Χρονοσειρές - Μάθημα 5

Εκτίμηση μοντέλου MA(q)

στοχαστική διαδικασία AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

στοχαστική διαδικασία MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

στοχαστική διαδικασία ARMA(p,q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$- \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

Εκτίμηση διαδικασίας (μοντέλο)

- AR, MA ή ARMA **?** **άλλο μοντέλο ?**
- τάξη p ή/και q **?**
- εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου **?**

$$\mathrm{AR}(p): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$$

$$\boxed{\mathrm{MA}(q): \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2}$$

$$\mathrm{ARMA}(p,q): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$$

?

Υποθέτω στοχαστική διαδικασία MA(q) για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Προσαρμογή διαδικασίας (μοντέλο) MA(q) ⇒ εκτίμηση παραμέτρων $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$

MA(q) $X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$

Μέθοδος ροπών

Διασπορά $\sigma_X^2 = (1+\theta_1^2+\cdots\theta_q^2)\sigma_Z^2$

Αυτοσυσχέτιση

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \cdots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2} & \tau = 1,2,\ldots,q \\ 0 & \tau > q \end{cases}$$

Μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς τις παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$

Εκτίμηση των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q, \sigma_X^2$ ⇒ $r_1, r_2, \ldots, r_q, s_X^2$

Αλγόριθμος innovation

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Προσαρμογή μοντέλου MA(q) στα δεδομένα

⇓

Ελαχιστοποίηση αθροίσματος τετραγώνων των σφαλμάτων προσαρμογής

$$\min S(\mu, \theta_1, \ldots \theta_q) = \min \sum_{t=q+1}^{n} (x_t - \mu + \theta_1 z_{t-1} + \ldots + \theta_q z_{t-q})^2$$ ως προς $\mu, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$

Αριθμητική μέθοδος βελτιστοποίησης

⇓

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_q$

MA(1) $X_t - \mu = Z_t - \theta Z_{t-1}$

Μέθοδος ροπών

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & \tau = 1 \\ 0 & \tau \geq 2 \end{cases}$$

$$|r_1| > 0.5 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{r_1}{|r_1|}$$

$$|r_1| \leq 0.5 \Rightarrow r_1\hat{\theta}^2 + \hat{\theta} + r_1 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$$

Επιλέγουμε τη λύση $|\hat{\theta}| < 1$ που δίνει αντιστρεψιμότητα

$$\sigma_X^2 = (1+\theta^2+\cdots\theta^q)\sigma_Z^2 \qquad s_Z^2 = \frac{s_X^2}{1+\hat{\theta}^2}$$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Υποθέτω $z_0 = 0$ (και $\mu = 0$) $\qquad z_t = x_t + \theta z_{t-1}$

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = x_2 + \theta z_1 = x_2 + \theta x_1$$

$$z_3 = x_3 + \theta z_2 = x_3 + \theta(x_2 + \theta x_1) = x_3 + \theta x_2 + \theta^2 x_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_n = x_n + \theta z_{n-1} = x_n + \theta x_{n-1} + \theta^2 x_{n-2} + \cdots + \theta^{n-2} x_2 + \theta^{n-1} x_1$$

$$\min \sum_{t=1}^{n} z_t^2 = \min\left\{x_1^2 + (x_2 + x_1\theta)^2 + (x_3 + x_2\theta + x_1\theta^2)^2 \ldots + (x_n + x_{n-1}\theta + \cdots + x_1\theta^{n-1})^2\right\}$$

$$\min\left\{a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{2n-2}\theta^{2n-2}\right\}$$

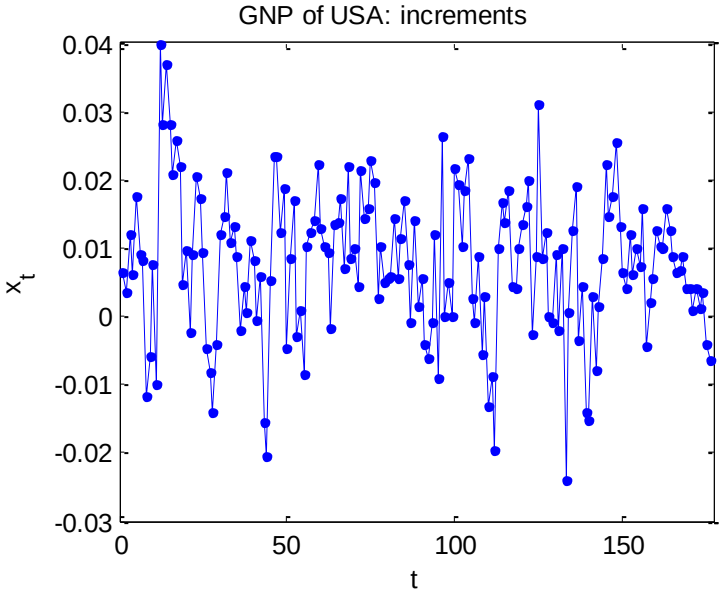
$2n$-3 λύσεις, θα πρέπει να επιλέξω λύση $|\hat{\theta}| < 1$

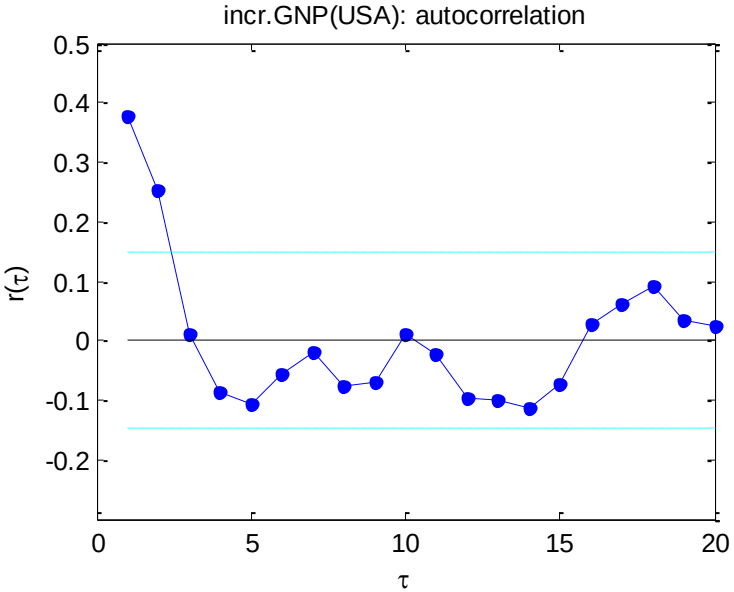
⇓

προγραμματισμός λύσης ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς για αντιστρεψιμότητα

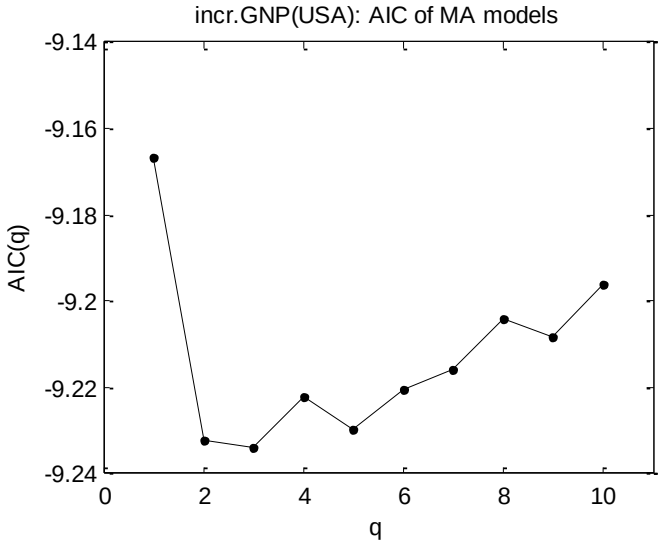
Παράδειγμα

Ρυθμός μεταβολής του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ) των ΗΠΑ (τετραμηνιαίες τιμές, 2ο τετράμηνο 1947 – 1ο τετράμηνο 1991). Η εποχικότητα έχει διορθωθεί (αφαιρώντας τον εποχικό κύκλο).





τάξη
MA μοντέλου ?



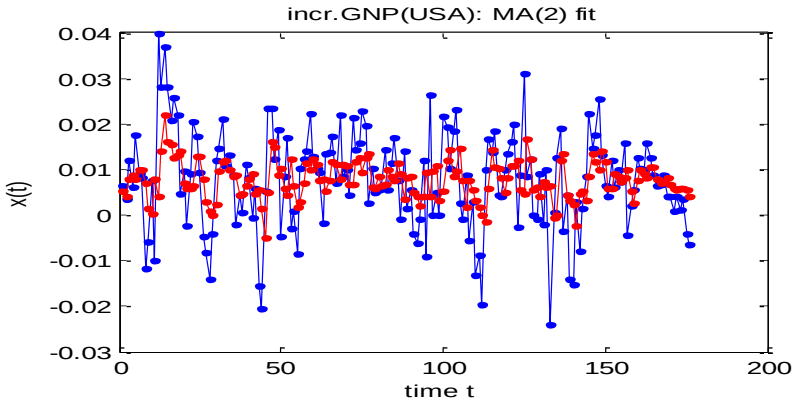
MA(2) ?

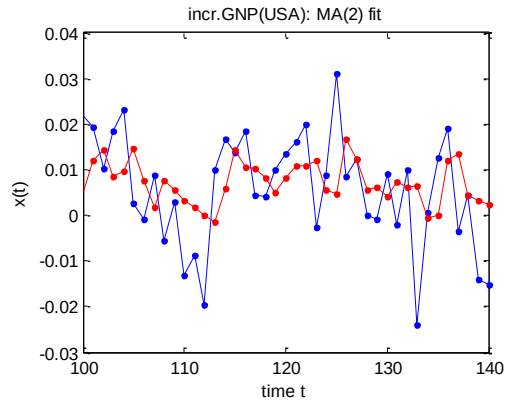
εκτίμηση παραμέτρων $\bar{x} = 0.0077$

OLS → $\hat{\theta}_1 = -0.312 \quad \hat{\theta}_2 = -0.272$

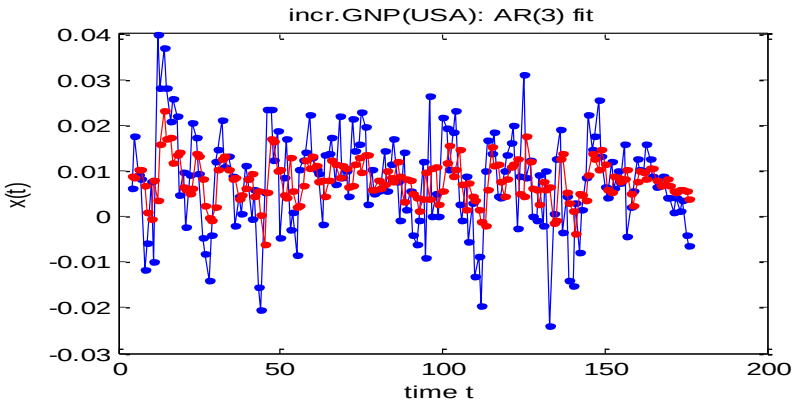
διασπορά σφαλμάτων (υπολοίπων) $s_z^2 = 0.000097 \quad s_z = 0.00983$

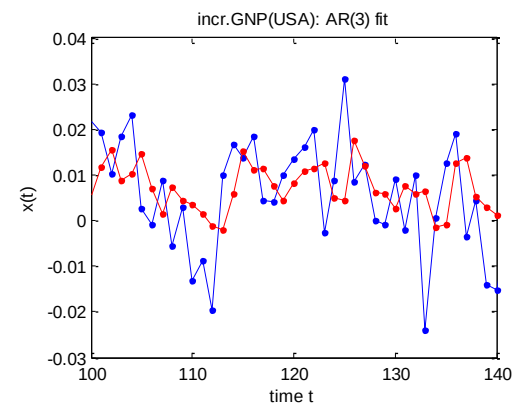
προσαρμοσμένο MA(2) $x_t = 0.0077 + z_t + 0.312 z_{t-1} + 0.272 z_{t-2} \qquad t = 1, \ldots, 176$





προσαρμογή με MA(2)





προσαρμογή με AR(3)

Διάγνωση καταλληλότητας μοντέλου

είναι τα υπόλοιπα ανεξάρτητα → έλεγχο ανεξαρτησίας στα $\{\hat{z}_t\}_{t=p+1}^{n}$

Εκτίμηση μοντέλου ARMA(p,q)

στοχαστική διαδικασία AR(p)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma_Z^2)$$

στοχαστική διαδικασία MA(q)

$$X_t = Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

στοχαστική διαδικασία ARMA(p,q)

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t$$

$$- \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

Εκτίμηση διαδικασίας (μοντέλο)

- AR, MA ή ARMA **?** **άλλο μοντέλο ?**
- τάξη p ή/και q **?**
- εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου **?**

$$\mathrm{AR}(p): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \sigma_Z^2$$

$$\mathrm{MA}(q): \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$$

$$\mathrm{ARMA}(p,q): \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$$

?

Υποθέτω στοχαστική διαδικασία ARMA(p,q) για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Προσαρμογή διαδικασίας (μοντέλο) ARMA(p,q)

εκτίμηση παραμέτρων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \sigma_Z^2$

Μέθοδος ροπών και μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων όπως για MA(q)

ARMA(1,1) $X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + Z_t - \theta Z_{t-1}$

Μέθοδος ροπών

Εκτίμηση των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_X^2$ ⇒ $r_1, r_2, \ldots, r_p, s_X^2$

$$\rho_\tau = \begin{cases} \dfrac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta} & \tau = 1 \\ \phi\rho_{\tau-1} & \tau \geq 2 \end{cases}$$

Επίλυση συστήματος εξισώσεων ως προς ϕ, θ **?**

$$\sigma_X^2 = \frac{1+\theta^2-2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma_Z^2 \qquad s_Z^2 = \frac{1-\hat{\phi}^2}{1+\hat{\theta}^2-2\hat{\phi}\hat{\theta}} s_X^2$$

15 **Η συνάρτηση αντίστροφης αυτοσυσχέτισης (inverse autocorrelation)**

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

16 **Μέθοδοι διερεύνησης της επάρκειας μοντέλου**

Υποθέτω $z_0 = 0$ (και $x_0 = \mu = 0$)

$$z_1 = \boxed{x_1}$$

$$z_2 = x_2 - \phi x_1 + \theta z_1 = \boxed{x_2 + (\theta-\phi)x_1}$$

$$z_3 = x_3 - \phi x_2 + \theta z_2 = \boxed{x_3 + (\theta-\phi)x_2 + \theta(\theta-\phi)x_1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

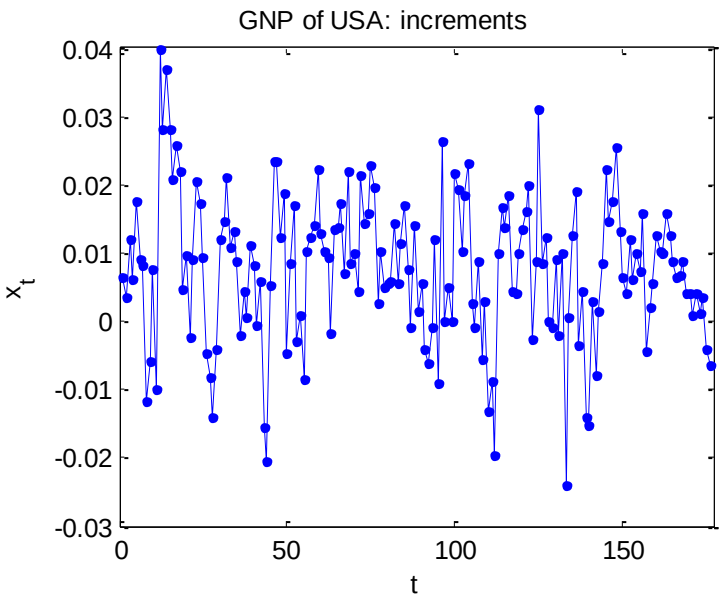
$$z_n = x_n - \phi x_{n-1} + \theta z_{n-1} = \boxed{x_n - (\theta-\phi)x_{n-1} + \theta(\theta-\phi)x_{n-2} + \cdots + \theta^{n-2}(\theta-\phi)x_1}$$

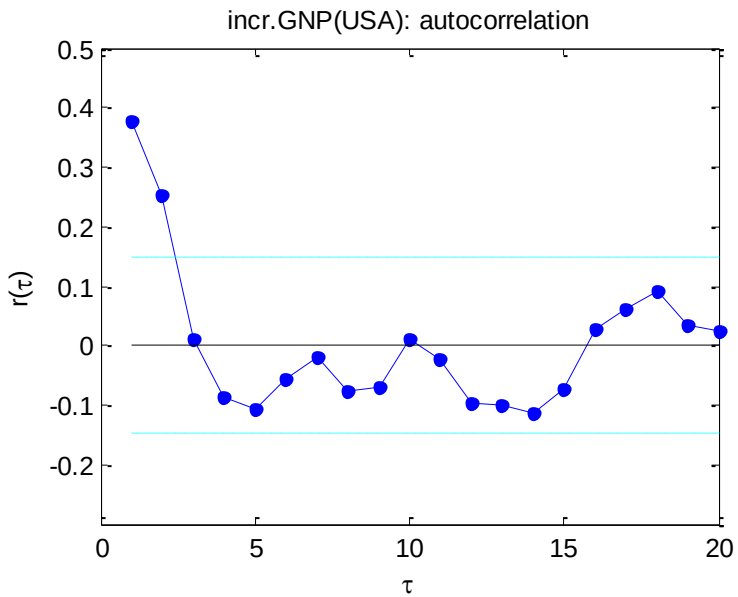
$$\min \sum_{t=1}^{n} z_t^2$$

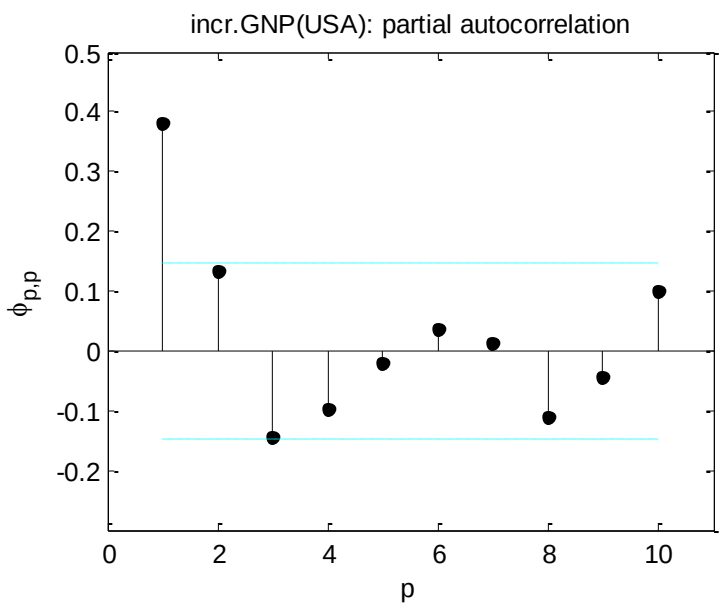
προγραμματισμός λύσης ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς για αντιστρεψιμότητα και στασιμότητα

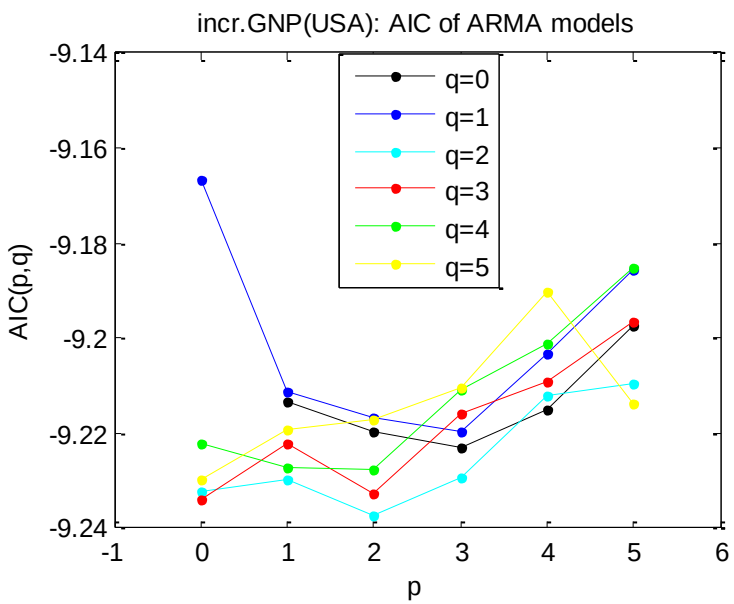
Παράδειγμα

Ρυθμός μεταβολής του ακαθάριστου εθνικού προϊόντος (ΑΕΠ) των ΗΠΑ (τετραμηνιαίες τιμές, 2ο τετράμηνο 1947 – 1ο τετράμηνο 1991). Η εποχικότητα έχει διορθωθεί (αφαιρώντας τον εποχικό κύκλο).









τάξη ARMA μοντέλου ?

ARMA(2,2) ?

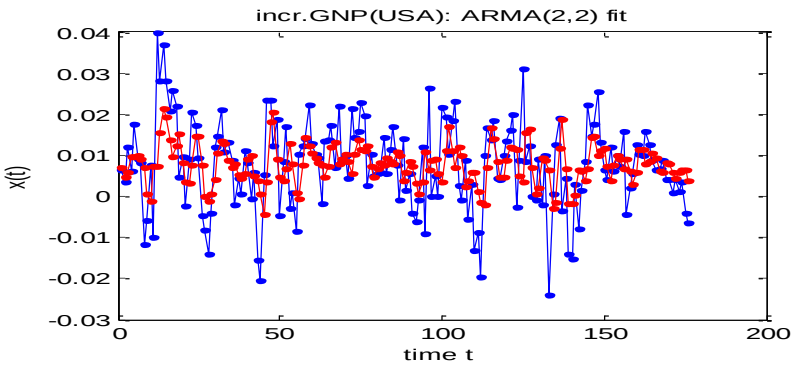
εκτίμηση παραμέτρων $\bar{x} = 0.0077$

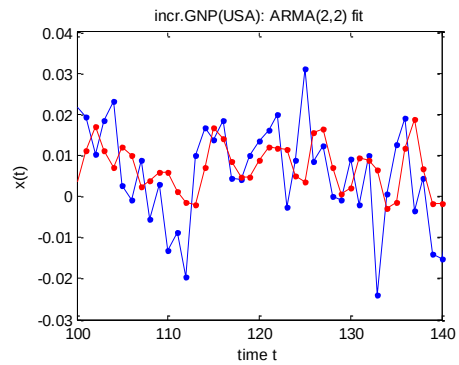
OLS → $\hat{\phi}_1 = 0.614 \quad \hat{\phi}_2 = -0.455 \qquad \hat{\theta}_1 = 0.301 \quad \hat{\theta}_2 = -0.600$

διασπορά σφαλμάτων (υπολοίπων) $s_z^2 = 0.000097 \quad s_z = 0.00983$

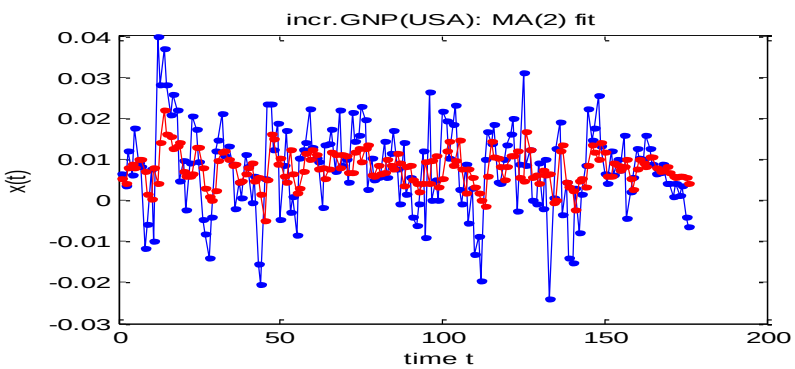
$t = 1, \ldots, 176$

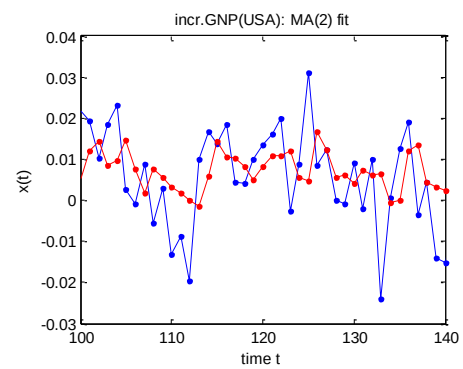
προσαρμοσμένο ARMA(2,2) $\hat{x}_t = 0.0065 + 0.614 x_{t-1} - 0.455 x_{t-2} + z_t - 0.301 z_{t-1} + 0.600 z_{t-2}$



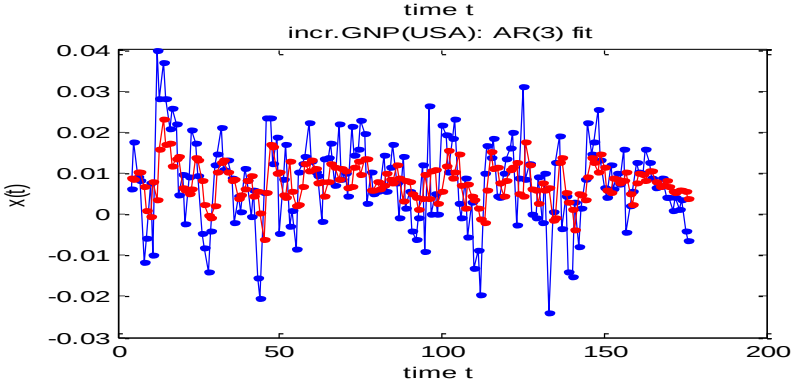


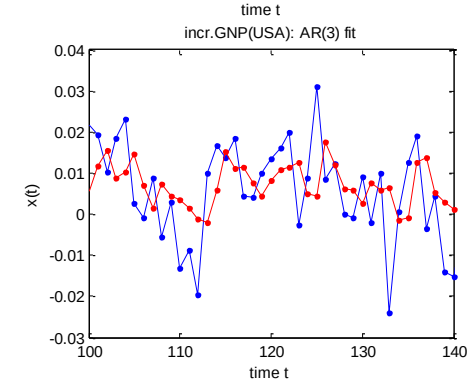
προσαρμογή με ARMA(2,2)





προσαρμογή με MA(2)





προσαρμογή με AR(3)

Μοντέλο χρονοσειράς με τάση (ARIMA)

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ **τυχαίος περίπατος** (μη-στάσιμη διαδικασία)

$Y_t = Y_{t-1} + X_t = X_1 + X_2 + \cdots X_t$ $\quad \{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ iid $\quad \mathrm{E}[X_t] = 0 \quad \mathrm{E}[X_t^2] = \sigma^2$

διαδικασία AR(1) για $\phi = 1$

Πρώτες διαφορές: $X_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ διαδικασία iid

---

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ μη-στάσιμη διαδικασία **που παρουσιάζει τάση**

πρώτες διαφορές: $X_t = Y_t - Y_{t-1}$ στάσιμη διαδικασία **?**

ΝΑΙ

ΟΧΙ

διαφορές δεύτερης τάξης: $X_t' = X_t - X_{t-1} = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$ στάσιμη διαδικασία **?**

ΟΧΙ **ΝΑΙ**

$X_t = \nabla^d Y_t$ $\quad \{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ στάσιμη μετά από διαφορές d τάξης:

$= (1-B)^d Y_t$

$\boxed{\text{Συνήθως } d = 1}$

AR(p), MA(q), ARMA(p,q) **?**

$\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ μη-στάσιμη διαδικασία **ARIMA(p,d,q)**

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \theta_2 Z_{t-2} - \cdots - \theta_q Z_{t-q}$$

Το πολυώνυμο $\phi(B)(1-B)^d$ έχει μια ρίζα =1 και όλες τις άλλες εκτός του μοναδιαίου κύκλου

$$\phi(B) X_t = \theta(B) Z_t$$

$$\phi(B) \nabla^d Y_t = \theta(B) Z_t$$

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B) Z_t$$

Προσαρμογή μοντέλου ARIMA (διαδικασία Box-Jenkins)

χρονοσειρά παρατηρήσεων $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

διάγραμμα ιστορίας (γράφημα χρονοσειράς)
αυτοσυσχέτιση (ισχυρή και φθίνει πολύ αργά)
?
άλλο?

ένδειξη πως έχει τάση

διαφορές τάξης d $\quad x_t = (1-B)^d y_t$
άλλο?

στάσιμη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

τάξη μοντέλου
εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου

προσαρμογή μοντέλου AR(p), MA(q), ARMA(p,q)

διαγνωστικός έλεγχος **?**

επάρκεια (adequacy) του μοντέλου

κατάλληλο μοντέλο ARMA(p,q) για $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
με τον αντίστροφο μετασχηματισμό του $x_t = (1-B)^d y_t$
έχουμε το μοντέλο ARIMA(p, d,q) για $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

αν η αυτοσυσχέτιση φθίνει στο 0

η χρονοσειρά είναι στάσιμη

αν η αυτοσυσχέτιση είναι στατιστικά ασήμαντη

είναι iid ? έλεγχος ανεξαρτησίας **?**

ΝΑΙ
ΣΤΟΠ

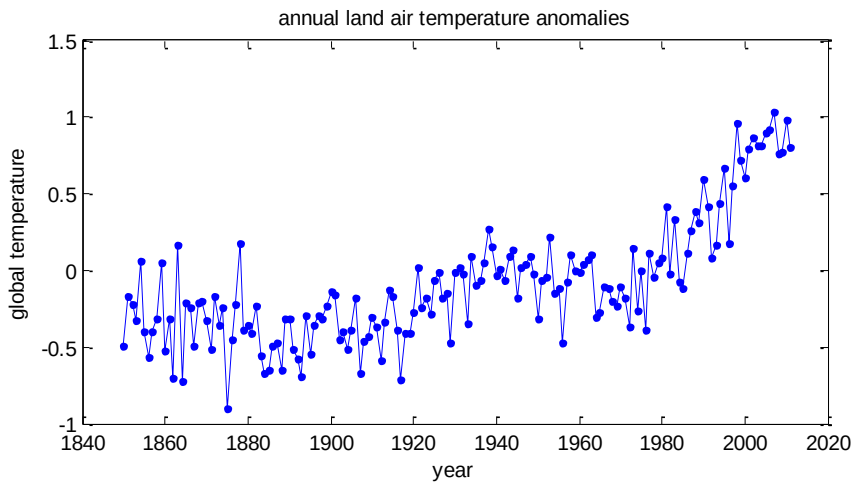
ΟΧΙ
μη-γραμμικό μοντέλο?

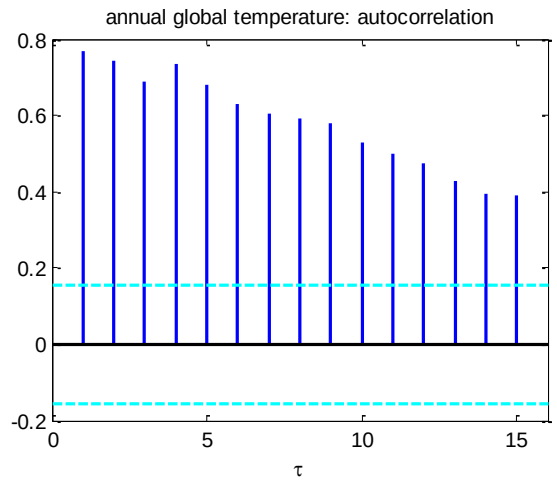
πρόβλεψη?

Παράδειγμα Ετήσιος δείκτης για τη θερμοκρασία της γης (ανωμαλία στη θερμοκρασία εδάφους στο βόρειο ημισφαίριο σε πλέγμα 5° x 5°), περίοδος 1850-2011

Πηγή: http://www.cru.uea.ac.uk/cru/data/temperature

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ πραγματικές μετρήσεις

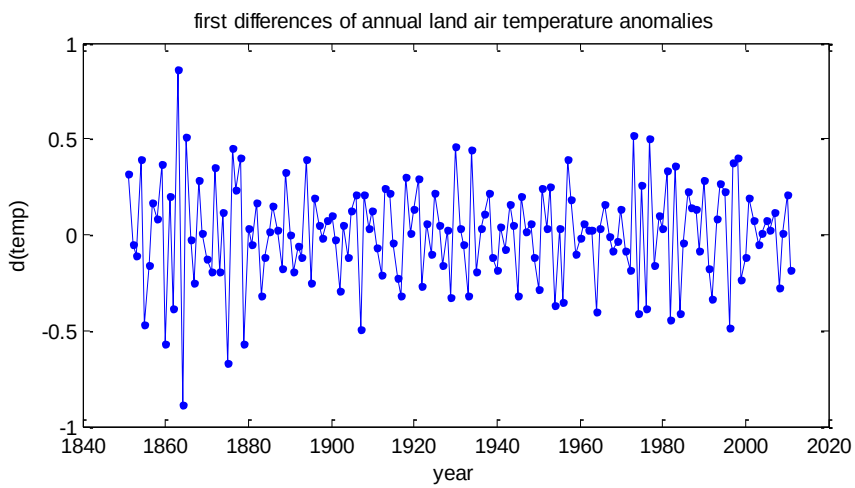


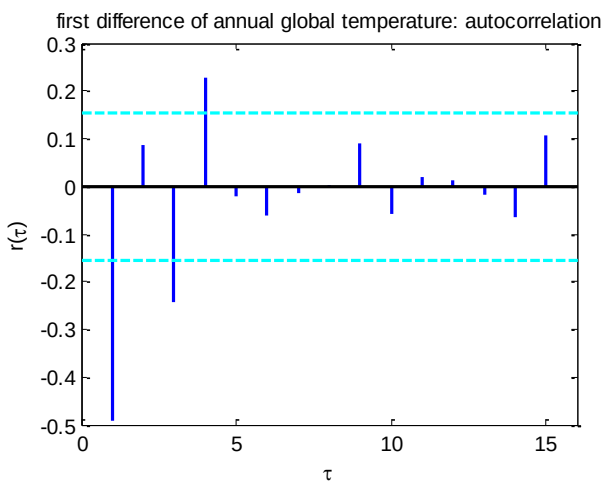


στάσιμη χρονοσειρά?

ΟΧΙ

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ πρώτες διαφορές



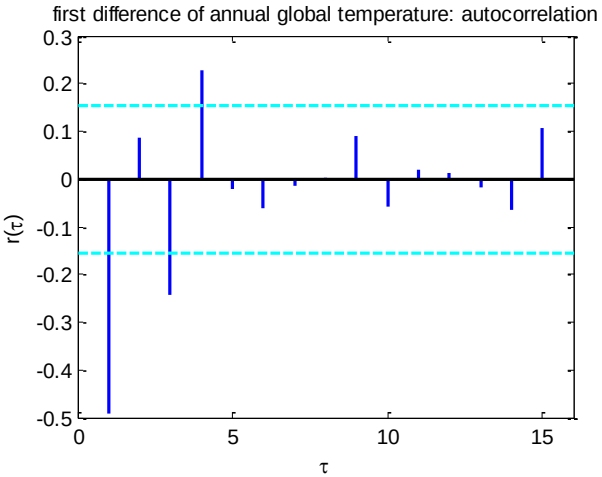


στάσιμη χρονοσειρά?

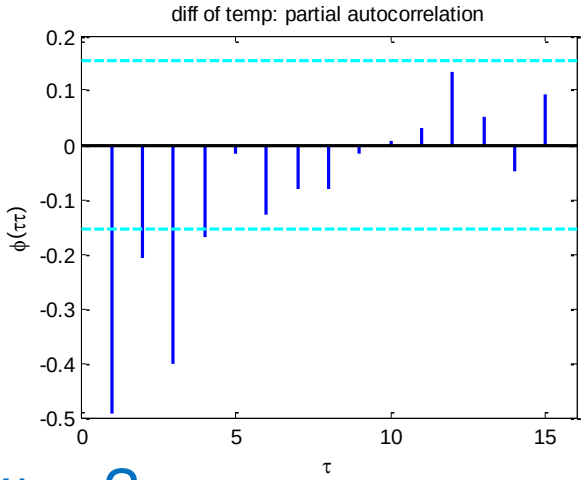
ΝΑΙ

Μοντέλο για τη χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$?

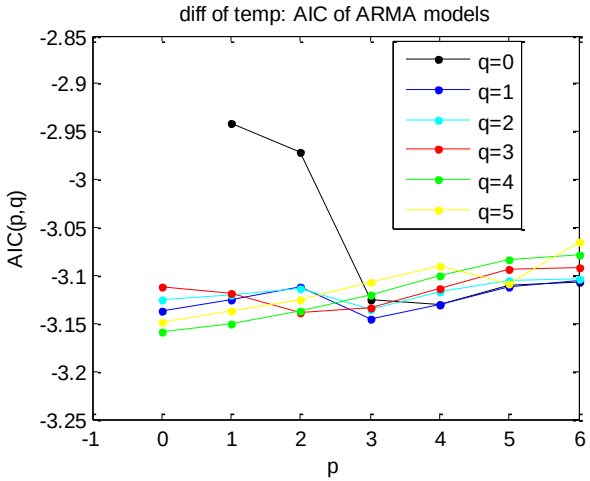
αυτοσυσχέτιση



μερική αυτοσυσχέτιση



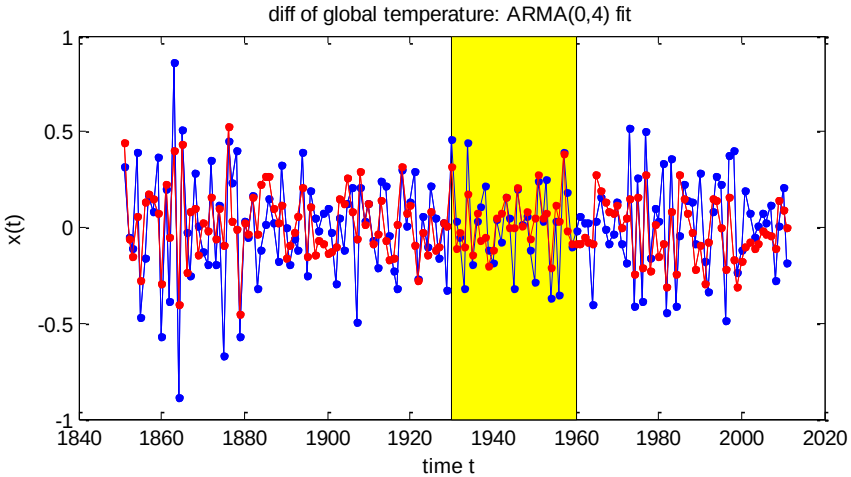
κριτήριο AIC



Πιο κατάλληλη μορφή μοντέλου ?

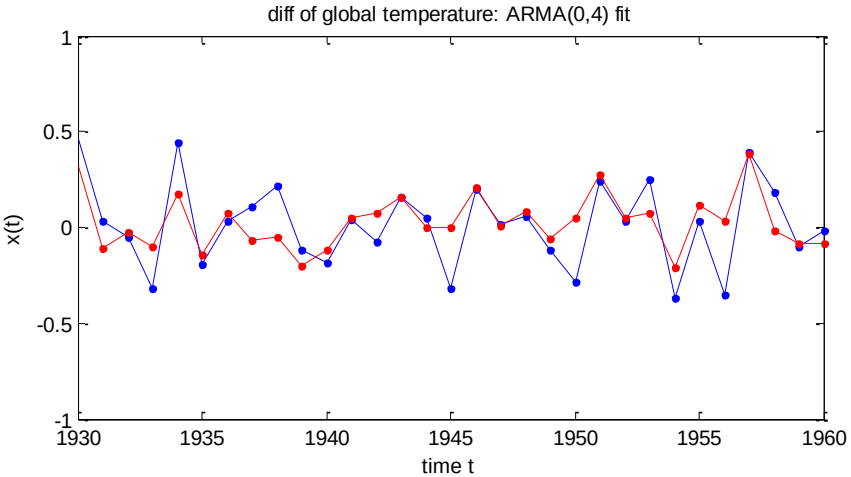
προσαρμογή MA(4) ($\bar{x} = 0.008$)

$$x_t = 0.008 + z_t - 0.758 z_{t-1} - 0.022 z_{t-2} - 0.219 z_{t-3} + 0.275 z_{t-4} \qquad s_z^2 = 0.0414 \qquad s_z = 0.2035$$



Μοντέλο για τη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

ARIMA(0,1,4) $(1-B)Y_t = \theta_4(B) Z_t$



Μοντέλο χρονοσειράς με εποχικότητα (ARMA$_s$)

Έστω η χρονοσειρά παρατηρήσεων $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ χωρίς τάση και με περιοδικότητα (εποχικότητα)

Απαλοιφή περιοδικότητας τάξης s, $k = [n/s]$:

- Εκτίμηση του περιοδικού στοιχείου s_i $i=1,\ldots,s$ $\quad s_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{i+js}$ $\quad x_t = y_t - s_t$
- Συμμετρικός κινούμενος μέσος τάξης s

  s άρτιος $\quad x_t = \frac{1}{s}(0.5y_{t-s/2} + y_{t-s/2+1} + \cdots + y_{t+s/2-1} + 0.5y_{t+s/2})$

  s περιττός $\quad x_t = \frac{1}{s}\sum_{i=-(s-1)/2}^{(s-1)/2} y_{t+i}$
- s – διαφορές (διαφορά υστέρησης s) $\quad X_t = \nabla_s Y_t = (1-B^s)Y_t = Y_t - Y_{t-s}$

Έστω η χρονοσειρά παρατηρήσεων $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ χωρίς τάση και με εποχικότητα s

Υπόθεση: υπάρχουν σχέσεις αλλά μόνο μεταξύ περιόδων (η εξάρτηση παρουσιάζεται σε χρονικά βήματα s) :

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{2s}, x_{2s+1}, x_{2s+2}, \ldots, x_{3s}, x_{3s+1}, x_{3s+2}, \ldots x_n\}$$

k κύκλοι περιόδου s

μοντέλο **ARMA(P,Q)$_s$** για $\{x_i, x_{i+s}, x_{i+2s}, \ldots, x_{i+ks}\}$ **ίδιο** για $i = 1, 2, \ldots, s$

$i = 1, 2, \ldots, s \qquad X_{i+st} = \Phi_1 X_{i+s(t-1)} + \cdots + \Phi_P X_{i+s(P-1)} + Z_{i+st} - \Theta_1 Z_{i+s(t-1)} - \cdots - \Theta_Q Z_{i+s(Q-1)}$

$t = Ps+1, Ps+2, \ldots, n \qquad X_t = \Phi_1 X_{t-s} + \cdots + \Phi_P X_{t-Ps} + Z_t - \Theta_1 Z_{t-s} - \cdots - \Theta_Q Z_{t-Qs}$

$\Phi(B^s)X_t = \Theta(B^s)Z_t$ μοντέλο ARMA(P,Q)$_s$ για $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Μοντέλο χρονοσειράς με εποχικότητα (ARIMA$_s$)

Επέκταση του ARMA(P,Q)$_s$ όταν η χρονοσειρά έχει «εποχική τάση», δηλαδή τάση για τις χρονικές στιγμές t, $t+s$, $t+s$, …

Έστω η χρονοσειρά παρατηρήσεων $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ με εποχική τάση και σχέσεις αλλά μόνο μεταξύ περιόδων

- s – διαφορές (διαφορά υστέρησης s)

  $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \longrightarrow \{x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n\}$

  $x_t = \nabla_s y_t = (1 - B^s) y_t = y_t - y_{t-s}$

- ARMA(P,Q)$_s$ $\quad \Phi(B^s) X_t = \Theta(B^s) Z_t$

ARIMA(P,1,Q)$_s$

$$\Phi(B^s)(1 - B^s) Y_t = \Theta(B^s) Z_t$$

Γενικά ARIMA(P,D,Q)$_s$

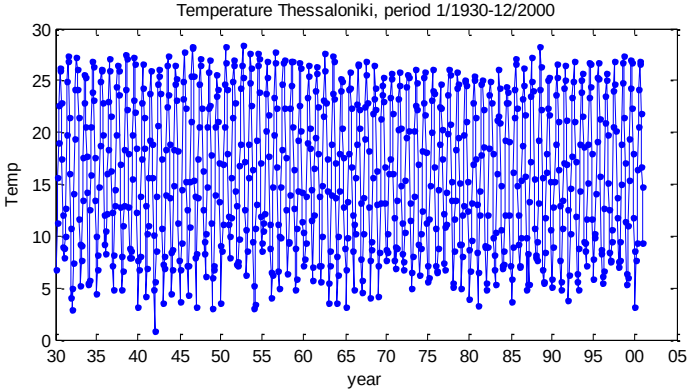
$$\Phi(B^s)(1 - B^s)^D Y_t = \Theta(B^s) Z_t$$

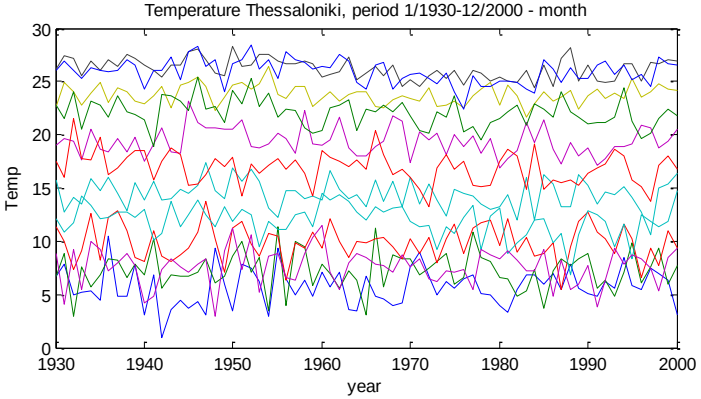
17 **Μοντέλα ARFIMA (ή FARIMA)**

Παράδειγμα Μέση μηνιαία θερμοκρασία του σταθμού Θεσσαλονίκης, περίοδος 1930-2000

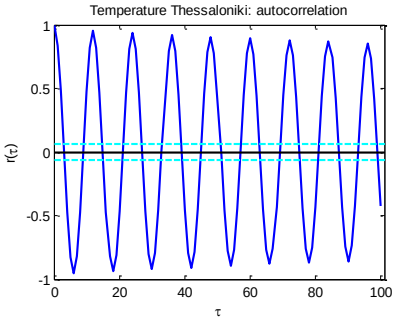
μέρος της καταγραφής $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $n = 71*12 = 852$

ΕΤΟΣ	ΙΑΝΟΥΑΡ	ΦΕΒΡΟΥΑΡ	ΜΑΡΤΙΟΣ	ΑΠΡΙΛ	ΜΑΙΟΣ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥΓΟΥΣΤ	ΣΕΠΤΕΜΒ	ΟΚΤΩΒΡ	ΝΟΕΜΒΡ	ΔΕΚΕΜΒΡ
1930	6,7	6,7	11,3	15,7	19	22,6	26,2	26	22,8	17,5	12,1	8,9
1931	7,9	8,8	10	12,7	19,7	24,9	27,4	26,9	21,5	16	10,8	4,1
1932	5	2,9	7,4	14,1	19,4	24,1	27,2	26,1	24,1	21,5	11,7	9,2
1933	5,2	7,6	9,1	13,5	17,6	22,8	25,5	25,3	20,5	17,7	14,2	5,5
1934	5,3	5,7	12,6	15,9	20,5	23,9	26,9	26,3	23,1	17,6	13,4	10
1935	4,5	6,8	8,2	14,7	18,7	24,9	26,1	26	22,8	19,8	12,1	9,2
1936	10,5	8,3	12,2	16	18,4	23	27,1	25,9	21,6	16,3	12,3	7,2
1937	4,8	8,2	12,9	14,5	19,7	24,4	26,4	26	23,6	16,9	12,8	8
1938	4,8	6,6	11	12,9	18,4	24,1	27,5	27,1	22,2	17,9	12,8	8,8
1939	7,9	7,9	8,5	15,5	19,8	23,1	27,2	26,6	21,9	18,5	12,3	7,7
1940	3,1	6,8	8,1	13,9	17,5	22,9	26,6	24,3	21,4	18,5	13	4,2
1941	6,9	10,2	11	15,6	19,2	23,7	26	26	18,9	15,7	10,1	4,8
1942	0,9	5,6	8,6	13,9	20,7	24,6	25,4	26,1	23,8	17,5	10,7	7,3





ισχυρή περιοδικότητα (εποχικότητα)

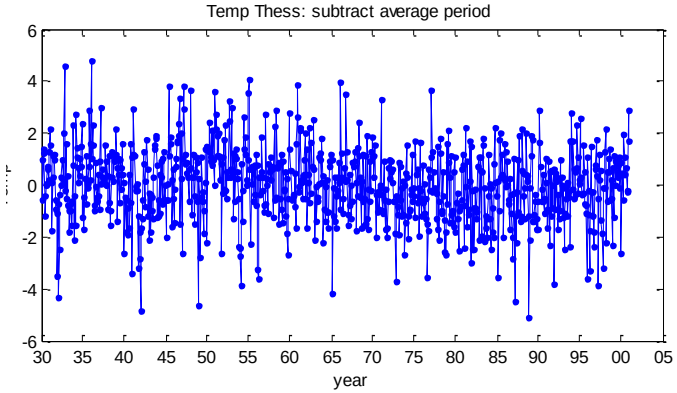


Απαλοιφή περιοδικότητας (εποχικότητα)

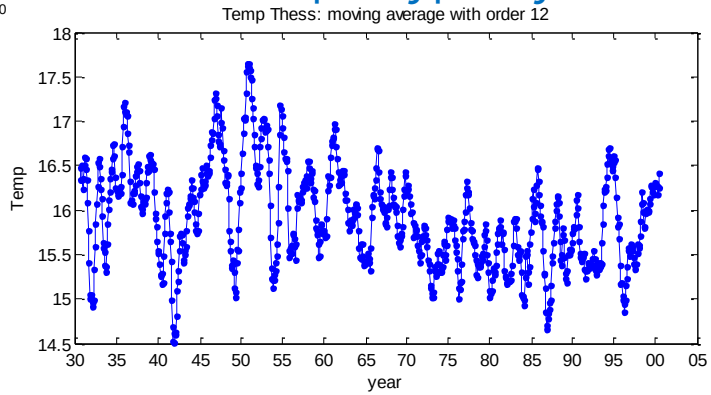
ίδιο μοντέλο ARMA$(P,Q)_s$ για κάθε μήνα

?

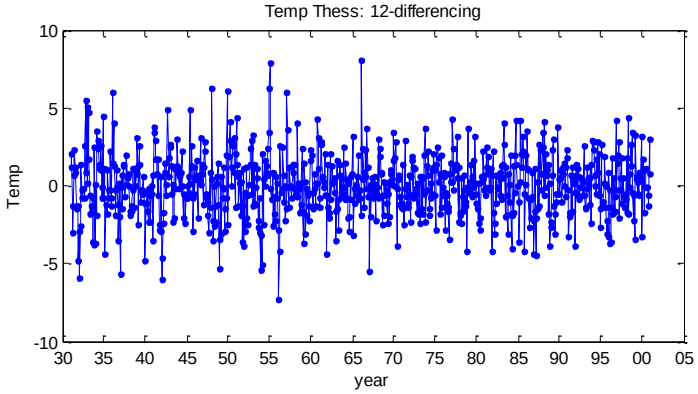
εκτίμηση εποχικού στοιχείου



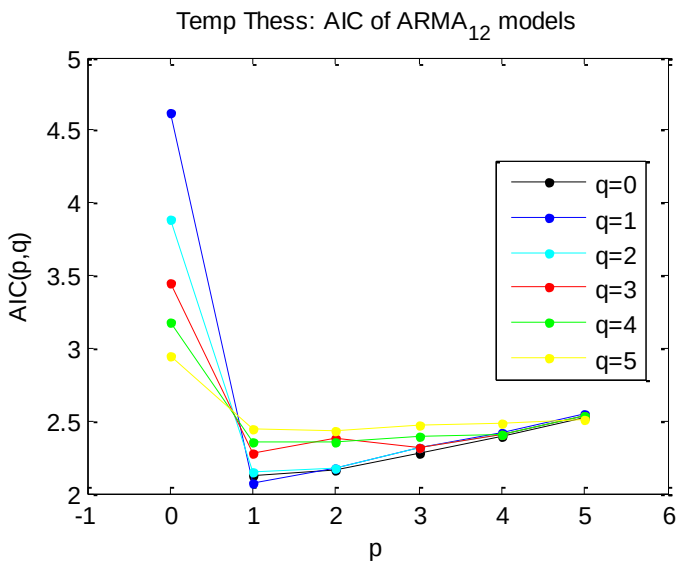
κινούμενος μέσος

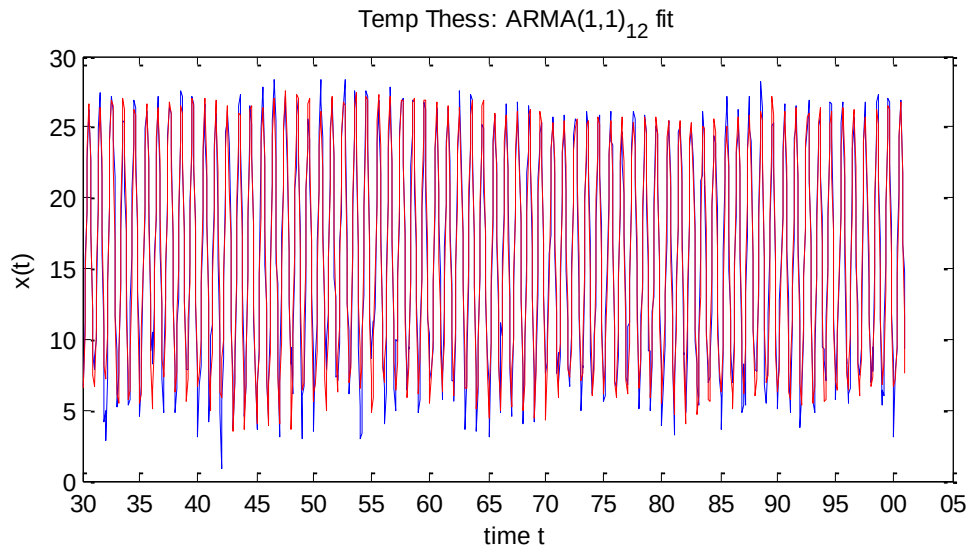


12-διαφορές



μοντέλο ARMA$(P,Q)_s$

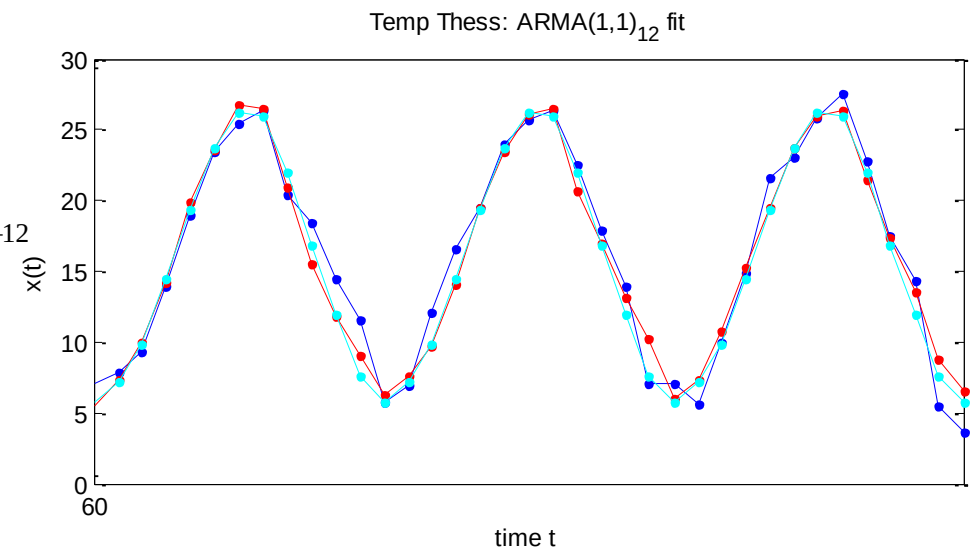




προσαρμογή ARMA$(1,1)_{12}$

$$\bar{x} = 15.928$$

$$x_t = 0.0075 + 0.9995 x_{t-12} + z_t - 0.5242 z_{t-12}$$



τυπική απόκλιση της σειράς των σφαλμάτων $s'_z = 1.603$

Προσαρμογή με εκτίμηση εποχικού στοιχείου

$$s_z = 1.427$$

Μοντέλο χρονοσειράς με τάση και εποχικότητα (SARIMA)

Έστω η χρονοσειρά παρατηρήσεων $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ έχει

τάση και περιοδικότητα s

απαλοιφή τάσης

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ → $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

απαλοιφή περιοδικότητας

εξαρτήσεις μεταξύ συνεχόμενων παρατηρήσεων (χρονικό βήμα 1)

$x_{t-2}, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}$

εξαρτήσεις μεταξύ στοιχείων αντίστοιχων περιόδων (χρονικό βήμα s)

$x_{t-2s}, x_{t-s}, x_t, x_{t+s}, x_{t+2s}$

Γενικά μοντέλο ARIMA(p,1,q)

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B) Z_t$$

Γενικά μοντέλο ARIMA(P,1,Q)$_s$

$$\Phi(B^s)(1-B^s)^D Y_t = \Theta(B^s) Z_t$$

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D Y_t = \theta(B)\Theta(B^s) Z_t$$

SARIMA(p,d,q)×(P,D,Q)$_s$

Εποχικό πολλαπλασιαστικό μοντέλο

Συνήθως

$d = 1$

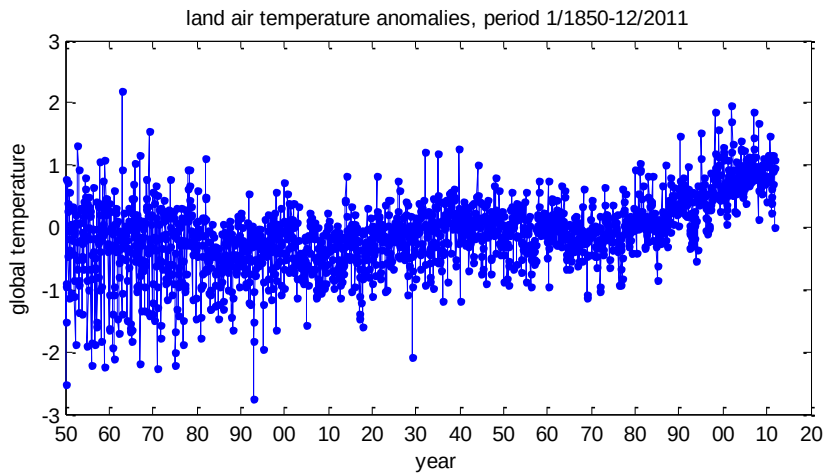
$D = 0$

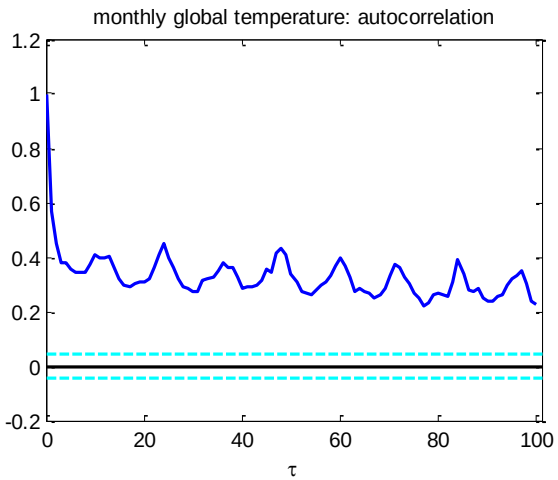
$d = 0$ και $D = 0$ **SARMA(p,q)×(P, Q)$_s$**

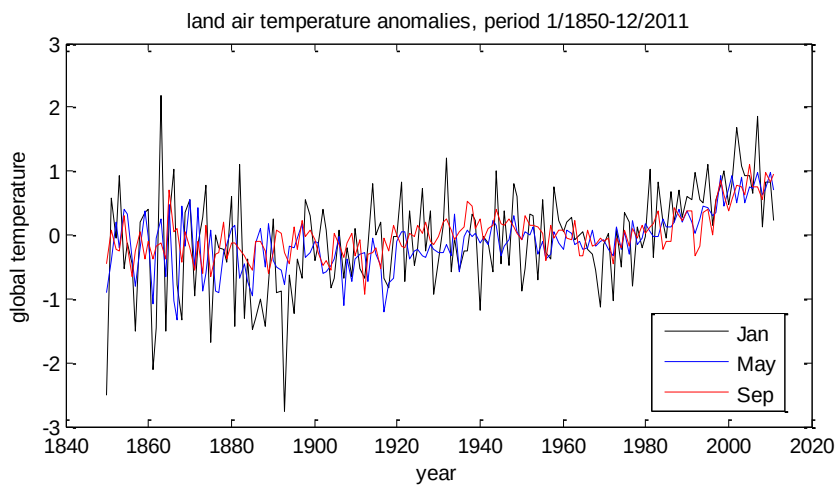
Παράδειγμα Μηνιαίος δείκτης για τη θερμοκρασία της γης (ανωμαλία στη θερμοκρασία εδάφους στο βόρειο ημισφαίριο σε πλέγμα 5° x 5°), περίοδος 1850-2011

Πηγή: http://www.cru.uea.ac.uk/cru/data/temperature

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ πραγματικές μετρήσεις







απαλοιφή τάσης ?

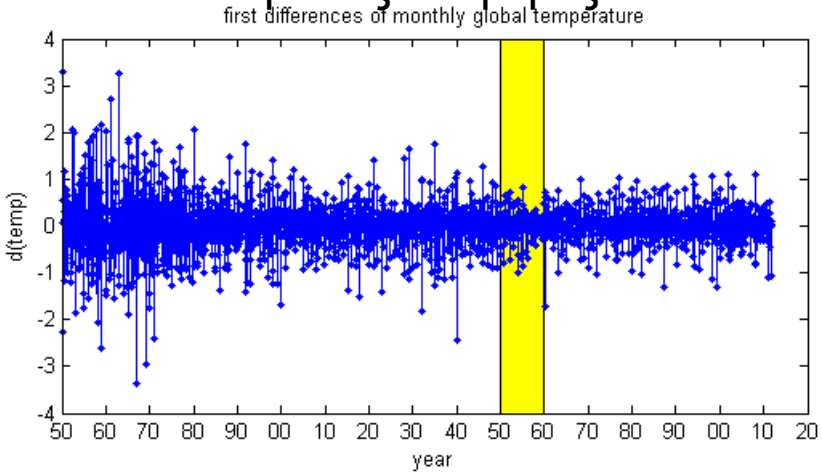
απαλοιφή περιοδικότητας ?

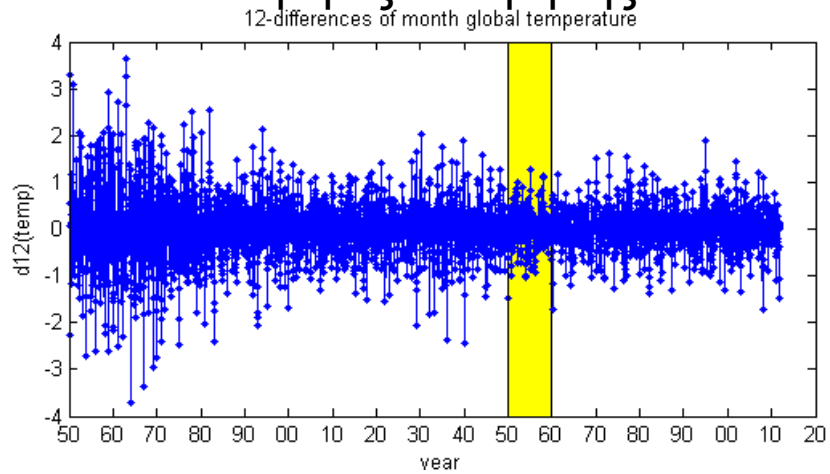
εξαρτήσεις μεταξύ συνεχόμενων παρατηρήσεων (χρονικό βήμα 1) ?

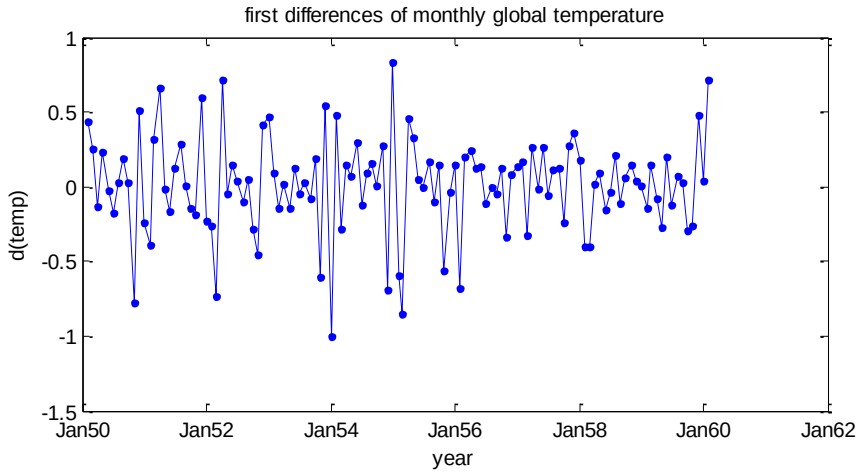
εξαρτήσεις μεταξύ στοιχείων αντίστοιχων περιόδων (χρονικό βήμα s) ?

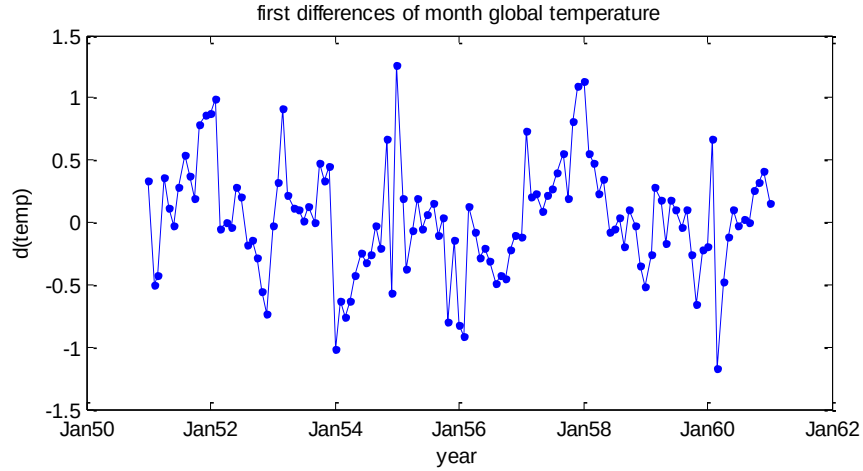
πρώτες διαφορές

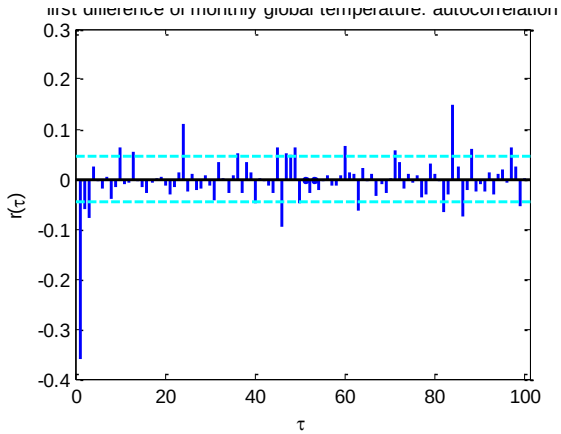
διαφορές υστέρησης 12







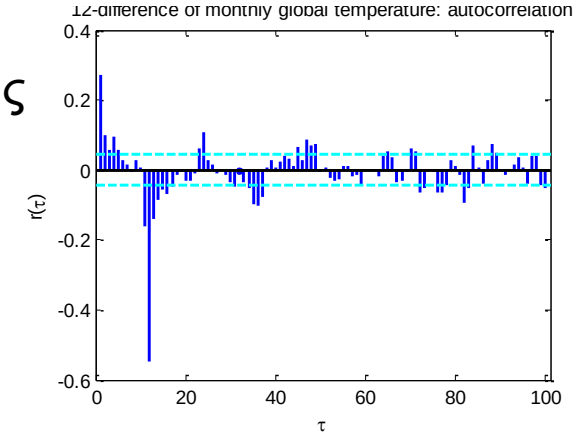


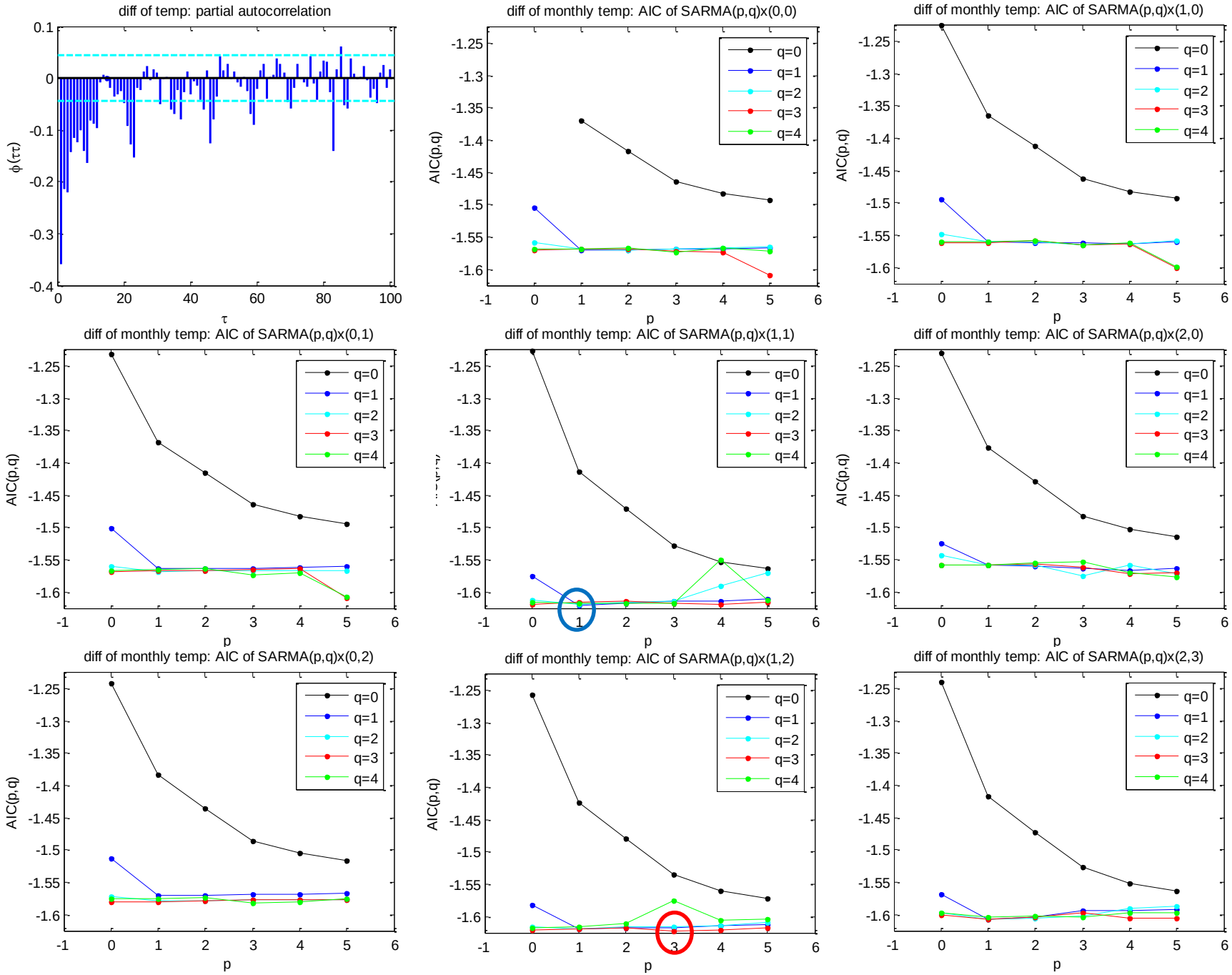


σημαντικές αυτοσυσχετίσεις

για τ=1,2,…

για τ=12,24,…





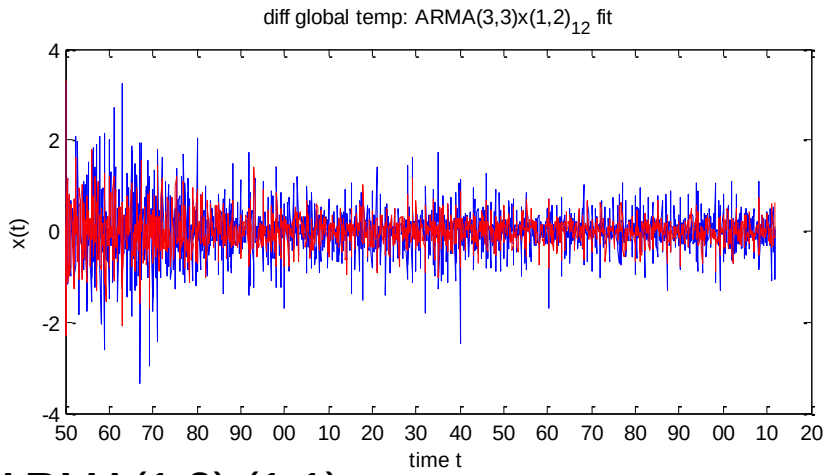
min(AIC)=-1.622 για SARMA(3,3) $(1,2)_{12}$ SARMA(1,2) $(1,1)_{12}$ AIC=-1.618

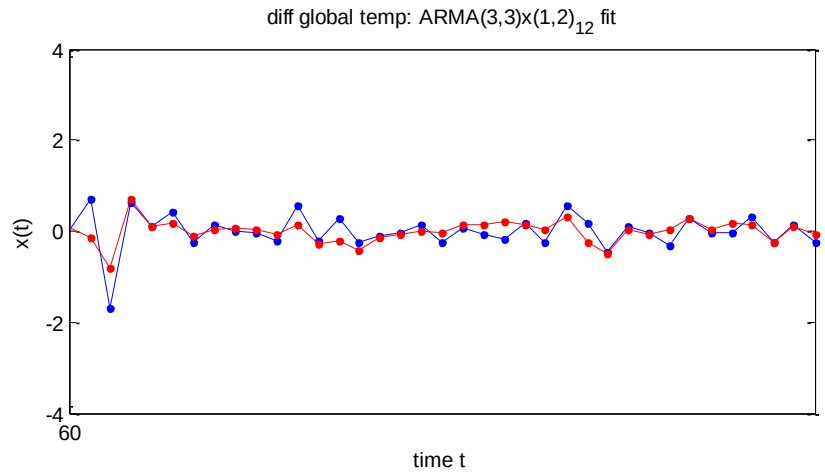
SARMA(3,3) $(1,2)_{12}$

$$\bar{x} = 0.0013$$

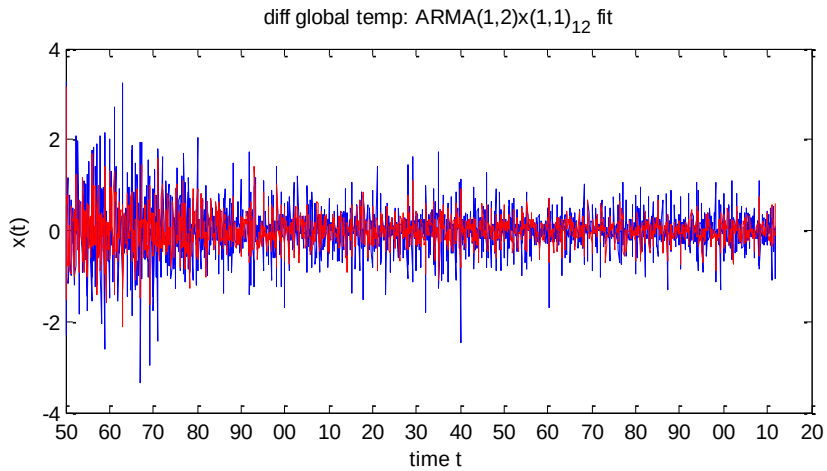
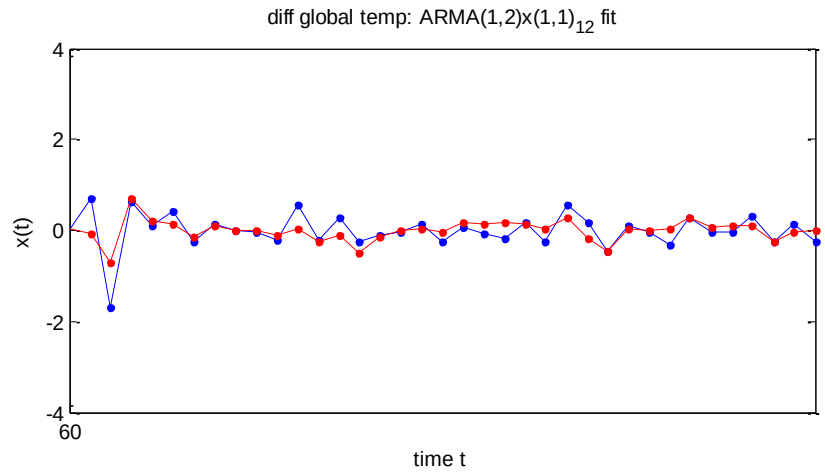
$$s_z = 0.445$$

$$x_t = -1.12x_{t-1} - 0.70x_{t-2} + 0.22x_{t-3} + 0.95x_{t-12} + 1.11x_{t-13} + 0.70x_{t-14} - 0.18x_{t-15}$$
$$+ z_t + 0.42z_{t-1} - 0.22z_{t-2} - 0.95z_{t-3} - 1.01z_{t-12} - 0.48z_{t-13} + 0.23z_{t-14} + 0.93z_{t-15}$$
$$+ 0.13z_{t-24} + 0.08z_{t-25} - 0.05z_{t-26} - 0.08z_{t-27}$$





SARMA(1,2) $(1,1)_{12}$

$$s_z = 0.446$$

$$x_t = 0.35x_{t-1} + 0.98x_{t-12} - 0.34x_{t-13}$$
$$+ z_t - 1.04z_{t-1} + 0.1z_{t-2} - 0.93z_{t-12} + 0.99z_{t-13} - 0.12z_{t-14}$$