

(ΕΥΦ11) ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Διδάσκοντες:

Θεοδώρου Γιώργος
gtheodoru@yahoo.com

Κουγιουμτζής Δημήτρης
dkugiu@gen.auth.gr
τηλ. 2310 995955

Ιστοσελίδα μαθήματος:

<http://users.auth.gr/~dkugiu/Teach/Econophysics.html>

Εξάμηνο φοίτησης: 1', Επιλογή Υπολογιστικής Φυσικής

Διδάσκοντες: 1. Κουγιουμτζής, Χρ. Εμμανουηλίδης, Γ. Θεοδώρου

Περιεχόμενο:

1. Αγορές και στατιστικά στοιχεία

- Κατανομές αποδόσεων
- Δομές και εξαρτήσεις δεδομένων
- Θεωρία πιθανοτήτων και έλεγχος υποθέσεων

2. Δυναμική ανάλυση δεδομένων χρηματιστηριακών αγορών

- Στάσιμες χρονοσειρές και μοντέλα ARMA
- Χρονοσειρές με τάσεις και έλεγχος μοναδιαίων ριζών, τυχαίος περίπατος
- Χρονοσειρές με εξαρτήσεις μακράς διάρκειας, στοχαστικές διαδικασίες τύπου Levy
- Ετεροσκεδαστικές χρονοσειρές, μοντέλα τύπου ARCH
- Πρόβλεψη με μοντέλα παλινδρόμησης και δυναμικής παλινδρόμησης

3. Πολυμεταβλητή ανάλυση δεδομένων χρηματιστηριακών αγορών

- Συσχέτιση μεταξύ χρηματιστηριακών δεικτών

4. Μέθοδοι ανάλυσης χαρτοφυλακίου - επιλογή και βελτιστοποίηση

Επιστροφή

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ (Χρονοσειρές – συσχετίσεις)

1. Εισαγωγή:

Θέματα μελέτης της οικονομικής φυσικής
Χρηματιστηριακή αγορά και πολύπλοκα συστήματα

2. Αγορές και στατιστικά στοιχεία

Αποτελεσματική αγορά
Παρατηρήσεις χρηματιστηριακών αγορών
Τυχαίος περίπατος
Γκαουσιανή κατανομή και Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
Ευσταθείς κατανομές και Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

3. Συσχετίσεις σε χρονοσειρές

Κατανομές και ροπές στοχαστικής διαδικασίας
Στασιμότητα - Αυτοσυσχέτιση
Εκτίμηση του εκθέτη συσχέτισης μακράς κλίμακας

4. Μοντέλα χρονοσειρών και πρόβλεψη

Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών
Αστάθεια χρονοσειράς
Γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης της διασποράς

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ (Συνεχής χρόνος)

3. Μέθοδοι ανάλυσης χαρτοφυλακίου - επιλογή και βελτιστοποίηση

- Εισαγωγή στις στοχαστικές διαδικασίες,
- Στοχαστικές διαφορικές μεταβολές, λήμμα Ito,
- Κλασσική θεωρία τυχαίων μεταβολών,
- Πιθανότητα κατανομής των αποδόσεων, εξίσωση διάχυσης,
- Αναχαίτιση κινδύνου, μοντέλο Black-Scholes,
- Θεωρία κλίμακας, αδυναμίες του κλασσικού μοντέλου,
- Ευσταθείς κατανομές, διαδικασίες τύπου Levy,
- Μη-μηδενικός κίνδυνος σε πραγματικό περιβάλλον,
- Επιλογή και βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου,
- Αναγωγή στο μοντέλο Black-Scholes.

Προτεινόμενα βιβλία

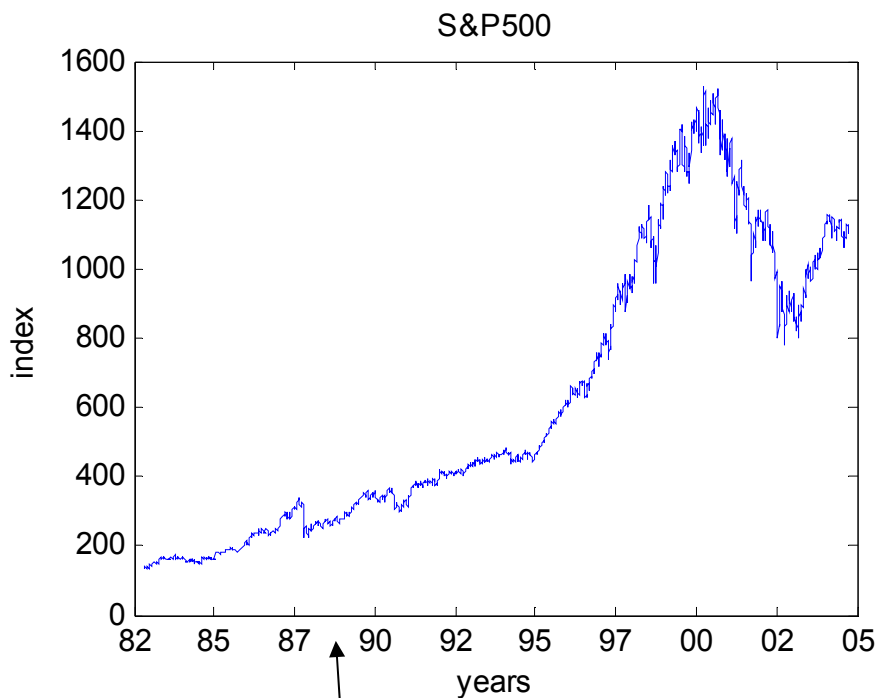
1. An Introduction to Econophysics – Correlation and Complexity in Finance,
Mantegna R.N. and Stanley E.H.,
Cambridge University Press, 2000.
2. Theory of Financial Risks – From Statistical Physics to Risk Management,
Bouchaud J-P. and Potters, M.,
Cambridge University Press, 2000.
3. *Financial Market Complexity*
Johnson N.F., Jefferies P. and Hui P. M.,
Oxford University Press, 2003.
4. The Statistical Mechanics of Financial Markets
Series: Theoretical and Mathematical Physics
Voit, Johannes,
3rd ed., Springer, 2005 (ηλεκτρονικό βιβλίο)
5. An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives,
S.N. Neftci,
Academic Press, 2000

Εξετάσεις (στο τέλος)

- Εξετάσεις πάνω στη θεωρία,
- Προφορικές εξετάσεις στα προγράμματα, (Κάθε φοιτητής προσκομίζει νωρίτερα το CD του, με λυμένες τις ασκήσεις που δόθηκαν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου).

S&P 500, ημερήσια καταγραφή

```
Date, Open, High, Low, Close, Volume, Adj. Close*
28-Sep-04, 1106.09, 1111.76, 1101.67, 1110.06, 1684560000, 1110.06
27-Sep-04, 1107.15, 1110.11, 1103.32, 1103.52, 1472610048, 1103.52
24-Sep-04, 1108.65, 1113.79, 1108.36, 1110.11, 1552310016, 1110.11
23-Sep-04, 1112.90, 1113.72, 1108.04, 1108.36, 1588039936, 1108.36
22-Sep-04, 1121.34, 1129.30, 1112.72, 1113.56, 1759379968, 1113.56
21-Sep-04, 1124.18, 1131.52, 1122.20, 1129.30, 1593100032, 1129.30
20-Sep-04, 1123.48, 1128.55, 1120.30, 1122.20, 1553120000, 1122.20
17-Sep-04, 1127.02, 1130.44, 1123.50, 1128.55, 1823399936, 1128.55
16-Sep-04, 1120.80, 1126.04, 1120.37, 1123.50, 1305280000, 1123.50
```



←
ακόμα
παλιότερα

↑
ακόμα
συχνότερα

?

Κατανομή ?

- μεγάλες διακυμάνσεις?
- νόμος δύναμης (power-law)?

Συσχέτιση ?

(αυτοσυσχέτιση ή
φάσμα ισχύος)

- μικρής / μεγάλης διάρκειας?
- κλιμάκωση (scaling)?

Διαδικασία / σύστημα ?

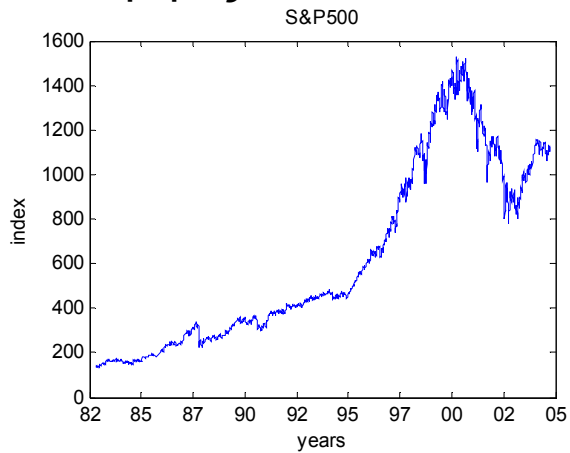
- τυχαίος περίπατος?
- Μαρκοβιανή διαδικασία?
- διαδικασία μακρών
συσχετίσεων (Levy)
- Σύστημα με μεταβαλλόμενη
διακύμανση?
- Μη-γραμμικό δυναμικό
σύστημα?
- Πρόβλεψη?

Συσχετίσεις δεικτών ?

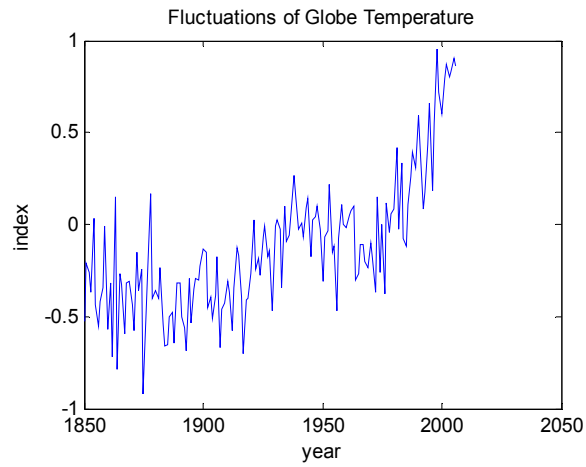
... ?

Πολύπλοκα συστήματα

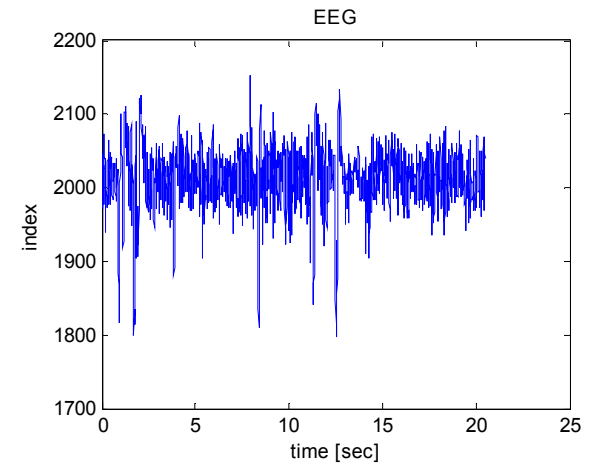
Χρηματιστηριακές
αγορές



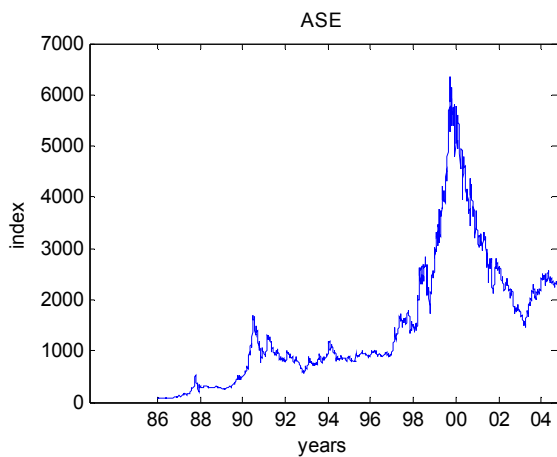
Γεωφυσική / Οικολογία



Φυσιολογία / Βιολογία

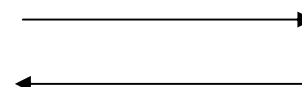


“Open systems: many subunits interact nonlinearly in the presence of feedback”



- εμπειρική ανάλυση
- στατιστική φυσική

Φυσική



Οικονομικά
συστήματα

?

Αποδοτική αγορά (efficient market)

“A market is said to be efficient if all the available information is instantly processed when it reaches the market and it is immediately reflected in a new value of prices of the assets traded”

... δηλαδή ... $E[Y_{t+1} | Y_0, Y_1, \dots, Y_t] = Y_t$

Y_t : η τιμή ενός δείκτη

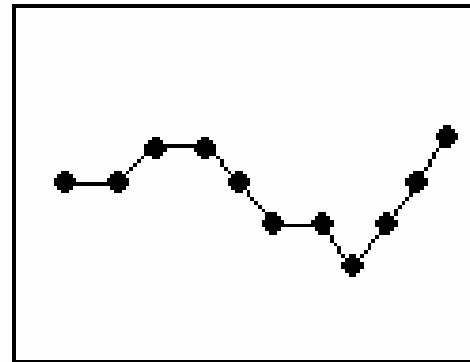
... δηλαδή ... δεν κερδίζεις απλά γνωρίζοντας τις προηγούμενες μεταβολές του δείκτη

... αλλά ... μήπως κερδίζεις έχοντας επιπλέον πληροφορία (για τις προηγούμενες μεταβολές άλλων δεικτών) → **πολυ-μεταβλητή ανάλυση χρονοσειρών**

Η υπόθεση της αποδοτικής αγοράς είναι ιδεατή, αλλά όχι πραγματική

... αλλά ... μας επιτρέπει να αναπτύξουμε θεωρίες και μοντέλα.

τυχαίος περίπατος ?



Παρατηρήσεις χρηματιστηριακών αγορών

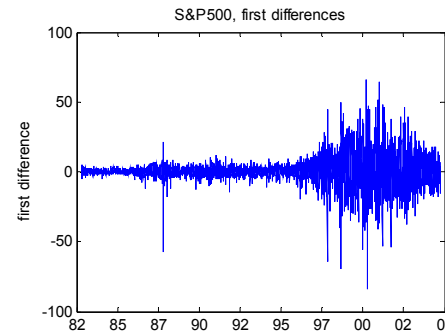
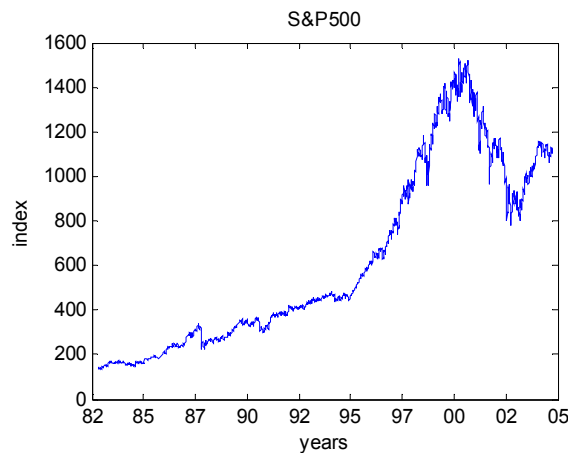
Δεν υπάρχει φυσικός χρόνος
... αλλά ...
χρόνος συναλλαγής (trading time)

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj. Close*
28-Sep-04	1106.09	1111.76	1101.67	1110.06	1684560000	1110.06
27-Sep-04	1107.15	1110.11	1103.32	1103.52	1472610048	1103.52
24-Sep-04	1108.65	1113.79	1108.36	1110.11	1552310016	1110.11
23-Sep-04	1112.90	1113.72	1108.04	1108.36	1588039936	1108.36
22-Sep-04	1121.34	1129.30	1112.72	1113.56	1759379968	1113.56
21-Sep-04	1124.18	1131.52	1122.20	1129.30	1593100032	1129.30
20-Sep-04	1123.48	1128.55	1120.30	1122.20	1553120000	1122.20
17-Sep-04	1127.02	1130.44	1123.50	1128.55	1823399936	1128.55
16-Sep-04	1120.80	1126.04	1120.37	1123.50	1305280000	1123.50

πληροφορία στο «νεκρό χρόνο» ?

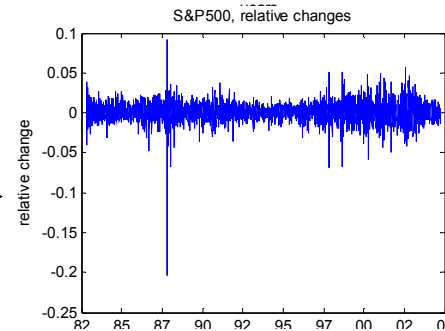
Y_t : η τιμή ενός δείκτη

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ χρονοσειρά



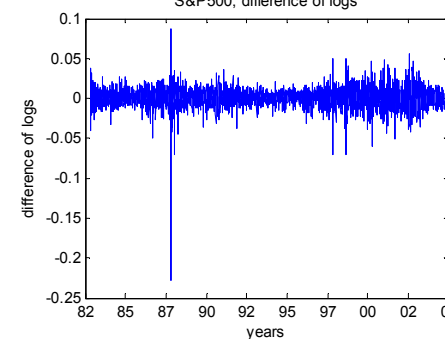
μεταβολή τιμής

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$



σχετική μεταβολή τιμής

$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}$$



μεταβολή λογαριθμού τιμής

$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$$

Ποια μεταβλητή να μελετήσουμε ?

Τυχαίος περίπατος (random walk)

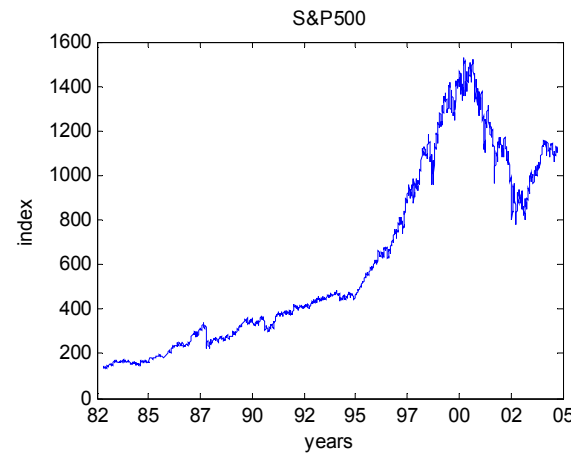
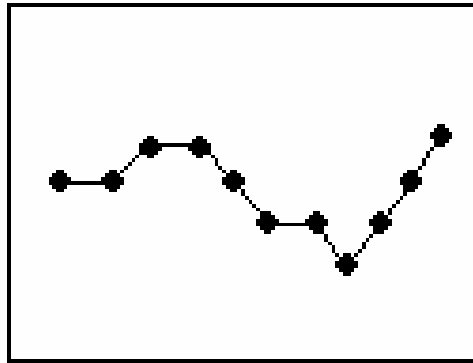
$$E[Y_{t+1} | Y_0, Y_1, \dots, Y_t] = Y_t$$

$$x_t = y_t - y_{t-1}$$

X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες τ.μ. με την ίδια κατανομή (iid)

$$E[X_i] = 0 \quad E[X_i^2] = \sigma^2 \quad E[X_i X_j] = \delta_{ij} \sigma^2$$

$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ τυχαίος περίπατος



$E[Y_i] = 0$ $E[Y_i^2] = n\sigma^2$ Η διασπορά αυξάνει γραμμικά με το χρόνο!

Το συνεχές όριο : $E[Y(t)^2] = \frac{\sigma^2}{\Delta t} t = Dt$
 $n \rightarrow \infty$
 $\Delta t \rightarrow 0$
 $t = n\Delta t$
 σταθερά διάχυσης

$\{Y(t)\}$ διαδικασία Wiener

κατανομή των X_i Y_n ?

Γκαουσιανή ή κανονική κατανομή (Gaussian or normal distribution)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ)

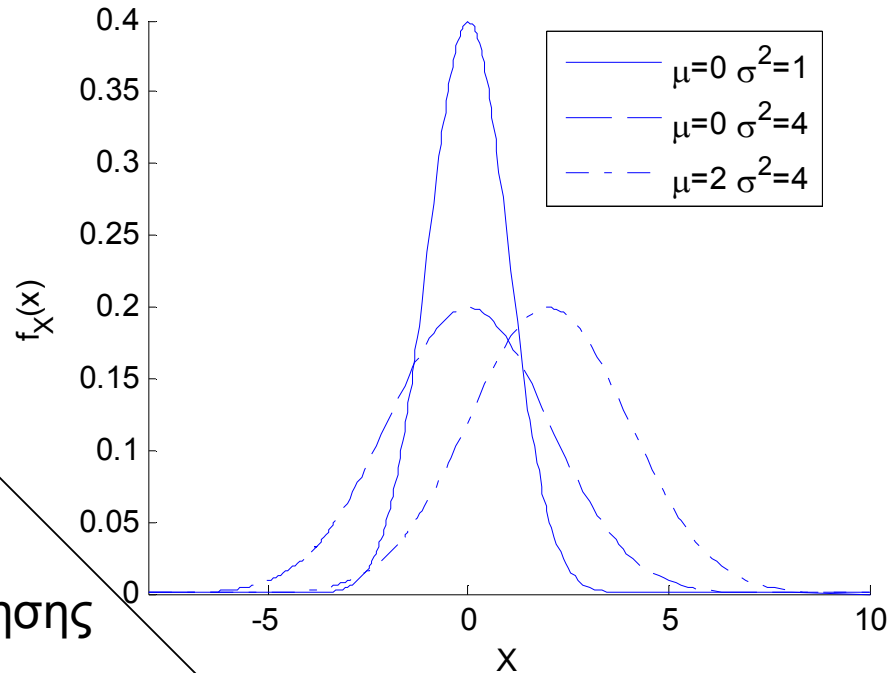
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Τυποποιημένη
Γκαουσιανή κατανομή

Μετασχηματισμός τυποποίησης

$$X^s \equiv Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$f_{X^s}(x) \equiv \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



$i = 1, \dots, n$
 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
ανεξάρτητες



$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$Y_n \sim N(\mu, n\sigma^2)$$

Γκαουσιανά
τυχαία βήματα

Γκαουσιανός
τυχαίος περίπατος

Όταν τα βήματα δεν
είναι Γκαουσιανά?

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

Απλούστευση: $E[X_i] = 0$

X_i ανεξάρτητες $n > 30$
 $E[X_i^2] = \sigma_{X_i}^2 < \infty$ $\rightarrow Y_n \sim N(0, \sigma_Y^2)$

σππ της Y_n $f_{Y_n}(y)$

$n = 2$ $Y_2 = X_1 + X_2$

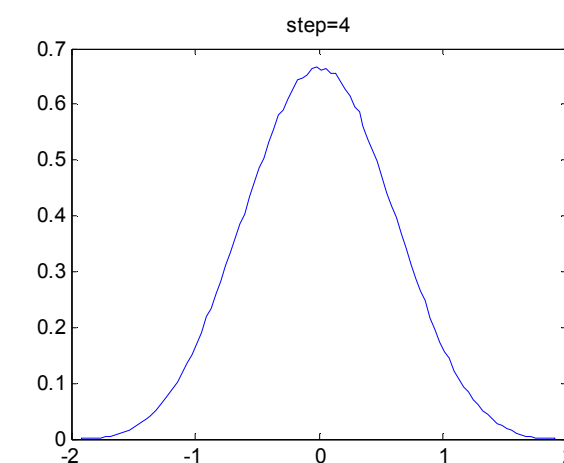
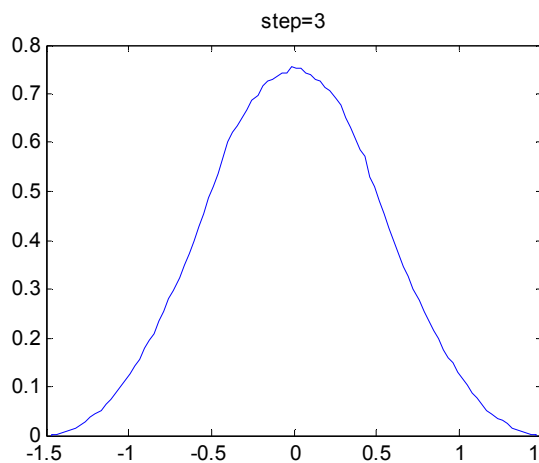
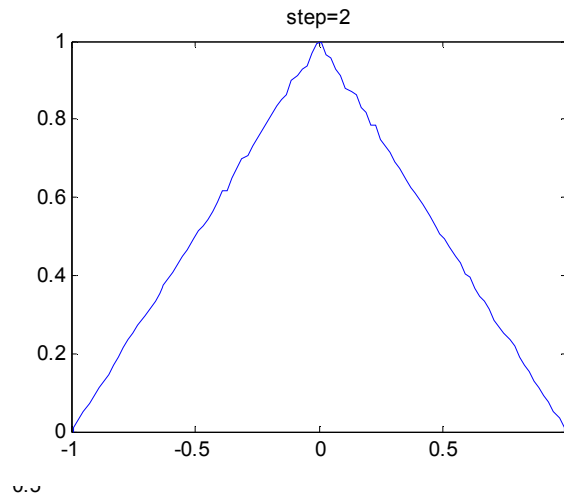
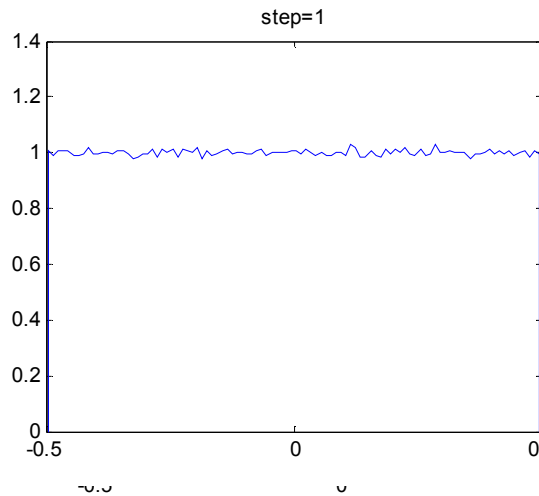
συνέλιξη των σππ

$$f_{Y_2}(y) = f_{X_1}(x) \otimes f_{X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(y-x) dx$$

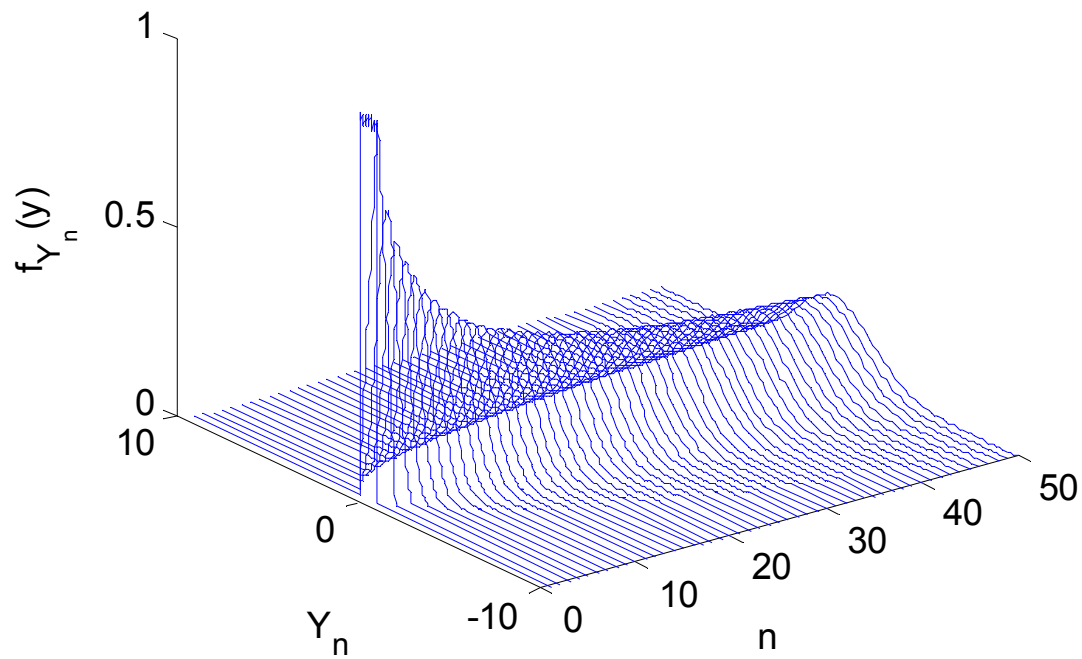
Παράδειγμα

iid από ομοιόμορφη κατανομή

$X_i \sim U[-0.5, 0.5]$



$n=1, \dots, 50$



Γενικά

$$\sigma_{Y_n}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2$$

Ειδικά

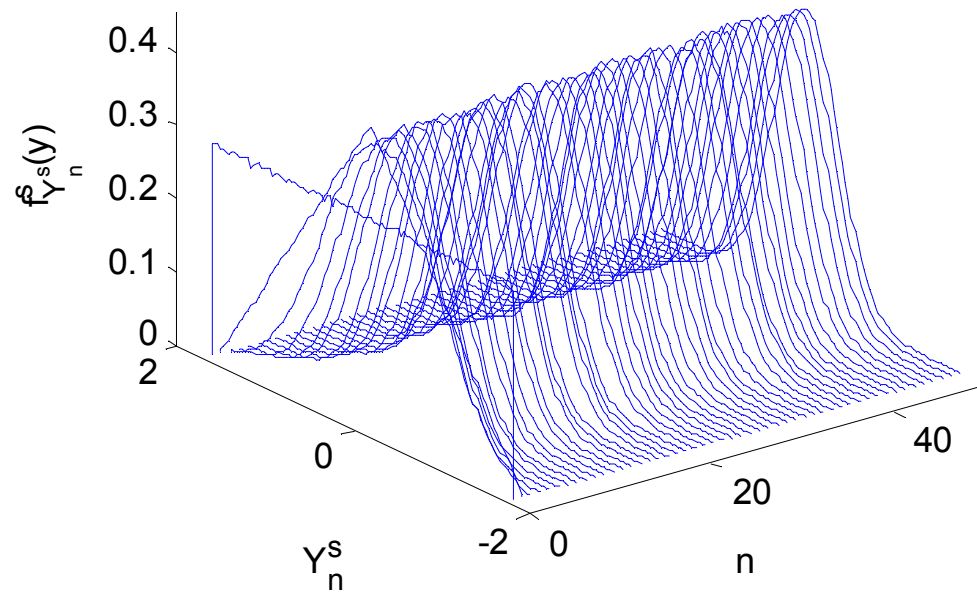
$$\sigma_{X_i}^2 = \sigma_X^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{Y_n}^2 = n\sigma_X^2$$

standardized

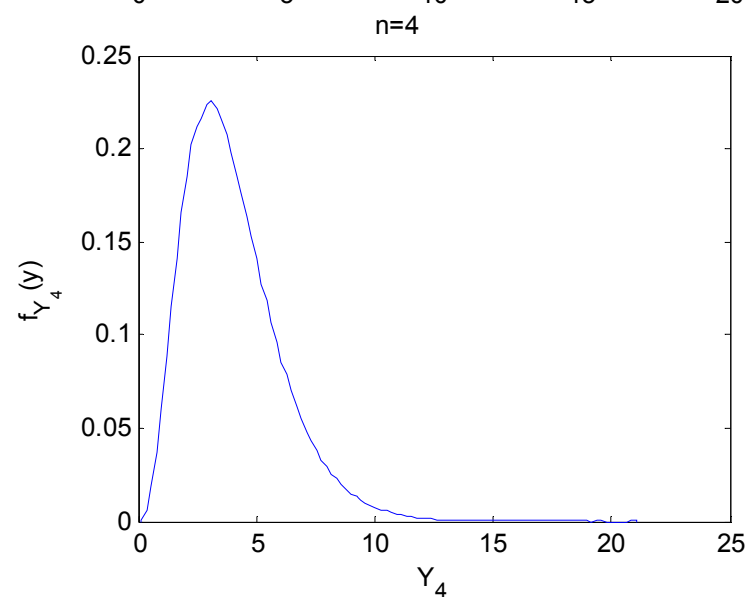
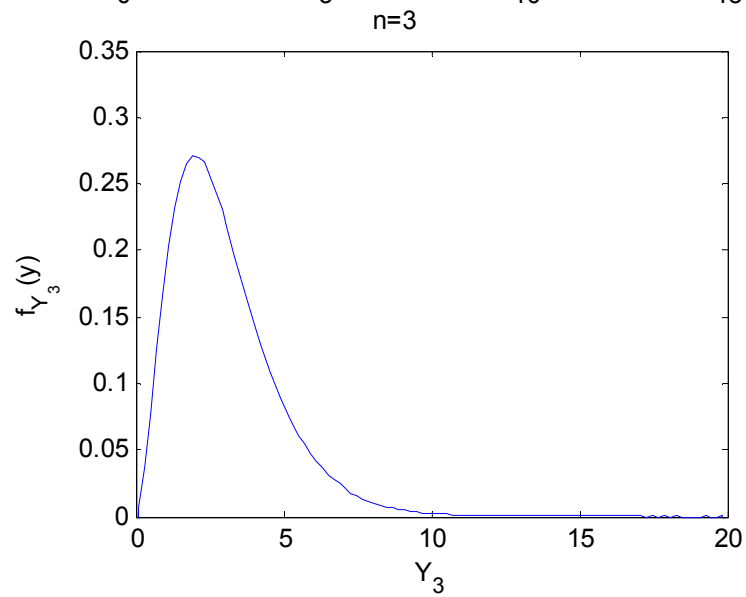
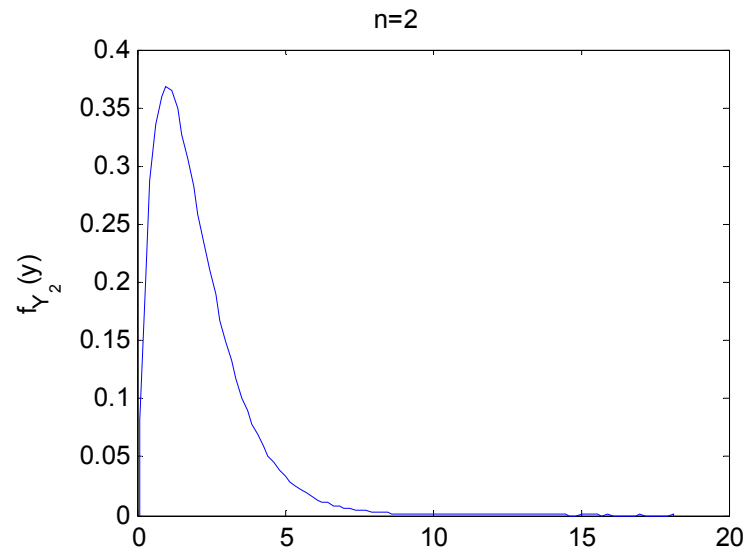
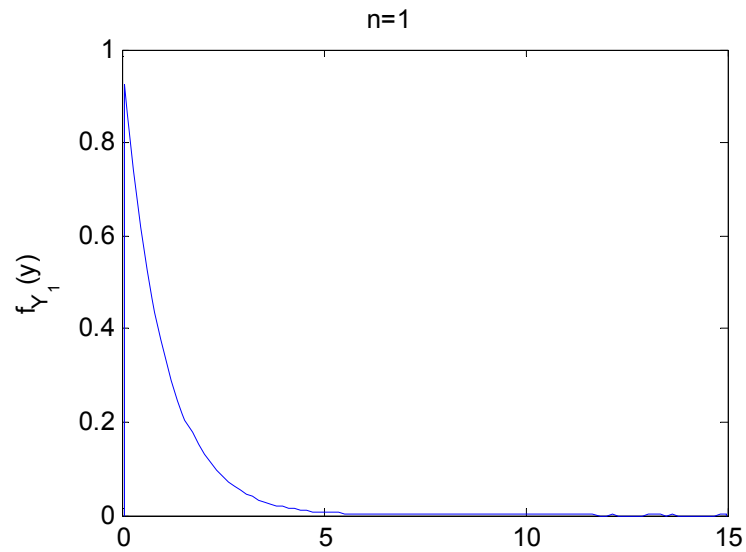
$$Y_n^s = Y_n / (\sqrt{n}\sigma)$$

n μεγάλο

$$Y_n^s \sim N(0,1)$$



Παράδειγμα iid από εκθετική κατανομή



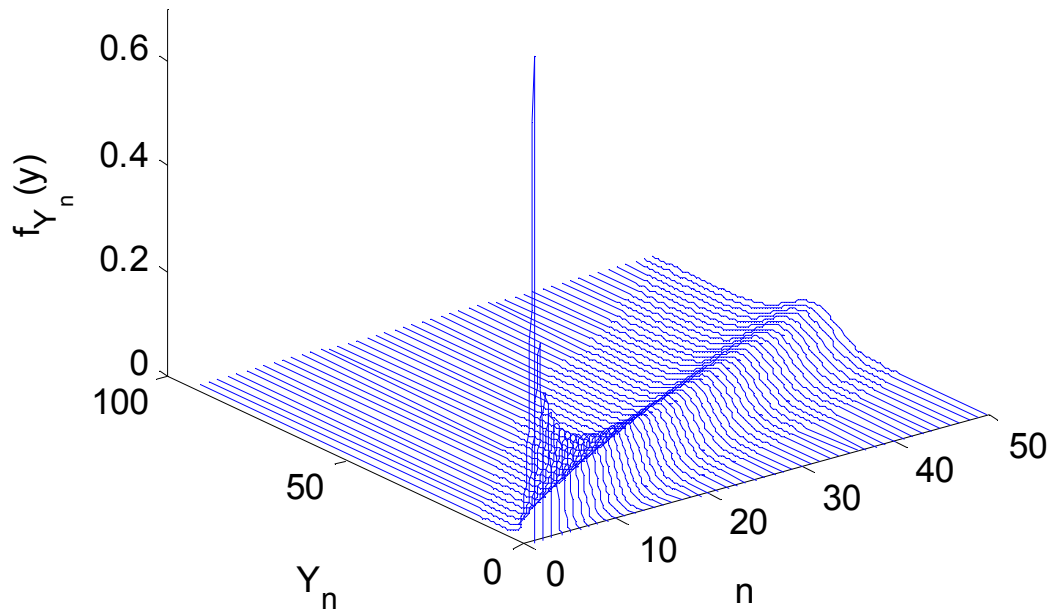
$n=1, \dots, 50$

Παράδειγμα iid από εκθετική κατανομή

$$\sigma_{X_i}^2 = \sigma_X^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{Y_n}^2 = n\sigma_X^2$$

$$Y_n^s = Y_n / (\sqrt{n}\sigma)$$

$$n \text{ μεγάλο} \quad \rightarrow \quad Y_n^s \sim N(0,1)$$



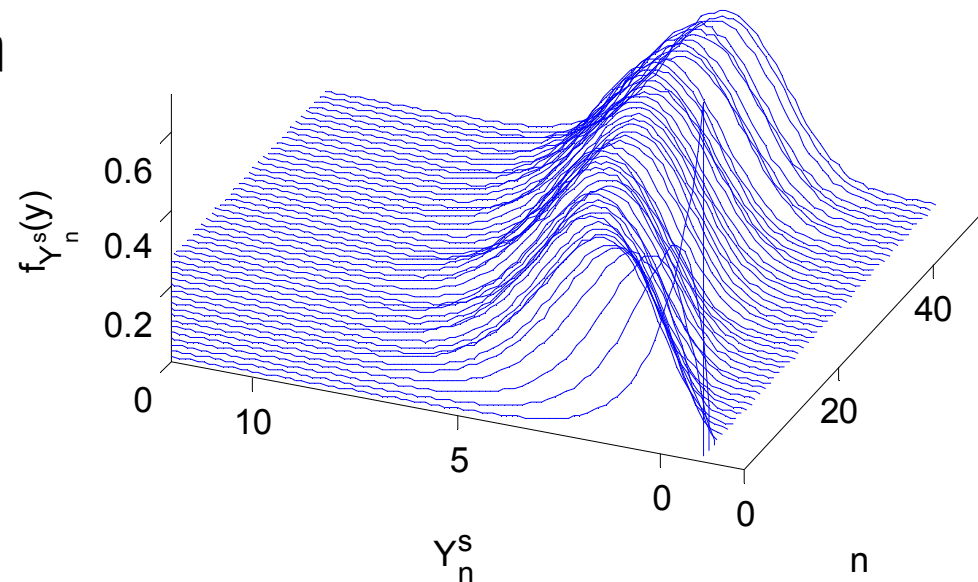
standardized

πιο αργή σύγκλιση από ομοιόμορφη

ταχύτητα σύγκλισης ?

όρια σύγκλισης?

$$\|f_{Y_n^s}(y) - \phi(y)\|$$



Χώρος κατανομών συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

Απεικόνιση στο χώρο

$$Y_n = Y_{n-1} + Y_1$$

$$f_{Y_n}(y) = f_{Y_{n-1}}(y) \otimes f_{Y_1}(y)$$

$\phi(y)$: ευσταθές σημείο

Λεκάνη έλξης:

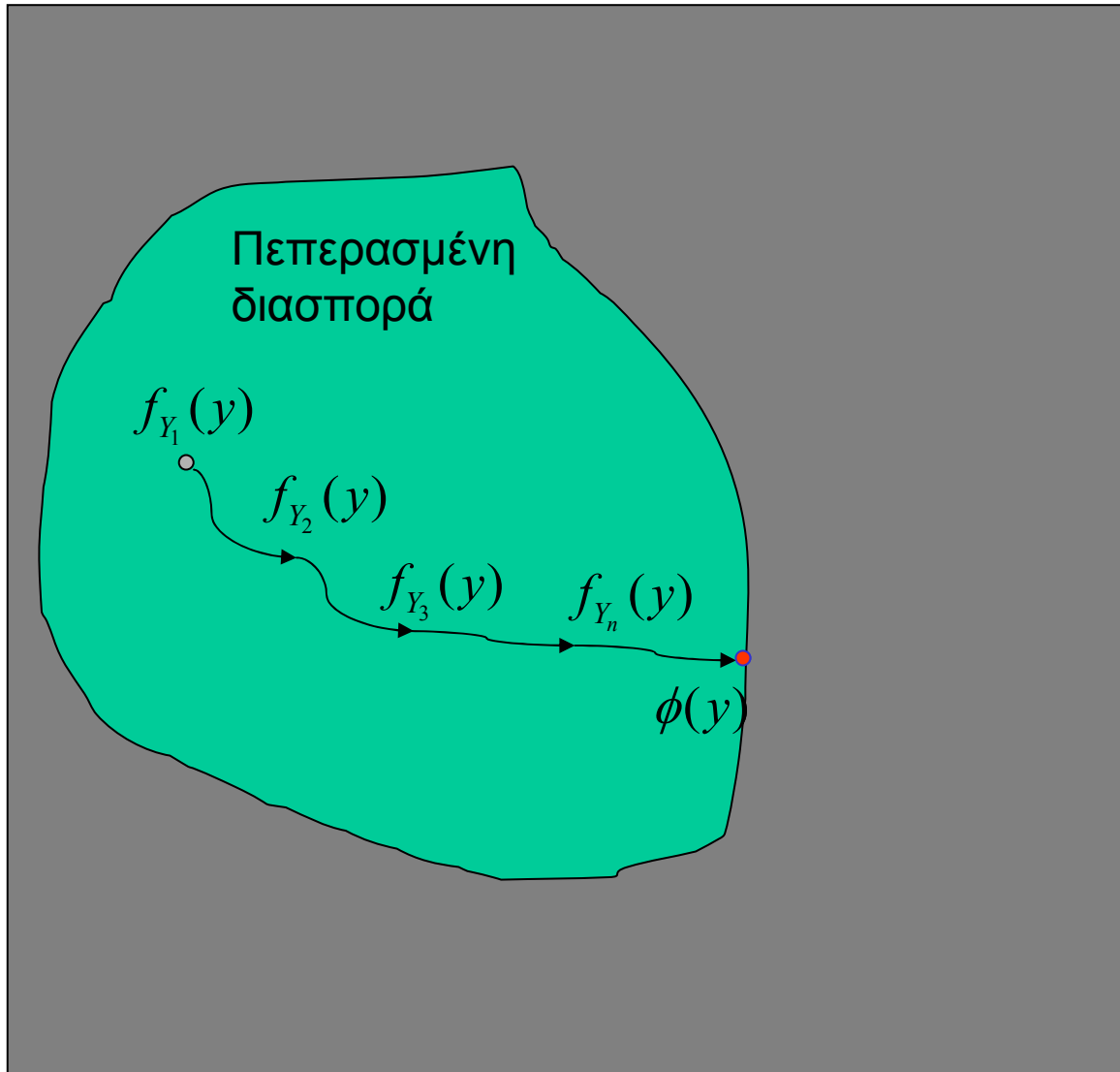
όλες οι κατανομές με πεπερασμένη διασπορά

Η Γκαουσιανή κατανομή είναι **ευσταθής**

Αν $X_1, X_2 \sim$ ευσταθή κατανομή



$Y = X_1 + X_2 \sim$ την ίδια ευσταθή κατανομή



Ευσταθή κατανομή

Αν $X_1, X_2 \sim$ ευσταθή κατανομή



$Y = X_1 + X_2 \sim$ την ίδια ευσταθή κατανομή

Χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\varphi_Y(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) e^{iqy} dy$$

Μετασχηματισμός Fourier της σππ

Παράδειγμα $Y \sim N(0, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \longrightarrow \varphi_Y(q) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}q^2}$$

εύχρηστο εργαλείο

$$f_Y(y) = f_{X_1}(y) \otimes f_{X_2}(y) \iff \varphi_Y(q) = \varphi_{X_1}(q) \varphi_{X_2}(q)$$

από χαρακτηριστική συνάρτηση σε σππ

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_Y(q) e^{-iqy} dq$$

$Y = X_1 + X_2$ X_1, X_2 Γκαουσιανές iid

$$\varphi_Y(q) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}q^2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}q^2} = e^{-\sigma^2 q^2}$$

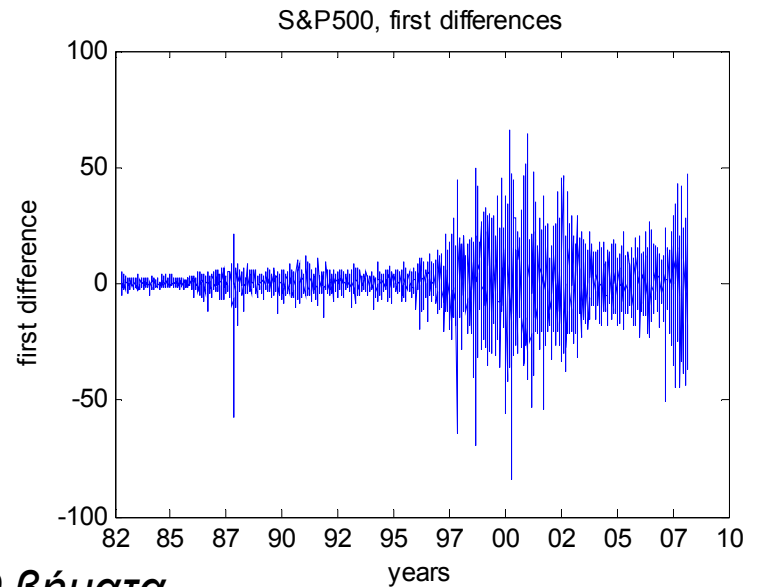
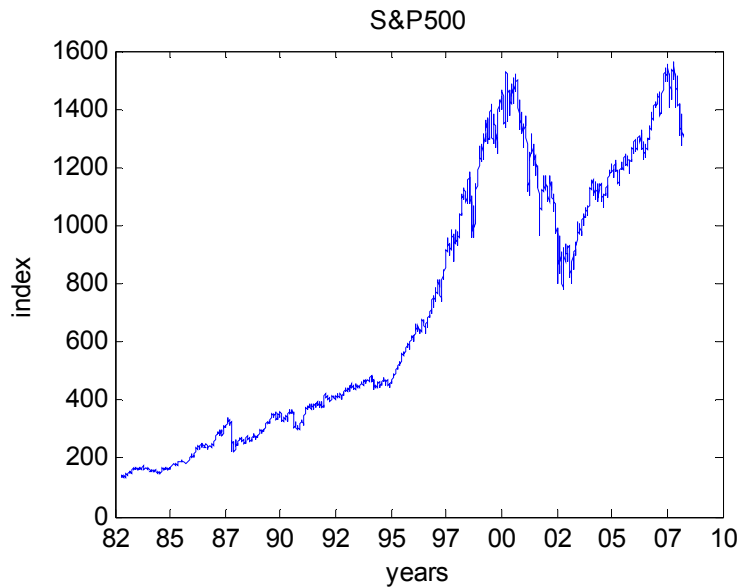
$Y \sim$ Γκαουσιανή

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)} e^{-\frac{y^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}} \longrightarrow Y \sim N(0, 2\sigma^2)$$

Η Γκαουσιανή κατανομή είναι **ευσταθής**

Άλλες ευσταθείς κατανομές?

Θα πρέπει να έχουν άπειρη διασπορά



$$X_1$$

iid ?

$$Y_1 = X_1$$

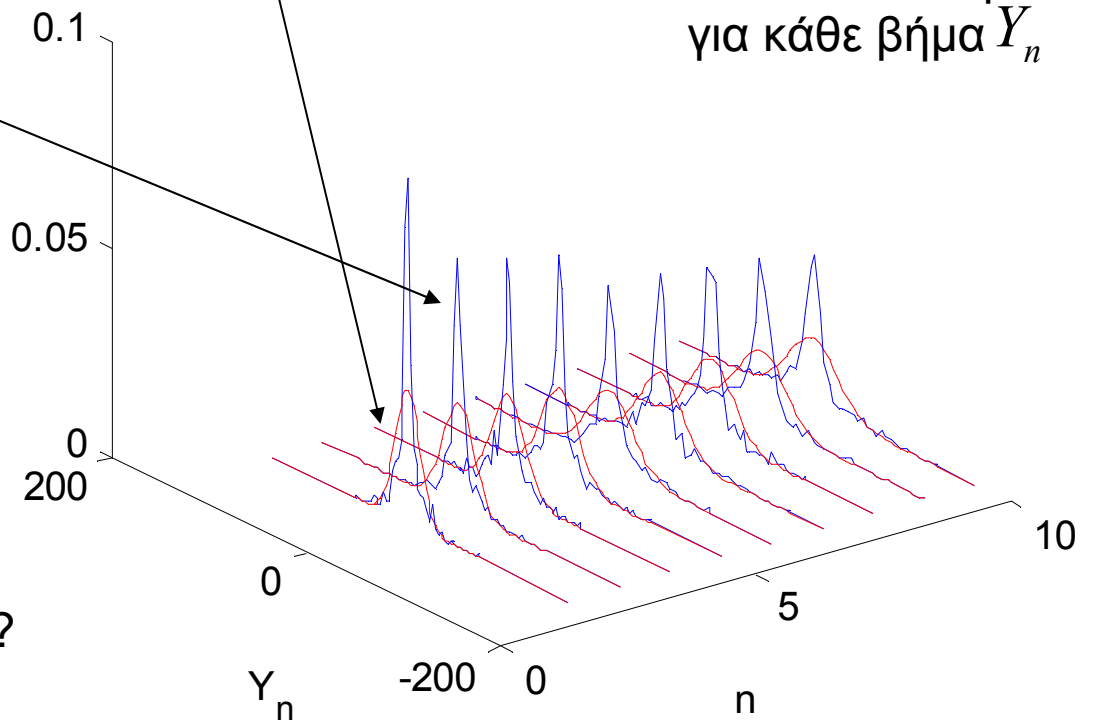
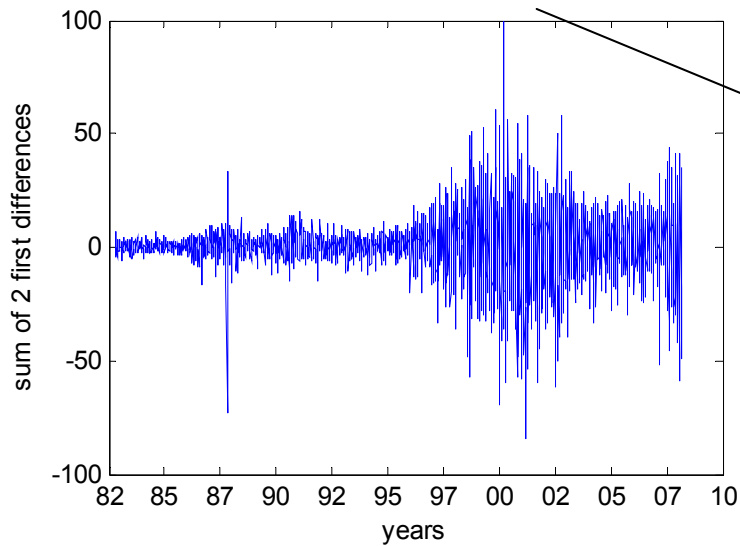
10 βήματα

$$N = 6423 \Rightarrow N/10 = 642$$

ιστογράμματα
από 642 δεδομένα
για κάθε βήμα Y_n

$$Y_2 = Y_1 + X_1$$

S&P500, $X_1 + X_2$



S&P500 συγκλίνει σε Γκαουσιανή?