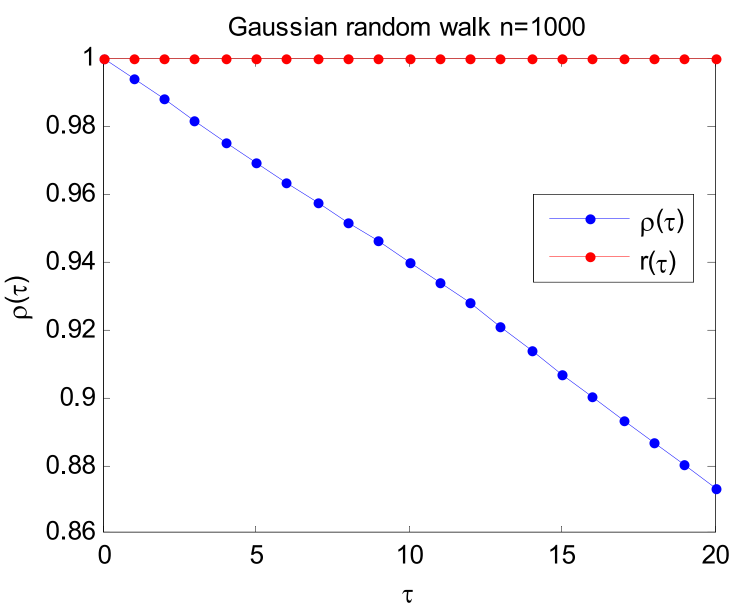
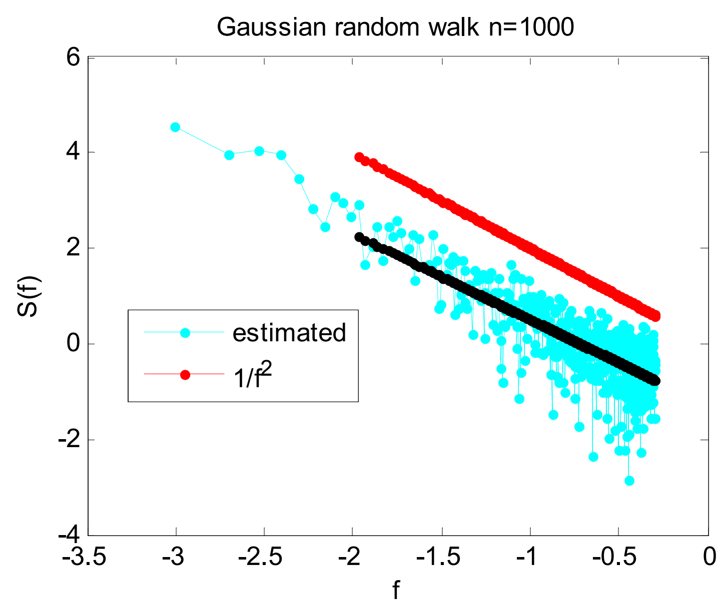
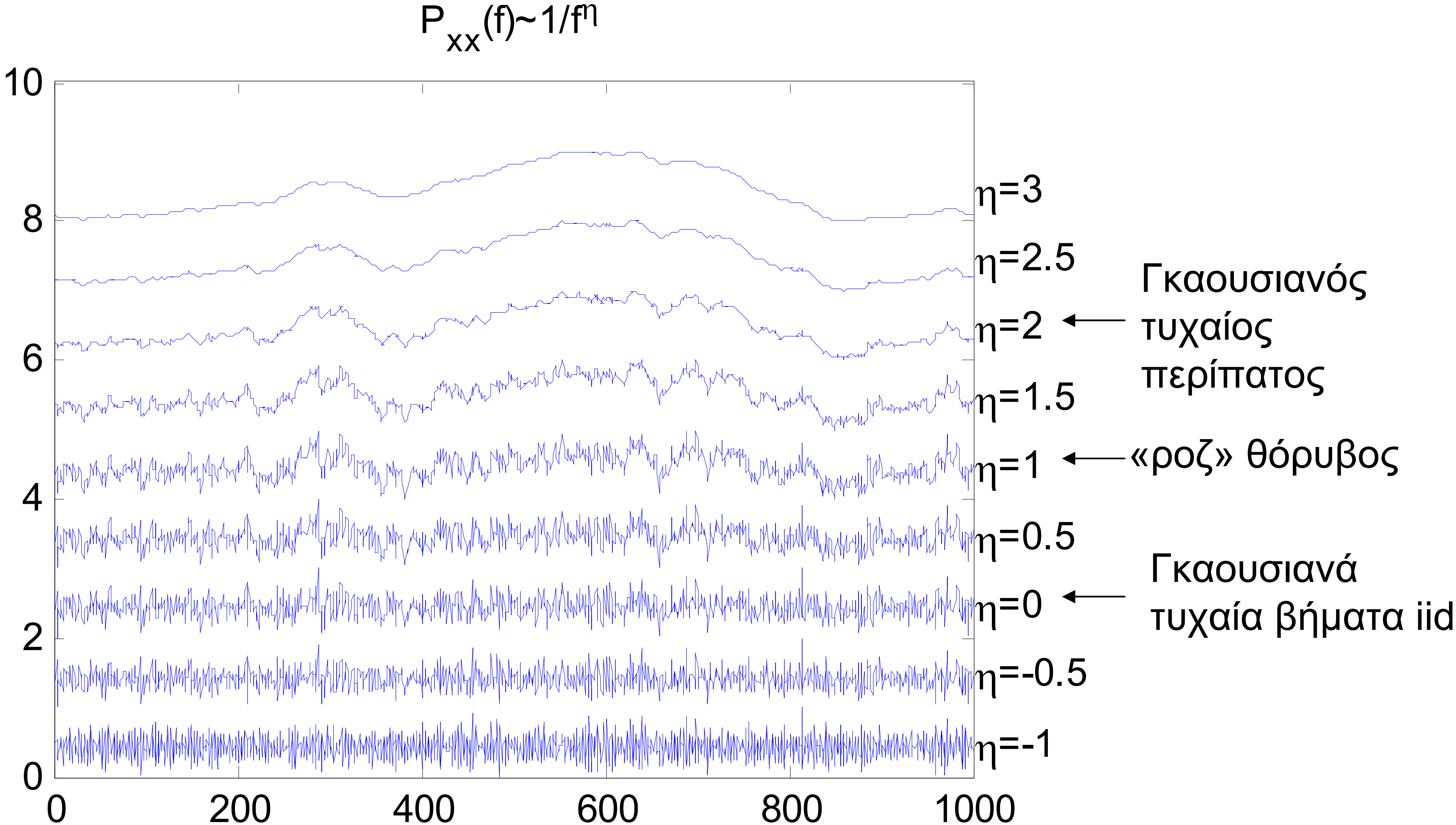
Στοχαστικές διαδικασίες και συσχέτιση μακράς κλίμακας

		αυτοσυσχέτιση	φάσμα ισχύος
λευκός θόρυβος	$\eta = 0$	$\rho(\tau) = 0$	$S(f) = \sigma^2$
τυχαίος περίπατος (Wiener διαδικασία)	$\eta = 2$	$\rho(\tau) = 1$ **?**	$S(f) \sim 1/f^2$
1/f θόρυβος (έγχρωμος θόρυβος)	$\eta = 1$	$\rho(\tau) = 1$ **?**	$S(f) \sim 1/f$
	$0 < \eta < 2$	$\rho(\tau) \sim \tau^{\eta-1}$ μεγάλα τ $\eta < 1$	$S(f) \sim 1/f^{\eta}$







η → φασματικός εκθέτης για τα τυχαία βήματα x_i

$\eta + 2$ → φασματικός εκθέτης για το προφιλ (ολοκλήρωση των βημάτων y_i

Εκτίμηση του εκθέτη συσχέτισης μακράς κλίμακας

1. αυτοσυσχέτιση   2. φάσμα ισχύος

3. διασπορά

$\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ χρονοσειρά Y_t : η τιμή ενός δείκτη

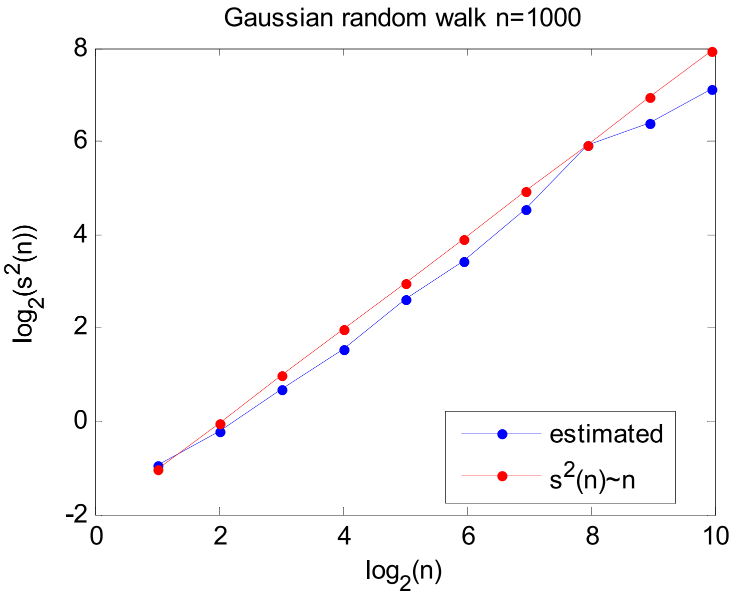
Αν $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ τυχαίος περίπατος με $X_i \sim iid$ $\quad i = 1, \ldots, n$

$\mathrm{Var}\left[Y_n\right] = n\sigma^2$ $\mathrm{E}\left[X_i\right] = 0 \quad \mathrm{E}\left[X_i^2\right] = \sigma^2$

$$n = 3 \qquad \underbrace{\underbrace{y_1, y_2, y_3}_{s_1^2}, \underbrace{y_4, y_5, y_6}_{s_2^2}, \underbrace{y_7, y_8, y_9}_{s_3^2}, \ldots\ldots, y_N}_{s^2(3)}$$

$$\sigma^2(n) \sim n$$

$$n = 4 \qquad \underbrace{\underbrace{y_1, y_2, y_3, y_4}_{s_1^2}, \underbrace{y_5, y_6, y_7, y_8}_{s_2^2}, y_9, \ldots\ldots, y_N}_{s^2(4)}$$



τυχαίος περίπατος: $\mathrm{Var}[Y_n] = s^2(n) \sim n$

εκτίμηση του εκθέτη συσχέτισης μακράς κλίμακας – μέθοδος διασποράς

Αντίστοιχα για την τυπική απόκλιση

τυχαίος περίπατος: $\sigma_{Y_n} = \sqrt{n}\sigma \qquad \sigma(n) \sim n^{0.5}$

Γενικά για μια στοχαστική διαδικασία με συσχέτιση μακράς κλίμακας

$$\sigma^2(n) \sim n^{2H} \qquad \left(\sigma(n) \sim n^{H}\right)$$

εκθέτης Hurst

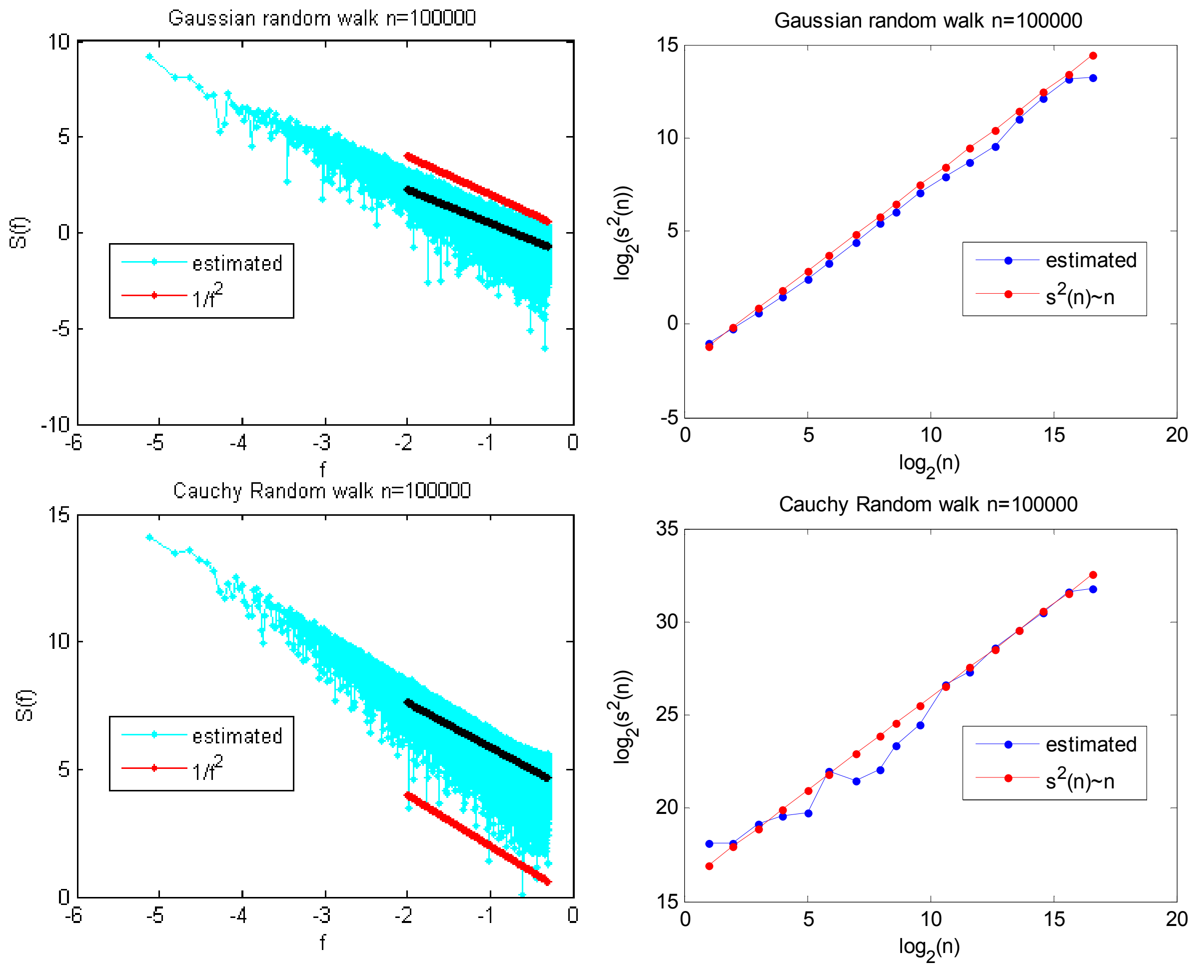
Ο εκθέτης Hurst δηλώνει τον τύπο της αυτό-συνάφειας (self-affinity) της στοχαστικής διαδικασίας.

- όταν αλλάζει η κλίμακα (rescale) του χρόνου κατά παράγοντα *n* ➔ θα πρέπει να αλλάξει η κλίμακα των τιμών της μεταβλητής κατά παράγοντα n^H για να διατηρηθεί η ίδια στατιστική εικόνα

$$x(t) \to n^{H} x(nt)$$

Για τον τυχαίο περίπατο, H=0.5, ο άξονας των τιμών της μεταβλητής πρέπει να αλλάξει κλίμακα με παράγοντα 2 αν ο άξονας των χρονικών βημάτων αλλάξει με παράγοντα 4.

Η κατανομή των τυχαίων βημάτων δεν επηρεάζει τα χαρακτηριστικά μακράς συσχέτισης του τυχαίου περιπάτου



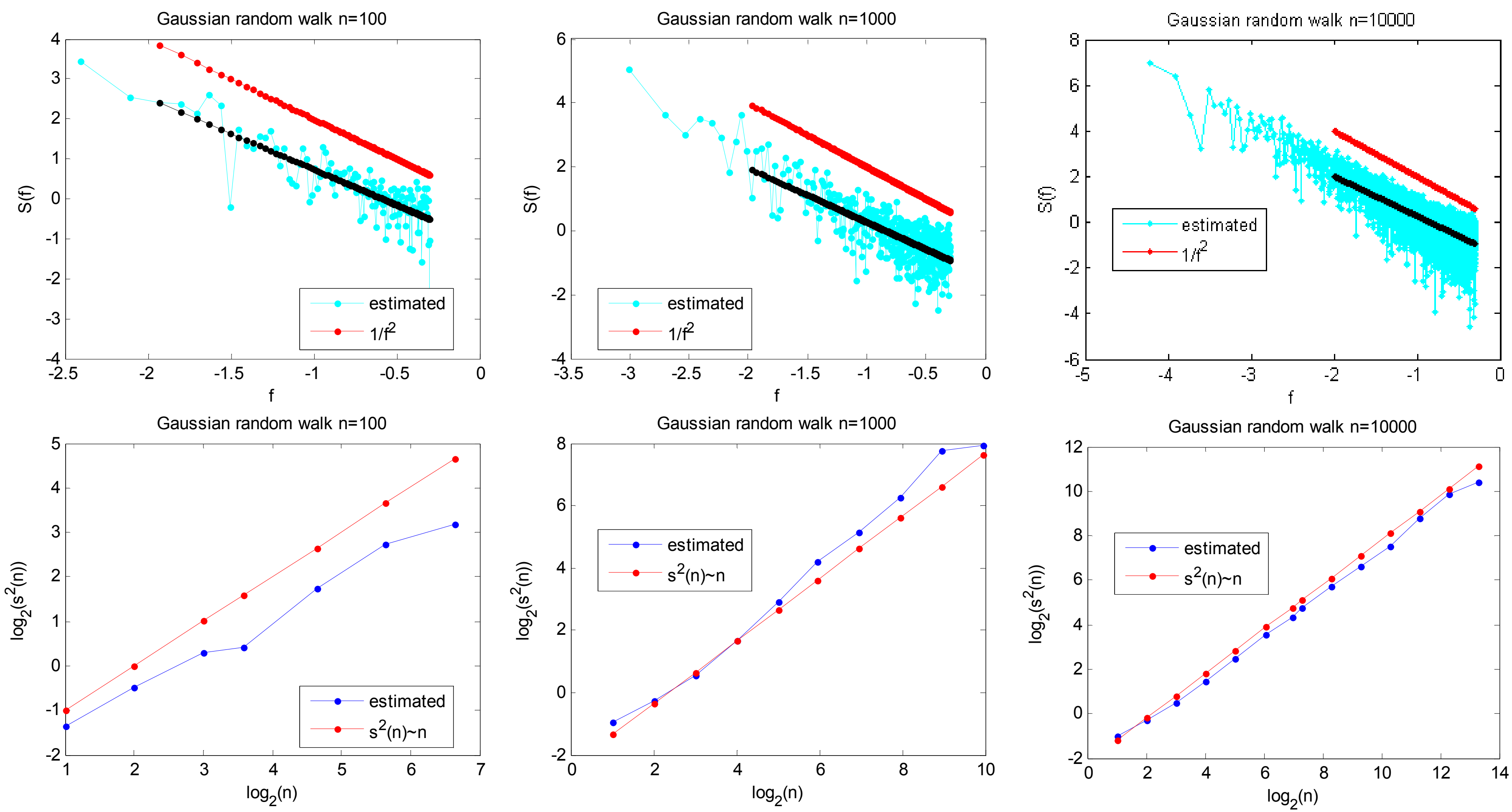
εκθέτης φάσματος ισχύος

$$S(f) \sim 1/f^{\eta} \longleftrightarrow \eta = 2H + 1$$

$$S(f) \sim 1/f^{2+\eta} \longleftrightarrow (\eta + 2) = 2\mathrm{H} + 1 \Leftrightarrow \eta = 2H - 1$$

εκθέτης Hurst

Προβλήματα στον υπολογισμό του Hurst από φάσμα ισχύος και διασπορά



Εκτίμηση του εκθέτη Hurst με ανάλυση αλλαγής κλίμακας του εύρους Rescaled-Range Analysis (R/S analysis)

$\left\{x_1, x_2, \ldots, x_N\right\}$ χρονοσειρά (των μεταβολών του δείκτη)

1. Χωρίζουμε τη χρονοσειρά σε τμήματα μήκους *n* (κλίμακα χρόνου *n*) :

π.χ. $n = 3$ $\left\{\underbrace{x_1, x_2, x_3}, \underbrace{x_4, x_5, x_6}, \underbrace{x_7, x_8, x_9}, \ldots, x_N\right\}$ $N_n = N / n$

2. Σε κάθε τμήμα $\nu = 0, \ldots, N_n - 1$ υπολογίζουμε το προφίλ (από ολοκλήρωση)

$$Y_\nu(j) = \sum_{i=1}^{j} (x_{\nu n+i} - \overline{x}_{\nu n})$$

$$\overline{x}_{\nu n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{s} x_{\nu n+i}$$ τοπικός μέσος

3. Σε κάθε τμήμα υπολογίζουμε το εύρος του προφίλ
   και την τυπική απόκλιση του τμήματος της αρχικής χρονοσειράς

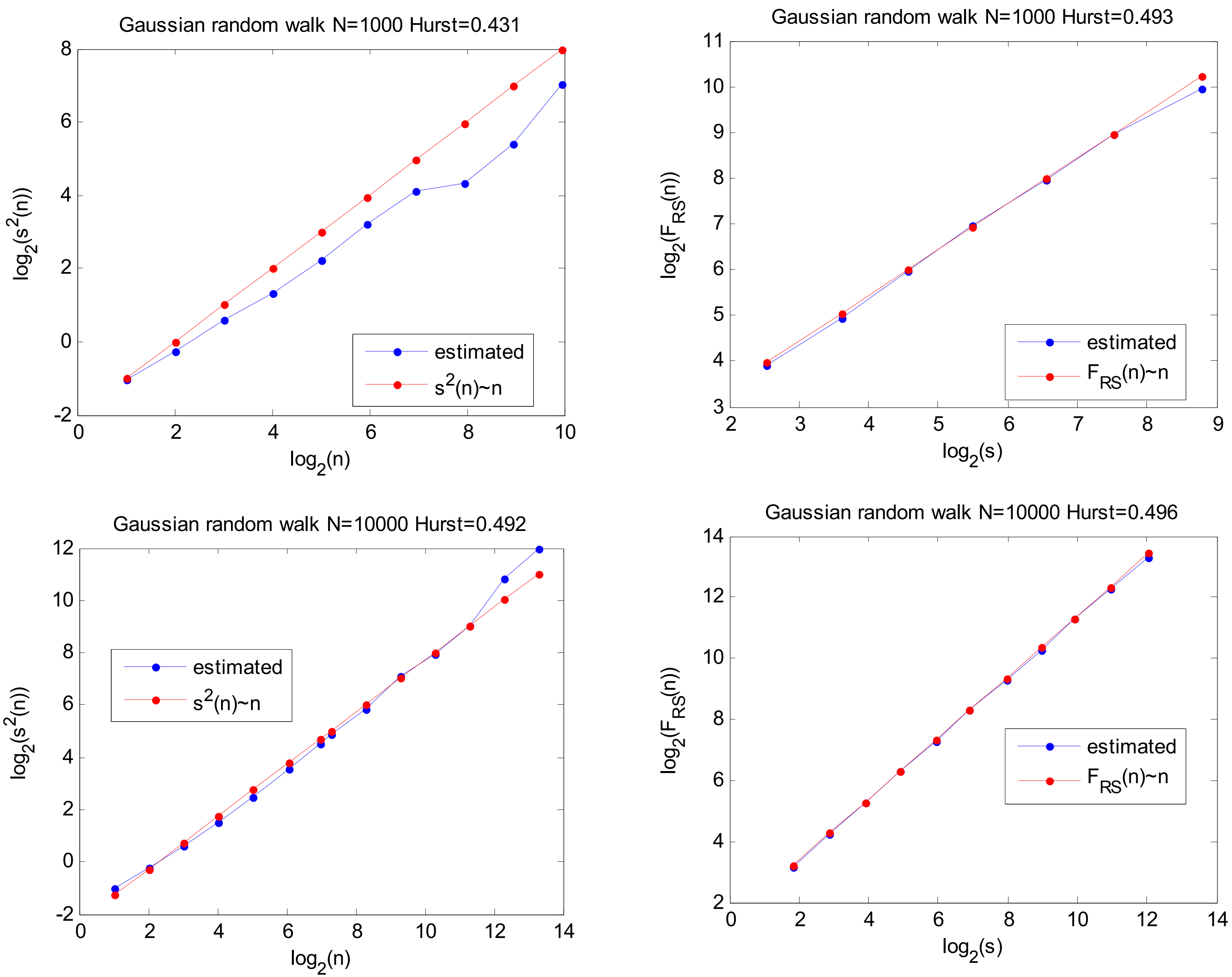
$$R_\nu(n) = \max_{j=1}^{n} Y_\nu(j) - \min_{j=1}^{n} Y_\nu(j) \qquad S_\nu(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{j} (x_{\nu n+i} - \overline{x}_{\nu n})^2}$$

4. Υπολογίζουμε το μέσο όρο του λόγου εύρους προς τυπική απόκλιση από όλα τα τμήματα

$$F_{\mathrm{RS}}(n) = \frac{1}{N_n} \sum_{\nu=0}^{N_n - 1} \frac{R_\nu(n)}{S_\nu(n)}$$

Για *n*>>1 ο εκθέτης Hurst υπολογίζεται από το νόμο δύναμης

$$F_{\mathrm{RS}}(n) \sim n^H \qquad \eta = 2H - 1$$


Gaussian random walk N=1000 Hurst=0.431
log2(s2(n))
log2(n)
estimated
s2(n)~n
Gaussian random walk N=1000 Hurst=0.493
log2(FRS(n))
log2(s)
estimated
FRS(n)~n
Gaussian random walk N=10000 Hurst=0.492
log2(s2(n))
log2(n)
estimated
s2(n)~n
Gaussian random walk N=10000 Hurst=0.496
log2(FRS(n))
log2(s)
estimated
FRS(n)~n