Αστάθεια (volatility)

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}$$

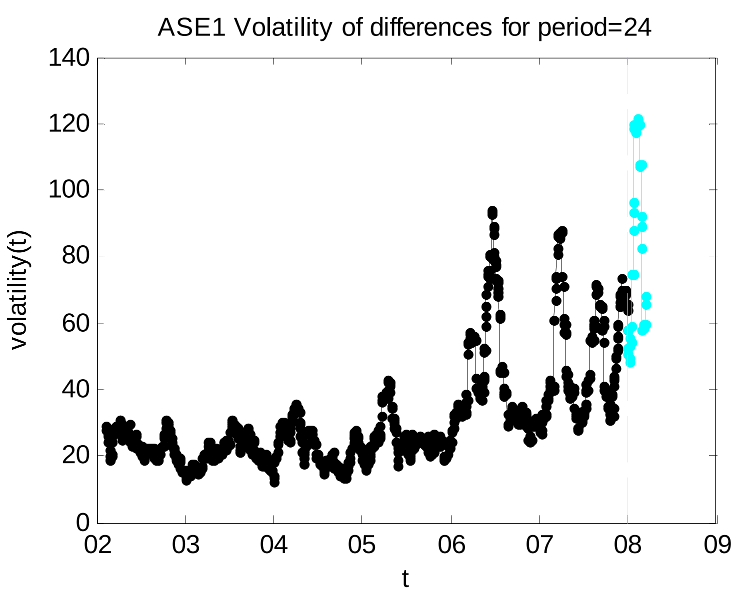
Χρονοσειρά πρώτων διαφορών ή σχετικών μεταβολών $\{x_t\}_{t=1}^{N}$

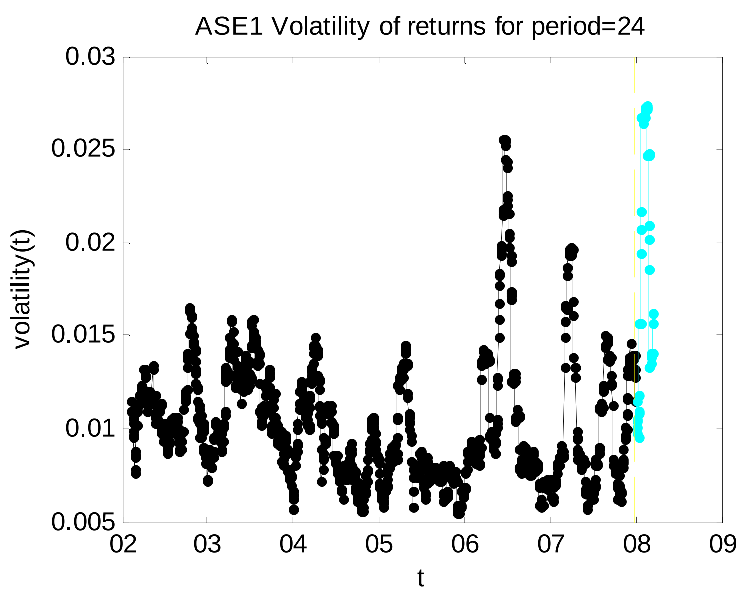
Μεταβλητότητα ή αστάθεια σε κάθε χρονική στιγμή t σ_t ή σ_t^2

Η αστάθεια s_t δίνεται με αναφορά σε κάποια περίοδο T_{vol} :

- στιγμιαία (T_{vol} =0) : $s_t = |x_t|$ ή $s_t = x_t^2$

- σε περίοδο βδομάδας (T_{vol} =5, 6 ή 7) ή μήνα (T_{vol} =25 ή 30)



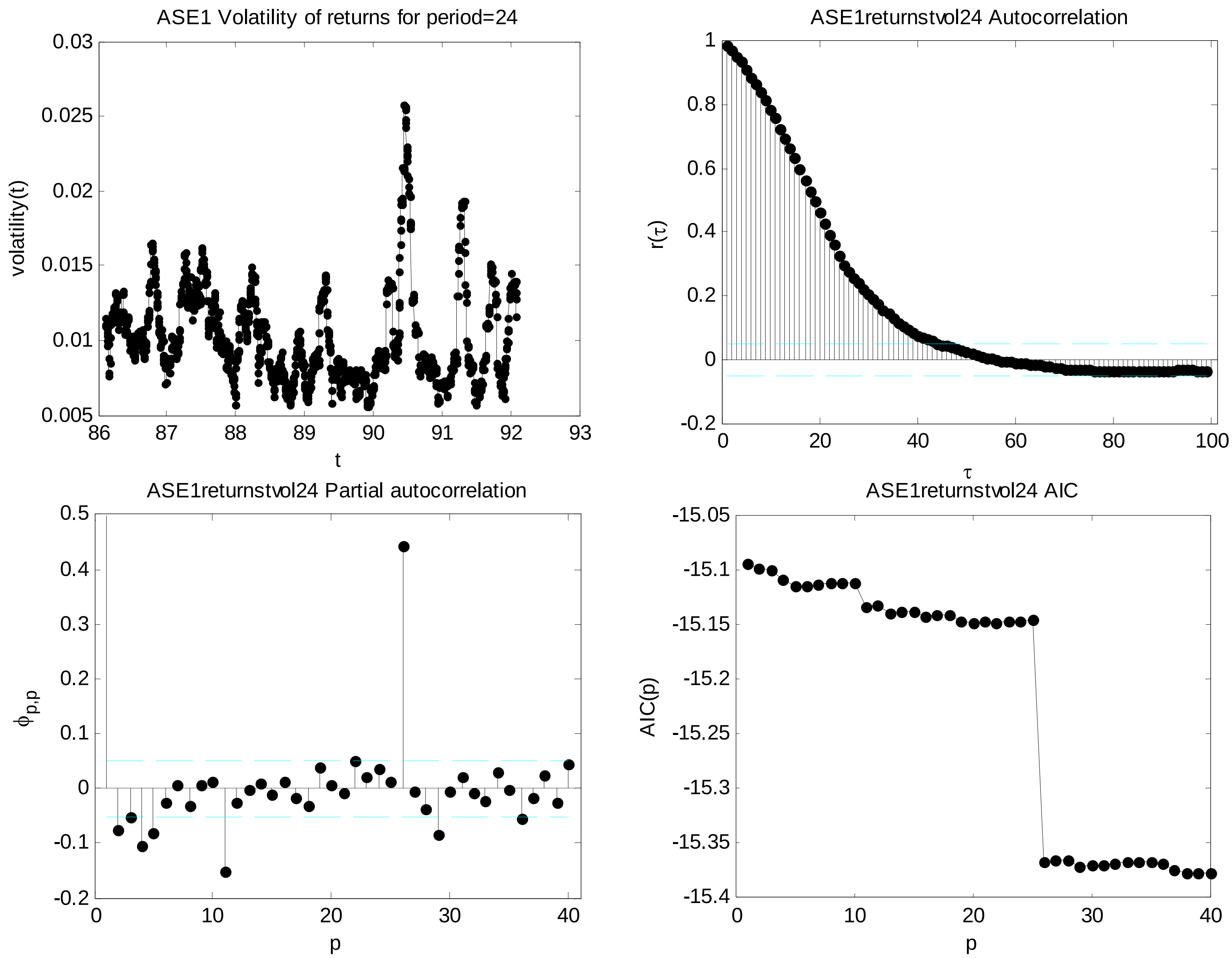


Παράδειγμα Αστάθεια ημερήσιου δείκτη ΧΑΑ από 2/1/02 – 31/12/07, πρόβλεψη ως 13/3/07

$$T_{\text{vol}} = 24$$

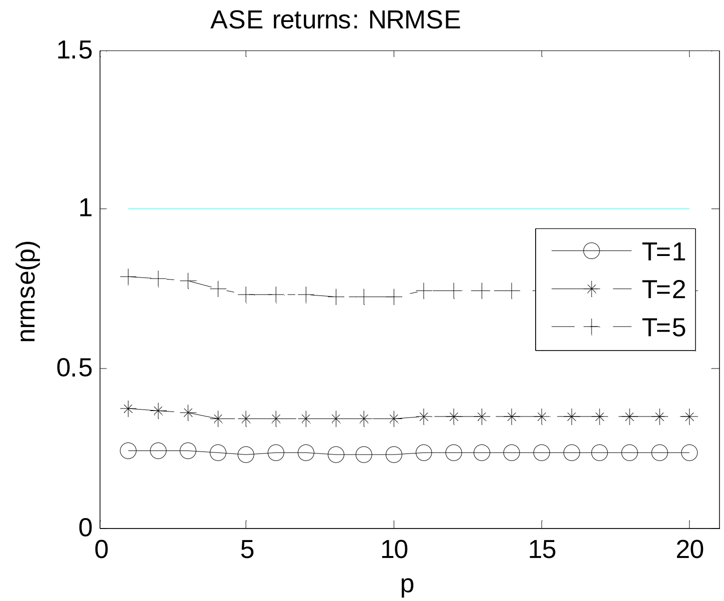
$$\{s_1, \ldots, s_{1471}\}$$

Τάξη AR μοντέλου?



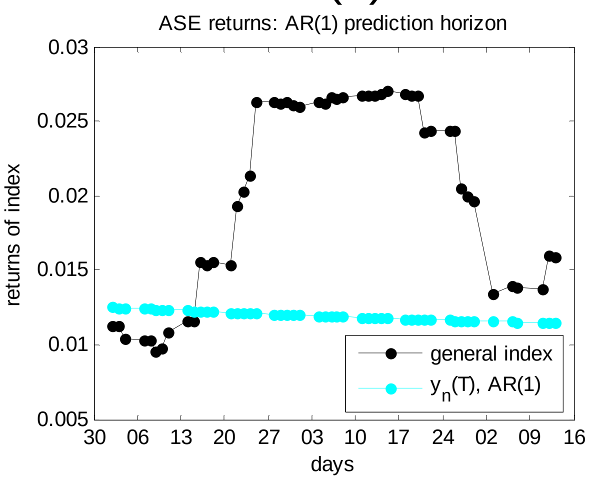
Αξιολόγηση πρόβλεψης,
σύνολο ελέγχου 2/1/2008 - 13/3/07

$$N = 1520 \quad N - N_1 = 49$$

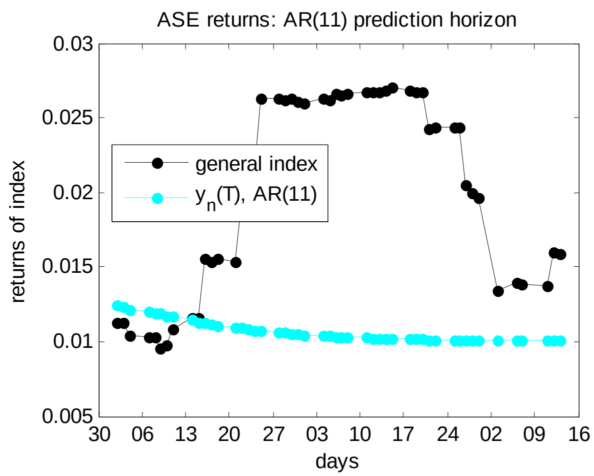


Πρόβλεψη με αφετηρία 31/12/2007 και ως 13/3/07 $n = 1471$ $T = 1, 2, \ldots, 49$

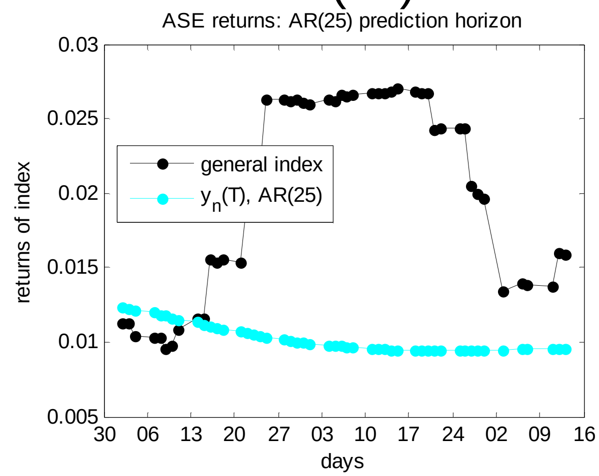
AR(1)



AR(11)

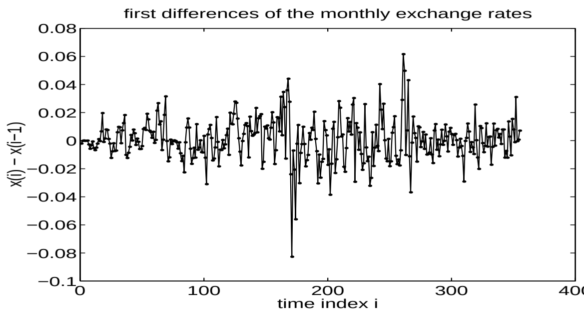


AR(25)



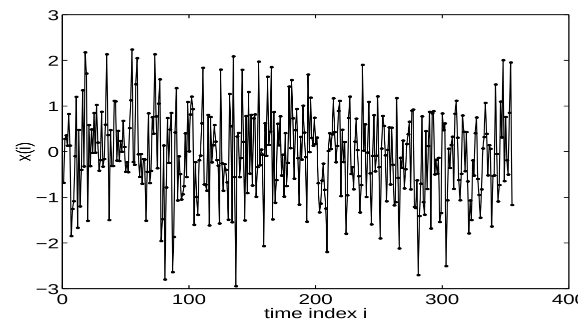
Μοντέλα

Μοντέλο για x_i
πρώτες διαφορές ισοτιμία συναλλάγματος?

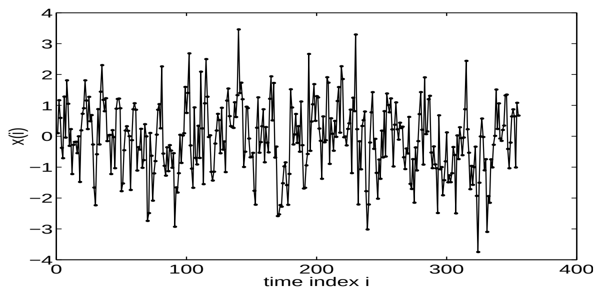


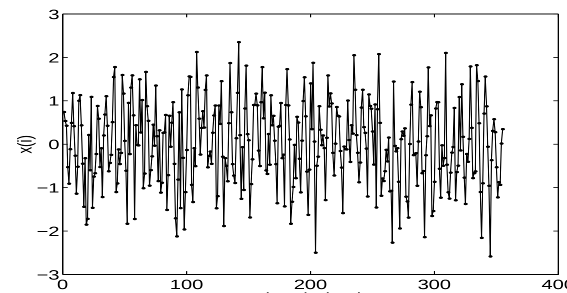
Υποψήφια μοντέλα:

Πλήρως στοχαστικό
(λευκός θόρυβος)

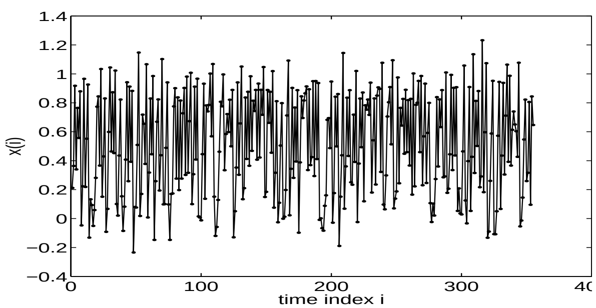


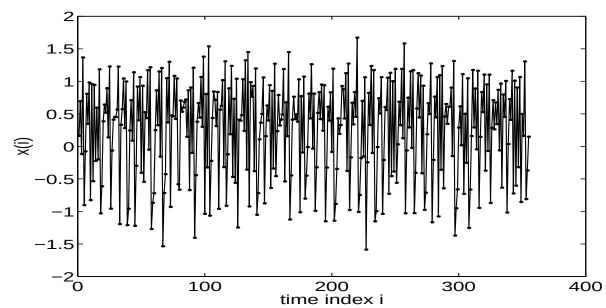
"**γραμμικό**"
αιτιοκρατικό
\+ θόρυβο
(στοχαστικό)



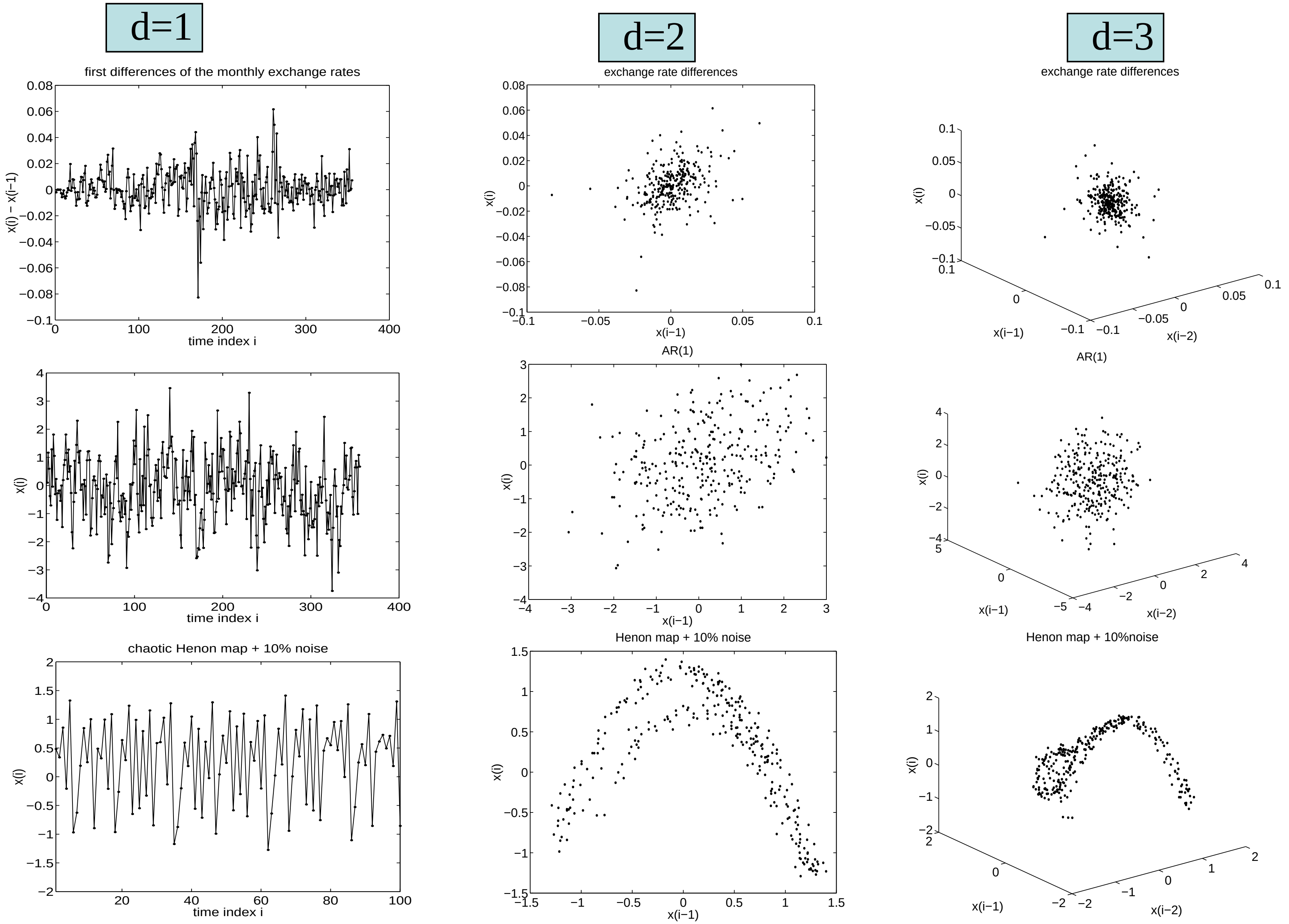


μη-γραμμικό
αιτιοκρατικό
(+ θόρυβο)

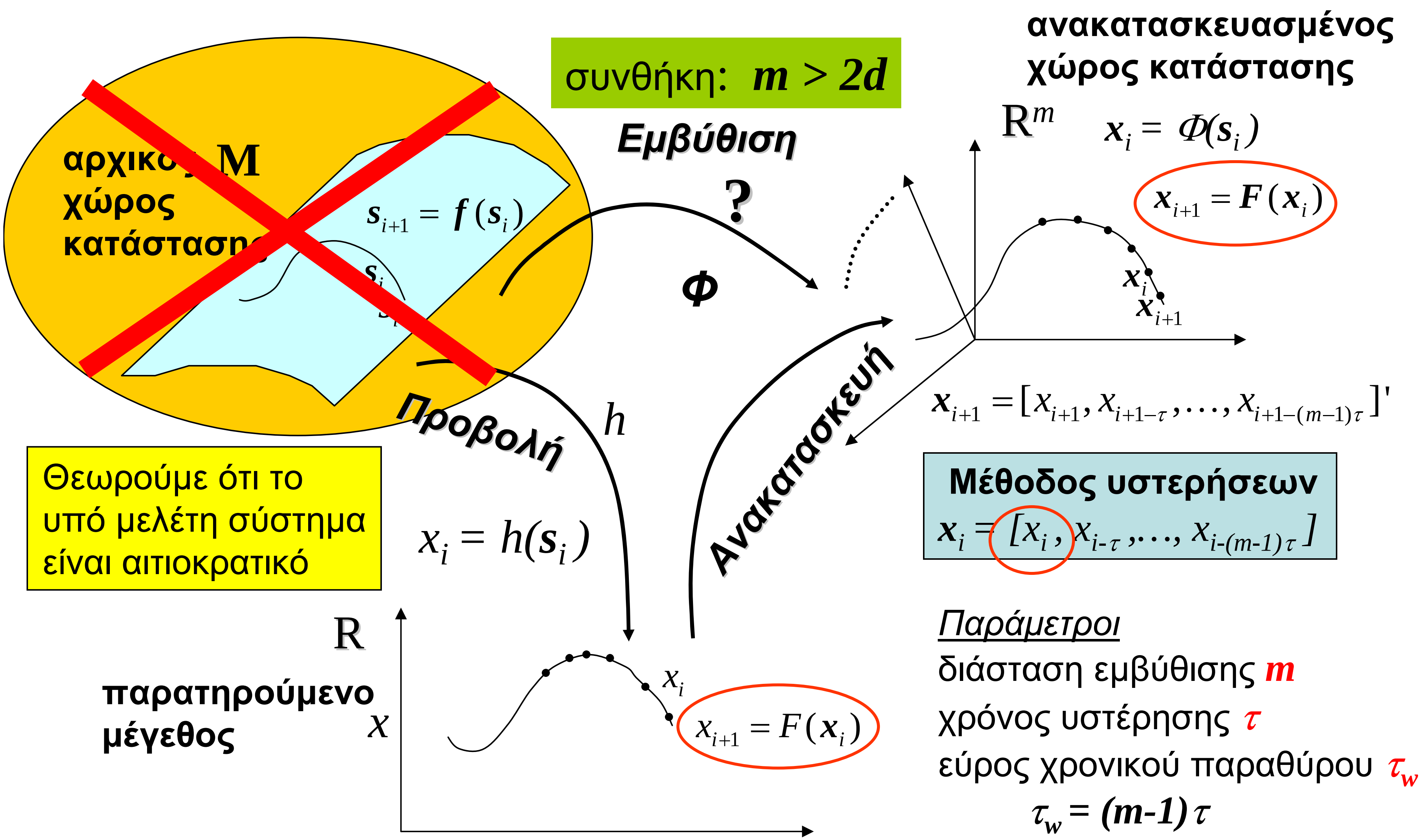




Διερεύνηση μη-γραμμικού μοντέλου: διαγράμματα διασποράς σε 2 και 3 διαστάσεις



Ανακατασκευή χώρου κατάστασης (εμβύθιση)



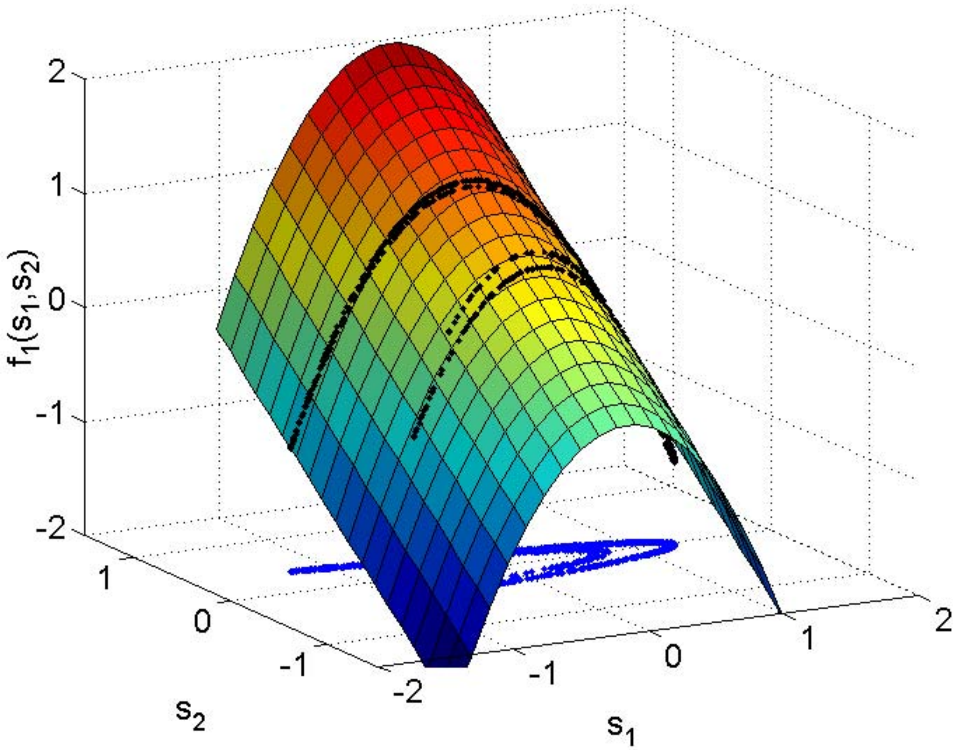
Το πραγματικό σύστημα

χρονοσειρά $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

το αιτιοκρατικό σύστημα $\qquad \mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_i) \qquad x_i = h(\mathbf{s}_i)$

απεικόνιση Henon

$$s_{1,i+1} = 1 - 1.4 s_{1,i}^2 + s_{2,i}$$
$$s_{2,i+1} = 0.3 s_{1,i}$$



$$\mathbf{s}_i \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{s}_{i+1}$$

$$(s_{1,i}, s_{2,i}) \xrightarrow{f_1} s_{1,i+1}$$

$$(s_{1,i}, s_{2,i}) \xrightarrow{f_2} s_{2,i+1}$$

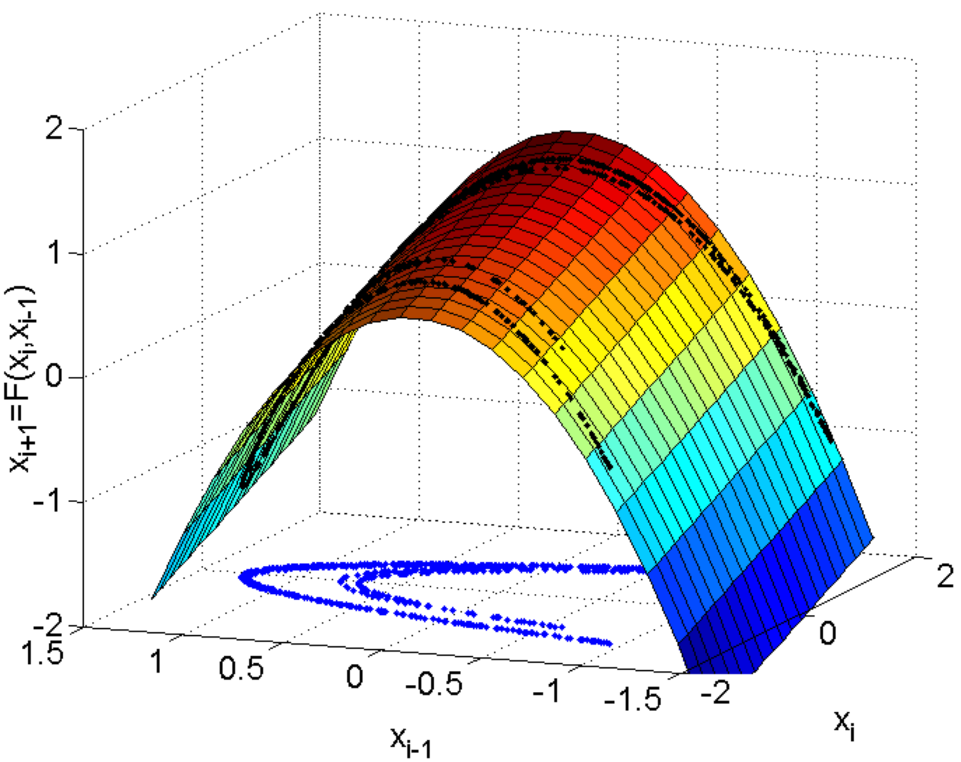
Το μοντέλο για τη χρονοσειρά

το σύστημα που παράγει τη χρονοσειρά : $\boldsymbol{s}_{i+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}_i)$ άγνωστο

το σύστημα ανακατασκευασμένο από τη χρονοσειρά: $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i)$ εκτίμηση του $\boldsymbol{F}$?

Το πρόβλημα μοντελοποίησης / πρόβλεψης:
δίνονται $x_1, x_2, \ldots x_i$ → προέβλεψε x_{i+1}

Μέθοδος υστερήσεων
$\boldsymbol{x}_i = [x_i, x_{i-\tau}, \ldots, x_{i-(m-1)\tau}]$



Η συνάρτηση που πρέπει να εκτιμηθεί:

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_i) \quad \boldsymbol{F}: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$$

$$\downarrow$$

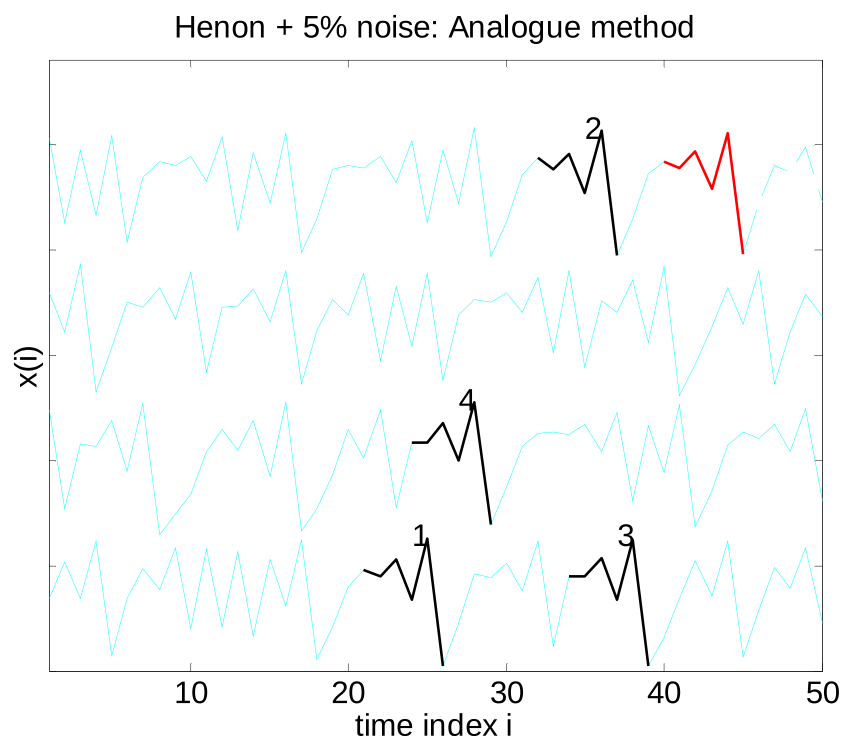
$$x_{i+1} = F(\boldsymbol{x}_i) \quad F: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$$

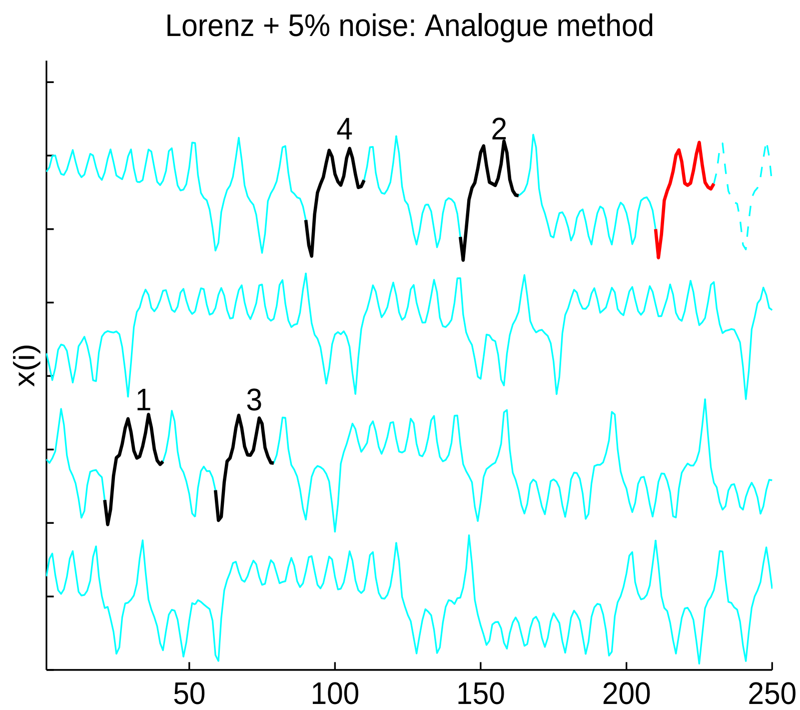
$$m = 2,\ \tau = 1 \qquad x_{i+1} = F(x_i, x_{i-1})$$

Πρόβλεψη χρησιμοποιώντας όμοια τμήματα

δίνεται $x_1, x_2, \ldots x_i$ → προέβλεψε x_{i+1} ή x_{i+T}

Προέβλεψε για χρόνο $i+T$ χρησιμοποιώντας τις εικόνες T χρονικά βήματα μπροστά των τμημάτων από το παρελθόν, τα οποία είναι όμοια με το επικείμενο τμήμα





Τοπικά μοντέλα Πρόβλεψης

Εφαρμόζοντας την ιδέα των όμοιων τμημάτων :
τμήματα χρονοσειρών ➔ ανακατασκευασμένα σημεία

$$x_{i-(m-1)}, x_{i-(m-2)}, \ldots, x_{i-1}, x_i$$

$$\mathbf{x}_i = [x_i, x_{i-1}, \ldots x_{i-(m-1)}] \in R^m$$

κοντινότερα σημεία στο $\mathbf{x}_i$: $\{\mathbf{x}_{i(1)}, \mathbf{x}_{i(2)}, \ldots, \mathbf{x}_{i(K)}\}$

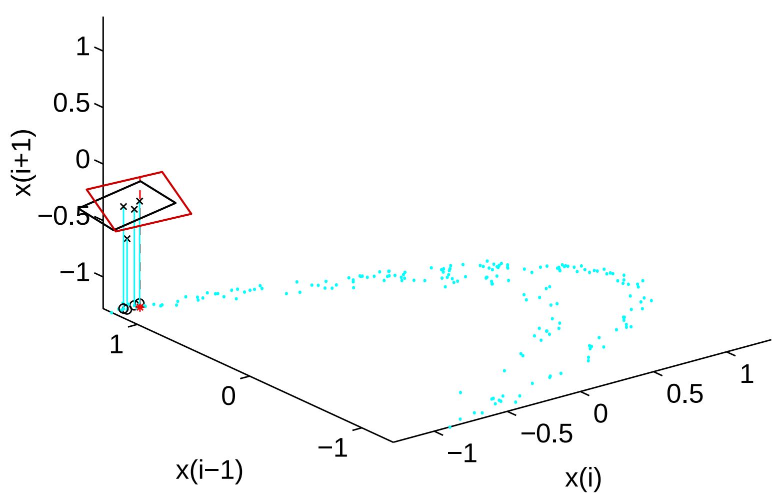
Πρόβλεψη του $\mathbf{x}_{i+T}$ από τις εικόνες των γειτονικών σημείων $\{x_{i(1)+T}, x_{i(2)+T}, \ldots, x_{i(K)+T}\}$

Πρόβλεψη με το κοντινότερο γείτονα: $\hat{x}_{i+T} \equiv x_i(T) = x_{i(1)+T}$

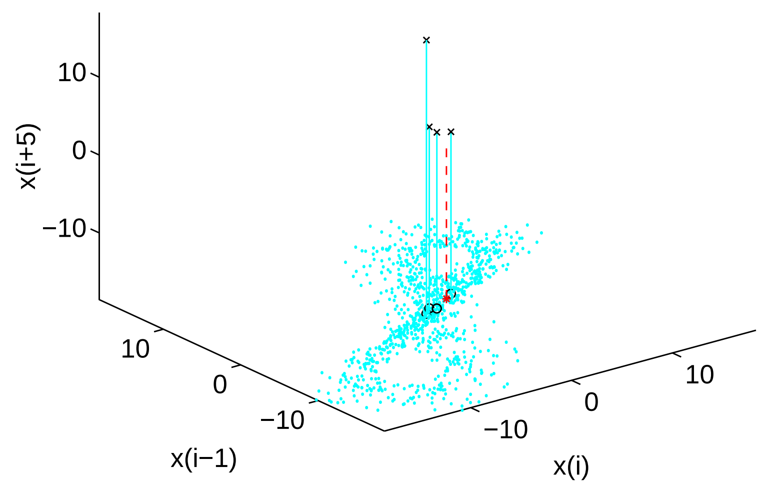
Πρόβλεψη μέσου όρου
(εικόνων κοντινότερων γειτόνων) $x_i(T) = \dfrac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} x_{i(j)+T}$

Local Average Map (LAM)

Henon + 5% noise: State space prediction



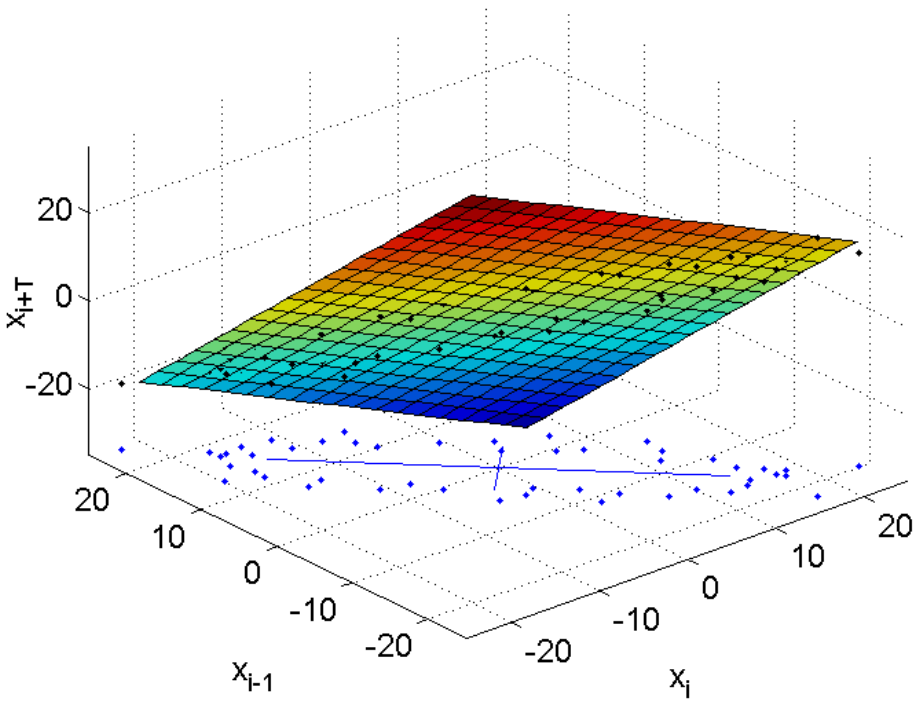
Lorenz + 5% noise: State space prediction



Τοπικό γραμμικό μοντέλο (local linear model, LLM)

Υποθέτουμε πως για κάθε σημείο $\boldsymbol{x}_i$ το υπό μελέτη σύστημα μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά με γραμμικό μοντέλο:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= F(\boldsymbol{x}_i) = F(x_i, x_{i-\tau}, \ldots, x_{i-(m-1)\tau}) \\
&= a_0 + a_1 x_i + a_2 x_{i-\tau} + \cdots + a_m x_{i-(m-1)\tau} \\
&= a_0 + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_i
\end{aligned}
$$



Το μοντέλο ισχύει για:

$$\boldsymbol{x}_{i(1)}, \boldsymbol{x}_{i(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i(K)}$$

$$
\begin{aligned}
x_{i(1)+T} &= a_0 + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_{i(1)} \\
&\vdots \\
x_{i(K)+T} &= a_0 + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_{i(K)}
\end{aligned}
$$

Εκτίμηση παραμέτρων $a_0, a_1, \ldots, a_m$ (μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων)

$$\min_{a_0, a_1, \ldots, a_m} \sum_{j=1}^{K} \left(x_{i(j)+1} - (a_0 + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}_{i(j)}) \right)^2$$

Παράδειγμα Αστάθεια ημερήσιου δείκτη ΧΑΑ από 2/1/02 – 31/12/07, πρόβλεψη ως 13/3/07

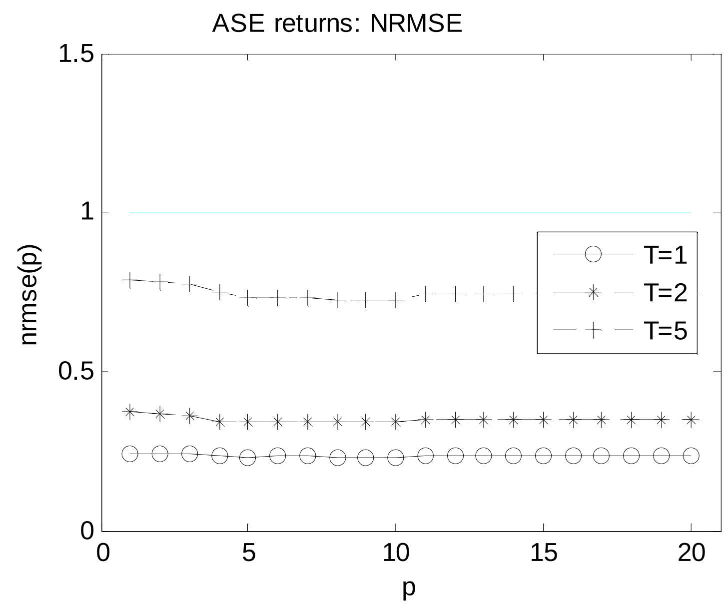
Αξιολόγηση πρόβλεψης,
σύνολο ελέγχου 2/1/2008 - 13/3/07

$$N = 1520 \quad N - N_1 = 49$$

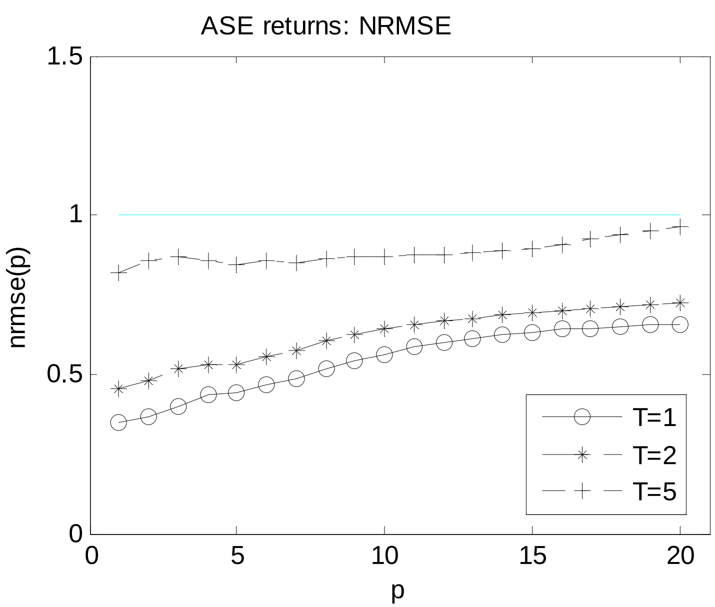
Τοπικά μοντέλα

$$K = 10 \qquad \tau = 1$$

AR



LAM



LLM