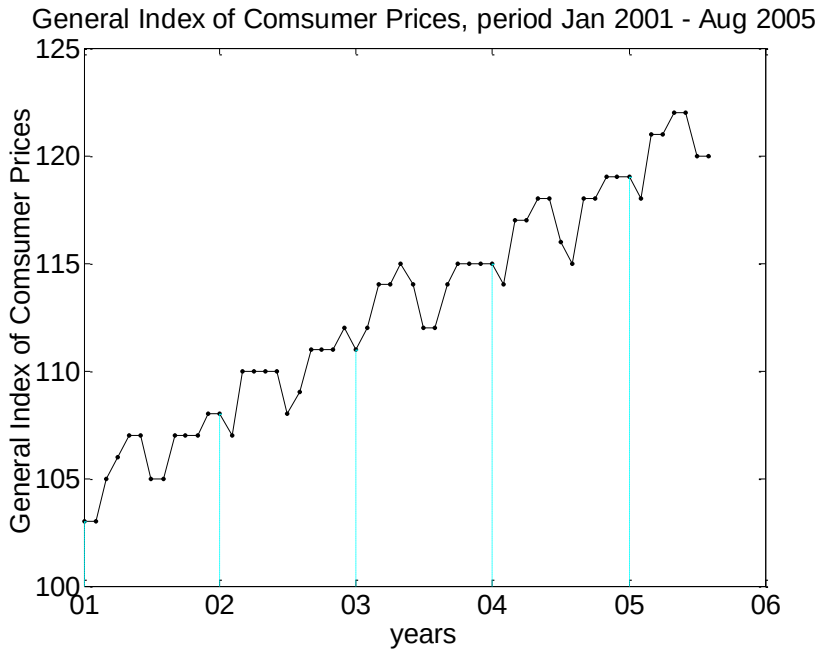
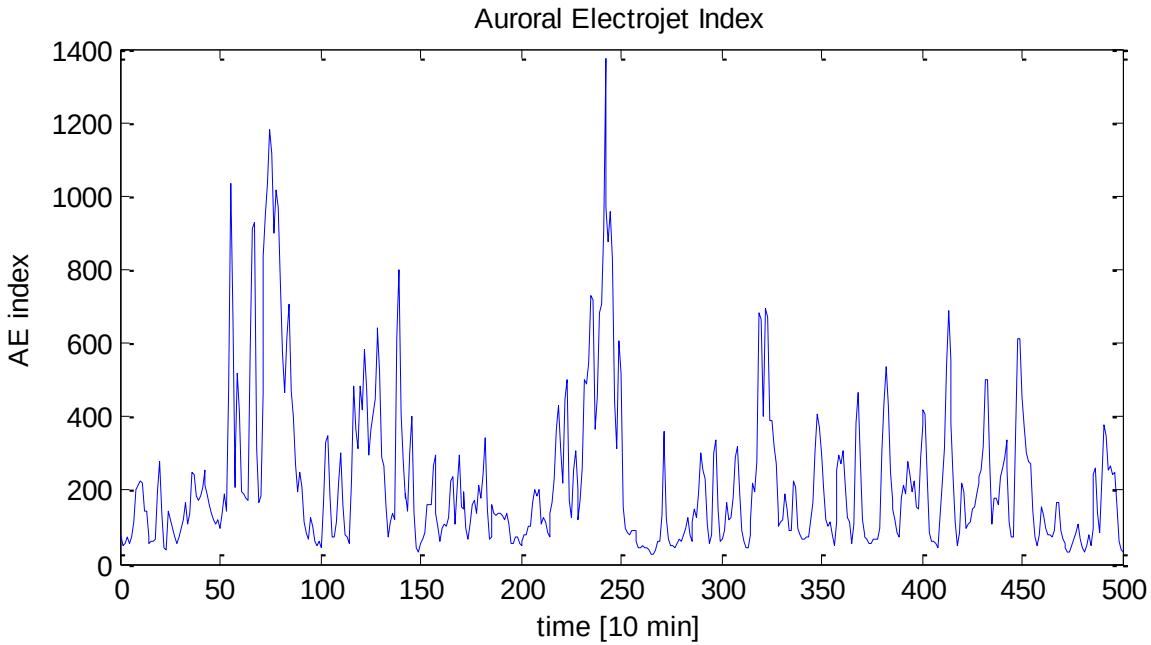
Χρονοσειρές Μάθημα 2



Μη-στασιμότητα

Τάση?

Εποχικότητα / περιοδικότητα?

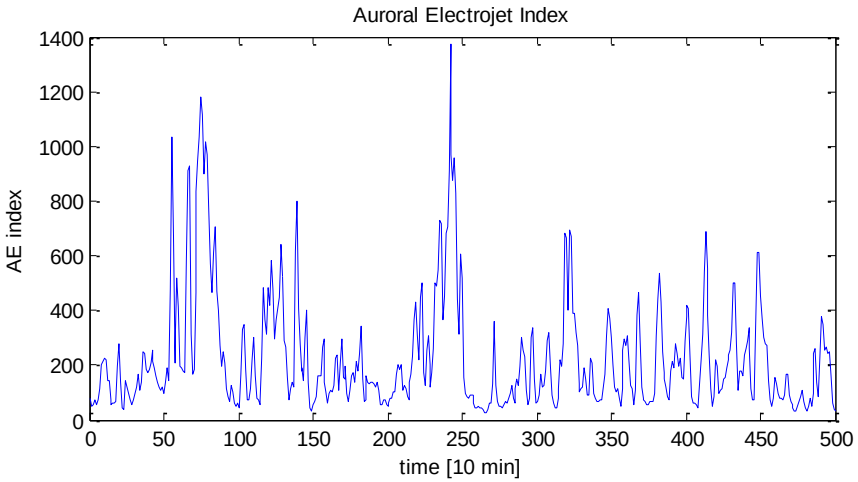


Ασταθή διασπορά?

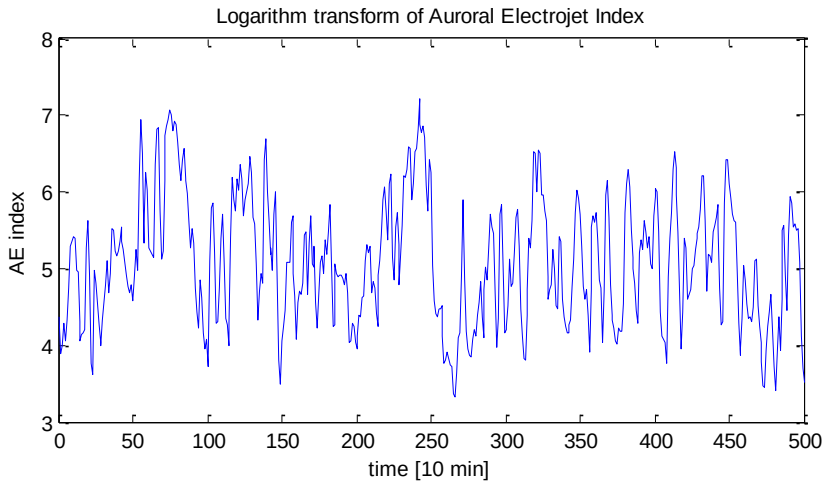
Αυτοσυσχέτιση?

Σταθεροποίηση διασποράς

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$



$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$



Μετασχηματισμός $X_t = T(Y_t)$ που σταθεροποιεί τη διασπορά της Y_t ?

$$\mathrm{Var}[X_t] = \mathrm{const}$$

Απλή λύση: $X_t = \log(Y_t)$ **?**

Μετασχηματισμός δύναμης (Box-Cox):

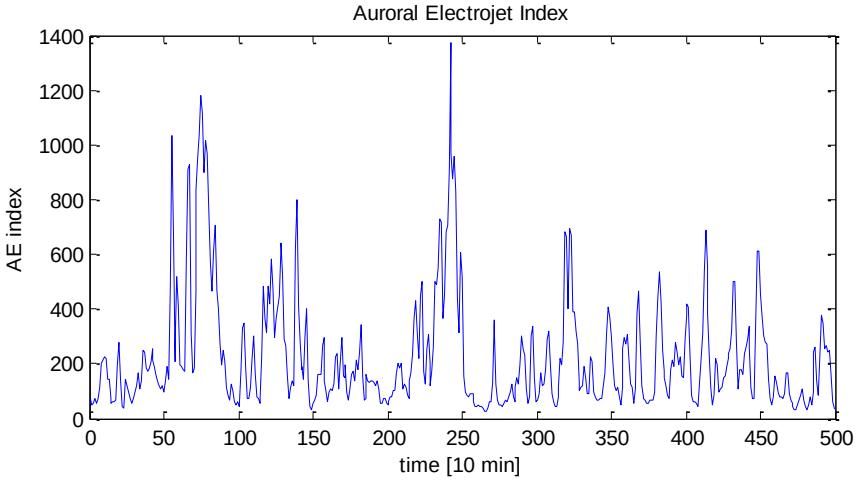
$$X_t = \frac{Y_t^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

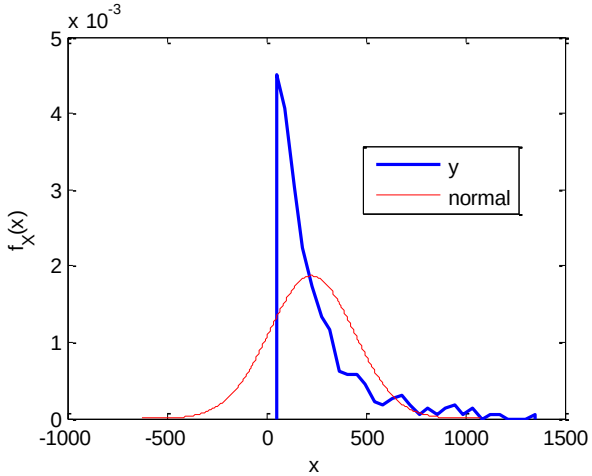
Υπόθεση: $\mathrm{Var}[Y_t]$ αλλάζει ως συνάρτηση της τάσης μ_t

λ	X_t	$\mathrm{Var}[y_t]$
-1	$\frac{1}{Y_t}$	$c\mu_t^4$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{Y_t}}$	$c\mu_t^3$
0	$\log(Y_t)$	$c\mu_t^2$
0.5	$\sqrt{Y_t}$	$c\mu_t$

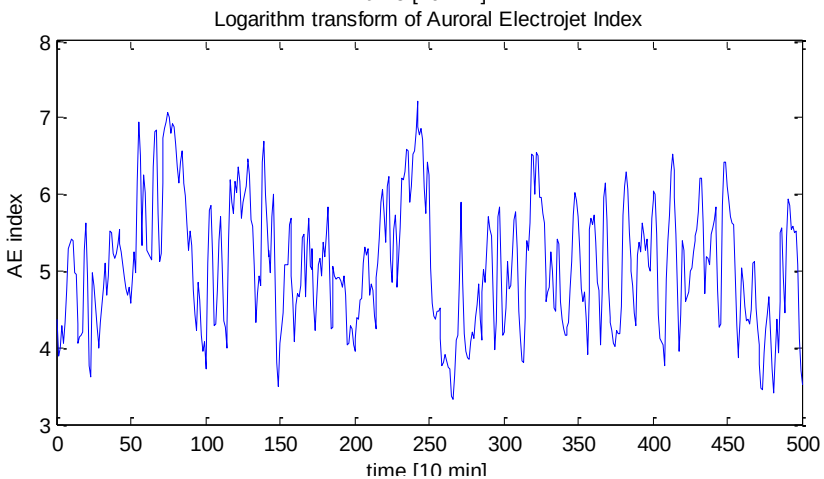
?

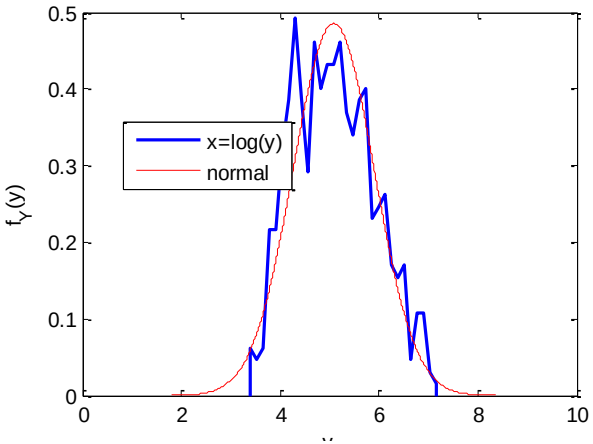
Άλλος μετασχηματισμός ?



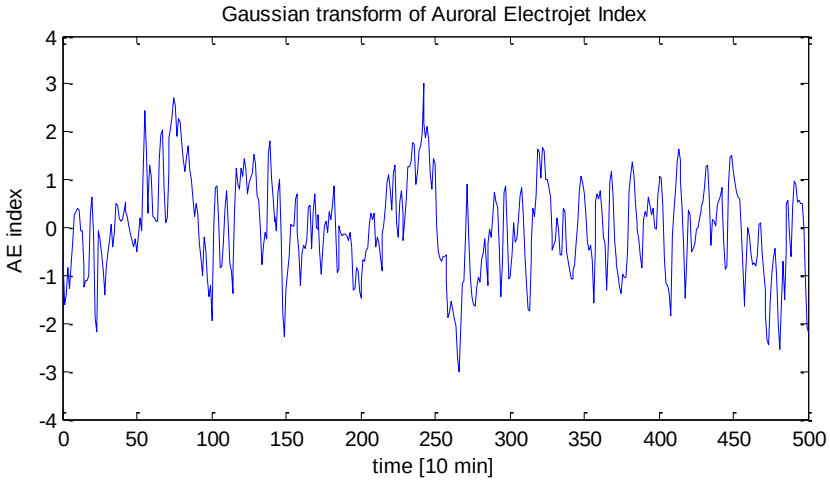


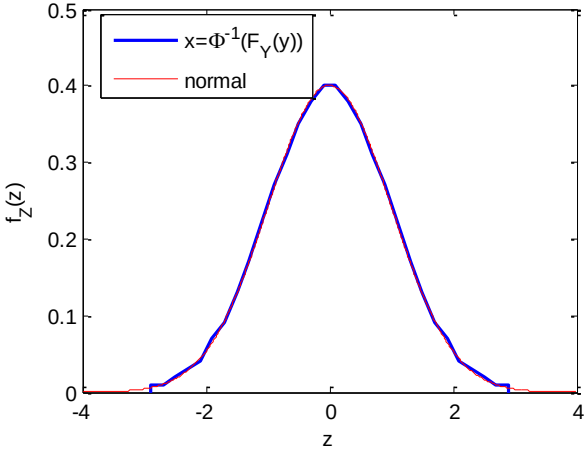
$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$





$$X_t = \log(Y_t)$$





$$X_t = \Phi^{-1}\left(F_Y(Y_t)\right)$$

?

Απαλοιφή τάσης

$$Y_t = \mu_t + X_t$$

μ_t: μέση τιμή ως συνάρτηση του t (αργά μεταβαλλόμενο μέσο επίπεδο τιμών)

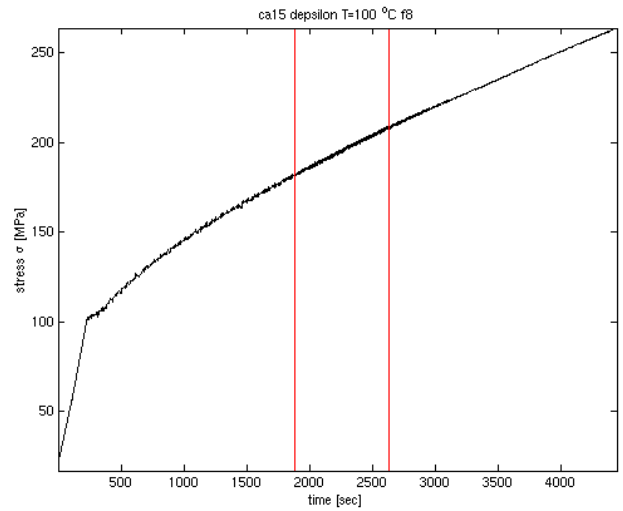
1. Καθοριστική τάση :

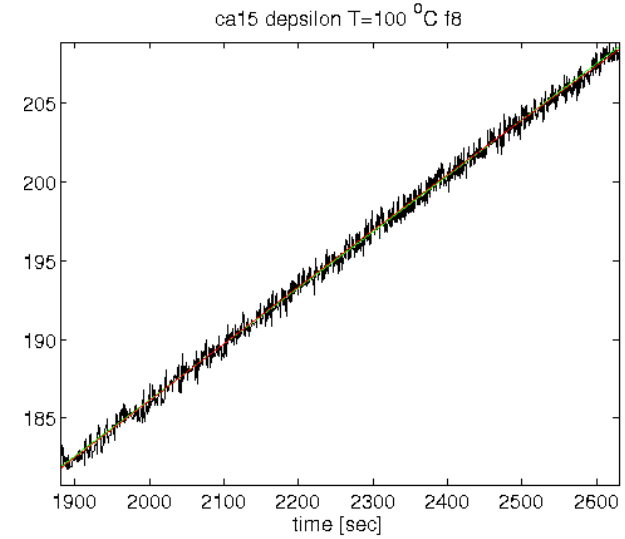
γνωστή ή εκτιμώμενη συνάρτηση του χρόνου $\mu_t = f(t)$

Παράδειγμα: πολυώνυμο βαθμού p

$$\mu_t = f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_p t^p$$

Πλαστική παραμόρφωση

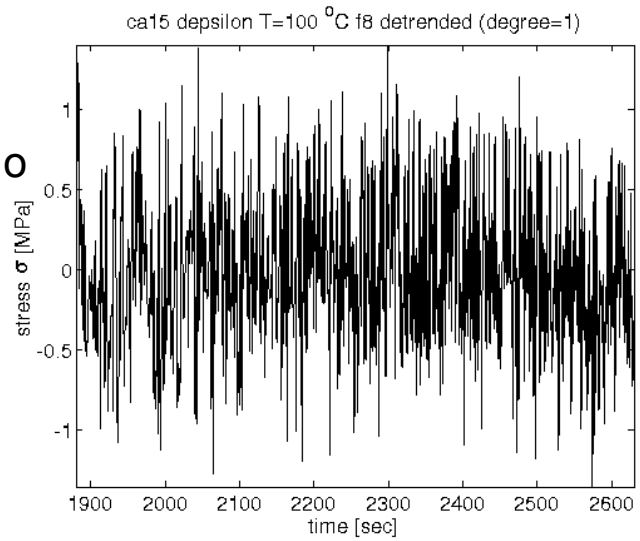


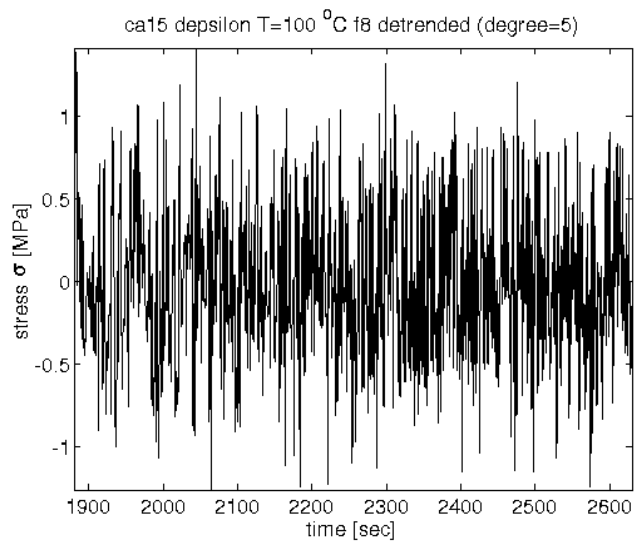


$$X_t = Y_t - \mu_t$$

$\{X_t\}$ στάσιμη

Προσαρμογή με πολυώνυμο βαθμού 1

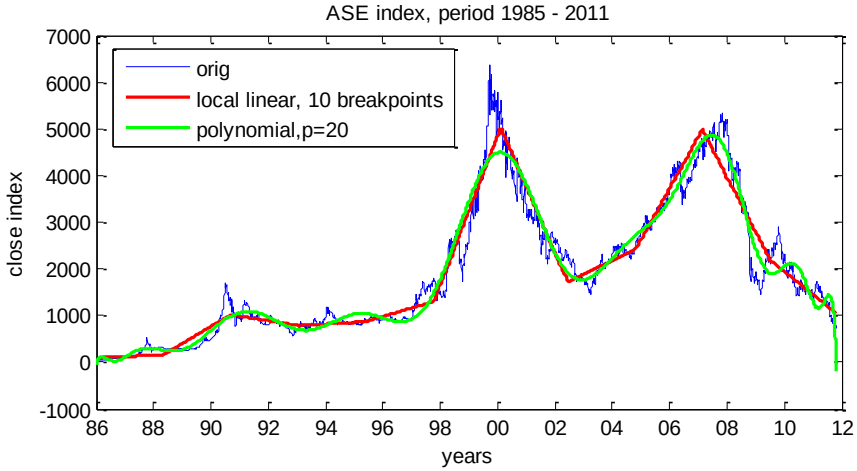


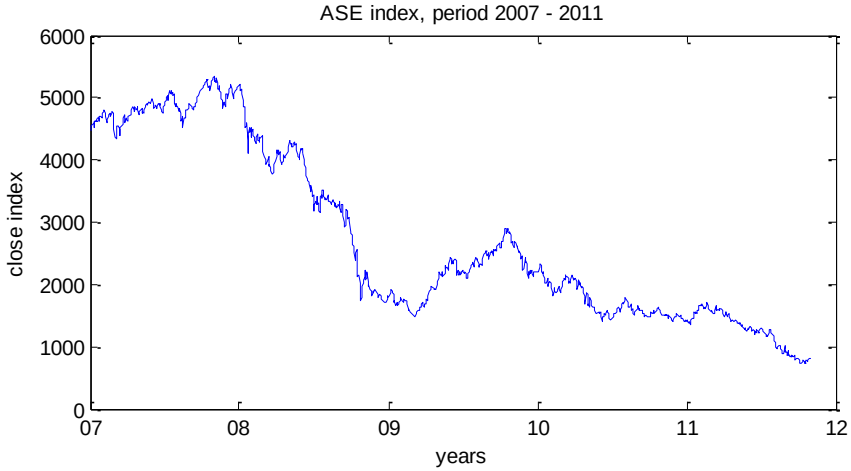


Προσαρμογή με πολυώνυμο βαθμού 5

2. Στοχαστική τάση

Δείκτης συναλλαγών Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ)





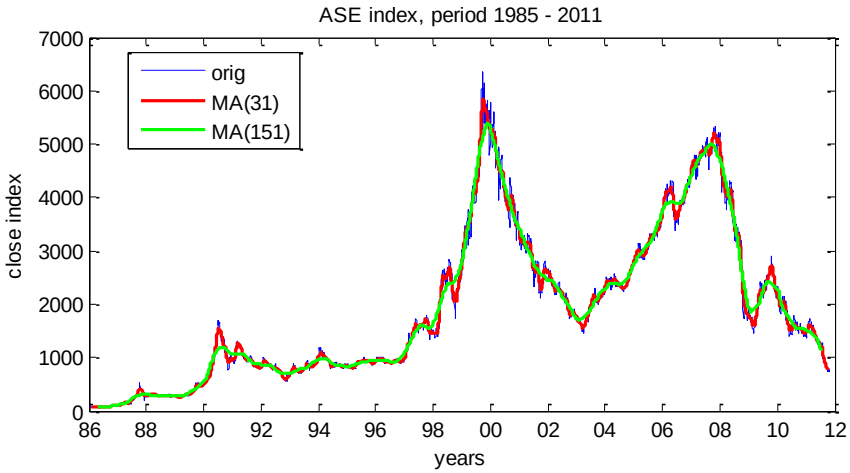
2α. Εξομάλυνση με φίλτρο κινούμενου μέσου

Απλό φίλτρο:
Κινούμενος μέσος όρος

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{2q+1}\sum_{j=-q}^{q} y_{t-j}$$

$$2q+1=3 \Rightarrow \hat{\mu}_t = \frac{1}{3}y_{t-1} + \frac{1}{3}y_t + \frac{1}{3}y_{t+1}$$

$$"2q+1" = 4 \quad \boxed{?}$$



Γενικό φίλτρο:
Σταθμισμένος κινούμενος μέσος όρος

$$\hat{\mu}_t = \sum_{j=-q}^{q} a_j y_{t-j} \qquad \sum_{j=-q}^{q} a_j = 1$$

Απλός κινούμενος μέσος:

$$a_j = \frac{1}{2q+1}, \; j = -q, \ldots, q$$

2b. Απαλοιφή τάσης με χρήση διαφορών (differencing)

- Τελεστής διαφοράς πρώτης τάξης (one lag difference or first difference)

$$\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-B)Y_t$$

B: τελεστής υστέρησης (lag operator) $BY_t = Y_{t-1}$

- Τελεστής διαφοράς δεύτερης τάξης

$$\nabla^2 Y_t = \nabla(\nabla Y_t) = (1-B)(1-B)Y_t = (1-2B+B^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

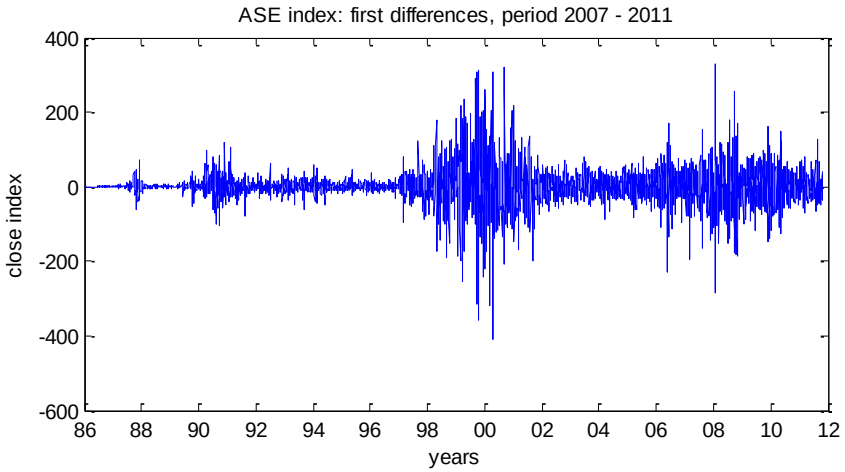
Αν η τάση είναι τοπικά γραμμική, απαλείφεται με τις πρώτες διαφορές:

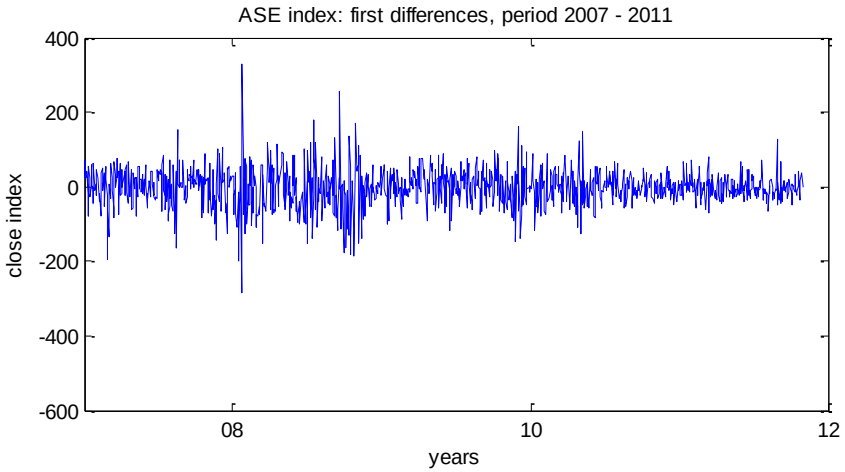
$$\mu_t = a_0 + a_1 t \qquad \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \mu_t - \mu_{t-1} + X_t - X_{t-1}$$

$$\mu_t - \mu_{t-1} = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1(t-1) = a_1$$ «σταθερή τάση»!

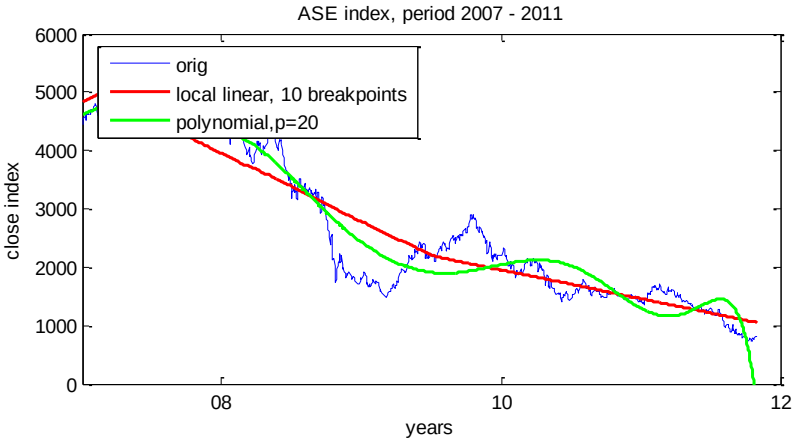
Αν η τάση είναι τοπικά πολυώνυμο βαθμού p, απαλείφεται με χρήση του $\nabla^p Y_t$ **?**

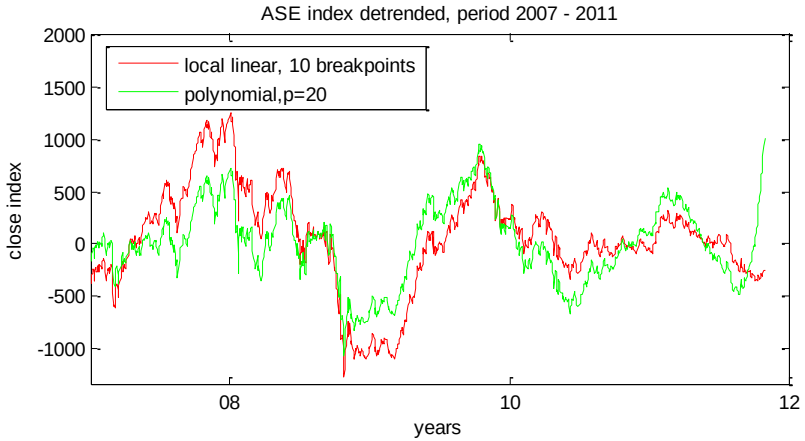
[δείξτε ότι $\nabla^p Y_t = p!c + X_t$]

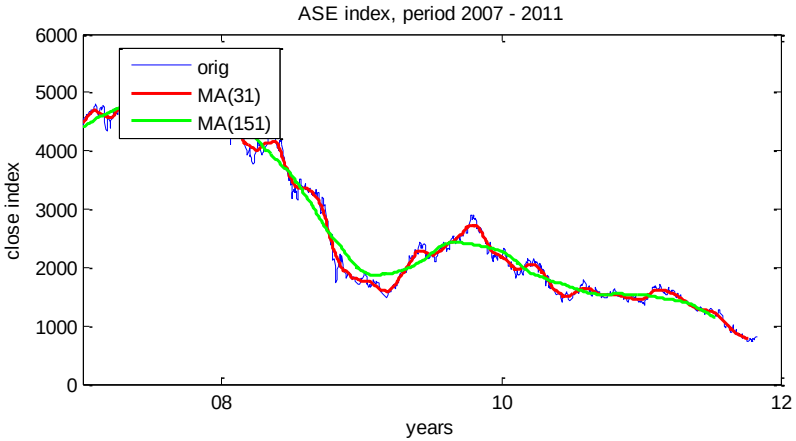


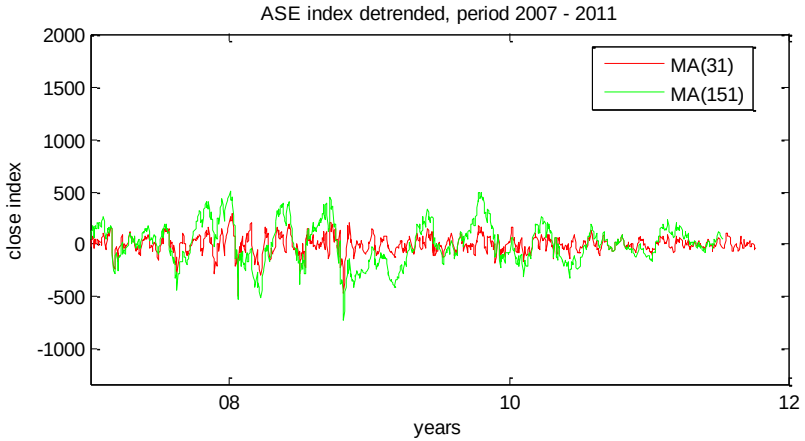


Ποια μέθοδος απαλοιφής τάσης είναι καλύτερη?

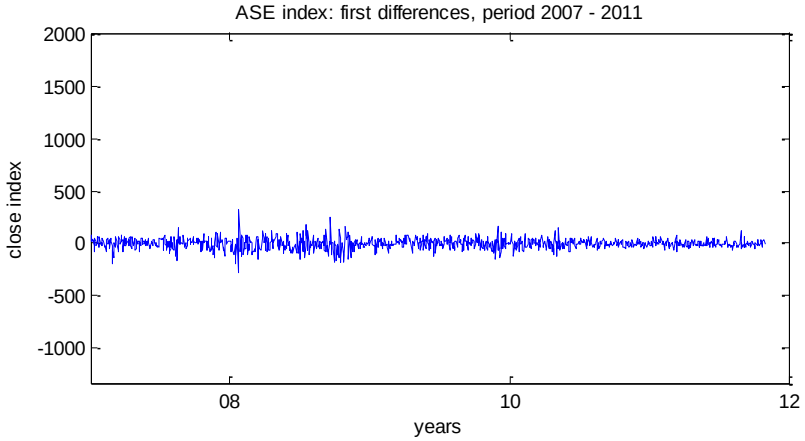








Εκτίμηση της τάσης



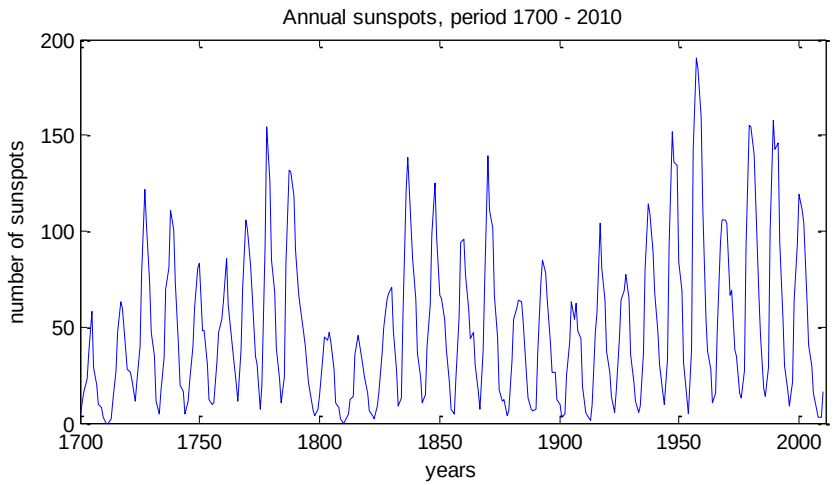
3 **Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας: Dickey-Fuller και Phillips-Perron έλεγχοι**

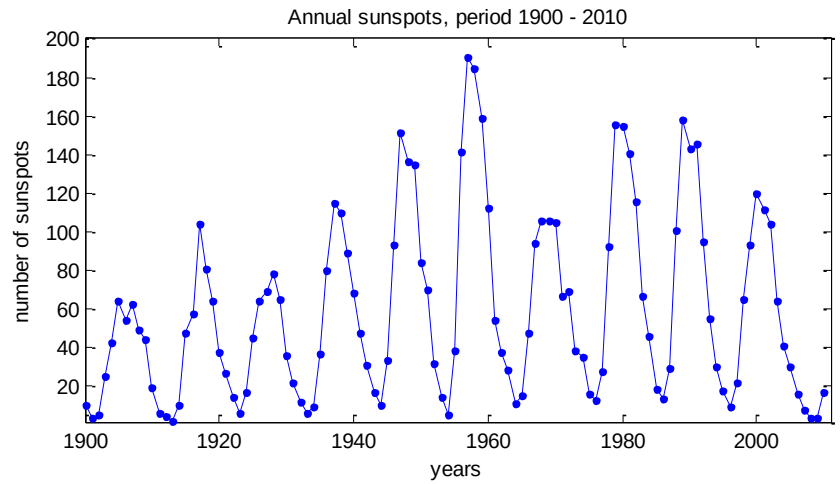
Απαλοιφή περιοδικότητας

$$\boxed{Y_t = s_t + X_t}$$

s_t: περιοδική συνάρτηση του t με περίοδο d (περιλαμβάνει την εποχικότητα)

Ετήσιες ηλιακές κηλίδες





Περίοδος d και κατάλληλη συνάρτηση s_t

?

$$\boxed{X_t = Y_t - s_t}$$

$\{X_t\}$ στάσιμη

1. γνωστή ή εκτιμώμενη περιοδική συνάρτηση $s_t = f(t)$

2a. Εκτίμηση της $s_i \quad i=1,\ldots,d$ **από μέσους όρους των στοιχείων της**

Περίοδος d γνωστή $\quad k = [n/d] \quad \hat{s}_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{i+jd}$

2b. Απαλοιφή περιοδικότητας με χρήση διαφορών (*d*-differencing)

$$\nabla_d Y_t = Y_t - Y_{t-d} = (1 - B^d)Y_t$$

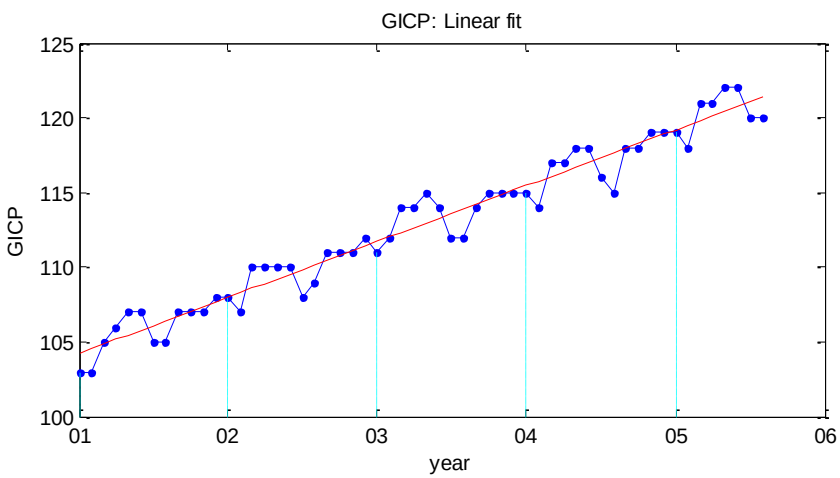
Απαλοιφή τάσης και περιοδικότητας

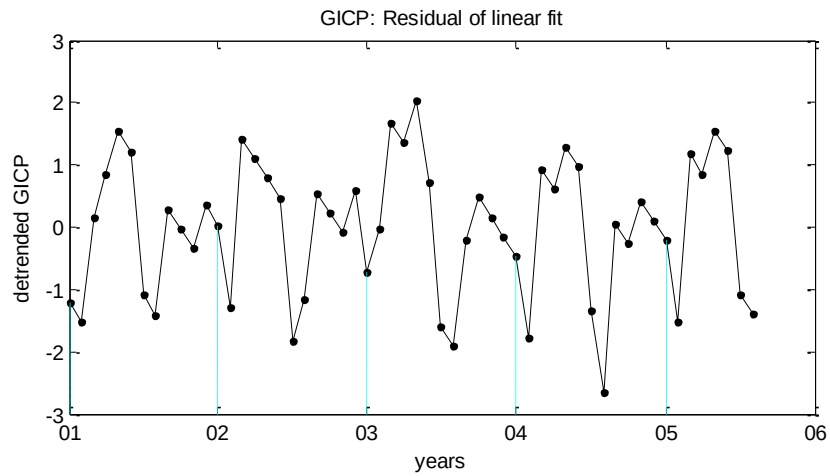
$$\boxed{Y_t = \mu_t + s_t + X_t}$$

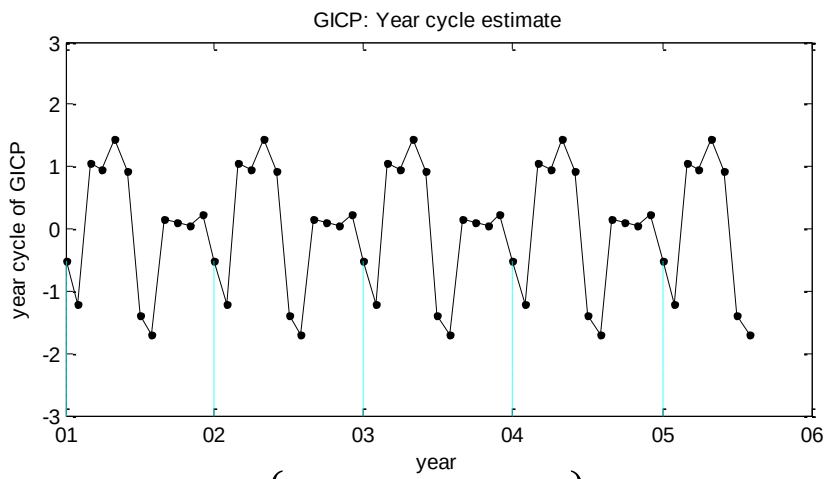
Πρώτα απαλοιφή περιοδικότητας και μετά τάσης?

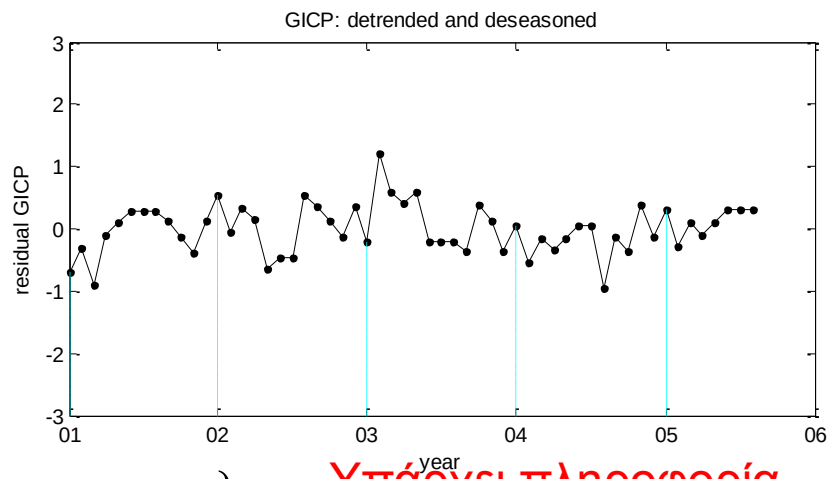
1. Απαλοιφή τάσης $Y_t' = Y_t - \mu_t = s_t + X_t$
2. Απαλοιφή περιοδικότητας $X_t = Y_t' - s_t = Y_t - \mu_t - s_t$

$\{X_t\}$: χρονοσειρά υπολοίπων (residual)









μη-στάσιμη $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ⟹ στάσιμη $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Υπάρχει πληροφορία στα υπόλοιπα?

Έλεγχος ανεξαρτησίας

παρατηρούμενη στάσιμη χρονοσειρά

χρονοσειρά υπολοίπων από απαλοιφή τάσης και/ή περιοδικότητας

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Υποθέσεις

Είναι iid? **H_0**

Υπάρχουν συσχετίσεις? **H_0**

H_0: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι iid ⇒ **H_0**: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι λευκός θόρυβος

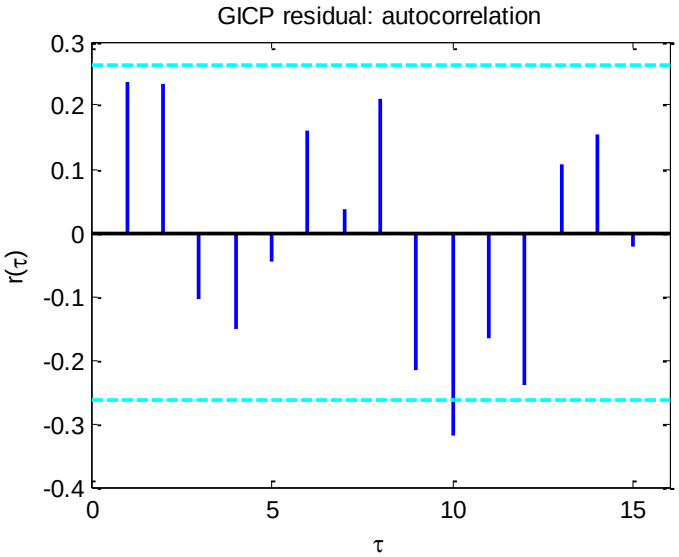
Έλεγχος σημαντικότητας αυτοσυσχέτισης

$\mathrm{H}_0 : \rho_\tau = 0 \qquad \mathrm{H}_1 : \rho_\tau \neq 0$

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ λευκός θόρυβος ⇒ $r_\tau \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{n})$

Απορριπτική περιοχή: $R = \left\{ r_\tau \;\middle|\; \left| \frac{r_\tau}{\sqrt{1/n}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}$ για στάθμη σημαντικότητας α

Ζώνη μη-σημαντικής αυτοσυσχέτισης: $\pm z_{1-a/2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ για α=0.05 $\simeq \pm \frac{2}{\sqrt{n}}$



Έλεγχος σημαντικότητας $\rho_\tau = 0$ για κάθε τ χωριστά

Σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05, απορρίπτεται η H_0 για τ=10

Υπάρχουν συσχετίσεις στη χρονοσειρά GICP?

Έλεγχος ανεξαρτησίας Portmanteau

Ένας έλεγχος για $\rho_\tau = 0,\ \tau = 1,\ldots,k$

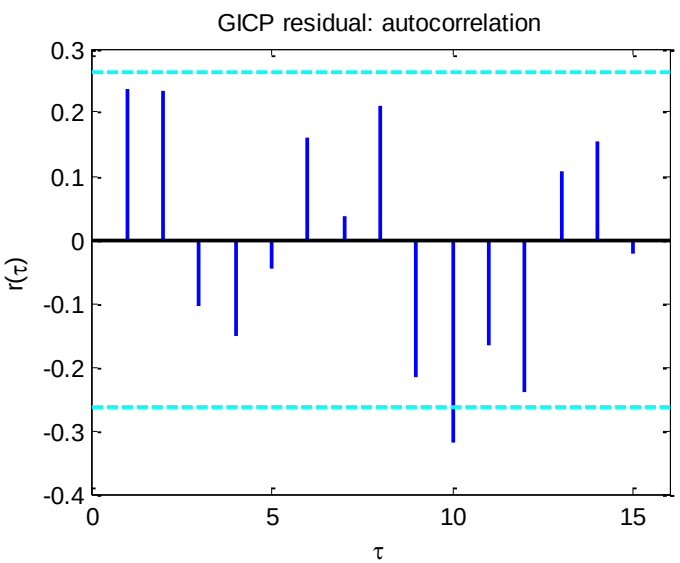
$$\mathrm{H}_0 : \rho_\tau = 0,\ \tau = 1,\ldots,k$$

Στατιστικό ελέγχου Q:

$$Q = n\sum_{\tau=1}^{k} r_\tau^2$$ Box-Pierce

$$Q = n(n+2)\sum_{\tau=1}^{k} r_\tau^2 / (n-j)$$ Ljung-Box

$Q \sim \mathcal{X}_k^2$ απορριπτική περιοχή $R = \left\{ Q > \mathcal{X}_{k;1-a}^2 \right\}$

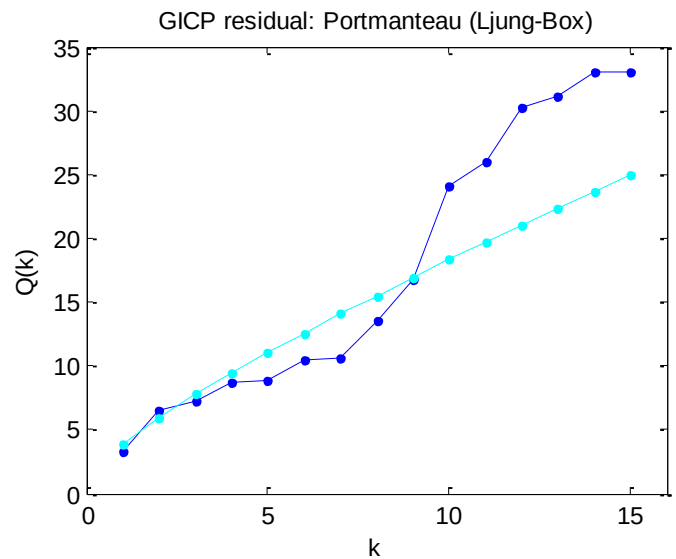


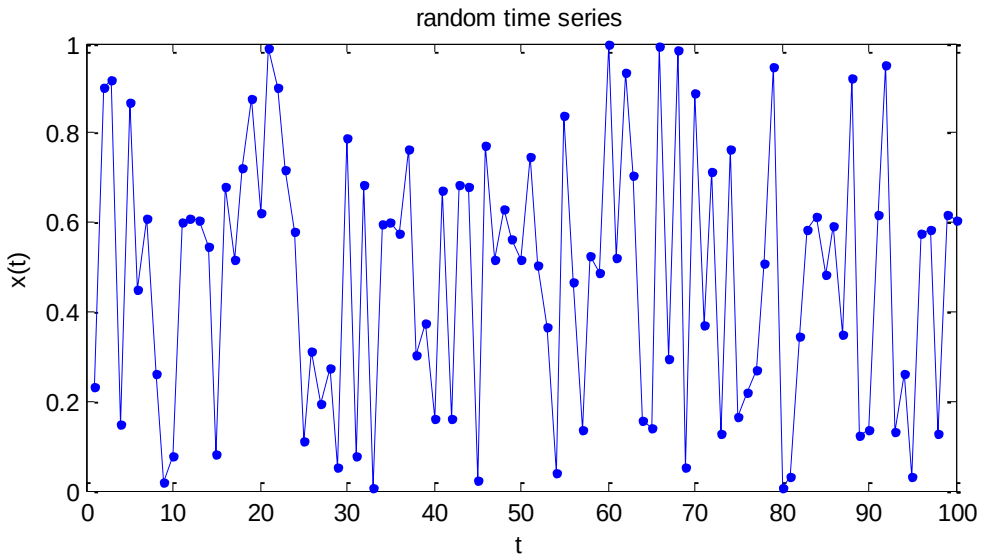
$k = 10$

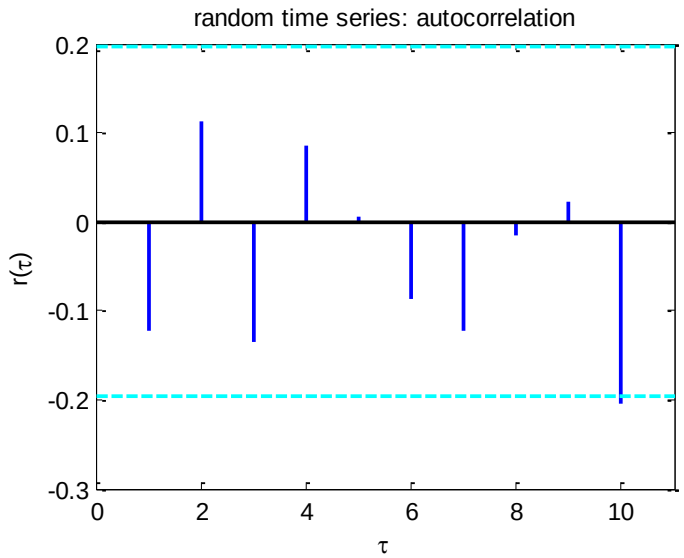
$Q = 24.06$

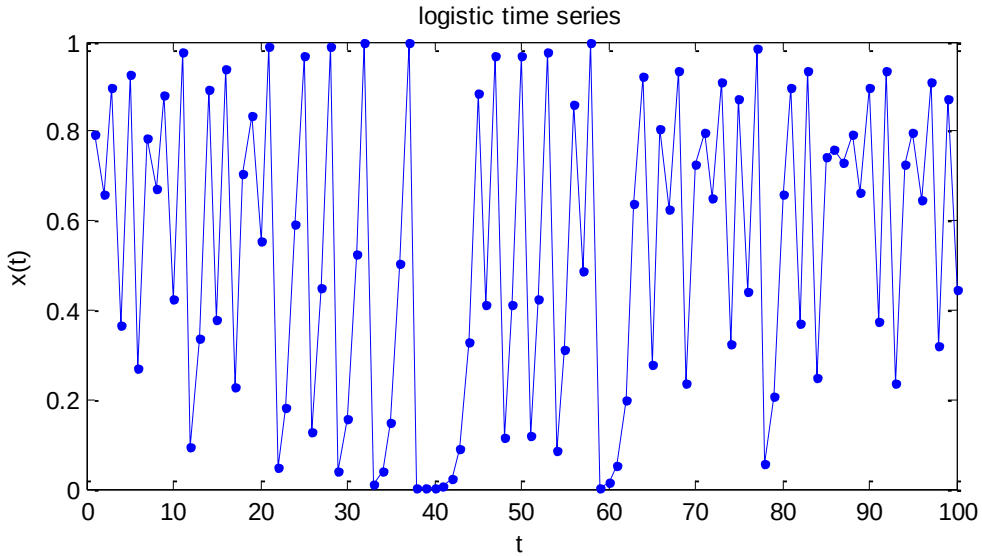
$\mathcal{X}_{k;1-a}^2 = 18.30$

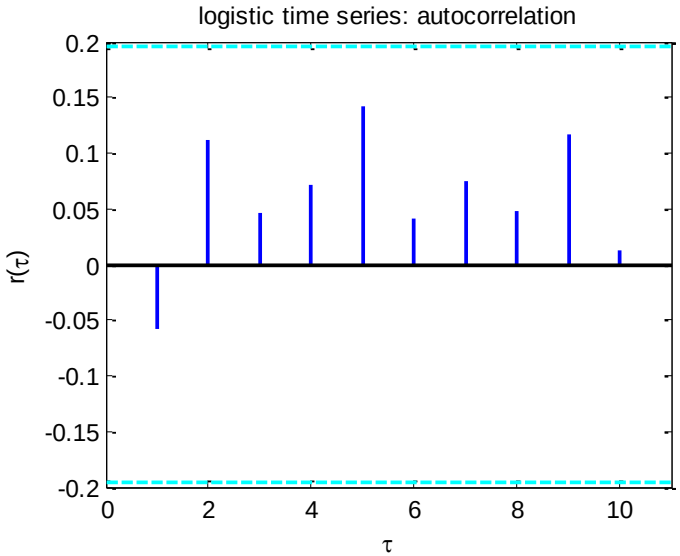
H_0 για τ=10 απορρίπτεται











κατάλληλος έλεγχος ανεξαρτησίας ?

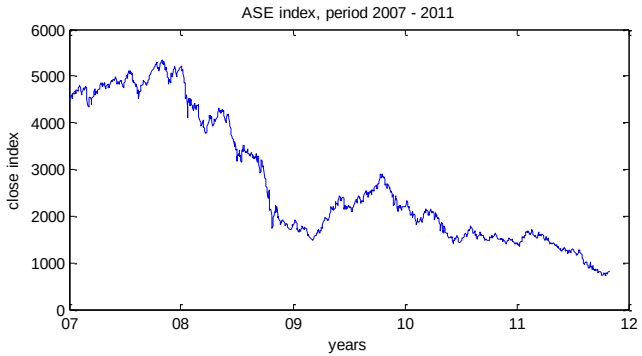
4 **Ο έλεγχος ανεξαρτησίας BDS (Brock, Dechert, Scheinkman)**

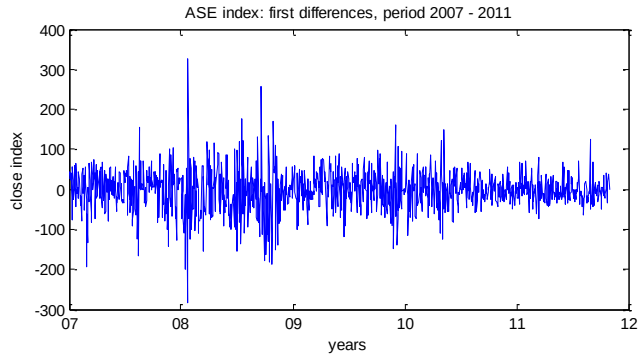
5 **Έλεγχος ανεξαρτησίας και γεννήτρια τυχαίων αριθμών**

Άσκηση: Υπάρχουν συσχετίσεις στις αποδόσεις του δείκτη ΧΑΑ (περίοδος 2007-2011)?

Κατάλληλη στάσιμη χρονοσειρά: πρώτες διαφορές ή αποδόσεις?

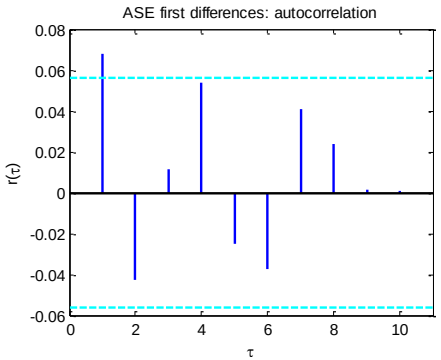
Υπάρχουν συσχετίσεις? … μη γραμμικές? $\mathrm{E}\left[X_t^2 X_{t-\tau}^2\right]$

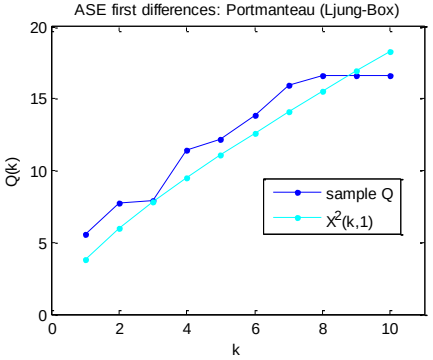


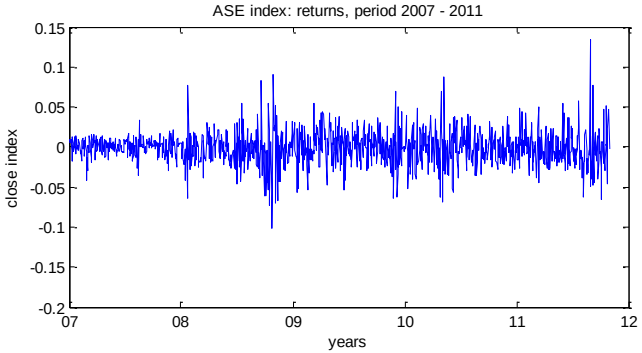


πρώτες διαφορές

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

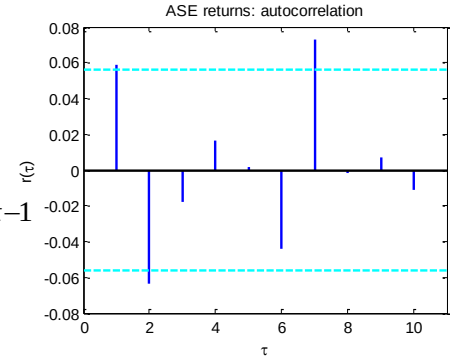


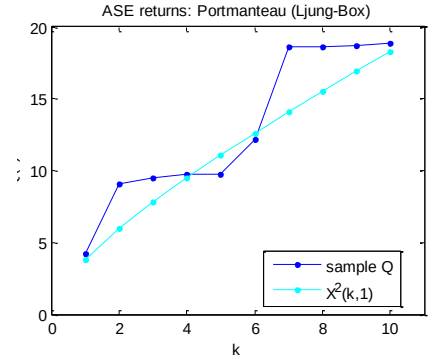


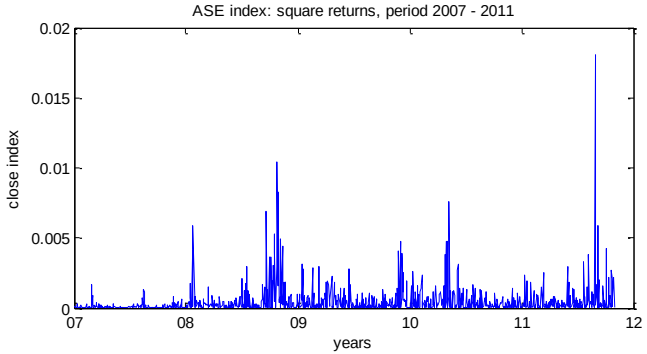


αποδόσεις

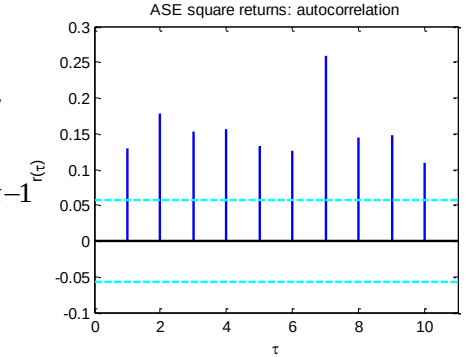
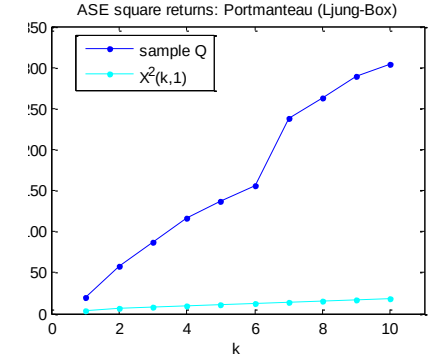
$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$







τετράγωνο αποδόσεων

$$x_t' = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

$$x_t = (x_t')^2$$