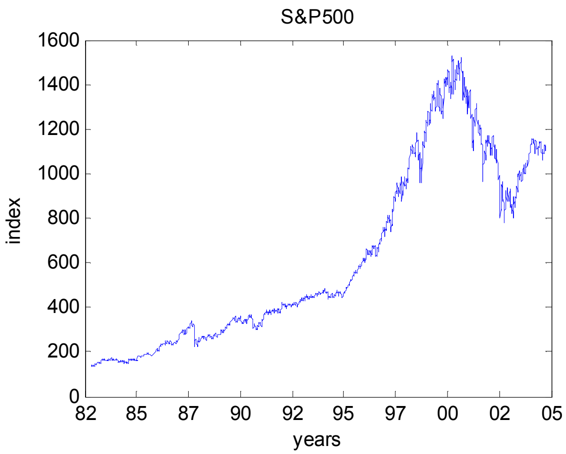
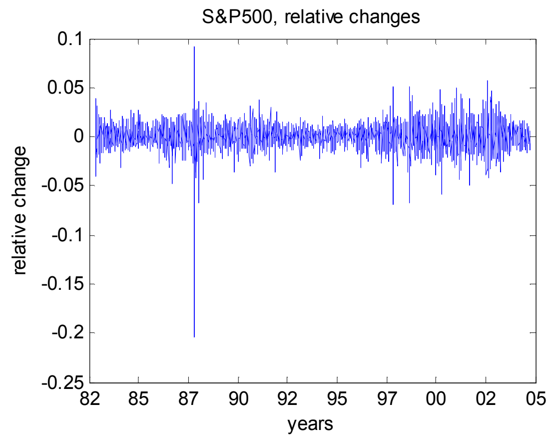
Χρονική συσχέτιση

Στοχαστική διαδικασία

Y_t : η τιμή ενός δείκτη

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ χρονοσειρά $\longleftarrow$ $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ $\quad$ $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

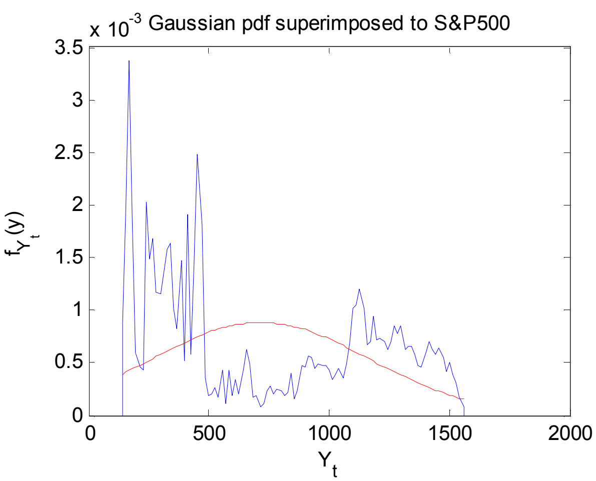


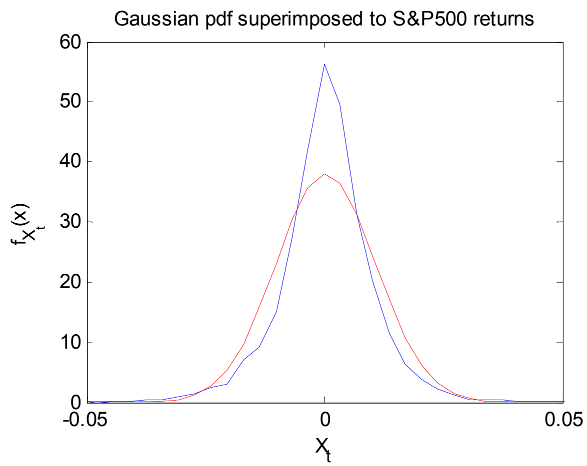


σχετική
μεταβολή
τιμής

$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}$$

$f_{Y_t}(y)$ $\quad$ $f_{X_t}(x)$





Στατική περιγραφή …
→ περιθώρια κατανομή

Δυναμική περιγραφή?
→ Χρονική συσχέτιση

Κατανομές και ροπές στοχαστικής διαδικασίας

Η στοχαστική διαδικασία περιγράφεται από την περιθώρια και τις κοινές κατανομές

$$\left.\begin{array}{ll} \forall t \in Z & f_{Y_t}(y) = f_Y(y,t) \\ \forall t_1, t_2 \in Z & f_{Y_{t_1},Y_{t_2}}(y_1,y_2) = f_Y(y_1,y_2,t_1,t_2) \\ \forall t_1, t_2, t_3 \in Z & f_{Y_{t_1},Y_{t_2},Y_{t_3}}(y_1,y_2,y_3) = f_Y(y_1,y_2,y_3,t_1,t_2,t_3) \end{array}\right\}$$

περιθώρια κατανομή

κοινή κατανομή 2 μεταβλητών

κοινή κατανομή 3 μεταβλητών

…

Ροπή πρώτης τάξης (μέση τιμή) $\mathrm{E}\left[Y_t\right] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y,t)\mathrm{d}y = \mu_t$

Ροπή δεύτερης τάξης $\mathrm{E}\left[Y_{t_1}Y_{t_2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 f_Y(y_1,y_2,t_1,t_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \kappa(t_1,t_2)$

Κεντρική ροπή δεύτερης τάξης $\mathrm{E}\left[(Y_{t_1}-\mu_{t_1})(Y_{t_2}-\mu_{t_2})\right] = \kappa(t_1,t_2) - \mu_{t_1}\mu_{t_2} = \gamma(t_1,t_2)$

αυτοδιασπορά (autocovariance)

Ροπές μεγαλύτερης τάξης …

Γενικά η κατανομή και οι ροπές μπορεί να αλλάζουν σε κάθε χρονικό βήμα

Στασιμότητα

Αυστηρή στασιμότητα (strict-sense stationarity):

Οι κατανομές είναι σταθερές στο χρόνο (ισοδύναμα όλες οι ροπές είναι σταθερές)

$$\left.\begin{array}{r} \forall t \in Z \\ \forall t_1, t_2 \in Z \\ \forall t_1, t_2, t_3 \in Z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f_{Y_t}(y) = f_Y(y,t) = f_{Y_t}(y) \\ f_{Y_{t_1},Y_{t_2}}(y_1, y_2) = f_{Y_t,Y_{t-\tau}}(y_1, y_2) \\ f_{Y_{t_1},Y_{t_2},Y_{t_3}}(y_1, y_2, y_3) = f_{Y_t,Y_{t-\tau_1},Y_{t-\tau_2}}(y_1, y_2, y_3) \end{array}\right\}$$

σταθερές $\forall t \in Z$

Ασθενή στασιμότητα (wide-sense stationarity):

Οι δύο πρώτες ροπές είναι σταθερές στο χρόνο

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}\left[Y_t\right] = \mu \\ \mathrm{E}\left[Y_{t_1} Y_{t_2}\right] = \mathrm{E}\left[Y_t, Y_{t-\tau}\right] = \kappa(t, t-\tau) = \kappa(\tau) \\ \gamma(t_1, t_2) = \gamma(t, t-\tau) = \gamma(\tau) \end{array}\right\}$$

σταθερές $\forall t \in Z$

σταθερή μέση τιμή
και αυτοδιασπορά

και για τ=0 $\mathrm{E}\left[Y_t^2\right] = \kappa(0)$

$$\sigma^2 = \gamma(0) = \mathrm{E}\left[Y_t^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y_t\right]\right)^2 = \kappa(0) - \mu^2$$

σταθερή διασπορά

Αυτοσυσχέτιση

Στάσιμη χρονοσειρά

Αυτοδιασπορά $\gamma(\tau) = \mathrm{E}\left[(Y_t - \mu)(Y_{t-\tau} - \mu)\right] = \mathrm{E}\left[Y_t Y_{t-\tau}\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y_t\right]\right)^2 = \kappa(\tau) - \mu^2$

Διασπορά $\sigma^2 = \gamma(0) = \mathrm{E}\left[Y_t^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[Y_t\right]\right)^2 = \kappa(0) - \mu^2$

Αυτοσυσχέτιση $\rho(\tau) = \dfrac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$

Χρονική συσχέτιση μεταβλητών της $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ σε υστέρηση τ.
Μετράει τη «μνήμη» της $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ χρονοσειρά

εκτίμηση αυτοδιασποράς $c(\tau) = \dfrac{1}{n-\tau} \sum_{t=\tau+1}^{n} (y_t y_{t-\tau} - \bar{y}^2)$

εκτίμηση αυτοσυσχέτισης $r(\tau) = \dfrac{c(\tau)}{c(0)} = \dfrac{c(\tau)}{s_Y^2}$

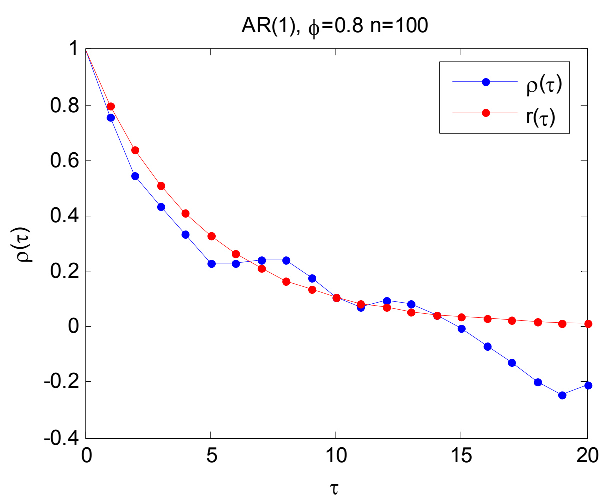
Παράδειγμα

AR(1) στοχαστική διαδικασία

$$Y_t = \phi_0 + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{iid}$$

$$\sigma_Y^2 = \gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

$$\gamma(\tau) = \phi^\tau \sigma_Y^2 \qquad \rho(\tau) = \phi^\tau$$



μνήμη του συστήματος

χαρακτηριστικός χρόνος (από)συσχέτισης

$$\rho(\tau_c) = 1/e$$

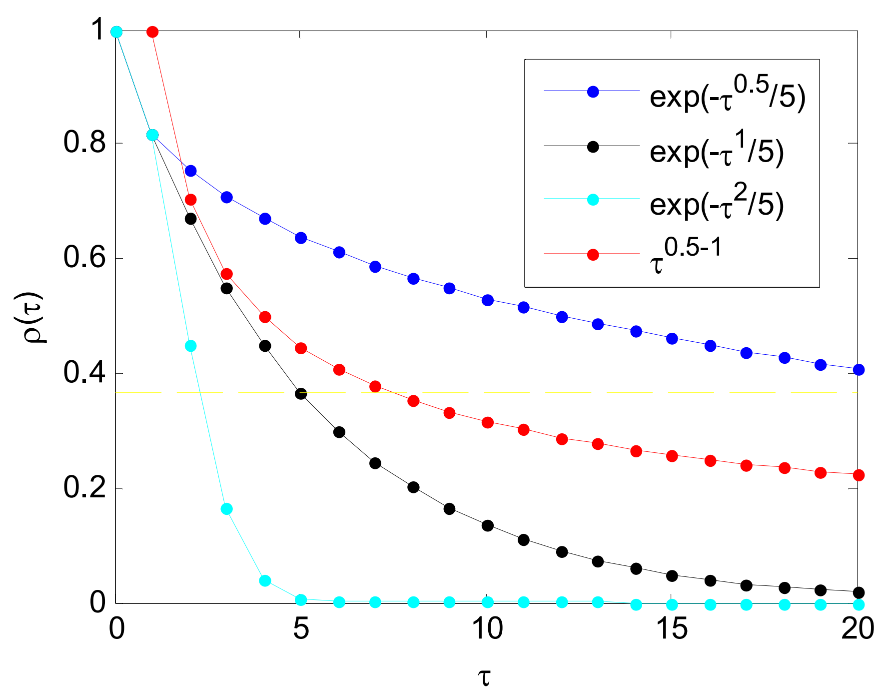
Αυτοσυσχέτιση βραχείας και μακράς κλίμακας

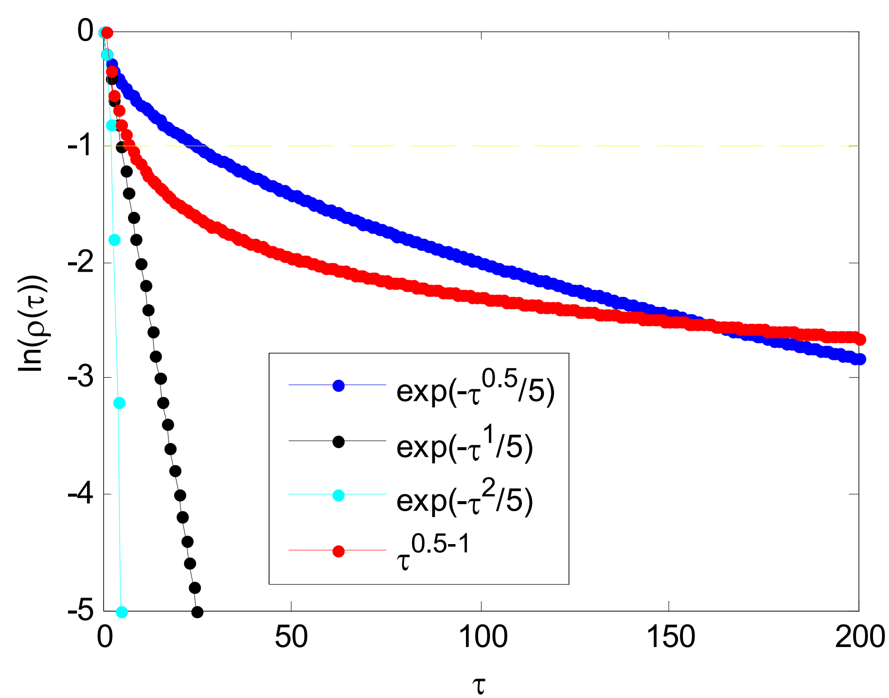
Μνήμη → πεπερασμένη / άπειρη

$$\int_0^\infty \rho(\tau)\mathrm{d}\tau$$ → πεπερασμένο $\rho(\tau)=\exp(-\tau^{\nu}/\tau_0)$ / άπειρο $\rho(\tau)\sim\tau^{\eta-1}$

Χαρακτηριστική χρονική κλίμακα που μηδενίζεται η ρ(τ) ⟶ αυτοσυσχέτιση βραχείας κλίμακας

Δεν υπάρχει χαρακτηριστική χρονική κλίμακα ⟶ μακράς κλίμακας



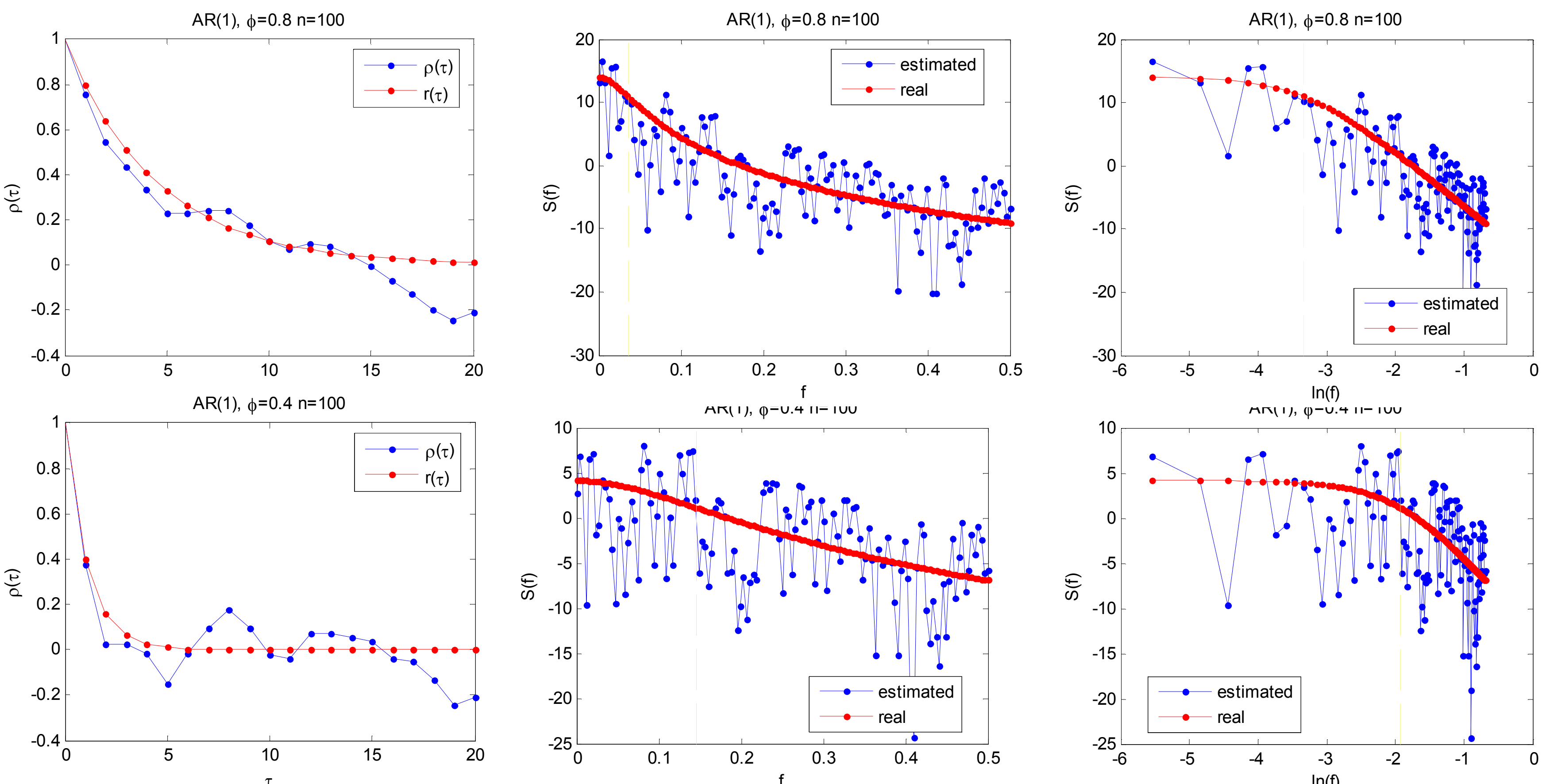


Στοχαστικές διαδικασίες με αυτοσυσχέτιση βραχείας κλίμακας

$$\rho(\tau) = \exp(-\tau/\tau_c) \qquad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-2\pi f \tau} \mathrm{d}\tau \qquad S(f) = \frac{2\sigma^2 \tau_c}{1+(2\pi f \tau_c)^2}$$

AR(1) $\quad \tau_c = 1/\ln(1/\phi)$

$f \ll 1/(2\pi\tau_c)$ $\quad S(f)$ independent of f



Η αυτοσυσχέτιση μηδενίζεται γρήγορα

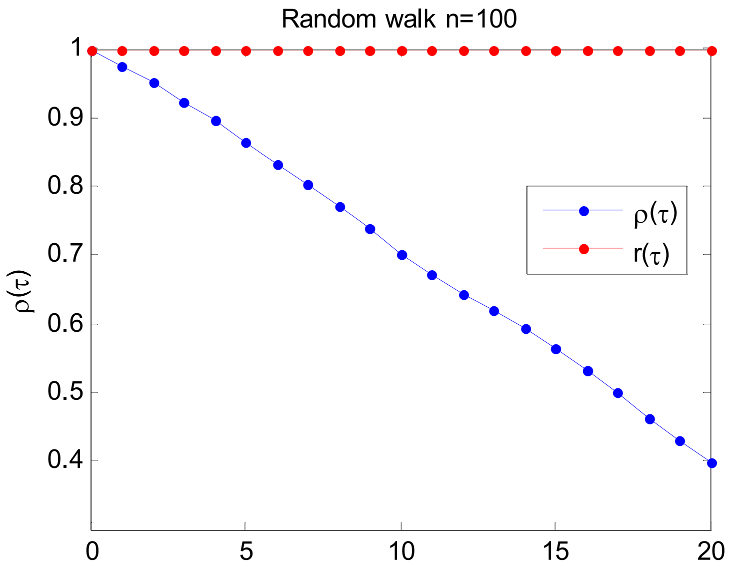
το φάσμα ισχύος είναι επίπεδο για μικρά f

βραχεία κλίμακας συσχετίσεις

Τυχαίος περίπατος (τυχαίο βήμα με πεπερασμένη διασπορά)

$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ χρονοσειρά

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{iid}$$



μη-στάσιμη, δεν ορίζεται η αυτοσυσχέτιση

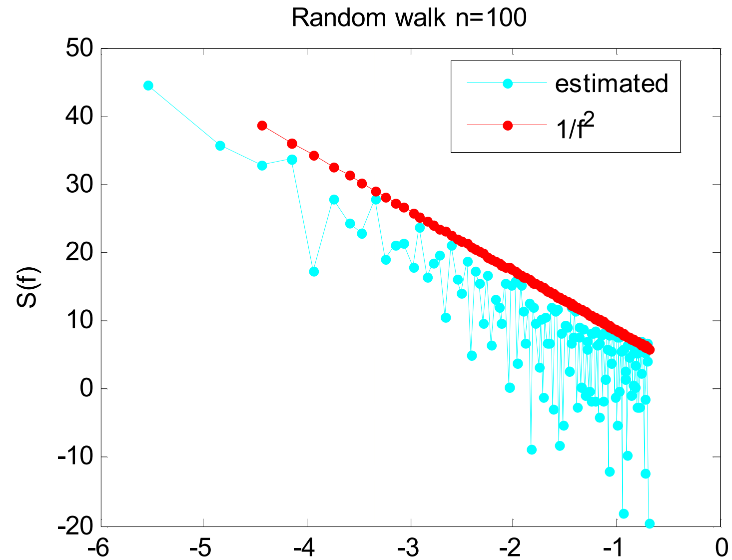
$$Y_t = Y_{t-1} + X_t$$

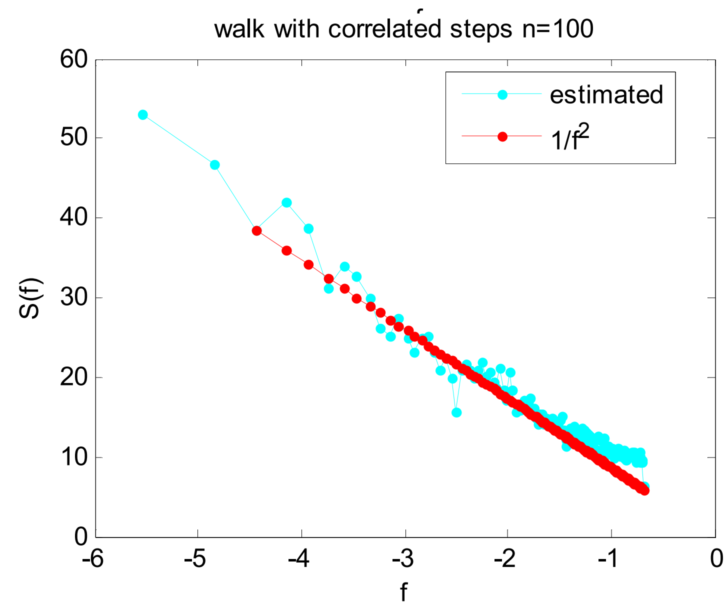
X_t συσχετισμένα

ολοκληρώσιμη χρονοσειρά έχει φάσμα ισχύος ~ $1/f^2$

⇨ βραχεία κλίμακας συσχετίσεις

$$S(f) \sim 1/f^2$$





Στοχαστικές διαδικασίες με αυτοσυσχέτιση μακράς κλίμακας

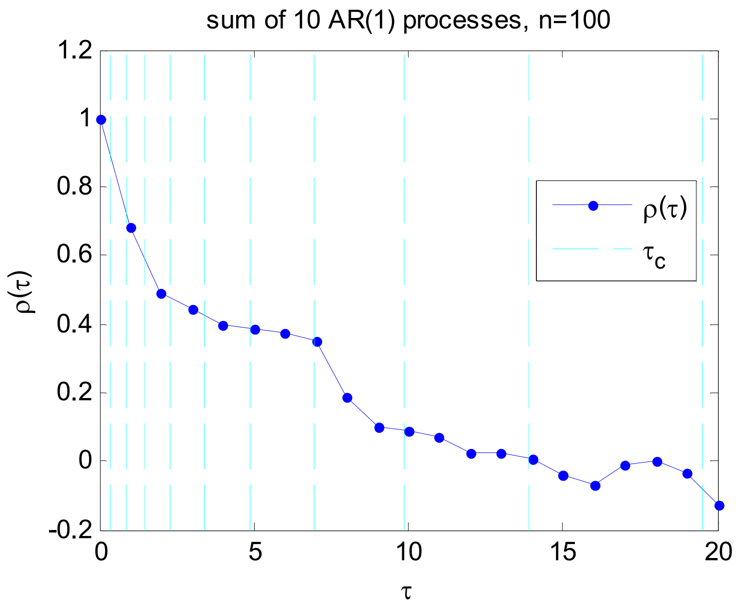
$\rho(\tau) \sim \tau^{\eta-1} \longleftrightarrow S(f) \sim 1/f^{\eta}$ $\quad 0 < \eta < 2$ (έγχρωμος θόρυβος)

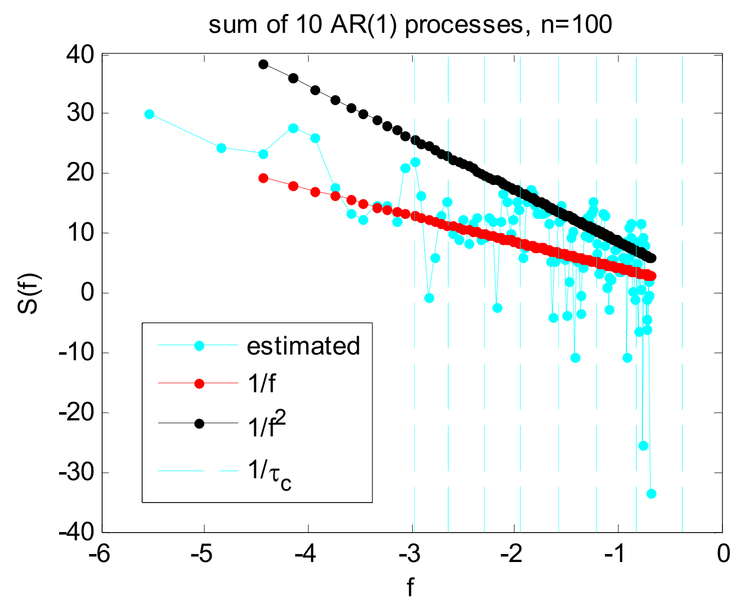
$\eta = 0 \longrightarrow$ λευκός θόρυβος (επίπεδο φάσμα ισχύος)

$\eta = 2 \longrightarrow$ τυχαίος περίπατος (Wiener διαδικασία)

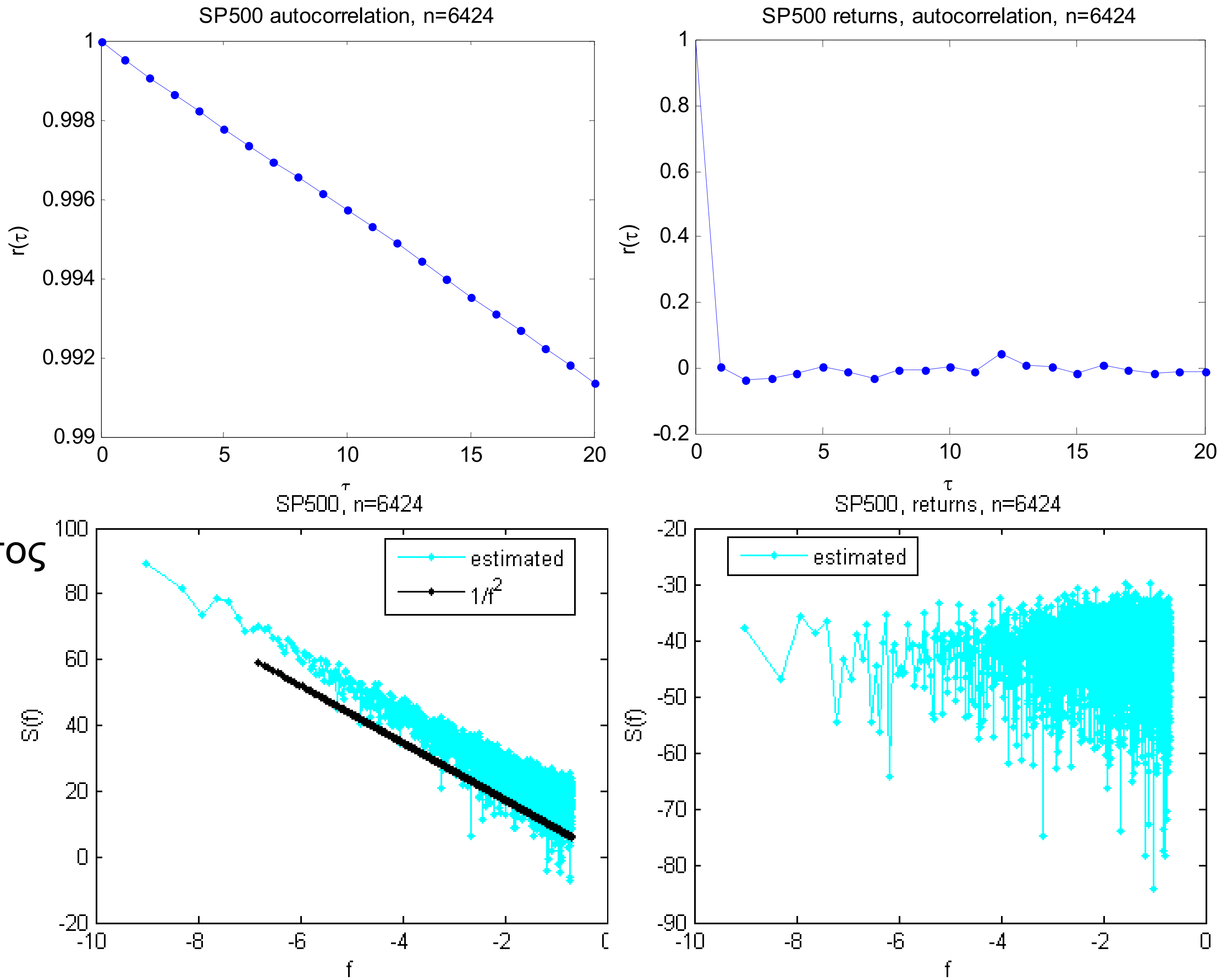
$\eta = 1 \longrightarrow$ 1/f θόρυβος (ροζ θόρυβος)

Μπορεί να διαχωριστεί 1/f θόρυβος από μια στοχαστική διαδικασία με πολλές χαρακτηριστικές κλίμακες?





Αυτοσυσχέτιση βραχείας και μακράς κλίμακας – S&P500



τυχαίος περίπατος
?

λευκός θόρυβος
?

τ_c **?**

… αλλά η αυτοσυσχέτιση και το φάσμα ισχύος δεν μπορούν να ξεχωρίσουν εύκολα συσχετίσεις μακράς κλίμακας