Αστάθεια (volatility) και διαδικασίες ARCH

Χρονοσειρά πρώτων διαφορών ή σχετικών μεταβολών $\{x_t\}_{t=1}^{N}$

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}$$

Συσχετίσεις / εξαρτήσεις στη $\{x_t\}_{t=1}^{N}$ **?**

Γενικότερο πρόβλημα: να προσδιορίσουμε την **κατανομή** της x_n από τη μεταβλητή σε προηγούμενες χρονικές στιγμές

$$f(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots)$$

για τη **μέση τιμή**

$$\mathrm{E}\left[x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots\right]$$

→ γραμμικά μοντέλα AR, ARIMA

→ μη-γραμμικά μοντέλα

για τη **διασπορά**

$$\mathrm{Var}\left[x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots\right] \longrightarrow \ldots \text{ ARCH}$$

Μεταβλητότητα ή αστάθεια σε κάθε χρονική στιγμή t σ_t ή σ_t^2

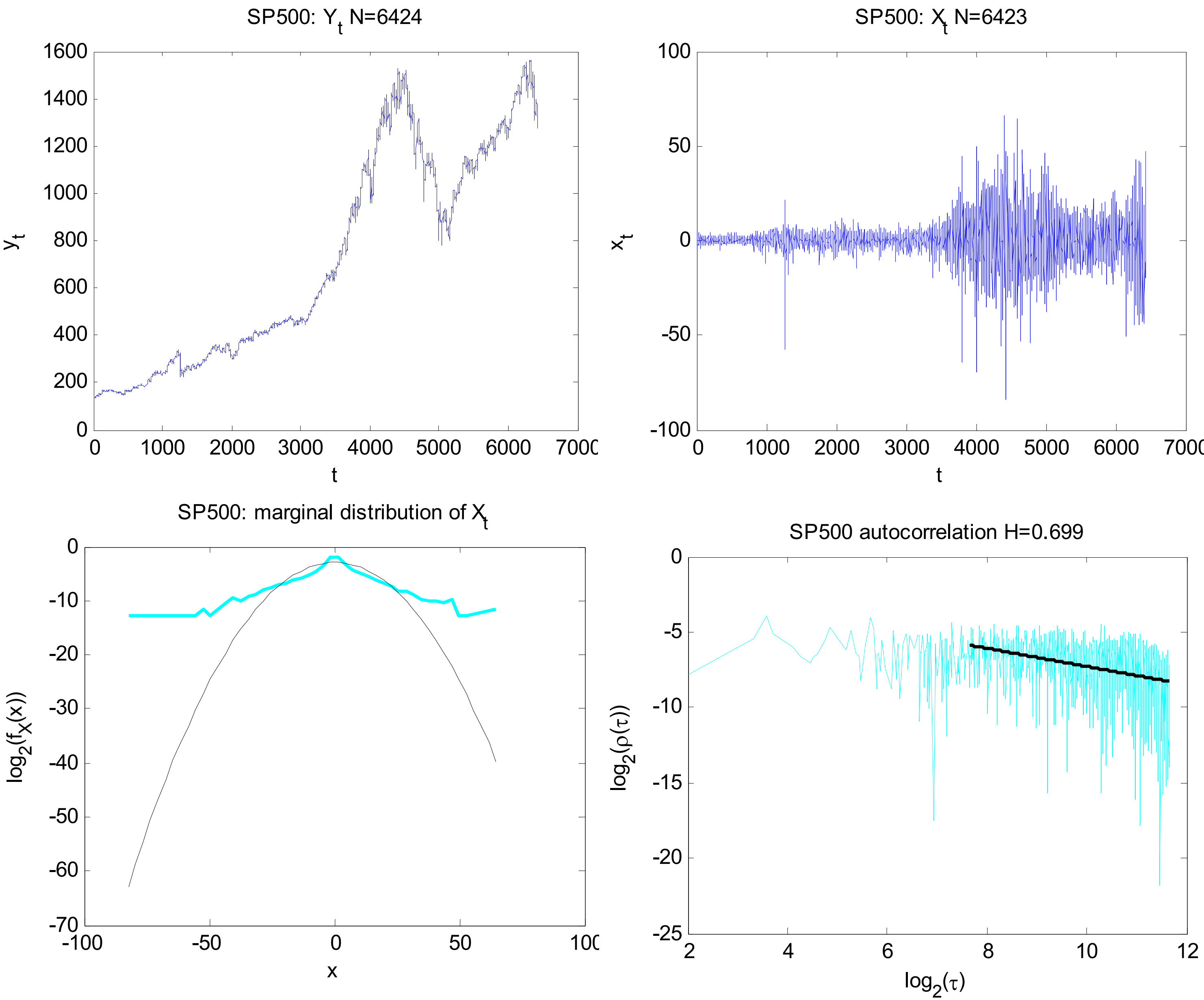
Μεταβολές στο σ_t

→ η στοχαστική διαδικασία είναι τοπικά μη-στάσιμη

$f_n(x)$ $\quad f_n(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots)$ δεσμευμένη διασπορά

→ αλλά ασυμπτωτικά (για $N \to \infty$) είναι στάσιμη

$f_{n\to\infty}(x) = f(x)$ $\quad f(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots)$ ασυμπτωτική διασπορά



παχιές ουρές **V**

συσχετίσεις **?**

συστάδες
μεταβλητότητας
(volatility clustering)

ετεροσκεδα-
στικότητα
οφείλεται στη
μη-Γκαουσιανή
κατανομή **?**

διαταραχές
ασυσχέτιστες
… αλλά …
εξαρτημένες **?**

Αυτοπαλινδρομούμενη στοχαστική διαδικασία με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα

<u>Ιδέα</u>: μεταβαλλόμενη δεσμευμένη διασπορά και σταθερή ασυμπτωτική διασπορά

ARCH(q) $f_X(x)$ με $x_t = \sigma_t z_t$

z_t iid με $\mathrm{E}[z_t]=0$ $\mathrm{E}[z_t^2]=1$

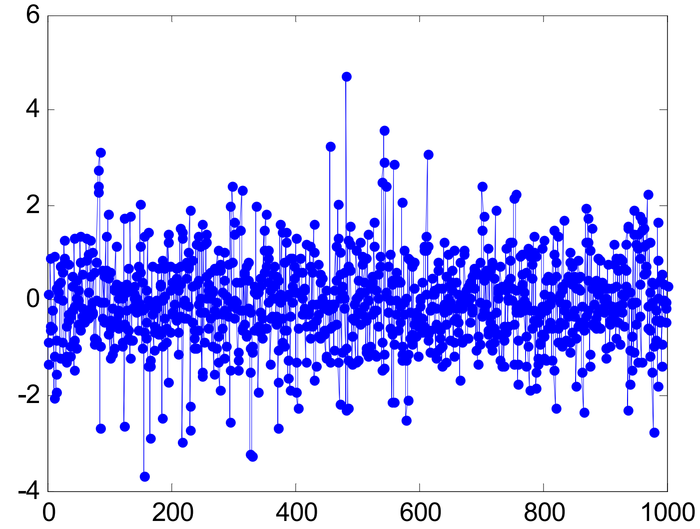
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q x_{t-q}^2$$

$$\alpha_i > 0,\ i = 0,1,\ldots,q$$

q: μνήμη της εξάρτησης της δεσμευμένης διασποράς

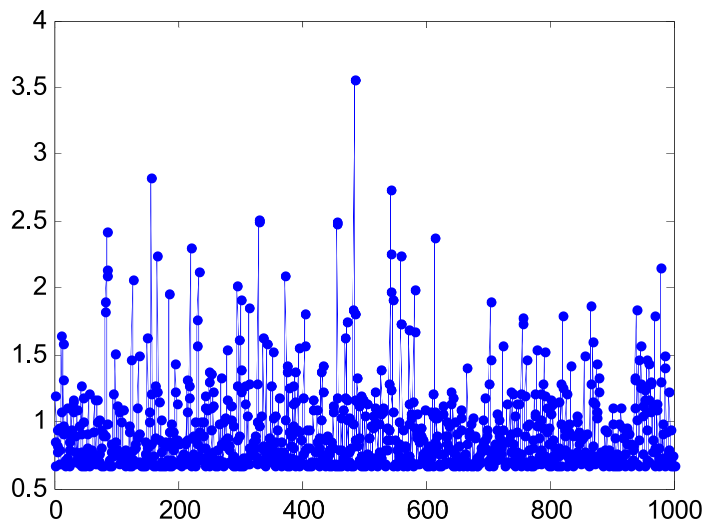
ARCH(1) $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2$

ARCH(1) a_0=0.45 a_1=0.55 x_t

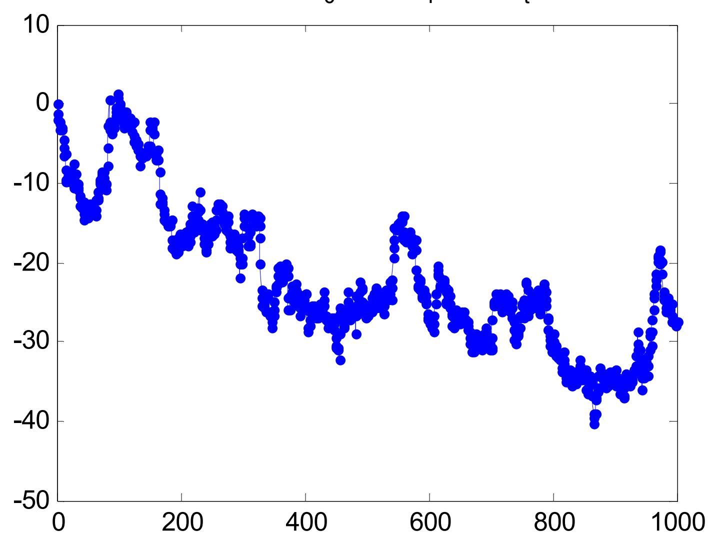


$z_t \sim \mathrm{N}(0,1)$ αλλά σ_t^2 δεν έχει κανονική κατανομή

ARCH(1) a_0=0.45 a_1=0.55 σ_t^2



ARCH(1) a_0=0.45 a_1=0.55 y_t

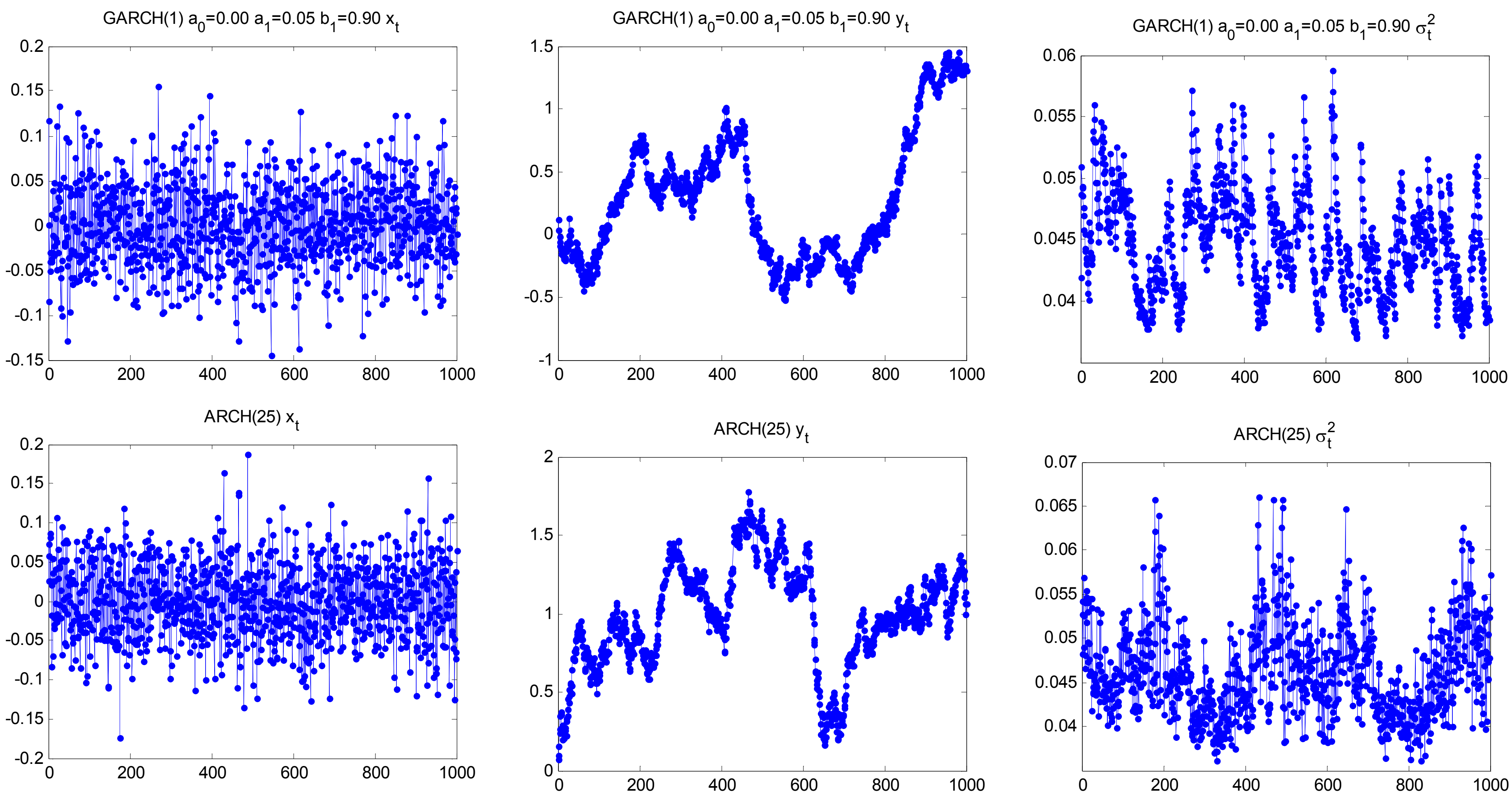


Γενικευμένο ARCH μοντέλο (GARCH)

GARCH(p,q) $$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q x_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

Αν για το ARCH χρειάζεται μεγάλη τάξη q, εισάγοντας εξάρτηση σε προηγούμενη(ες) δεσμευμένες διασπορές (μικρό p) ελαττώνει σημαντικά την τάξη q.

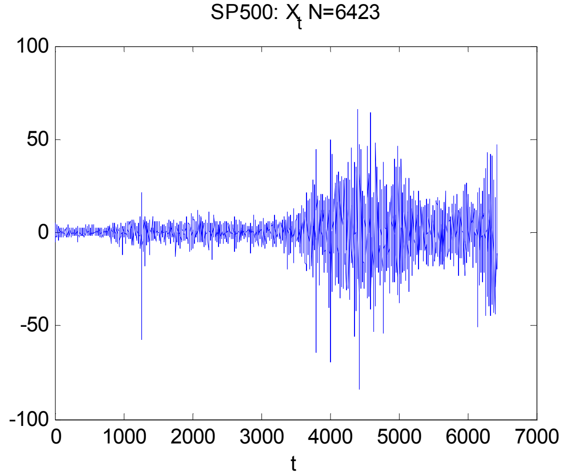
GARCH(1,1) $$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$ συνήθες μοντέλο στα χρηματο-οικονομικά

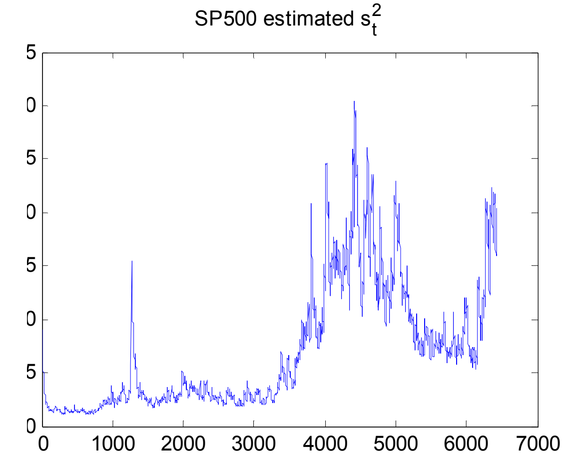


SP500

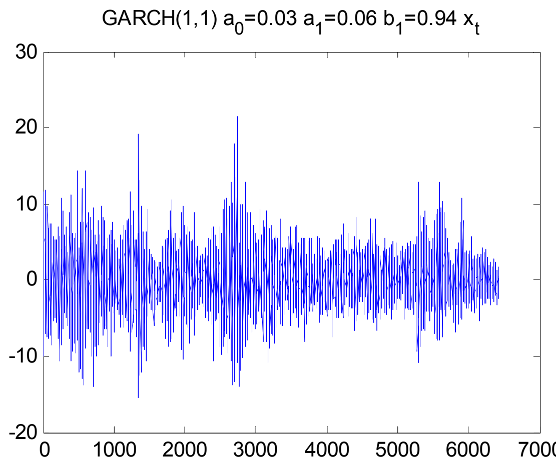
Προσαρμογή μοντέλου GARCH(1,1)

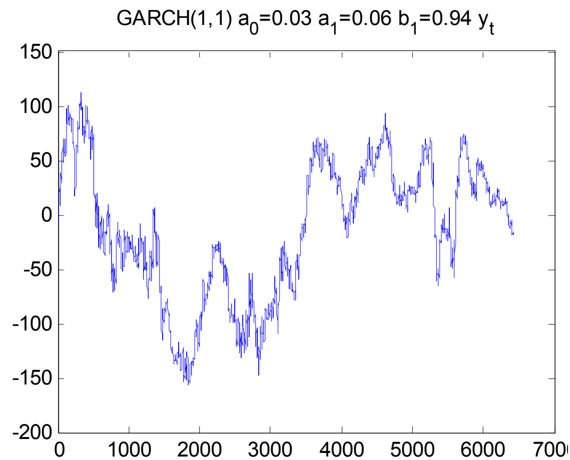
α_0: 0.028
α_1: 0.941
β_1: 0.060

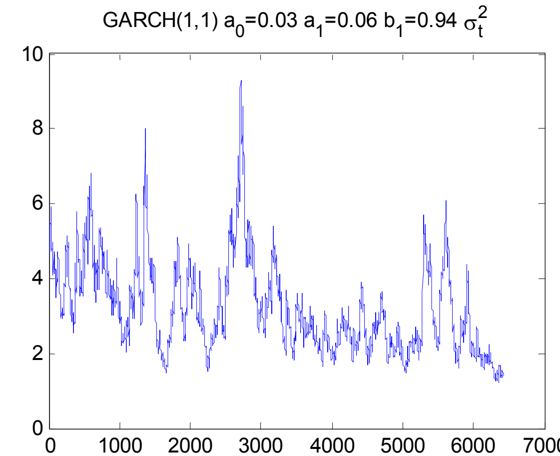




Γκαουσιανή







t_5