητα του $X=x$, $p_{XY}(x,y)$ είναι η κοινή πιθανότητα $X=x$ και $Y=y$ και το άθροισμα υπολογίζεται για όλες τις δυνατές τιμές των *X* και *Y* (για συνεχείς μεταβλητές *X* και *Y* εφαρμόζουμε κατάλληλο διαμερισμό των πεδίων τιμών τους). Για χρονοσειρές η αμοιβαία πληροφορία δίνεται ως $I(\tau)=I\left(x_i,x_{i-\tau}\right)$ και αφορά τις μεταβλητές x_i και $x_{i-\tau}$. Η συνάρτηση $I(\tau)$ παίρνει πάντα θετικές τιμές. Η υστέρηση τ που αντιστοιχεί στο πρώτο τοπικό ελάχιστο της $I(\tau)$ προτείνεται ως η καταλληλότερη τιμή του τ για την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων.

Σημειώνεται ότι για χρονοσειρές από απεικονίσεις, δηλαδή από διακριτά συστήματα, ή από συνεχή συστήματα που μετρήθηκαν με μεγάλο τ_s, συνήθως θέτουμε $\tau=1$. [Γιατί;]

Επιλογή του m

Το θεώρημα του Takens δίνει την ικανή συνθήκη $m\geq 2D+1$ για την αποφυγή αυτό-τομών στην ανακατασκευή του ελκυστή. Αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία και θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν μικρότερη διάσταση εμβύθισης *m*. Αν γνωρίζαμε την τοπολογική διάσταση *d* του Ευκλείδειου χώρου ή της πολλαπλότητας που τον καλύπτει, για τη ζητούμενη βέλτιστη διάσταση εμβύθισης m' θα ίσχυε

$$2D+1 \geq m' \geq d \ .$$

Επειδή όμως d και D είναι άγνωστα δεν υπάρχουν ενδείξεις για την επιλογή του m.

Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται συνήθως για την εύρεση του m' είναι η ***μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων*** (method of false nearest neighbors, FNN). Η μέθοδος βασίζεται στη σχέση ψευδών γειτόνων και αυτό-τομών και συνοψίζεται στα παρακάτω σημεία.

- Αν για κάποια διάσταση εμβύθισης m δύο σημεία του ανακατασκευασμένου ελκυστή $\boldsymbol{x}_i^m$ και $\boldsymbol{x}_j^m$ (ο εκθετικός δείκτης δηλώνει τη διάσταση) είναι πολύ κοντά, τότε είτε είναι πραγματικά γειτονικά σημεία και βρίσκονται κοντά λόγω της δυναμικής του συστήματος, ή είναι ψευδή γειτονικά σημεία και βρίσκονται κοντά λόγω αυτό-τομής του ελκυστή.
- Αυξάνουμε κατά 1 τη διάσταση εμβύθισης (στο διάνυσμα $\boldsymbol{x}_i^m$ προστίθεται η συνιστώσα $x_{i-m\tau}$ για να δώσει το $\boldsymbol{x}_i^{m+1}$) και εξετάζουμε την απόσταση των $\boldsymbol{x}_i^{m+1}$ και $\boldsymbol{x}_j^{m+1}$.
- Αν η απόσταση μεγάλωσε δραματικά (σύμφωνα με κάποιο όριο για το λόγο των αποστάσεων για m και $m+1$) τότε τα σημεία $\boldsymbol{x}_i^m$ και $\boldsymbol{x}_j^m$ είναι ψευδείς γείτονες στο χώρο $\mathbb{R}^m$ και άρα το m δεν είναι ικανοποιητικά μεγάλο.
- Για κάθε σημείο $\boldsymbol{x}_i^m$ βρίσκουμε τον κοντινότερο του σημείο $\boldsymbol{x}_j^m$ και ελέγχουμε αν είναι ψευδή γειτονικό σημείο.
- Αν βρούμε σημαντικό ποσοστό ψευδών γειτονικών σημείων αυξάνουμε το m κατά 1.
- Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι τη διάσταση m' για την οποία η πρόσθεση μιας καινούριας συνιστώσας δε δίνει ψευδή γειτονικά σημεία. Τυπικό κριτήριο τερματισμού για το ποσοστό των ψευδών γειτονικών σημείων είναι το 1%.

Για την εφαρμογή της μεθόδου FNN θα πρέπει να κάνουμε ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων για κάθε m, και άρα θα πρέπει να ορίσουμε πρώτα την παράμετρο υστέρησης τ. Ένα από τα προβλήματα εφαρμογής αυτής της μεθόδου είναι λοιπόν η εξάρτηση του m' από το τ. Επίσης η μέθοδος FNN είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη θορύβου.

8.1.3 Εκτίμηση μη-γραμμικών χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος

Στη γραμμική ανάλυση για τον καθορισμό του κατάλληλου μοντέλου μελετήσαμε πρώτα γραμμικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς, όπως είναι η αυτοσυσχέτιση και η μερική αυτοσυσχέτιση. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία στη μη-γραμμική ανάλυση, θα εκτιμήσουμε πρώτα κάποια μη-γραμμικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς. Τα χαρακτηριστικά αυτά δίνουν πληροφορίες για το υπό μελέτη σύστημα, όπως για τη *διάσταση* του ελκυστή του συστήματος και την *πολυπλοκότητα* του συστήματος. Επίσης βοηθούν στην επιλογή κατάλληλου μοντέλου για τη χρονοσειρά, π.χ. η διάσταση καθορίζει τον ελάχιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας στο μοντέλο.

Τα μη-γραμμικά χαρακτηριστικά ορίζονται στα πλαίσια της θεωρίας των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χάους ως ***αναλλοίωτα μέτρα*** του συστήματος (invariant measures), δηλαδή ως σταθερά μεγέθη που δεν αλλοιώνονται

από την εξέλιξη του συστήματος, καθώς και τη διαδικασία παρατήρησης του όταν αναφερόμαστε σε χρονοσειρές. Τέτοια χαρακτηριστικά είναι η *πυκνότητα* των τροχιών, η *μορφοκλασματική διάσταση*, η *εντροπία* και οι *εκθέτες Lyapunov*. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε δύο τέτοια αναλλοίωτα μέτρα.

8.1.3.1 Διάσταση συσχέτισης

Ένας ελκυστής, όπως κάθε γεωμετρικό αντικείμενο, χαρακτηρίζεται από την *Ευκλείδεια διάσταση* του Ευκλείδειου χώρου που περιέχει τον ελκυστή (π.χ. για τον ανακατασκευασμένο χώρο είναι η διάσταση εμβύθισης *m*) και την *τοπολογική διάσταση* της πολλαπλότητας πάνω στην οποία βρίσκεται ο ελκυστής. Για να χαρακτηρίσουμε όμως την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας εισάγουμε τη *μορφοκλασματική διάσταση*. Η διάσταση αυτή είναι συνεπής με τη συνήθη έννοια της διάστασης, δηλαδή πεπερασμένα σύνολα σημείων έχουν διάσταση 0, γραμμές έχουν διάσταση 1 και επιφάνειες έχουν διάσταση 2. Επιπλέον, για γεωμετρικά αντικείμενα με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας, όπως τυπικά είναι οι παράξενοι ελκυστές, η μορφοκλασματική διάσταση είναι μη-ακέραιος αριθμός.

Η ***διάσταση συσχέτισης*** (correlation dimension) $\boldsymbol{\nu}$ είναι ένα από τα αναλλοίωτα μέτρα που εκφράζουν τη μορφοκλασματική διάσταση. Άλλα τέτοια μέτρα είναι η διάσταση της *μέτρησης κουτιών* (box counting dimension) και η *διάσταση πληροφορίας* (information dimension). Θα μελετήσουμε τη διάσταση συσχέτισης λόγω της ευκολίας του υπολογισμού της και της εκτενής χρήσης της σε εφαρμογές.

Ας θεωρήσουμε έναν ελκυστή ως ένα μη-πεπερασμένο σύνολο σημείων $\boldsymbol{x}_i$ κι ας ορίσουμε την πιθανότητα $\mathrm{P}\left(\left\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\right\| < r\right)$ η απόσταση δύο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη από κάποια απόσταση r, όπου $\|\boldsymbol{x}\|$ είναι το μήκος του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ ορισμένο με κάποια μετρική, όπως η Ευκλείδεια μετρική. Αν μ_i είναι ο αριθμός των σημείων που βρίσκονται μέσα σε σφαίρα με ακτίνα r και κέντρο $\boldsymbol{x}_i$, τότε η μέση τιμή ως προς όλα τα $\boldsymbol{x}_i$ $\langle \mu_i \rangle_x$ προσεγγίζει την παραπάνω πιθανότητα. Σύμφωνα με το ***νόμο κλιμάκωσης*** (scaling law) είναι

$$\langle \mu_i \rangle_x \sim r^{\nu} \quad \text{όταν} \quad r \to 0\,, \tag{130}$$

δηλαδή για μικρές ακτίνες r η πιθανότητα η απόσταση δύο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη του r αλλάζει αναλογικά με κάποια δύναμη της απόστασης r με σταθερό εκθέτη ν. Αν ο ελκυστής έχει συνηθισμένη μορφή (πεπερασμένο σύνολο σημείων, γραμμή, επιφάνεια κτλ.) ο εκθέτης ν είναι ακέραιος αριθμός ενώ αν είναι παράξενος το ν είναι μη-ακέραιος και δηλώνει το βαθμό αυτό-ομοιότητας.

Για ένα σύνολο πεπερασμένων σημείων $\{\boldsymbol{x}_i\}, i = 1,\ldots,N$, όπως η ανακατασκευασμένη τροχιά από τη χρονοσειρά, το $\langle \mu_i \rangle_x$ εκτιμάται από το ***άθροισμα συσχέτισης*** (correlation sum) $C(r)$

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \Theta\left(r - \left\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\right\|\right), \tag{131}$$

όπου $\Theta(x)$ είναι η λεγόμενη Heaviside συνάρτηση

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x \le 0 \\ 1 & \text{όταν } x > 0 \end{cases}.$$

Το διπλό άθροισμα μετράει όλα τα δυνατά ζευγάρια $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$ που έχουν απόσταση μικρότερη από r. Για $N \to \infty$ και $r \to 0$ από το νόμο κλιμάκωσης της (130) βρίσκουμε τη διάσταση συσχέτισης ως

$$\nu = \frac{d \log C(r)}{d \log r}. \tag{132}$$

Είναι φανερό ότι τα δύο όρια ($N \to \infty$ και $r \to 0$) δεν ικανοποιούνται στην πραγματικότητα αφού οι χρονοσειρές έχουν πεπερασμένο μήκος και τα δεδομένα δίνονται με πεπερασμένη ακρίβεια. Περιμένουμε λοιπόν το γράφημα του $\log C(r)$ vs $\log r$ να σχηματίζει ευθεία γραμμή (δηλαδή να έχει σταθερή κλίση) για κάποιο διάστημα σχετικά μικρών τιμών του r, που το ονομάζουμε *περιοχή κλιμάκωσης* του r (scaling region). Εναλλακτικά, θα πρέπει για την περιοχή κλιμάκωσης του r, το γράφημα της παραγώγου που δίνεται στην (132) να σταθεροποιείται σε μια οριζόντια γραμμή στο ύψος της τιμής ν.

Για την εκτίμηση χαρακτηριστικής για το σύστημα διάστασης συσχέτισης ν από μια χρονοσειρά θα πρέπει επιπλέον το ίδιο οριζόντιο επίπεδο της παραγώγου της (132) να παρατηρείται για διαφορετικές ανακατασκευές του ελκυστή. Για τις ανακατασκευές συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της υστέρησης με σταθερή κάποια κατάλληλη τιμή του τ και αυξανόμενη διάσταση εμβύθισης m. Περιμένουμε η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης ν ως συνάρτηση της διάστασης εμβύθισης m, $\nu(m)$, να δίνεται ως εξής:

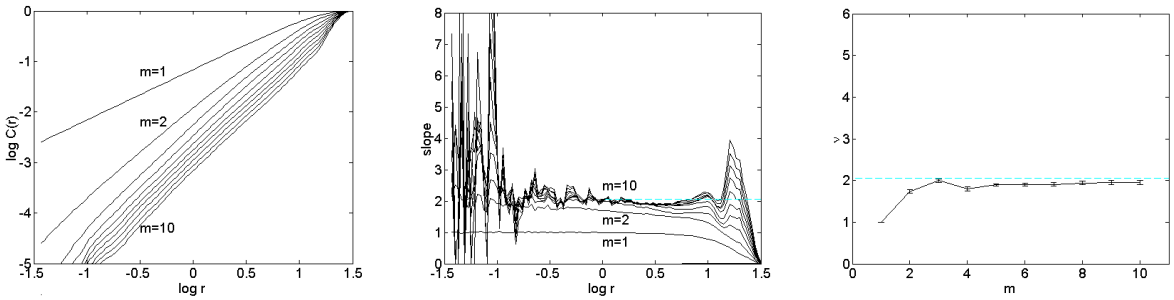
- Για μικρές τιμές του m, όπου η ανακατασκευή του ελκυστή δεν είναι ικανοποιητική, το οριζόντιο επίπεδο που δίνει την εκτίμηση του $\nu(m)$ θα αυξάνει με την αύξηση του m.
- Για μεγαλύτερες τιμές του m θα πρέπει το οριζόντιο επίπεδο να συγκλίνει στο ίδιο ύψος $\nu = \nu(m)$.
- Καθώς το m μεγαλώνει ακόμα περισσότερο η περιοχή κλιμάκωσης σταδιακά εξαφανίζεται και η εκτίμηση του ν δεν είναι πια δυνατή.

Η διαδικασία υπολογισμού της διάστασης συσχέτισης ν παριστάνεται γραφικά με τρία σχήματα (δες τα σχήματα στο παρακάτω παράδειγμα):

1. Το πρώτο σχήμα είναι το γράφημα $\log C(r)$ vs $\log r$ για ένα εύρος τιμών της m, $m = 1, 2, \ldots m_{\max}$ (στο σχήμα παρουσιάζονται $m_{\max}$ διαφορετικές γραμμές).
2. Το δεύτερο σχήμα είναι το γράφημα $\dfrac{d \log C(r)}{d \log r}$ vs $\log r$ για το ίδιο εύρος τιμών της m.
3. Το τρίτο σχήμα είναι το γράφημα $\nu(m)$ vs m, όπου $\nu(m)$ είναι η εκτίμηση της κλίσης από τα γραφήματα στο πρώτο σχήμα ή του οριζοντίου επιπέδου από τα γραφήματα στο δεύτερο σχήμα αντίστοιχα για κάθε τιμή του m. Συνήθως σχηματίζουμε και το όριο ±SD της απόκλισης για την κλίση ή το οριζόντιο επίπεδο, όπου SD είναι η τυπική απόκλιση.

Παράδειγμα (σύστημα Lorenz)

Τα παρακάτω τρία σχήματα συνοψίζουν την εκτίμηση του ν από μια χρονοσειρά 5000 παρατηρήσεων της x-μεταβλητής του συστήματος Lorenz ($\tau_s = 0.1$ s) χρησιμοποιώντας ανακατασκευές του χώρου καταστάσεων με $\tau = 2$ και $m = 1, \ldots, 10$.



Στο πρώτο σχήμα φαίνεται πως τα γραφήματα $\log C(r)$ vs $\log r$ είναι ευθείες γραμμές για μεγάλο διάστημα τιμών της απόστασης *r*. Η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μικρά *r* (μικρότερα για μικρά *m* και μεγαλύτερα για μεγάλα *m* ως περίπου $\log r < -0.5$), γιατί δεν υπάρχουν αρκετά σημεία σε υπερ-σφαίρες με τόσο μικρές ακτίνες και η στατιστική είναι φτωχή. Επίσης η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μεγάλα *r* (περίπου $\log r > 1$ για μεγάλα *m*), όπου η αυτό-ομοιότητα καταστρέφεται από τη γεωμετρία του ελκυστή. Η περιοχή κλιμάκωσης είναι αρκετά μεγάλη και εκτείνεται προσεγγιστικά στο διάστημα $-0.5 < \log r < 1$. Η περιοχή κλιμάκωσης φαίνεται και στο δεύτερο σχήμα από το οριζόντιο επίπεδο της κλίσης $\dfrac{d \log C(r)}{d \log r}$ για μεγάλα *m*. Για μικρά *m* η περιοχή κλιμάκωσης επεκτείνεται σε ακόμα μικρότερα *r*. Για $m = 1$ το γράφημα είναι οριζόντια γραμμή σε στάθμη που αντιστοιχεί σε κλίση 1, ενώ για $m = 2$ πλησιάζει την οριζόντια γραμμή κλίσης 2 και αυτό δείχνει ότι γι αυτές τις τιμές του *m* η ανακατασκευή δεν είναι ικανοποιητική. Για μεγαλύτερα *m* τα γραφήματα της κλίσης συγκλίνουν σε οριζόντια γραμμή που αντιστοιχεί σε κλίση $\nu \cong 2$. Στο τρίτο σχήμα φαίνεται η σταθερή εκτίμηση του *ν* για $m \geq 3$, όπου φαίνεται και το μικρό όριο σφάλματος ±SD. Η πραγματική διάσταση συσχέτισης είναι 2.06 και δίνεται από την γκρίζα οριζόντια γραμμή.

Η εκτίμηση του *ν* επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες:

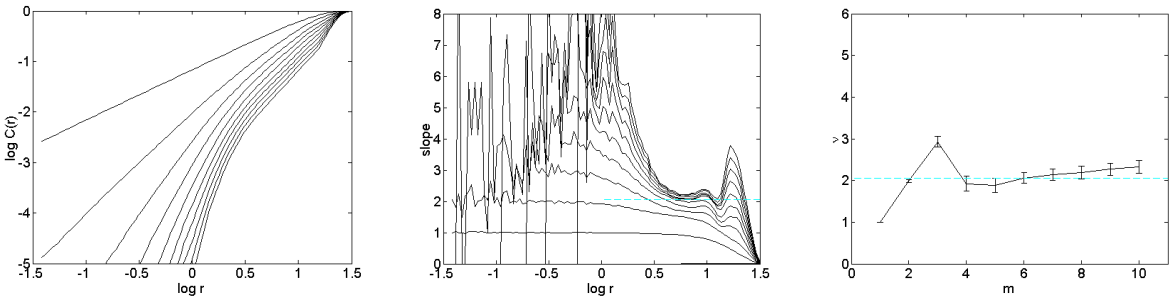
1. Για χρονοσειρές από συνεχή συστήματα με μικρό χρόνο δειγματοληψίας τ_s, χρονικά κοντινά σημεία αλλοιώνουν την στατιστική $C(r)$ γιατί ενώ είναι σε απόσταση μικρότερη του *r* ανήκουν στην ίδια τροχιά και δε θα έπρεπε να μετρηθούν στο $C(r)$. Η μέτρηση τέτοιων ζευγαριών δίνει υποεκτίμηση του *ν*. Μπορούμε απλά να απαλείψουμε όλα αυτά τα ζευγάρια θέτοντας τη συνθήκη $|i - j| < w$ στο άθροισμα της (131), όπου *w* είναι ένας ικανά μεγάλος χρόνος (π.χ. ο μέσος χρόνος ταλάντωσης).
2. Για χρονοσειρές από συνεχή συστήματα η επιλογή του χρόνου υστέρησης *τ*, σε συνδυασμό και με την διάσταση εμβύθισης *m* μπορεί να επηρεάσει την εκτίμηση του *ν*, κυρίως όταν η περιοχή κλιμάκωσης του *r* είναι μικρή. Για πολύ μικρά *τ* μπορεί η σύγκλιση του $\nu(m)$ για διάφορα *m* να δίνει υποεκτίμηση της πραγματική διάστασης συσχέτισης, ενώ για μεγάλα *τ* μπορεί να μη συγκλίνουν οι εκτιμήσεις $\nu(m)$.
3. Ο θόρυβος (συστήματος ή παρατήρησης) αλλοιώνει την κλιμάκωση για αποστάσεις *r* ως και το επίπεδο του εύρους του θορύβου. Σε τέτοιες μικρές περιοχές η αυτό-ομοιότητα καταστρέφεται από το θόρυβο και η κατανομή των σημείων καθορίζεται περισσότερο από την κατανομή του θορύβου παρά από τη δυναμική του συστήματος. Γι αυτό για μικρά *r* εμφανίζεται η κλίση να προσεγγίζει το *m* [δες άσκηση 2]. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μικραίνει η περιοχή κλιμάκωσης του *r* που επιτρέπει την σωστή εκτίμηση του *ν*. Αν

μάλιστα το εύρος του θορύβου είναι μεγάλο μπορεί η περιοχή κλιμάκωσης να καλύπτεται πλήρως και να μην είναι δυνατή η εκτίμηση του *ν*.

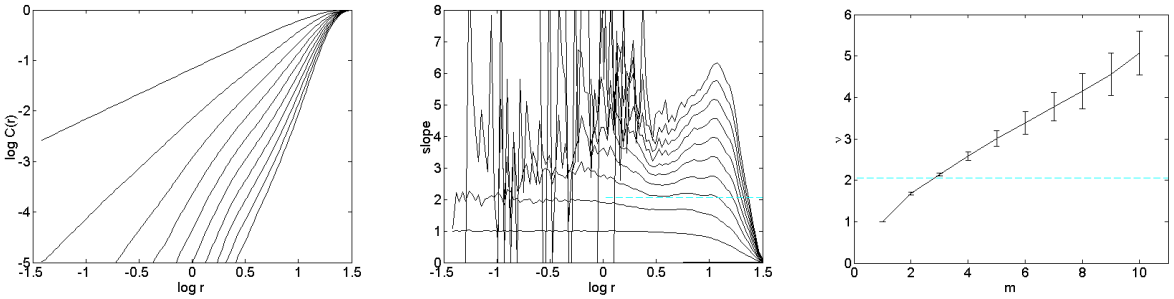
4. Το μήκος *N* της χρονοσειράς καθορίζει επίσης το μέγεθος της περιοχής κλιμάκωσης. Για μικρό *N* το διάστημα των τιμών του *r* που υποστηρίζει το νόμο κλιμάκωσης συρρικνώνεται από τα αριστερά γιατί για μικρές τιμές του *r* η στατιστική των σημείων είναι φτωχή.

Παράδειγμα (συνέχεια, σύστημα Lorenz)

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία εκτίμησης του *ν* αλλά στην χρονοσειρά του συστήματος Lorenz προσθέσαμε λευκό Gaussian θόρυβο με SD 10% του SD των δεδομένων. Η ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων είναι όπως πριν με $\tau = 2$ και $m = 1,\ldots,10$. Όπως φαίνεται από τα τρία παρακάτω σχήματα η περιοχή κλιμάκωσης του *r* έχει μικρύνει λόγω του θορύβου αλλά η εκτίμηση του *ν* είναι ακόμα δυνατή για $0.5 < \log r < 1$. Επίσης για μικρά *r* ($\log r < 0.5$) η κλίση μεγαλώνει και τείνει να προσεγγίσει την αντίστοιχη τιμή του *m*.



Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία αλλά για χρόνο υστέρησης $\tau = 10$. Όπως φαίνεται στα τρία παρακάτω σχήματα αυτή η επιλογή του τ δεν επιτρέπει αξιόπιστη εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης. Οι κλίσεις δε συγκλίνουν αλλά αυξάνουν καθώς το *m* αυξάνει και επομένως η εκτίμηση του *ν* αυξάνει με το *m*. Αυτό συμβαίνει γιατί το παράθυρο χρόνου της ανακατασκευής $\tau_w = (m-1)\tau$ γίνεται πολύ μεγάλο και οι αναδιπλώσεις του ελκυστή καταστρέφουν την κλιμάκωση για μεγάλα *r* ($\log r > 0.5$), για τα οποία βρήκαμε να διατηρείται κάποια κλιμάκωση παραπάνω για $\tau = 2$.



Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης σε πραγματικές χρονοσειρές παρουσιάζει πολλές δυσκολίες και η επιλογή των παραμέτρων έχει μεγάλη σημασία. Λόγω ακριβώς της αδυναμίας ακριβής εκτίμησης του *ν* σε πραγματικά προβλήματα, είναι δύσκολο να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως χαοτικό από τον υπολογισμό μη-ακέραιου *ν*. Για παράδειγμα το αποτέλεσμα $\nu = 3.2 \pm 0.3$ δεν αποκλείει ότι το σύστημα που έδωσε τη χρονοσειρά είναι ένας τόρος διάστασης 3. Όμως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι με 4 βαθμούς ελευθερίας (δηλαδή μεταβλητές) θα μπορούσαμε να περιγράψουμε αυτό το σύστημα.

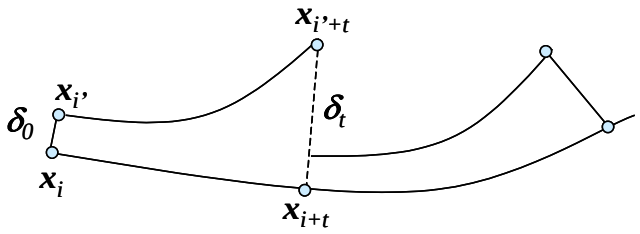
8.1.3.2 ***Εκθέτες Lyapunov***

Η ιδιότητα των χαοτικών δυναμικών συστημάτων να έχουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες κάνει τροχιές τους που αρχικά είναι πολύ κοντά να αποκλίνουν γρήγορα και μάλιστα εκθετικά. Ο μέσος εκθέτης που αντιστοιχεί στη διεύθυνση της μεγαλύτερης απόκλισης των τροχιών είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov. Γενικά για ένα δυναμικό σύστημα που παράγει τροχιές σε κάποιο χώρο διάστασης *m* υπάρχουν *m* εκθέτες Lyapunov, ένας για κάθε διεύθυνση. Ένας αρνητικός εκθέτης Lyapunov δηλώνει το βαθμό σύγκλισης τροχιών στη διεύθυνση που του αντιστοιχεί ενώ ένας θετικός εκθέτης Lyapunov δηλώνει το βαθμό απόκλισης των τροχιών σε αυτήν τη διεύθυνση. Για ροές, τουλάχιστον ένας εκθέτης Lyapunov είναι 0 και αντιστοιχεί στη διεύθυνση της κίνησης της τροχιάς. Αν το αιτιοκρατικό δυναμικό σύστημα δεν είναι χαοτικό τότε δεν έχει κανένα θετικό εκθέτη Lyapunov. Για συστήματα απώλειας ενέργειας το άθροισμα των εκθετών Lyapunov είναι πάντα αρνητικό.

Υπάρχουν μέθοδοι εκτίμησης όλου του φάσματος των εκθετών Lyapunov αλλά εδώ θα περιοριστούμε στην εκτίμηση του ***μέγιστου εκθέτη Lyapunov*** λ_1 (maximal Lyapunov exponent), που μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε το σύστημα χαοτικό αν $\lambda_1 > 0$, καθώς και να μετρήσουμε το βαθμό πολυπλοκότητας του συστήματος με την τιμή του λ_1.

Ας υποθέσουμε ότι δύο σημεία $\boldsymbol{x}_i$ και $\boldsymbol{x}_{i'}$ που ανήκουν σε δύο διαφορετικές τροχιές βρίσκονται κοντά και σε απόσταση $\delta_0 = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i'}\|$, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Μετά από κάποιο χρόνο *t* η απόσταση τους γίνεται $\delta_t = \|\boldsymbol{x}_{i+t} - \boldsymbol{x}_{i'+t}\|$. Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov ορίζεται ως

$$\delta_t \cong \delta_0 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \quad \text{για} \quad t \to \infty . \tag{133}$$



Αν το σύστημα είναι χαοτικό και οι τροχιές αποκλίνουν ο εκθέτης λ_1 είναι θετικός. Βέβαια δύο τροχιές δε μπορεί συνέχεια να αποκλίνουν καθώς αυξάνει ο χρόνος *t* αφού ο ελκυστής περιορίζεται σε κάποια περιοχή του χώρου καταστάσεων. Άρα η σχέση της (133) ισχύει για χρόνους *t*, όπου το δ_t παραμένει μικρό. Για να είναι δυνατόν λοιπόν να μετρηθεί η απόκλιση θα πρέπει να ισχύει $\delta_0 \to 0$.

Ο ορισμός της (133) έχει πρακτικές δυσκολίες και δεν επιτρέπει τον υπολογισμό του λ_1 από πεπερασμένη χρονοσειρά αφού δε μπορεί να ισχύει $\delta_0 \to 0$ και $t \to \infty$. Η εκτίμηση του λ_1, όπου ο ελκυστής αποτελείται από το σύνολο των ανακατασκευασμένων σημείων, γίνεται ως εξής:

1. Αρχίζουμε με ένα σημείο αναφοράς $\boldsymbol{x}_i$ του ανακατασκευασμένου ελκυστή και βρίσκουμε το κοντινότερο σημείο $\boldsymbol{x}_{i'}$ του ελκυστή, έστω σε απόσταση $\delta_{0,i}$.
2. Υπολογίζουμε την απόσταση των δύο τροχιών που ξεκινούν ύστερα από χρόνο *t*, δηλαδή την απόσταση $\delta_{t,i}$ των σημείων $\boldsymbol{x}_{i+t}$ και $\boldsymbol{x}_{i'+t}$.
3. Ορίζουμε ως νέο σημείο αναφοράς $\boldsymbol{x}_{i+t}$ και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 και 2.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τα σημεία αναφοράς να καλύψουν όλα τα σημεία. Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov εκτιμάται από το μέσο όρο της εκθετικής απόκλισης $\delta_{t,i}$ από $\delta_{0,i}$ (δες (133)) όλων των σημείων αναφοράς $\boldsymbol{x}_i$ ως

$$\lambda_1 = \frac{1}{Nt}\sum_{j=1}^{N}\log\frac{\delta_{t,j}}{\delta_{0,j}}. \tag{134}$$

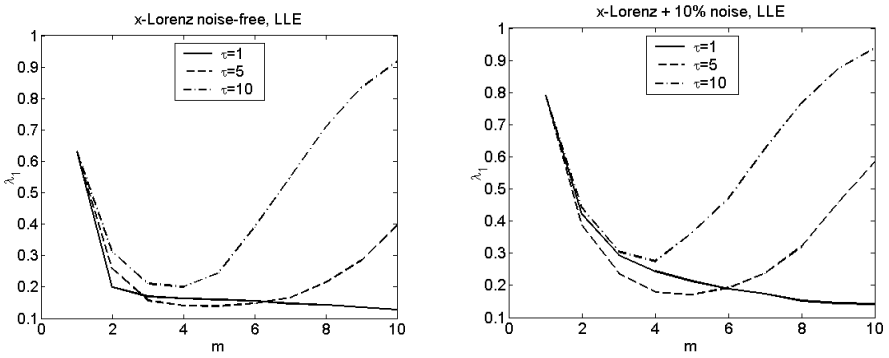
Για χρονοσειρές, τα σημεία $\boldsymbol{x}_i$ προέρχονται από την χρονοσειρά με την ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων. Εκτός από τις παραμέτρους τ και m της ανακατασκευής θα πρέπει να οριστούν κι άλλες παράμετροι του αλγόριθμου εκτίμησης του λ_1, όπως ο χρόνος *t* (δε θα αναλύσουμε παραπάνω τον αλγόριθμο αυτό εδώ).

Όπως και για την εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης, η εκτίμηση του λ_1 επηρεάζεται από το θόρυβο και το μήκος της χρονοσειράς κατά τον ίδιο τρόπο, δηλαδή περισσότερος θόρυβος ή μικρότερο μήκος δίνουν χειρότερες εκτιμήσεις του λ_1.

Ένα βασικό πρόβλημα με την εκτίμηση του λ_1 με την παραπάνω μέθοδο είναι η προϋπόθεση ότι η απόκλιση είναι εκθετική, όπως συμβαίνει στα χαοτικά συστήματα. Όταν εφαρμόζουμε τη μέθοδο σε κάποια χρονοσειρά δε ξέρουμε από πριν αν είναι χαοτική. Η μέθοδος αυτή δίνει επίσης θετική τιμή του λ_1 για στοχαστικά συστήματα. Για παράδειγμα για χρονοσειρά από λευκό θόρυβο, το λ_1 αντιστοιχεί σε απόκλιση ίση με την τυπική απόκλιση του θορύβου για *t=1*. Η εκτίμηση του λ_1 δε μπορεί λοιπόν να ξεχωρίσει ένα χαοτικό από ένα στοχαστικό σύστημα. Γι αυτό το λόγο υπάρχουν τροποποιήσεις αυτής της μεθόδου αλλά δε θα μας απασχολήσουν εδώ.

Παράδειγμα (σύστημα Lorenz)

Για τη χρονοσειρά του συστήματος Lorenz χωρίς θόρυβο και τη χρονοσειρά με 10% λευκό θόρυβο, για τις οποίες εκτιμήσαμε τη διάσταση συσχέτισης, εκτιμούμε τώρα το μέγιστο εκθέτη Lyapunov λ_1 για τους συνδυασμούς των παραμέτρων ανακατασκευής του χώρου καταστάσεων $\tau = 1,5,10$ και $m = 2,\ldots,10$. Τα αποτελέσματα δίνονται στα δύο παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι όταν η χρονοσειρά δεν έχει θόρυβο η εκτίμηση του λ_1 είναι σταθερή για διάφορους συνδυασμούς των παραμέτρων ανακατασκευής ενώ όταν προστίθεται ο θόρυβος τα αποτελέσματα της εκτίμησης δε συμφωνούν για διαφορετικές τιμές των *τ* και *m* και η εκτίμηση του λ_1 γίνεται αβέβαιη. Γι αυτό το παράδειγμα φαίνεται πως οι καλύτερες εκτιμήσεις του λ_1 είναι για τιμές του *m* γύρω στο 4 όταν τ=5 ή 10.

8.1.4 Μη-γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης

Θεωρώντας την ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων και την υπόθεση ότι η χρονοσειρά είναι η προβολή κάποιου δυναμικού συστήματος, τα σημεία του ανακατασκευασμένου ελκυστή ορίζονται από τη συνάρτηση (διανυσματικό πεδίο) $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i)$, ή γενικά για κάποιο χρονικό βήμα *T*, $\boldsymbol{x}_{i+T} = \boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{x}_i)$. Σε προβλήματα πρόβλεψης της χρονοσειράς δε μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε την $\boldsymbol{F}^T$ αλλά μόνο τη συνιστώσα της $F^T:\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ που ορίζει το στοιχείο x_{i+T} της χρονοσειράς, $x_{i+T} = F^T(\boldsymbol{x}_i)$. Είναι φανερό ότι ένα ικανοποιητικό μοντέλο για την συνάρτηση F^T θα πρέπει να είναι μη-γραμμικό για να μπορεί να κατέχει τις ιδιότητες του αρχικού συστήματος όπως αυτές διατηρούνται μέσω της ανακατασκευής. Σημειώνεται ότι αν το σύστημα είναι χαοτικό τότε έχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες κι άρα ανεξάρτητα από την καταλληλότητα του μοντέλου οι προβλέψεις περιορίζονται σε μικρό χρονικό ορίζοντα και η αβεβαιότητα της πρόβλεψης αυξάνει εκθετικά σύμφωνα με τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov.

Υπάρχουν πολλές κλάσεις μη-γραμμικών μοντέλων και τα μοντέλα μπορούν να χωριστούν ανάλογα με το πώς ορίζονται στο χώρο καταστάσεων σε *καθολικά, ημι-τοπικά και τοπικά.*

- Τα καθολικά μοντέλα έχουν μοναδική αναλυτική έκφραση για όλο το πεδίο ορισμού. Τέτοια μοντέλα είναι τα πολυωνυμικά και κλασματικά μοντέλα που αναφέραμε στην Παράγραφο 3.1.
- Τα ημι-τοπικά μοντέλα εκφράζονται αναλυτικά όπως τα καθολικά μοντέλα αλλά αποτελούνται από ένα σύνολο βασικών συναρτήσεων και γι αυτό η μορφή τους αλλάζει στις διάφορες περιοχές του χώρου καταστάσεων. Τέτοια μοντέλα είναι τα *νευρωνικά δίκτυα* (neural networks) και οι *βασικές ακτινωτές συναρτήσεις* (radial basis functions).
- Τα τοπικά μοντέλα δεν επιδέχονται μοναδική αναλυτική έκφραση για όλο το πεδίο ορισμού αλλά διαμορφώνονται διαφορετικά σε κάθε περιοχή του χώρου καταστάσεων. Τέτοια μοντέλα είναι τα μοντέλα πυρήνων (kernel models) και τα τοπικά γραμμικά μοντέλα.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα ***τοπικά γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης*** (local linear prediction models) γιατί είναι τα πιο γνωστά στα πλαίσια αυτή της ανάλυσης χρονοσειρών και συνδέονται άμεσα με τα μοντέλα τύπου AR. Το τοπικό γραμμικό μοντέλο για κάθε χρονική στιγμή *i* είναι

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F(\boldsymbol{x}_i) = F(x_i, x_{i-\tau}, \ldots, x_{i-(m-1)\tau}) \\ &= \phi_0^{(i)} + \phi_1^{(i)} x_i + \phi_2^{(i)} x_{i-\tau} + \cdots + \phi_m^{(i)} x_{i-(m-1)\tau} \end{aligned}, \tag{135}$$

όπου οι παράμετροι $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_m^{(i)}$ ορίζονται (και εκτιμώνται) για κάθε σημείο $\boldsymbol{x}_i$. Το μοντέλο αυτό μοιάζει με το σκελετό ενός AR(*m*) μοντέλου όπου οι προηγούμενες παρατηρήσεις δεν είναι διαδοχικές όπως συνηθίσαμε για το AR αλλά επιλέγονται με τη βοήθεια της παραμέτρου υστέρησης *τ*. Η βασική διαφορά από το κλασικό AR μοντέλο είναι ότι για την εκτίμηση των παραμέτρων $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_m^{(i)}$ δε χρησιμοποιούνται όλα τα στοιχεία της χρονοσειράς αλλά μόνο κάποια *τμήματα* (segments) που «μοιάζουν» στο τμήμα $\left\{x_i, x_{i-\tau}, \ldots, x_{i-(m-1)\tau}\right\}$. Στον ανακατασκευασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}^m$ αυτά τα τμήματα της χρονοσειράς αντιστοιχούν σε γειτονικά σημεία του $\boldsymbol{x}_i = [x_i, x_{i-\tau}, \ldots, x_{i-(m-1)\tau}]'$.

Έστω $\boldsymbol{x}_{i(1)}, \boldsymbol{x}_{i(2)}, ..., \boldsymbol{x}_{i(K)}$ τα *K* κοντινότερα σημεία στο $\boldsymbol{x}_i$ που βρέθηκαν για χρόνους μικρότερους του *i*. Πριν περάσουμε στο γραμμικό μοντέλο ας ορίσουμε δύο απλά τοπικά μοντέλα. Η πιο απλή πρόβλεψη του x_{i+1} είναι από την εικόνα του πιο κοντινού σημείου $\boldsymbol{x}_{i(1)}$, δηλαδή

$$\hat{x}_{i+1} \equiv x_i(1) = x_{i(1)+1}. \tag{136}$$

Αυτή είναι η ***πρόβλεψη μηδενικής τάξης*** (zeroth order prediction). Αν συμπεριλάβουμε κι άλλα γειτονικά σημεία μπορούμε να κάνουμε πρόβλεψη παίρνοντας το μέσο όρο των εικόνων των γειτονικών σημείων. Για *K* γειτονικά σημεία του $\boldsymbol{x}_i$ η πρόβλεψη είναι

$$x_i(1) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} x_{i(j)+1}. \tag{137}$$

Αυτή είναι η ***τοπική πρόβλεψη μέσου όρου*** (local average prediction). Μπορεί εναλλακτικά να οριστεί από το σταθμισμένο μέσο όρο, σταθμίζοντας με την απόσταση του κάθε γειτονικού σημείου από το $\boldsymbol{x}_i$. Τα δύο παραπάνω μοντέλα δεν απαιτούν εκτίμηση κάποιας παραμέτρου του μοντέλου ενώ για το τοπικό γραμμικό μοντέλο της (135) για την πρόβλεψη σε κάθε χρονική στιγμή *i* πρέπει να οριστούν οι παράμετροι $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_m^{(i)}$.

Υποθέτουμε ότι το μοντέλο της (135) ισχύει για μια μικρή περιοχή γύρω από το $\boldsymbol{x}_i$ κι άρα και για τα σημεία $\boldsymbol{x}_{i(1)}, \boldsymbol{x}_{i(2)}, ..., \boldsymbol{x}_{i(K)}$. Η εκτίμηση των παραμέτρων δίνεται εύκολα από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ως

$$\min_{\phi_0^i, \phi_1^i, \ldots, \phi_m^i} \sum_{j=1}^{K} (x_{i(j)+1} - \phi_0^i - \phi_1^i x_{i(j)} - \cdots - \phi_m^i x_{i(j)-(m-1)\tau})^2 \tag{138}$$

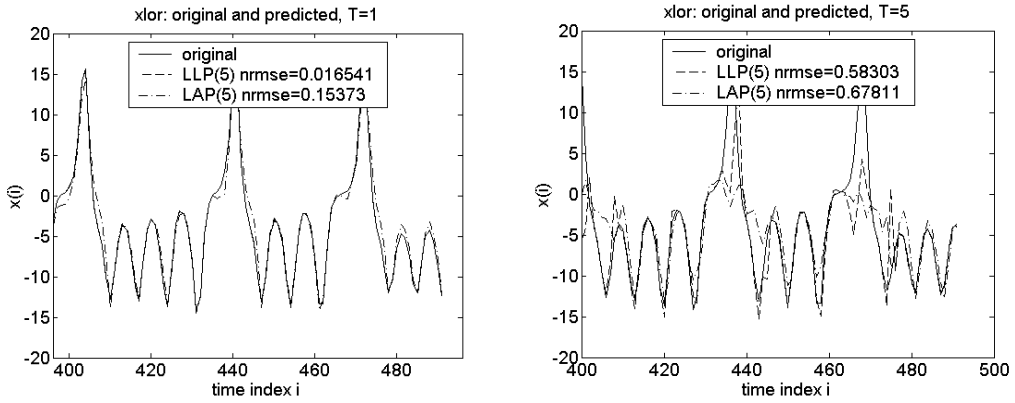
και η πρόβλεψη του x_{i+1} δίνεται από την (135) για τις τιμές των $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_m^{(i)}$ που προκύπτουν από τη λύση της (138).

Για πρόβλεψη T χρονικών βημάτων μπορούμε απλά να αλλάξουμε τις εικόνες $x_{i(j)+1}$ για ένα χρονικό βήμα στην (138) με τις εικόνες $x_{i(j)+T}$ για T χρονικά βήματα. Μπορούμε επίσης να κάνουμε την πρόβλεψη επαναληπτικά προβλέποντας κάθε φορά την επόμενη εικόνα βήματος 1, όπως κάναμε για τα μοντέλα AR. Για παράδειγμα, έχοντας υπολογίσει το $x_i(1)$ σχηματίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{x}_{i+1}$ αντικαθιστώντας τη συνιστώσα x_{i+1} με το $x_i(1)$, βρίσκουμε τα γειτονικά σημεία του $\boldsymbol{x}_{i+1}$ και προχωράμε στον υπολογισμό του $x_i(2)$.

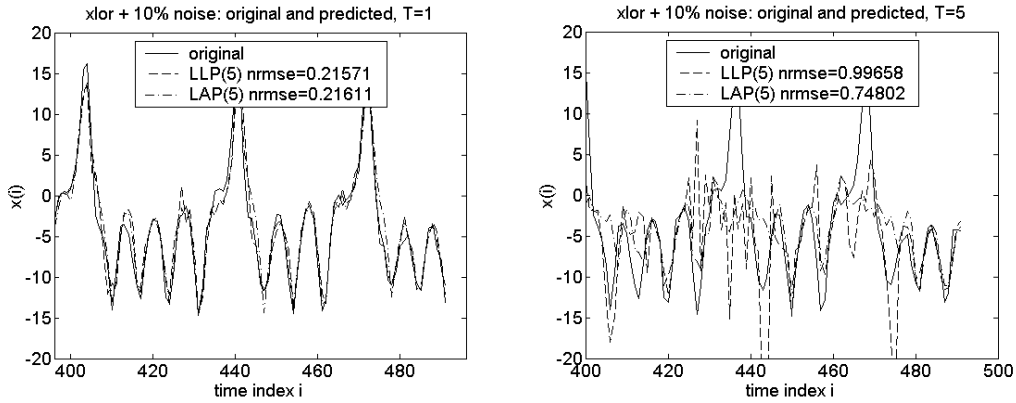
Για την αξιολόγηση της απόδοσης των μοντέλων πρόβλεψης χρησιμοποιείται η ίδια διαδικασία όπως και για τα γραμμικά μοντέλα. Ειδικότερα το λάθος πρόβλεψης μετριέται από τη ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος rmse ή το κανονικοποιημένο rmse (nrmse) (διαιρώντας με τη διασπορά της χρονοσειράς). Τιμές του nrmse κοντά στο 0 αντιστοιχούν σε πολύ καλές προβλέψεις ενώ για nrmse κοντά στο 1 η πρόβλεψη είναι περίπου ισοδύναμη με την σταθερή πρόβλεψη χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή.

Παράδειγμα (σύστημα Lorenz)

Για τη χρονοσειρά 500 σημείων χωρίς θόρυβο της *x*-μεταβλητής του Lorenz με $\tau_s = 0.1\,\mathrm{s}$ προσαρμόστηκε το τοπικό γραμμικό μοντέλο πρόβλεψης (local linear prediction, LLP) και το μοντέλο πρόβλεψης τοπικού μέσου όρου (local average prediction LAP) με $\tau = 1$, $m = 5$ και χρησιμοποιώντας $K = 11$ γειτονικά σημεία. Οι προβλέψεις για 1 και 5 χρονικά βήματα δίνονται στα παρακάτω σχήματα. Για $T = 1$ οι προβλέψεις είναι ικανοποιητικές, με τη μέθοδο LLP να υπερτερεί σημαντικά. Για χρόνο πρόβλεψης $T = 5$, η δυνατότητα πρόβλεψης μειώνεται σημαντικά και το λάθος πρόβλεψης δε διαφέρει σημαντικά στα δύο μοντέλα.



Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία πρόβλεψης αφού έχουμε προσθέσει 10% λευκό θόρυβο στη χρονοσειρά. Τα αποτελέσματα δίνονται στα δύο παρακάτω σχήματα. Το λάθος πρόβλεψης έχει αυξηθεί και για τα δύο μοντέλα. Για $T = 5$ η πρόβλεψη με το τοπικό γραμμικό μοντέλο είναι στο επίπεδο πρόβλεψης του μέσου όρου.



Η πρόβλεψη με τα τοπικά γραμμικά μοντέλα και με τα μη-γραμμικά μοντέλα γενικότερα επηρεάζεται από τις παραμέτρους *τ* και *m* καθώς και από το θόρυβο και το μήκος της χρονοσειράς, όπως και για τις εκτιμήσεις των μη-γραμμικών χαρακτηριστικών. Για τα τοπικά γραμμικά μοντέλα υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που καθορίζουν την απόδοση του μοντέλου, όπως ο αριθμός των γειτονικών σημείων *K*. Ανεξάρτητα από την καταλληλότητα του μοντέλου και την επιλογή των παραμέτρων η πρόβλεψη χαοτικών χρονοσειρών έχει νόημα για μικρό χρονικό ορίζοντα που ορίζεται από τον μέγιστο εκθέτη Lyapunov.

Ασκήσεις

1. Δημιουργείστε μια χρονοσειρά 200 σημείων από τη λογιστική απεικόνιση για *α=4*. Κάντε ανακατασκευή του χώρου καταστάσεων για *m=2* και *τ=1,…,10*. Τι παρατηρείτε; Θα μπορούσατε να εκτιμήσετε σωστά τη διάσταση συσχέτισης για *m=2* και *τ=10* και γιατί;

2. Έστω ότι η χρονοσειρά είναι iid με ομοιόμορφη κατανομή και ότι η απόσταση δύο σημείων ορίζεται από τη maximum norm,

$$\left\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\right\|_\infty = \max_k \left\{\left|x_{i-k\tau} - x_{j-k\tau}\right|,\ k = 0,\ldots,m-1\right\},$$

όπου τ και m ο χρόνος υστέρησης και η διάσταση εμβύθισης της ανακατασκευής του χώρου καταστάσεων. Χρησιμοποιώντας το νόμο κλιμάκωσης για την πιθανότητα $\mathrm{P}\left(\left\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\right\|_\infty < r\right)$ της (130) δείξτε ότι η διάσταση συσχέτισης είναι $\nu = m$.

3. Δείξτε ότι για μονοδιάστατη απεικόνιση $s_{i+1} = f(s_i)$ ο εκθέτης Lyapunov είναι

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln\left|\frac{df}{ds}(s_n)\right|.$$

4. Η απεικόνιση "tent map" είναι ένα τμηματικό πολυώνυμο που δίνεται ως

$$s_{i+1} = \begin{cases} 2s_i & 0 \le s_i < 0.5 \\ 2(1-s_i) & 0.5 \le s_i \le 1 \end{cases}.$$

   a. Σχηματίστε το διάγραμμα διασποράς της απεικόνισης αυτής και βρείτε τα σημεία ισορροπίας. Υπολογίστε την ευστάθεια τους (ένα σημείο ισορροπίας $\bar{s}$ είναι ευσταθής αν $\left|\frac{df}{ds}(\bar{s})\right| < 1$).

   b. Υπολογίστε τροχιές της απεικόνισης (κάνετε ως 10 επαναλήψεις) για κάποιες διαφορετικές αρχικές συνθήκες; Τι παρατηρείτε;

   c. Δείξτε ότι η απεικόνιση αυτή είναι χαοτική χρησιμοποιώντας τον εκθέτη Lyapunov (δες Άσκηση 3).

5. Δίνεται η χρονοσειρά $\{x_i\}$, $i = 1,\ldots,15$

0.44 0.98 0.16 0.53 0.97 0.07 0.03 0.17 0.37 0.95 0.24 0.81 0.60 0.06 0.12

   a. Υπολογίστε και κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

   b. Προσαρμόστε μοντέλο AR(1) και AR(2) στη χρονοσειρά.

   c. Προσαρμόστε μοντέλο πολυωνύμου τύπου $x_i = a_0 + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-1}^2$ στη χρονοσειρά.

   d. Κάνετε διάγραμμα διασποράς και σχεδιάστε επάνω σε αυτό τα γραφήματα του πολυωνυμικού μοντέλου και του μοντέλου AR(1). Τι παρατηρείτε;

   e. Υπολογίστε το rmse από την προσαρμογή και συγκρίνετε τα τρία μοντέλα.

   f. Κάνετε προβλέψεις και με τα τρία μοντέλα για $x_{15}(T)$, $T = 1,\ldots 5$ (δηλαδή τις 5 επόμενες παρατηρήσεις).

g. Κάνετε προβλέψεις για $x_{15}(T), T = 1,\ldots 5$ χρησιμοποιώντας το μοντέλο πρόβλεψης μηδενικής τάξης (με m=1 και m=2) και συγκρίνετε τις προβλέψεις και με τα 4 μοντέλα.

6. Κατά την εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης από μια χρονοσειρά, δημιουργήθηκαν τα δύο παρακάτω σχήματα.

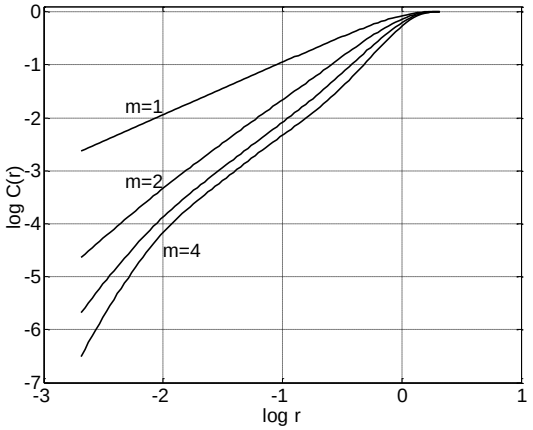
a. Εξηγείστε (με βάση και τα δύο σχήματα) τη διαδικασία εκτίμησης της διάστασης συσχέτισης.

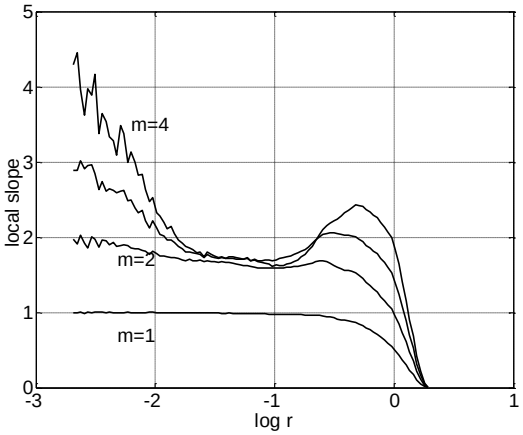
b. Επίσης απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα για το παράδειγμα που δίνεται στα δύο σχήματα, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

(i) Φαίνεται να έχει η χρονοσειρά λευκό θόρυβο και αν ναι πως επηρεάζει την εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης;

(ii) Χωρίς υπολογισμούς, κάνετε προσεγγιστικά εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης (τιμή της εκτίμησης και αντίστοιχο διάστημα αποστάσεων r). Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτήν την εκτίμηση αξιόπιστη;

(iii) Σχολιάστε αν η παραπάνω εκτίμηση μπορεί να χρησιμεύσει, και πως, για το χαρακτηρισμό του συστήματος που έδωσε αυτήν τη χρονοσειρά.





7. Δίνεται παρακάτω μια χρονοσειρά 17 παρατηρήσεων:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*
16	2	39	17	1	50	54	38	28	1	29	8	14	2	50	42	21

Σχεδιάστε το διάγραμμα διασποράς (x_{i-1}, x_i) και σχολιάστε ποια από τα παρακάτω μοντέλα (και για ποια τάξη ή διάσταση) θα ήταν χρήσιμα για προβλέψεις:

μοντέλο τυχαίου περιπάτου,

(β) αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο AR,

(γ) αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο με αυτό-διεγερμένο κατώφλι (SETAR),

(δ) πολυωνυμικό μοντέλο,

(ε) τοπικό μοντέλο μηδενικού βαθμού (χρήση κοντινότερου γείτονα).

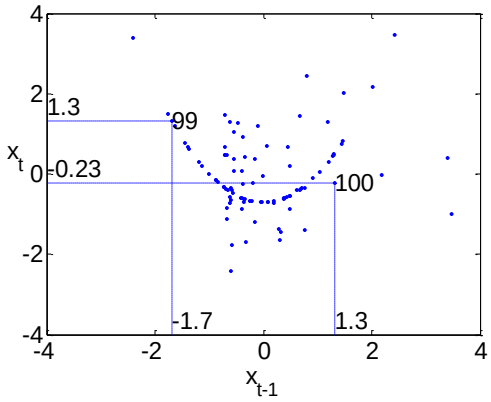
Για το τελευταίο μοντέλο κάνετε πρόβλεψη των δύο επόμενων χρονικών στιγμών (για χρόνους 18 και 19) για διάσταση εμβύθισης *m=2*.

8. Έστω z_t IID N(0,1) και

$$X_t = \begin{cases} z_t & \alpha\nu\ t\ \alpha\rho\tau\iota\sigma\varsigma \\ (z_{t-1}^2 - 1)/\sqrt{2} & \alpha\nu\ t\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\sigma\varsigma \end{cases}$$

a. Να δειχθεί ότι η στοχαστική διαδικασία X_t έχει μέση τιμή μηδέν, διασπορά 1 και είναι ακολουθία ασυσχέτιστων τ.μ. αλλά όχι ανεξάρτητων, δηλαδή είναι λευκός θόρυβος αλλά όχι IID ακολουθία.

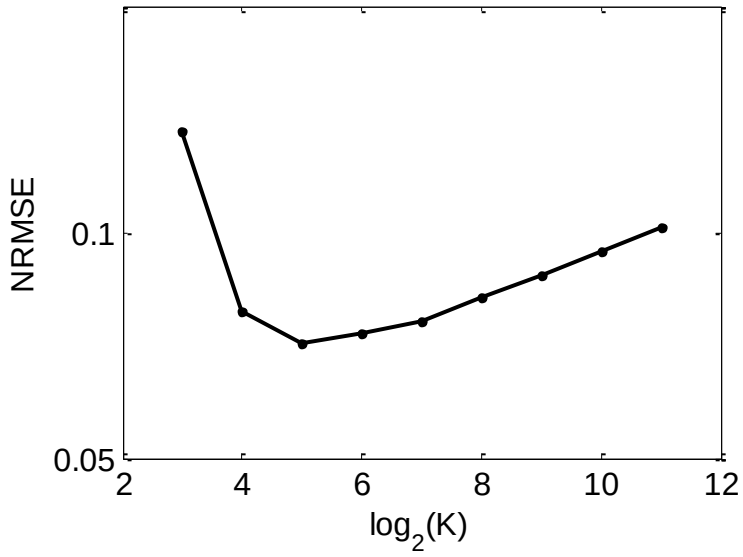
b. Δίνεται το διάγραμμα διασποράς μιας χρονοσειράς 100 παρατηρήσεων από τη στοχαστική διαδικασία X_t, όπου σημειώνονται τα δύο τελευταία σημεία από τη χρονοσειρά (δίνονται με τους δείκτες 99 και 100 για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές). Κάνετε σημειακές προβλέψεις, αν γίνεται, για τις επόμενες δύο χρονικές στιγμές, δηλαδή προβλέψτε τα x_{101} και x_{102}.



c. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη διάσταση συσχέτισης στο $\mathbb{R}^2$ από μια πολύ μεγάλη χρονοσειρά (ας πούμε 10000 παρατηρήσεων) που προέρχεται από τη στοχαστική διαδικασία X_t, δηλαδή η εκτίμηση να γίνει από ένα διάγραμμα διασποράς, όπως στο παραπάνω σχήμα, αλλά για πολλά περισσότερα σημεία. Εξηγείστε αν είναι δυνατή αυτή η εκτίμηση.

Βοήθεια: Διερευνείστε την ιδιότητα της κλιμάκωσης της πυκνότητας σημείων με την απόσταση, δηλαδή για αυξανόμενες αποστάσεις r (μπορείτε να κάνετε και σχετικό σχεδιάγραμμα).

9. Για μια χρονοσειρά 2730 παρατηρήσεων υπολογίστηκε το σφάλμα πρόβλεψης NRMSE (στο τελευταίο 25% των παρατηρήσεων με σύνολο εκμάθησης το πρώτο 75% των παρατηρήσεων) χρησιμοποιώντας τοπικά γραμμικό μοντέλο (διάσταση εμβύθισης m=4, υστέρηση τ=1). Ο υπολογισμός του NRMSE έγινε για ένα αυξανόμενο πλήθος γειτόνων K και τα αποτελέσματα δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



a. Μπορεί το σύστημα που παράγει τη χρονοσειρά να είναι χαοτικό (δικαιολογείστε την απάντηση σας);
b. Ποιο είναι το σφάλμα πρόβλεψης (επίπεδο τιμής NRMSE) για το ίδιο πρόβλημα με μοντέλο AR(4);