Κατανομή Cauchy

$$f_X(x) = \frac{\gamma}{\pi\left(\gamma^2 + (x - x_0)^2\right)}$$

παράμετρος κλίμακας

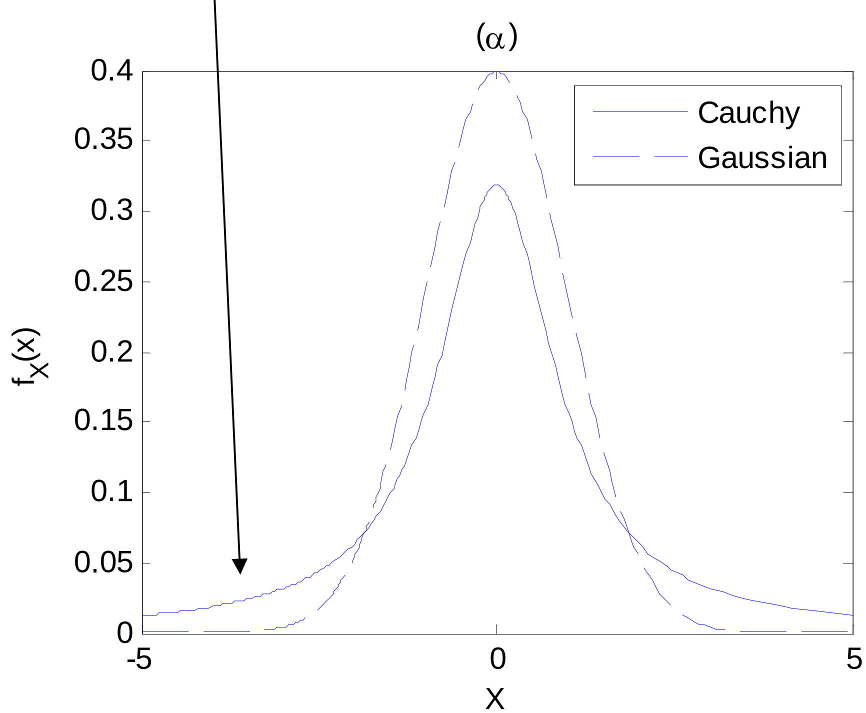
παράμετρος θέσης

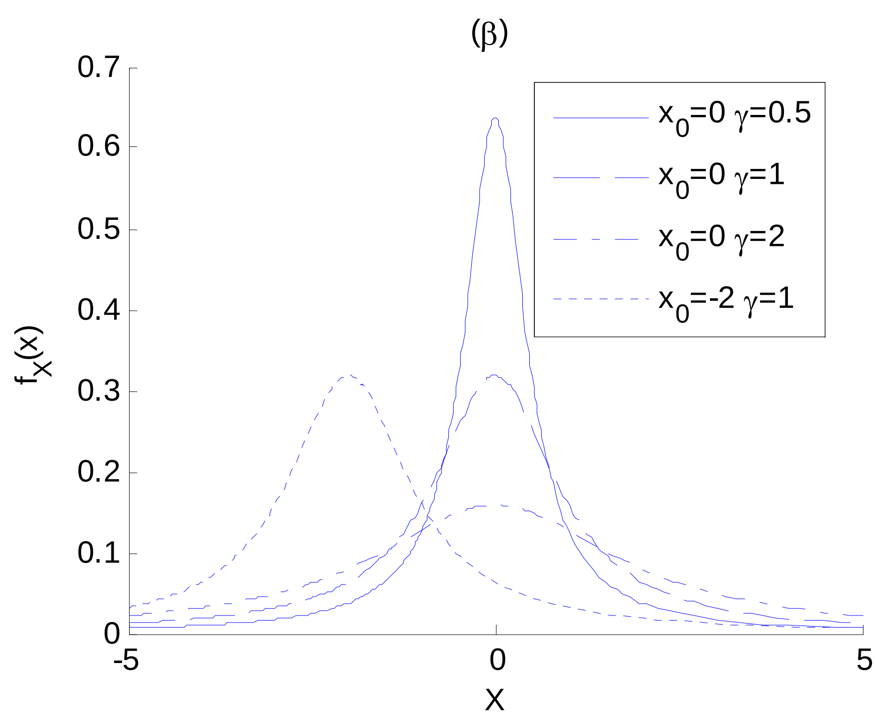
$\gamma = 1 \quad x_0 = 0$

$$f_{X^s}(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$$

τυποποιημένη Cauchy

άπειρη διασπορά





Ευσταθή κατανομή

Αν X_1, X_2 ~ ευσταθή κατανομή

$\Downarrow$

$Y = X_1 + X_2$ ~ την ίδια ευσταθή κατανομή

Κατανομή Cauchy

$$f_X(x) = \frac{\gamma}{\pi\left(\gamma^2 + x^2\right)} \Rightarrow \varphi_X(q) = e^{-\gamma|q|}$$

$$Y = X_1 + X_2 \qquad X_1, X_2$$ Cauchy iid

$$\varphi_Y(q) = e^{-\gamma|q|} e^{-\gamma|q|} = e^{-2\gamma|q|}$$

Y ~ Cauchy

$$f_Y(y) = \frac{2\gamma}{\pi\left(4\gamma^2 + y^2\right)} \Rightarrow 2\gamma$$ παράμετρος θέσης

Η Cauchy κατανομή είναι ευσταθής

Γκαουσιανή κατανομή $\varphi_Y(q) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}q^2}$ $\quad \alpha = 2$

(παράμετρος θέσης = 0) $\quad \Big\} \ \varphi_Y(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}$

Cauchy κατανομή $\varphi_Y(q) = e^{-\gamma|q|}$ $\quad \alpha = 1$

γενική μορφή ευσταθών κατανομών

$$\ln\varphi_Y(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma^a |q|^\alpha \left(1 - i\beta \dfrac{q}{|q|} \tan\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)\right) & \alpha \neq 1 \\ i\mu q - \gamma|q| \left(1 + i\beta \dfrac{q}{|q|} \dfrac{2}{\pi} \ln|q|\right) & \alpha = 1 \end{cases}$$

$0 < \alpha \leq 2$ δείκτης κατανομής

$-1 \leq \beta \leq 1$ παράμετρος ασυμμετρίας

$\mu \in \mathbb{R}$ παράμετρος θέσης $(\mu = 0)$

$\gamma \in \mathbb{R}^+$ παράμετρος κλίμακας $(\gamma = 1)$

$f_Y(y) = ?$ Μόνο για :

$\alpha = 2, \beta = 0$ Γκαουσιανή

$\alpha = 1, \beta = 0$ Cauchy

$\alpha = 0.5, \beta = 1$ Lévy-Smirnov

Κατανομή Lévy

$$\varphi_Y(q) = e^{i\mu q - \sqrt{\gamma|q|}(1 - i\,\mathrm{sign}(q))} \Rightarrow f_Y(y) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\frac{e^{-\gamma/(2(y-\mu))}}{(y-\mu)^{3/2}} \qquad y > \mu$$

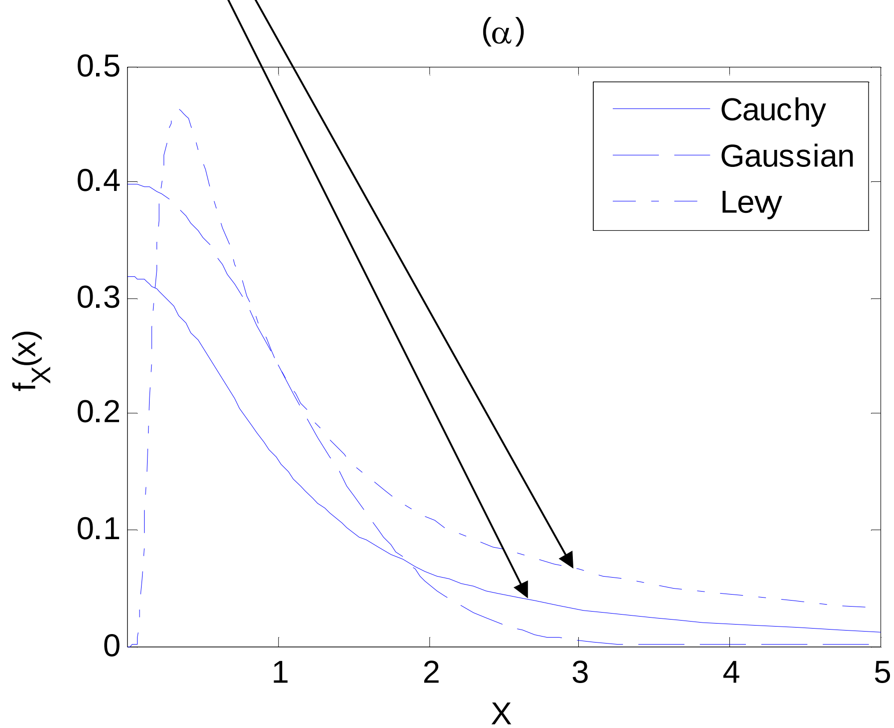
μεγάλα *y* $\alpha < 2$ $k \geq \alpha$

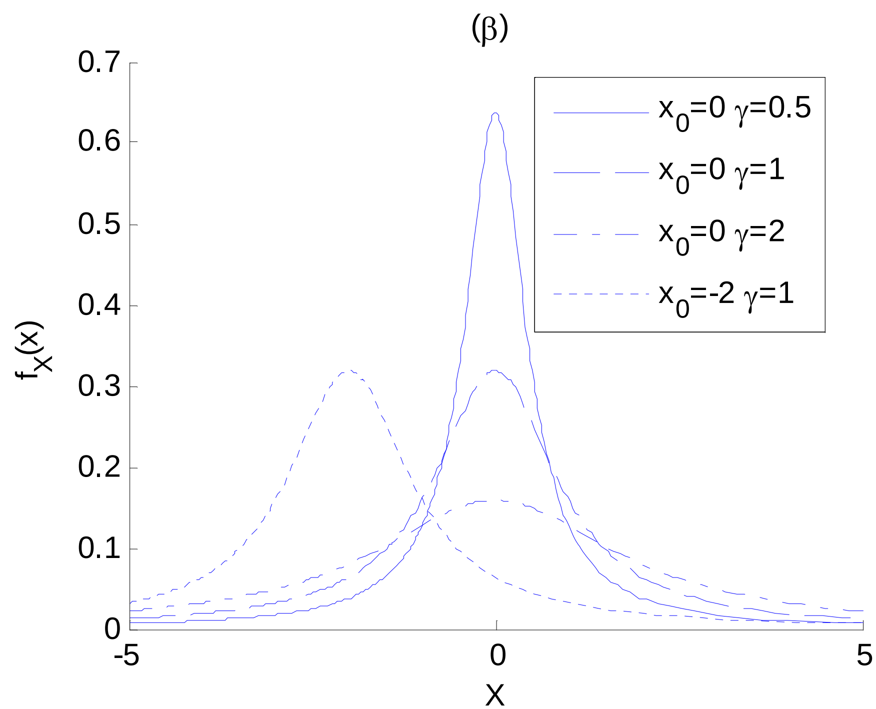
$$f_Y(|y|) \sim |y|^{-(1+\alpha)} \Rightarrow \mathrm{E}\left[|y|^k\right] \to \infty$$

άπειρη διασπορά

νόμος δύναμης

$$\mu = x_0$$





Γενίκευση ΚΟΘ

X_i iid

$$f_{X_i}(x) \sim \begin{cases} C_- |x|^{-(1+\alpha)} & x \to -\infty \\ C_+ |x|^{-(1+\alpha)} & x \to +\infty \end{cases}$$

$$Y_n^s = Y_n n^{-1/2}$$ αλλαγή κλίμακας

$$f_{Y_n^s}(y) \longrightarrow$$ ευσταθή κατανομή με *α*<2 και *β*

$$\beta = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}$$

Για κάθε *α* υπάρχει μια ευσταθής κατανομή που έλκει τις κατανομές με νόμο δύναμης –(1+*α*)

κατανομές με πεπερασμένη διασπορά $\longrightarrow$ ευσταθή κατανομή με *α*=2 (Γκαουσιανή)

κατανομές με άπειρη διασπορά (νόμος δύναμης για μεγάλα *x*) $\longrightarrow$ ευσταθή κατανομή με *α*<2

ανοιχτά συστήματα

Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης

ρίψη	κέρδος	πιθανότητα	αναμενόμενο κέρδος
1	1	1/2	1 x 1/2 = 1/2
2	2	1/4	2 x 1/4 = 1/2
3	4	1/8	4 x 1/8 = 1/2
⋮	⋮	⋮	⋮
n	2^{n-1}	$1/2^n$	2^{n-1} x $(1/2^n)$= 1/2
⋮	⋮	⋮	⋮

Το παιχνίδι αρχίζει με τη ρίψη του νομίσματος και μέχρι να έρθει «γράμματα».

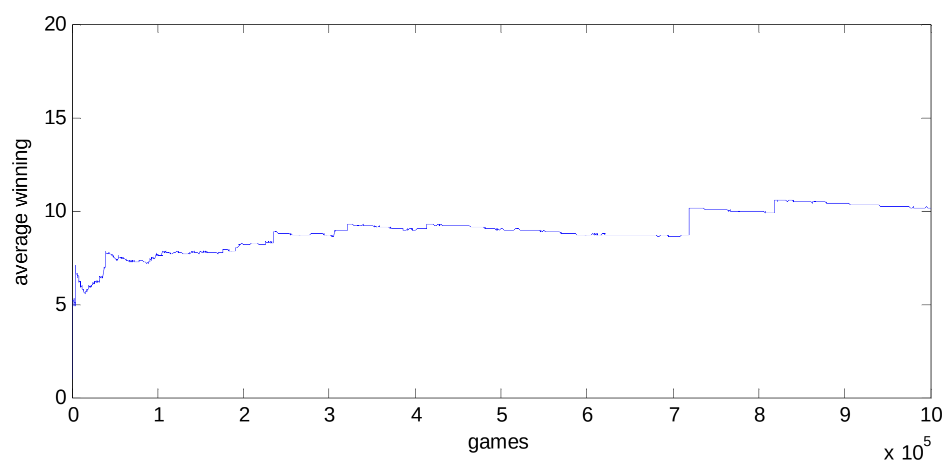
Σε κάθε ρίψη διπλασιάζεται το ποσό, αρχίζοντας με 1 ευρώ.

Ο παίχτης κερδίζει το ποσό που μαζεύτηκε ως τη λήξη.

Ποιο ποσό συμμετοχής Α πρέπει να πληρώσει ο παίχτης?

- η πιθανότητα να τερματίσει το παιχνίδι σε *n* επαναλήψεις μειώνεται με νόμο δύναμης (αλλά αυξάνεται αντίστοιχα το κέρδος)

- συνολικό αναμενόμενο κέρδος (μέση τιμή του κέρδους) → ∞



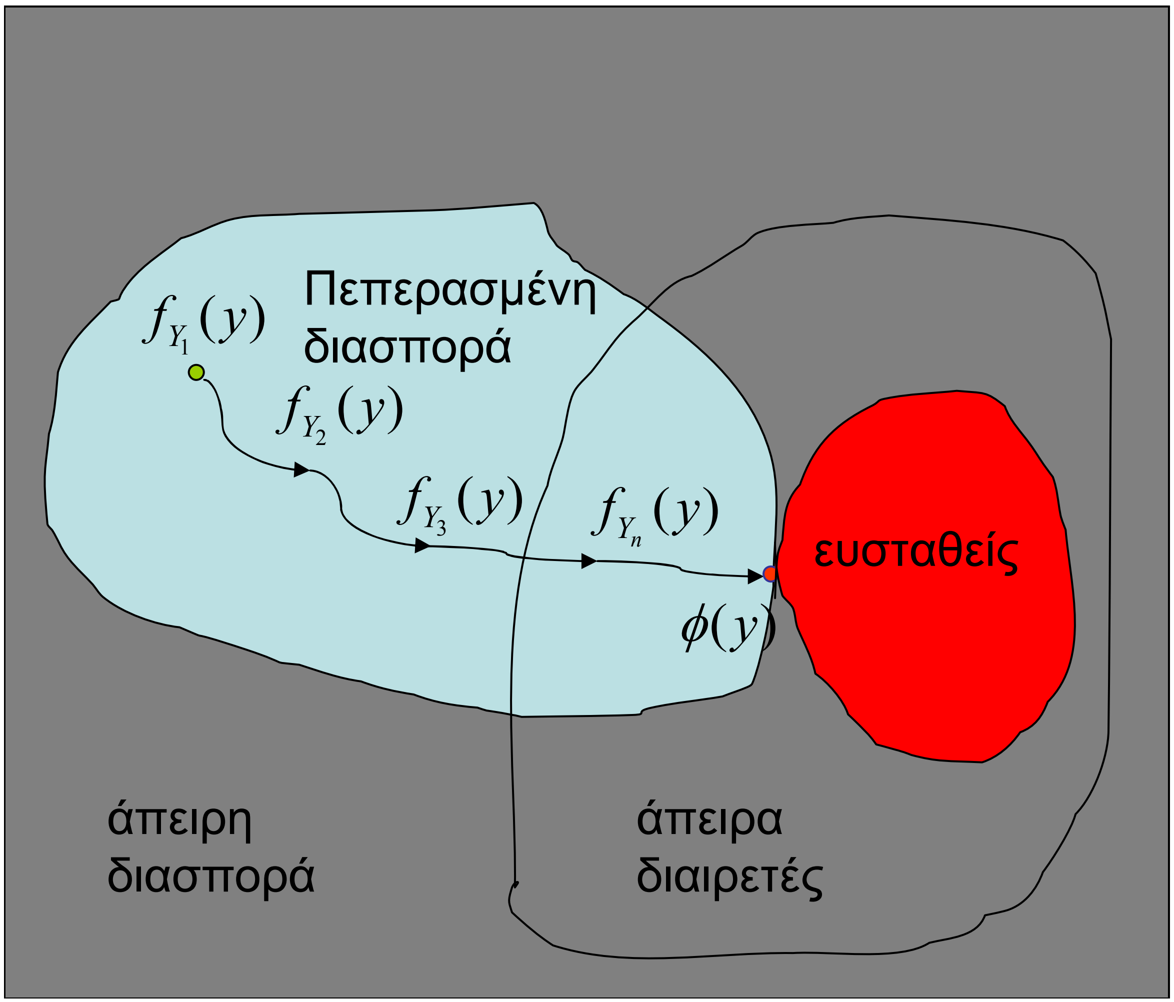
Θα δίνατε 1000 ευρώ να παίξετε?

100? 10?

έλλειψη χαρακτηριστικής κλίμακας για το κέρδος

πιθανότητα(κέρδος)=κέρδος $^{-1}$

$i=1,\ldots,n$ $X_i \sim iid$ ⇒	$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ $Y_n \sim$ ευσταθή
$i=1,\ldots,n$ X_i ανεξάρτητα ⇒	$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ $Y_n \sim$ άπειρα διαιρετή



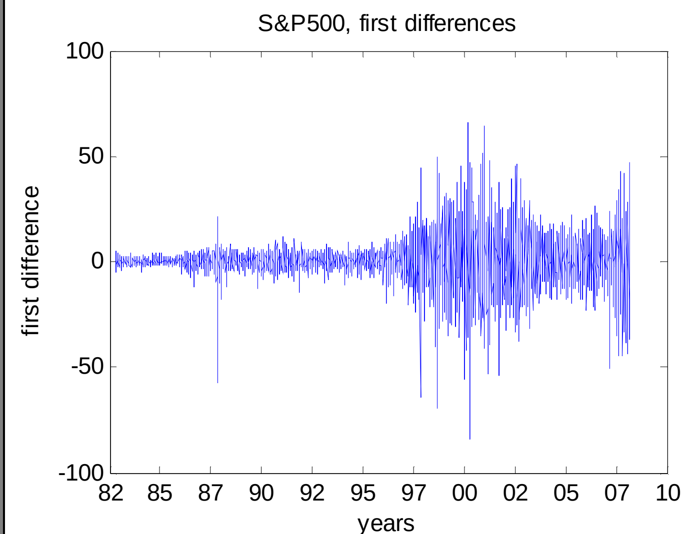
Y άπειρα διαιρετή αν

$$\forall n, \quad Y = X_1 + X_2 + \cdots X_n$$

$$X_i \sim iid$$

δηλαδή αν

$$\varphi_Y(q) = \left(\varphi_X(q)\right)^n$$



μεταβολές ανεξάρτητες
αλλά όχι με την ίδια κατανομή

η κατανομή του αθροίσματος
έχει άπειρη διασπορά ?