2 Αγορές και στατιστικά στοιχεία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε κάποια στατιστικά χαρακτηριστικά των χρηματιστηριακών αγορών με ιδιαίτερη έμφαση στην κατανομή και στην αυτοσυσχέτιση σε χρονοσειρές δεικτών της χρηματιστηριακής αγοράς.

2.1 Αποτελεσματική αγορά

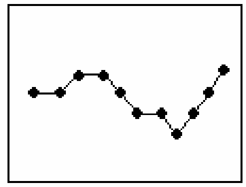
Όπως αναφέρθηκε η χρηματιστηριακή αγορά μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολύπλοκο σύστημα, όπου η παρουσία κάποιας ανάδρασης δημιουργεί αλληλο-επιδράσεις στα στοιχεία του συστήματος. Η ανάδραση αυτή έχει τη μορφή πληροφορίας που εισέρχεται στην αγορά και μπορεί να αφορά για παράδειγμα την τιμή ενός χρηματιστηριακού προϊόντος (asset). Για τη χρηματιστηριακή αγορά παίζει σημαντικό ρόλο αν η επίδραση και επεξεργασία της πληροφορίας στην αγορά ολοκληρώνεται άμεσα ή αν διαρκεί σε επόμενους χρόνους αφήνοντας περιθώρια κέρδους σε κάποιους «παίχτες» της αγοράς. Η πρώτη περίπτωση χαρακτηρίζει τη χρηματιστηριακή αγορά αποδοτική (για όλους!). Μια χρηματιστηριακή αγορά είναι **αποδοτική** (efficient) αν όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες επεξεργάζονται στιγμιαία με την εισαγωγή τους στην αγορά και αντανακλούν αμέσως σε νέες τιμές των συναλλασσόμενων προϊόντων [1].

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της αποδοτικής αγοράς, για την τιμή Y_t ενός συναλλαγματικού προϊόντος (που μπορεί να είναι ένας χρηματιστηριακός δείκτης) τη χρονική στιγμή t, ισχύει

$$\mathrm{E}\left[Y_{t+1} \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_t\right] = Y_t, \tag{1}$$

δηλαδή η μέση τιμή του δείκτη τη χρονική στιγμή t+1 γνωρίζοντας τη χρονική εξέλιξη του δείκτη ως και τη χρονική στιγμή t, είναι η τιμή του δείκτη τη χρονική στιγμή t. Η σχέση (1) σημαίνει απλά ότι δεν κερδίζεις γνωρίζοντας τις προηγούμενες τιμές του δείκτη γιατί δε μπορείς να προβλέψεις για την επόμενη χρονική στιγμή καλύτερα από την τρέχουσα τιμή του δείκτη. Αυτό ακριβώς είναι το χαρακτηριστικό της αποδοτικής αγοράς που εγγυάται το «έντιμο παιχνίδι» που δίνει την ίδια απόδοση σε όλους.

Σε μελέτες που έγιναν σε χρονοσειρές μεταβολής τιμών για διάφορους χρηματιστηριακούς δείκτες επιβεβαιώνεται πως η αυτοσυσχέτιση (η χρονική συσχέτιση μεταξύ μεταβολών τιμών) είναι στατιστικά ασήμαντη, ενισχύοντας την υπόθεση της αποδοτικής αγοράς. Βέβαια η χρήση της πληροφορίας των τιμών άλλων σχετικών δεικτών ενδεχομένως να επιτρέπει σε κάποιο βαθμό την πρόβλεψη της τιμής του δείκτη, επιτρέποντας κέρδος. Πράγματι τέτοιες μελέτες έδειξαν πως η υπόθεση της αποδοτικής αγοράς δεν τηρείται. Εξάλλου, η υπόθεση της αποδοτικής αγοράς αντιστοιχεί περισσότερο σε ιδεατή κατάσταση της αγοράς παρά σε πραγματική αγορά, αλλά επιτρέπει στην ανάπτυξη θεωρίας και μοντέλων που μπορεί να είναι χρήσιμα στην περιγραφή της πραγματικής χρηματιστηριακής αγοράς. Η σχέση (1) υποδεικνύει για την τιμή του δείκτη το μοντέλο του τυχαίου περιπάτου. Ένα απλουστευμένο παράδειγμα τυχαίου περιπάτου δίνεται στο Σχήμα 3. Άρα σε μια αποδοτική χρηματιστηριακή αγορά περιμένουμε οι δείκτες της αγοράς να εκτελούν τυχαίο περίπατο.



Σχήμα 3 Χρονοσειρά τυχαίου περιπάτου με δυνατές κινήσεις παραμονής, ή κίνησης με σταθερό βήμα δεξιά ή αριστερά.

2.2 Παρατηρήσεις χρηματιστηριακών αγορών

Οι παρατηρήσεις των χρηματιστηριακών δεδομένων καθορίζουν και την κλίμακα του χρόνου και των τιμών στην οποία γίνεται η μελέτη των χρηματιστηριακών αγορών.

2.2.1 Κλίμακα χρόνου

Ο χρόνος δειγματοληψίας χρηματιστηριακών δεδομένων έχει γίνει πιο μικρός με την ανάπτυξη της χρηματιστηριακής αγοράς και της ηλεκτρονικής τεχνολογίας. Έτσι ενώ ημερήσιες τιμές υπάρχουν σε κάποιες περιπτώσεις από την αρχή του $20^{ου}$ αιώνα, τις τελευταίες δύο δεκαετίες έχουμε δεδομένα που καταγράφονται ανά λεπτό, αλλά και δεδομένα τύπου “tick-by-tick”, δηλαδή από συναλλαγή σε συναλλαγή.

Ενώ η συχνότητα καταγραφής δεν αποτελεί πρόβλημα στην παρατήρηση χρηματιστηριακών δεικτών, η συνέχεια ή καλύτερα η ασυνέχεια στο *φυσικό χρόνο* (physical time) φαίνεται να είναι ένα αξεπέραστο πρόβλημα. Για παράδειγμα στην καταγραφή του δείκτη S&P500 στο Σχήμα 1 δεν υπάρχουν τιμές για τα Σαββατοκύριακα που είναι κλειστά τα χρηματιστήρια. Σε δείκτες μετοχών που καταγράφονται με συχνότητα ώρας ή λεπτού η ασυνέχεια παρουσιάζεται από το κλείσιμο του χρηματιστηρίου ως το άνοιγμα την επόμενη μέρα (ή μετά το Σαββατοκύριακο). Στην παγκόσμια αγορά συναλλαγματικών αξιών οι δείκτες ισοτιμίας συναλλάγματος μπορεί να γνωρίζουν μεγάλες διακυμάνσεις σε κάποιες χρονικές περιόδους που αντανακλούνε μεγάλη δραστηριότητα σε παγκόσμια κέντρα αγορών που δραστηριοποιούνται σε διαφορετικούς χρόνους (όταν η Ευρώπη δουλεύει η Αμερική κοιμάται).

Στην ανάλυση χρηματοοικονομικών δεδομένων οι παρατηρήσεις δεν αναφέρονται στο φυσικό χρόνο αλλά στο *χρόνο συναλλαγής* ή *αγοράς* (trading or market time) ή σε κάποιες περιπτώσεις στον αριθμό συναλλαγών. Για παράδειγμα η χρονοσειρά του S&P500 στο Σχήμα 1 $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ με αρίθμηση που αντιστοιχεί σε ομοιόμορφο χρόνο συναλλαγής (πρώτη μέρα συναλλαγής στις 20/10/1982, δεύτερη στις 21/10/1982 κτλ), δεν αντιστοιχεί σε ομοιόμορφο φυσικό χρόνο (η τρίτη μέρα συναλλαγής είναι Παρασκευή 22/10/1982 ενώ η τέταρτη είναι Δευτέρα 25/10/182). Αυτή η ιδιαιτερότητα των χρηματοοικονομικών δεδομένων δημιουργεί προβλήματα στην ανάλυση τους και στην περιγραφή του υπό μελέτη συστήματος. Κάποια πληροφορία που μπορεί να επηρεάζει τη δυναμική εξέλιξη των τιμών των προϊόντων της αγοράς μπορεί να κυκλοφορήσει σε «νεκρό» χρόνο συναλλαγής και μπορεί να μεταβάλλει σημαντικά τις τιμές των προϊόντων με το άνοιγμα της αγοράς. Επίσης η δραστηριότητα της αγοράς δεν είναι ομοιόμορφη ως προς το χρόνο συναλλαγής, π.χ. υπάρχει μεγαλύτερη δραστηριότητα στην κίνηση των μετοχών κατά το άνοιγμα ή το κλείσιμο του χρηματιστηρίου.

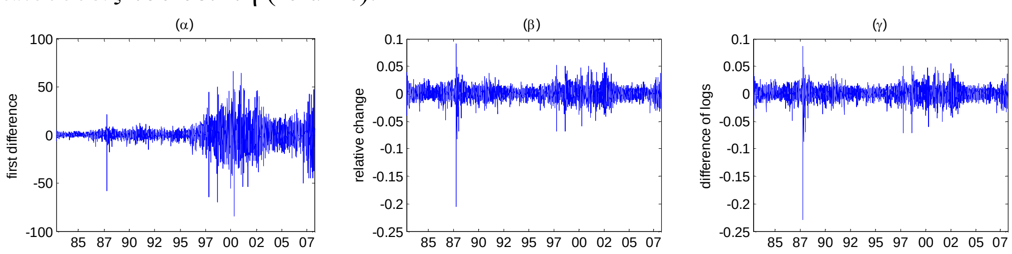
Στη συνέχεια θα αγνοήσουμε το πρόβλημα από την αναφορά σε χρόνο συναλλαγής και θα υποθέσουμε ότι τα χρονικά βήματα είναι πραγματικά ομοιόμορφα.

2.2.2 Κλίμακες τιμών

Θεωρώντας την τιμή Y_t ενός συναλλαγματικού προϊόντος ή δείκτη (τη χρονική στιγμή *t*) ως τυχαία μεταβλητή, οι *n* παρατηρήσεις της Y_t σε κάποια χρονική περίοδο αποτελούν τη χρονοσειρά $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$. Η τιμή ενός δείκτη καθορίζεται από το νόμισμα της αγοράς και για αυτό επηρεάζεται από παράγοντες όπως ο πληθωρισμός, ανάπτυξη ή ύφεση της οικονομίας, και διακυμάνσεις στην παγκόσμια αγορά. Αυτά τα φαινόμενα δημιουργούν σχετικά αργές τάσεις ή και διακυμάνσεις στο δείκτη Y_t που δε σχετίζονται με το υπό μελέτη σύστημα της χρηματιστηριακή αγοράς. Έτσι αντί η μελέτη να γίνει στη χρονοσειρά του δείκτη Y_t μπορεί να γίνει σε χρονοσειρά που προκύπτει από μετασχηματισμό του δείκτη Y_t με σκοπό την απαλοιφή της τάσης ή και της διακύμανσης. Παρακάτω δίνονται τρεις τέτοιοι μετασχηματισμοί:

1. Ο μετασχηματισμός της μεταβολής των τιμών του δείκτη, που απαλείφει την τάση στη χρονοσειρά $\{y_t\}_{t=1}^{N}$
$$x_t = y_t - y_{t-1}. \tag{2}$$
2. Ο μετασχηματισμός της σχετικής μεταβολής των τιμών του δείκτη, που απαλείφει την τάση και ελαττώνει τις μεγάλες διακυμάνσεις στη χρονοσειρά $\{y_t\}_{t=1}^{N}$
$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t}. \tag{3}$$
3. Ο μετασχηματισμός της μεταβολής του λογαρίθμου των τιμών του δείκτη, που έχει τα ίδια χαρακτηριστικά όπως ο παραπάνω μετασχηματισμός
$$x_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}. \tag{4}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι για μεγάλες διακυμάνσεις της Y_t οι μετασχηματισμοί της σχέσης (3) και (4) δίνουν σχεδόν το ίδιο αποτέλεσμα και αναφέρονται και ως *αποδόσεις* του δείκτη (returns).



Σχήμα 4 Μετασχηματισμοί της χρονοσειράς του ημερήσιου δείκτη S&P500 την περίοδο 20/10/1982 – 13/3/2008. (α) Μεταβολή των τιμών του δείκτη. (β) Σχετική μεταβολή των τιμών του δείκτη. (γ) Μεταβολή του λογαρίθμου των τιμών του δείκτη.

Παράδειγμα: Μετασχηματισμοί της χρονοσειράς S&P500

Οι τρεις μετασχηματισμοί δίνονται στο Σχήμα 4 για το δείκτη του S&P500 (δες Σχήμα 1). Παρατηρούμε ότι οι χρονοσειρές που προκύπτουν από τους τρεις μετασχηματισμούς δεν παρουσιάζουν τάση. Η χρονοσειρά των πρώτων διαφορών του δείκτης S&P500 φαίνεται να μην έχει σταθερή διασπορά, ενώ οι χρονοσειρές της σχετικής μεταβολής και της μεταβολής του λογαρίθμου των τιμών του δείκτη S&P500 φαίνεται να διατηρούν την ίδια διασπορά.

2.3 Τυχαίος περίπατος

Όπως αναφέρθηκε, η υπόθεση της αποδοτικής αγοράς υποδηλώνει ότι κάθε χρηματιστηριακός δείκτης Y_t ακολουθεί τυχαίο περίπατο και ισχύει $\mathrm{E}\left[Y_{t+1} \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_t\right] = Y_t$. Ας δώσουμε το μαθηματικό ορισμό του τυχαίου περίπατου. Θεωρούμε *n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με ίδια κατανομή* (independent and identically distributed, iid) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με μέση τιμή 0 ($\mathrm{E}\left[X_i\right] = 0$ για $i = 1, \ldots, n$). Άρα οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ έχουν όλες τις ροπές κοινές και ειδικότερα για τη ροπή δεύτερης τάξης (διασπορά) ισχύει $\mathrm{E}\left[X_i^2\right] = \sigma^2$. Από την ανεξαρτησία τους ισχύει $\mathrm{E}\left[X_i X_j\right] = \delta_{ij}\sigma^2$ για $i, j = 1, \ldots, n$, όπου δ_{ij} είναι η συνάρτηση δέλτα που παίρνει την τιμή 1 αν $i = j$ και 0 αλλιώς. Το άθροισμα των iid τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$, είναι τυχαίος περίπατος. Θεωρώντας ότι το *n* αντιστοιχεί σε χρονικά βήματα και συνεχώς αυξάνει, έχουμε τη *διαδικασία του τυχαίου περιπάτου* (random walk process) $\{Y_n\}$ σε διακριτό χρόνο και ισχύει

$$\mathrm{E}\left[Y_n\right] = 0 \;\text{ και }\; \mathrm{E}\left[Y_n^2\right] = n\sigma^2,$$

δηλαδή η διασπορά του τυχαίου περιπάτου αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των χρονικών βημάτων *n*.

Ο τυχαίος περίπατος μπορεί να οριστεί αντίστοιχα και σε συνεχή χρόνο. Θεωρώντας ότι ο χρόνος μεταξύ δύο βημάτων τ_s (χρόνος δειγματοληψίας) τείνει στο 0, $\tau_s \to 0$, για χρόνο $t = n\tau_s$, η διασπορά είναι (η μέση τιμή είναι πάλι 0) $\mathrm{E}\left[Y(t)^2\right] = \dfrac{\sigma^2}{\tau_s} t = Dt$, όπου $D = \dfrac{\sigma^2}{\tau_s}$ είναι ο συντελεστής διάχυσης. Η στοχαστική διαδικασία $\{Y(t)\}$ του τυχαίου περιπάτου στο συνεχή χρόνο λέγεται *Wiener διαδικασία*.

Σε κάποια προβλήματα μπορεί να είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τη στοχαστική διαδικασία που παράγει τη χρονοσειρά που μελετάμε σε συνεχή χρόνο, παρόλο που η χρονοσειρά φυσικά είναι σε διακριτό χρόνο. Σε τέτοιες περιπτώσεις η Wiener διαδικασία αποτελεί την πιο απλή υπόθεση για την υποκείμενη συνεχή διαδικασία.

2.4 Γκαουσιανή κατανομή και Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

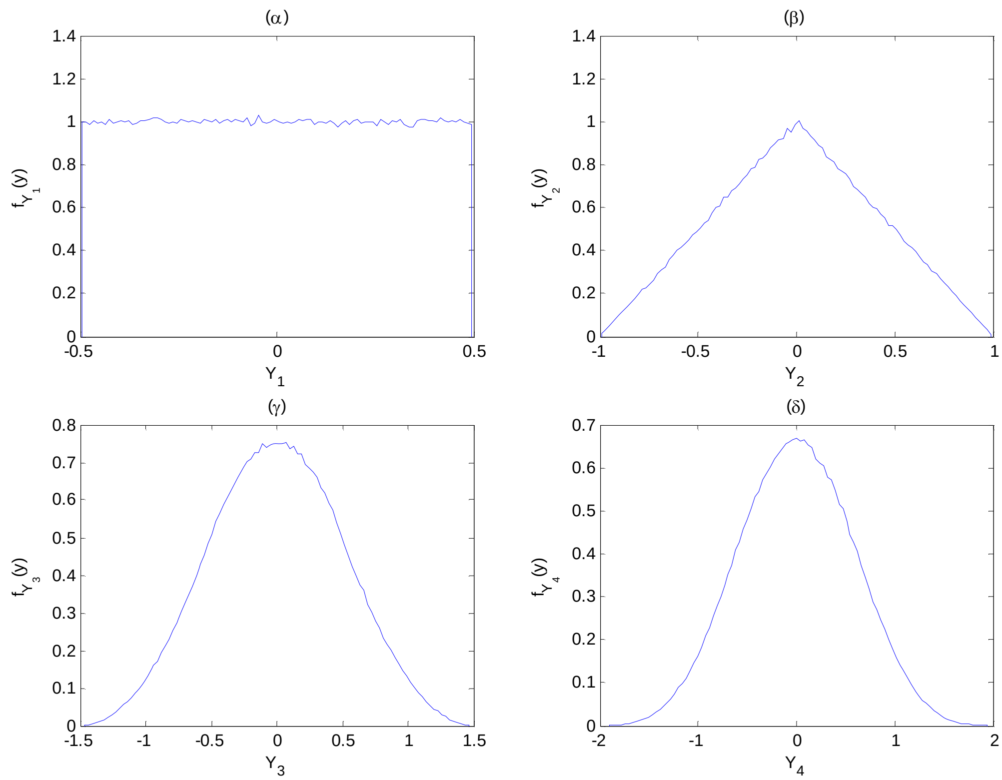
Στον ορισμό του τυχαίου περιπάτου δεν έχουμε καθορίσει κάποιον συγκεκριμένο τύπο κατανομής των τυχαίων βημάτων X_i. Συχνά θεωρούμε ότι τα τυχαία βήματα X_i ακολουθούν *κανονική* (normal), ή αλλιώς *Γκαουσιανή* (Gaussian), *κατανομή* και αντίστοιχα ο τυχαίος περίπατος λέγεται Γκαουσιανός. Αυτό συμβαίνει γιατί γενικά όταν *n* τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ για $i = 1, \ldots, n$, τότε και το άθροισμα τους ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή και μάλιστα ισχύει $Y_n \sim \mathrm{N}(\mu, n\sigma^2)$. Τι γίνεται όμως όταν τα τυχαία βήματα δεν ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή?

Ας ξεκινήσουμε πρώτα με τον περιορισμό ότι τα τυχαία βήματα είναι *ανεξάρτητα* και έχουν *πεπερασμένη διασπορά*, δηλαδή $\mathrm{E}\left[X_i^2\right]=\sigma_{X_i}^2<\infty$ (οι τυχαίες μεταβλητές X_i δε χρειάζεται να έχουν την ίδια διασπορά, μάλιστα δε χρειάζεται να έχουν ούτε την ίδια κατανομή). Τότε το **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)** (Central Limit Theorem, CLT) κατοχυρώνει ότι όταν τα τυχαία βήματα (δηλαδή οι τυχαίες μεταβλητές X_i) είναι πολλά, όπου ενδεικτική συνθήκη είναι $n>30$, τότε το άθροισμα των βημάτων Y_n ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή.

Ας πάρουμε ως παράδειγμα την ομοιόμορφη κατανομή των τυχαίων βημάτων X_i. Στο Σχήμα 5 δίνεται η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ)** (probability density function, pdf) $f_{Y_n}(y)$ του αθροίσματος $Y_n=X_1+X_2+\cdots X_n$ για $n=1,2,3,4$. Η σππ του $Y_2=X_1+X_2$ προκύπτει από τη *συνέλιξη* (convolution) των σππ των X_1 και X_2, που συμβολίζεται και ορίζεται ως

$$f_{Y_2}(y)=f_{X_1}(x)\otimes f_{X_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)f_{X_2}(y-x)\mathrm{d}x\,.$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή σε κάθε βήμα μπορούμε να υπολογίζουμε την $f_{Y_n}(y)$ για κάθε *n*. Παρατηρούμε ότι μόλις σε 4 βήματα από ομοιόμορφη κατανομή η κατανομή του τυχαίου περιπάτου προσεγγίζει τη Γκαουσιανή κατανομή.



Σχήμα 5 Η σππ του αθροίσματος $Y_n=X_1+X_2+\cdots X_n$ για διάφορα n όπου $X_i \sim \mathrm{U}[-0.5,0.5]$ για $i=1,\ldots,n$, δηλαδή τα βήματα ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή: (α) $n=1$, (β) $n=2$, (γ) $n=3$, (δ) $n=4$. Οι κατανομές εκτιμώνται με ιστογράμματα 100 διαστημάτων σε δείγματα μεγέθους 10^6.

Συνεχίζοντας τον υπολογισμό της $f_{Y_n}(y)$ του Y_n ως $n=50$ βλέπουμε καλύτερα τη σύγκλιση στη Γκαουσιανή κατανομή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6α. Παρατηρούμε επίσης πως το εύρος της κατανομής του Y_n αυξάνει με το *n*. Γενικά για τη διασπορά $\sigma^2_{Y_n}$ ισχύει $\sigma^2_{Y_n} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + \cdots + \sigma^2_{X_n}$.

Είναι συνήθης πρακτική στην στατιστική να τυποποιούμε μια τυχαία μεταβλητή (αφαιρώντας τη μέση τιμή της και διαιρώντας με την τυπική της απόκλιση). Για παράδειγμα θεωρώντας τη *X* με Γκαουσιανή κατανομή, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, με σππ

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{5}$$

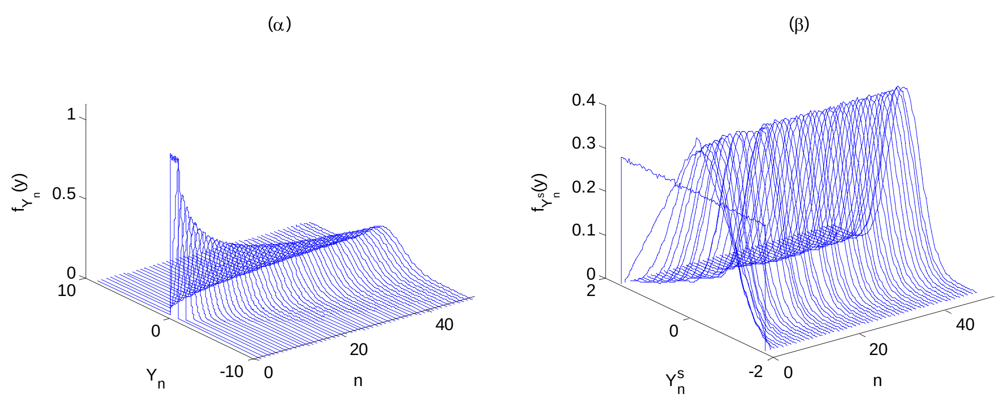
ο μετασχηματισμός της *X*

$$X^s = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

αποτελεί την τυποποίηση της *X* (που συμβολίζεται συνήθως με *Z*) ώστε η X^s ακολουθεί την *τυποποιημένη (ή τυπική) Γκαουσιανή κατανομή*, $X^s \sim \mathrm{N}(0,1)$ με σππ

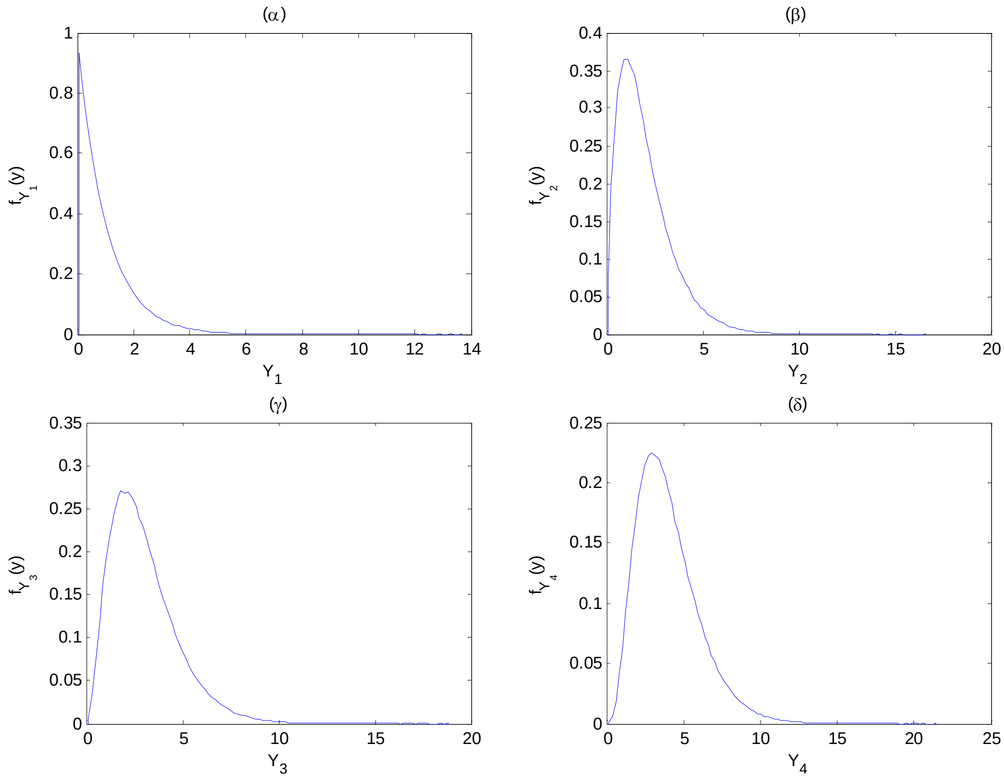
$$f_{X^s}(x) \equiv \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Στην απλή αλλά σχετική με τη μελέτη μας περίπτωση, όπου οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι τα τυχαία βήματα με μέση τιμή 0 και σταθερή διασπορά σ^2, ο τυχαίος περίπατος Y_n έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2_{Y_n} = \mathrm{E}\left[Y_n^2\right] = n\sigma^2$. Η τυποποίηση του Y_n, $Y_n^s = Y_n / \left(\sqrt{n}\sigma\right)$, για μεγάλο *n* ακολουθεί την *τυποποιημένη Γκαουσιανή κατανομή*, $Y_n^s \sim \mathrm{N}(0,1)$. Στο Σχήμα 6β δίνονται οι κατανομές για τις τυποποιημένες Y_n^s, όπου φαίνεται καλύτερα η σύγκλιση σε Γκαουσιανή κατανομή.

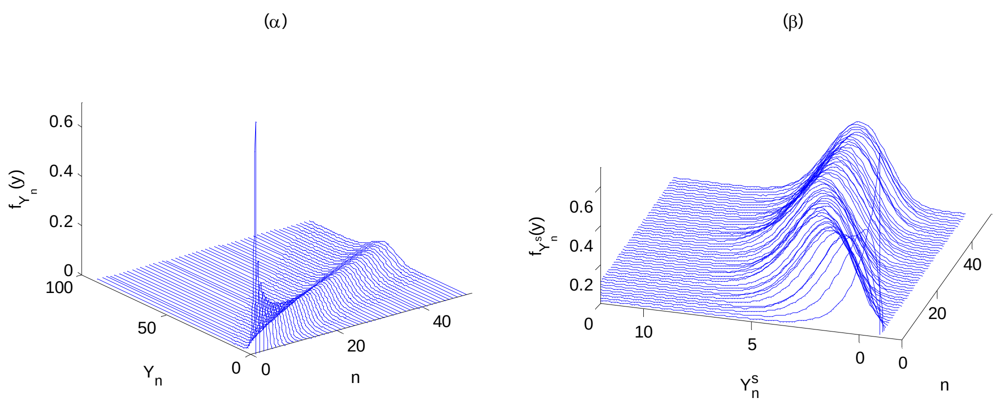


Σχήμα 6 (α) Οι σππ του $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ για $n = 1, \ldots, 50$ ($X_i \sim \mathrm{U}[-0.5, 0.5]$, $i = 1, \ldots, n$). (β) Όπως το (α) αλλά για την τυποποιημένη Y_n, $Y_n^s = Y_n / \left(\sqrt{n}\sigma\right)$.

Στο Σχήμα 7 και Σχήμα 8 δίνεται η σύγκλιση σε Γκαουσιανή κατανομή του τυχαίου περιπάτου Y_n όταν τα τυχαία βήματα ακολουθούν εκθετική κατανομή. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η σύγκλιση είναι πιο αργή από την περίπτωση των βημάτων με ομοιόμορφη κατανομή. Έχουν γίνει μελέτες στην ταχύτητα σύγκλισης σε Γκαουσιανή κατανομή προτείνοντας όρια για την απόσταση της $f_{Y_n^s}(y)$ από τη $\phi(y)$ ως συνάρτηση του *n* για οποιαδήποτε αρχική κατανομή.



Σχήμα 7 Όπως στο Σχήμα 5 αλλά για εκθετική κατανομή των X_i.



Σχήμα 8 Όπως στο Σχήμα 6 αλλά για εκθετική κατανομή των X_i.

Το ΚΟΘ βεβαιώνει ότι ξεκινώντας από οποιαδήποτε αρχική κατανομή $f_{Y_1}(y)$ με πεπερασμένη διασπορά (εννοώντας την κατανομή των τυχαίων βημάτων X_i του τυχαίου περιπάτου Y_n) η $f_{Y_n}(y)$ προσεγγίζει τη Γκαουσιανή κατανομή καθώς αυξάνει το *n*. Θεωρώντας το χώρο όλων των τύπων κατανομών συνεχούς τυχαίας μεταβλητής η Γκαουσιανή κατανομή είναι ένα σημείο με ιδιαίτερη σημασία. Ας ορίσουμε ότι η μετάβαση από ένα σημείο του χώρου αυτού σε ένα άλλο δίνεται με τη συνέλιξη της σππ του πρώτου σημείου με κάποια ορισμένη σππ. Έχοντας $Y_n = Y_{n-1} + Y_1$, η μετάβαση (απεικόνιση) από το σημείο $f_{Y_{n-1}}$ στο σημείο f_{Y_n} του χώρου των κατανομών (ή πιο σωστά των σππ) δίνεται από τη συνέλιξη της $f_{Y_{n-1}}$ με την f_{Y_1}, $f_{Y_n}(y) = f_{Y_{n-1}}(y) \otimes f_{Y_1}(y)$, όπου υποθέτουμε πως το κάθε βήμα Y_1 είναι iid. Άρα σύμφωνα με την παραπάνω απεικόνιση στο χώρο των κατανομών η Γκαουσιανή κατανομή αποτελεί *ευσταθές σταθερό σημείο* (stable fixed point) που ελκύει όλες τις κατανομές με πεπερασμένη διασπορά. Η λεγόμενη *λεκάνη έλξης* (basin of attraction) φαίνεται να είναι μεγάλη καθώς συμπεριλαμβάνει τις πιο γνωστές κατανομές, όπως την ομοιόμορφη και την εκθετική. Όμως η Γκαουσιανή κατανομή με τη λεκάνη έλξης της καλύπτουν μόνο τον υποχώρο των κατανομών με πεπερασμένη διασπορά. Στα πλαίσια της μελέτης της χρηματιστηριακής αγοράς, ο υπόλοιπος χώρος των κατανομών που δεν έχουν πεπερασμένη διασπορά φαίνεται να έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Θα δούμε λοιπόν στη συνέχεια ότι για τους χρηματιστηριακούς δείκτες ο τυχαίος περίπατος μάλλον δεν είναι Γκαουσιανός και υπάρχουν άλλες *ευσταθές κατανομές* (stable distributions) με άπειρη όμως διασπορά.

2.5 Ευσταθείς κατανομές και Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Η Γκαουσιανή κατανομή είναι μόνο μια από τις ευσταθές κατανομές και αν στο χώρο των συνεχών κατανομών η Γκαουσιανή κατανομή είναι ένα σημείο, τις ευσταθείς κατανομές θα τις παριστάναμε με ευθεία. Μια κατανομή χαρακτηρίζεται **ευσταθής** (stable) αν η συνέλιξη της σππ της κατανομής με την ίδια σπππ δίνει σπππ της ίδιας κατανομής, δηλαδή αν οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 ακολουθούν ευσταθή κατανομή τότε και το άθροισμα τους $Y = X_1 + X_2$ ακολουθεί την ίδια ευσταθή κατανομή (όχι βέβαια με τις ίδιες παραμέτρους της κατανομής).

2.5.1 Χαρακτηριστική συνάρτηση

Για τη μελέτη των ευσταθών κατανομών είναι καλύτερα αντί να προσδιορίσουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y με την σπππ $f_Y(y)$ να την προσδιορίσουμε με τη *χαρακτηριστική συνάρτηση* (characteristic function) $\varphi_Y(q)$ που είναι ο μετασχηματισμός Fourier της σπππ

$$\varphi_Y(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) e^{iqy} \mathrm{d}y \,. \tag{6}$$

Για παράδειγμα η χαρακτηριστική συνάρτηση της Γκαουσιανής κατανομής με σπππ όπως στην (5) και με μηδενική μέση τιμή είναι $\varphi_Y(q) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}q^2}$ και ειδικότερα της τυποποιημένης Γκαουσιανής κατανομής ($\sigma = 1$) είναι $\varphi_Y(q) = e^{-0.5q^2}$.

Το πλεονέκτημα με τη χρήση των χαρακτηριστικών συναρτήσεων είναι ότι η συνέλιξη των σπππ αντιστοιχεί σε γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να ελέγξουμε την ευστάθεια μιας κατανομής με το μετασχηματισμό Fourier της σπππ στη χαρακτηριστική συνάρτηση αλλά και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μετατρέπει την χαρακτηριστική συνάρτηση σε σπππ και ορίζεται ως

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_Y(q) e^{-iqy} \mathrm{d}q \,. \tag{7}$$

2.5.2 Ευστάθεια της Γκαουσιανής κατανομής

Η ευστάθεια της Γκαουσιανής κατανομής μπορεί εύκολα να ελεγχθεί αφού για το άθροισμα $Y = X_1 + X_2$ με X_1, X_2 Γκαουσιανές iid, το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων είναι

$$\varphi_Y(q) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}q^2} e^{-\frac{\sigma^2}{2}q^2} = e^{-\sigma^2 q^2} \,.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για την $\varphi_Y(q) = e^{-\sigma^2 q^2}$ δίνει

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sqrt{2}\sigma\right)} e^{-\frac{y^2}{2\left(\sqrt{2}\sigma\right)^2}},$$

όπου η έκφραση της σππ είναι όπως στην (5) και δείχνει ότι η κατανομή του αθροίσματος είναι επίσης Γκαουσιανή με διασπορά $2\sigma^2$.

2.5.3 Ευστάθεια της κατανομής Cauchy

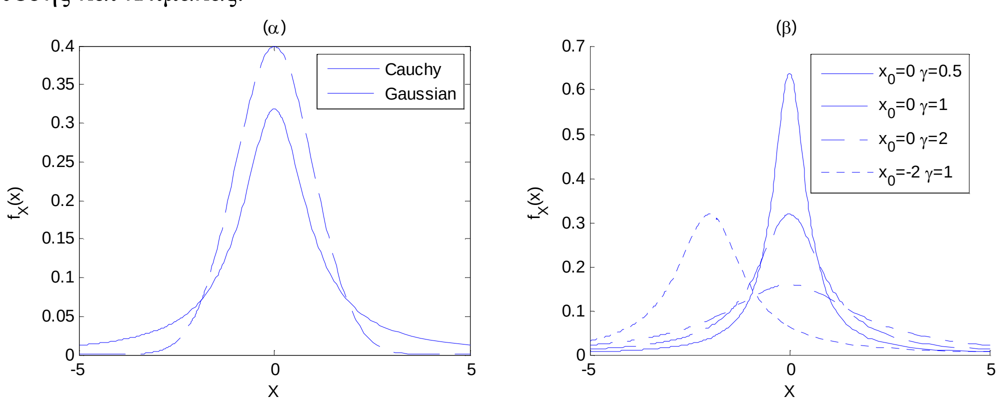
Ας εξετάσουμε τώρα μια άλλη κατανομή που έχει άπειρη διασπορά, την κατανομή Cauchy (ή Lorentzian ή Breit-Wigner) που είναι γνωστή στη φυσική, π.χ. ως η λύση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει εξαναγκασμένο συντονισμό . Η σππ της **κατανομής Cauchy** είναι

$$f_X(x) = \frac{\gamma}{\pi\left(\gamma^2 + (x - x_0)^2\right)},$$

για κάποια παράμετρο θέσης (location parameter) x_0 και παράμετρο κλίμακας (scale parameter) γ (αυτές είναι οι αντίστοιχες παράμετροι για τη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 της Γκαουσιανής κατανομής αντίστοιχα). Η *τυποποιημένη Cauchy κατανομή* προκύπτει για $x_0 = 0$ και $\gamma = 1$

$$f_{X^s}(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}.$$

Στο Σχήμα 9α δίνεται η τυποποιημένη κατανομή Cauchy μαζί με την τυποποιημένη Γκαουσιανή κατανομή, όπου φαίνεται η διαφορά στις ουρές. Επίσης στο Σχήμα 9β δίνεται η μορφή της κατανομής Cauchy για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων θέσης και κλίμακας.



Σχήμα 9 (α) Η σππ της τυποποιημένης κατανομής Cauchy μαζί με την τυποποιημένη Γκαουσιανή κατανομή. (β) Η σππ της κατανομής Cauchy για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων θέσης και κλίμακας.

Ξεκινώντας από την (6) μπορεί κάποιος να δείξει πως η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής Cauchy ($x_0 = 0$) είναι $\varphi_X(q) = e^{-\gamma|q|}$. Για το άθροισμα $Y = X_1 + X_2$ με X_1, X_2 να είναι iid και να ακολουθούν την κατανομή Cauchy ($x_0 = 0$), το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων είναι

$$\varphi_Y(q) = e^{-\gamma|q|}e^{-\gamma|q|} = e^{-2\gamma|q|}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνει

$$f_Y(y) = \frac{2\gamma}{\pi\left(4\gamma^2 + y^2\right)},$$

όπου η έκφραση της σππ υποδηλώνει ότι η κατανομή του αθροίσματος είναι επίσης Cauchy αλλά με παράμετρο κλίμακας 2γ.

2.5.4 Ορισμός της οικογένειας των ευσταθών κατανομών

Η χαρακτηριστική συνάρτηση των δύο παραπάνω ευσταθών κατανομών, Γκαουσιανή και Cauchy, έχει τη μορφή

$$\varphi_Y(q) = e^{-\gamma|q|^{\alpha}},$$

με $\alpha = 2$ για την Γκαουσιανή κατανομή και $\alpha = 1$ για την κατανομή Cauchy. Βέβαια για τις παραπάνω κατανομές θεωρήσαμε ότι η παράμετρος θέσης (location parameter), δηλαδή η μέση τιμή, είναι 0. Επίσης και οι δύο αυτές κατανομές είναι συμμετρικές, ενώ υπάρχουν ευσταθείς κατανομές που δεν είναι συμμετρικές.

Η γενική μορφή των ευσταθών κατανομών είχε αποτελέσει αντικείμενο έρευνας και βρέθηκε (τη δεκαετία του ’20) ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της είναι (σε λογαριθμική μορφή)

$$\ln\varphi_Y(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma^{\alpha}|q|^{\alpha}\left(1 - i\beta\frac{q}{|q|}\tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right) & \alpha \neq 1 \\ i\mu q - \gamma|q|\left(1 + i\beta\frac{q}{|q|}\frac{2}{\pi}\ln|q|\right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8)$$

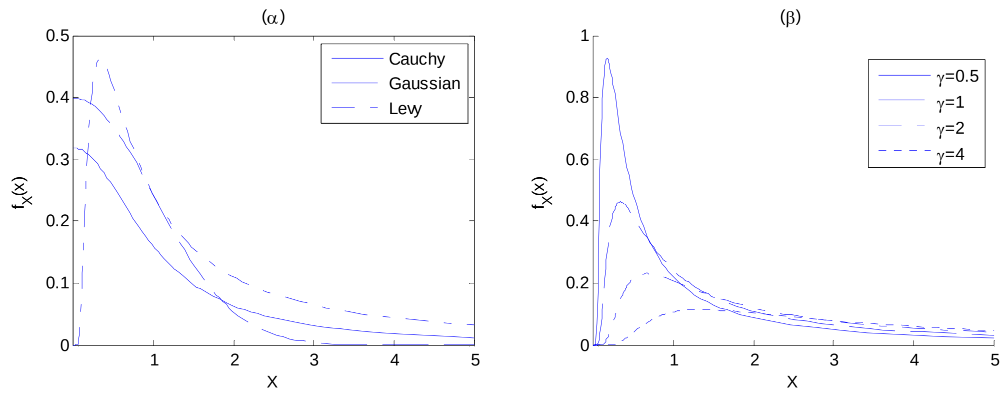
όπου $0 < \alpha \leq 2$, γ είναι η παράμετρος κλίμακας, μ είναι η παράμετρος θέσης και β η παράμετρος ασυμμετρίας με τιμές μεταξύ -1 και 1 (0 για συμμετρία). Στη γενική μορφή οι τιμές θέσης και κλίμακας μπορούν να απλουστευτούν σε $\mu = 0$ και $\gamma = 1$. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της χαρακτηριστικής συνάρτησης στην (8) δεν είναι πάντα δυνατός ακόμα και για την απλουστευμένη μορφής της. Αναλυτική έκφραση της σππ γνωρίζουμε μόνο για τις παρακάτω 3 περιπτώσεις:

1. $\alpha = 2, \beta = 0$: η Γκαουσιανή κατανομή.
2. $\alpha = 1, \beta = 0$: η κατανομή Cauchy.
3. $\alpha = 0.5, \beta = 1$: η κατανομή Lévy-Smirnov.

Οι ευσταθείς κατανομές αναφέρονται και ως κατανομές τύπου Lévy επειδή ο Lévy ήταν από τους πρώτους που καθόρισε τη μορφής τους στην (8). Αυτό μπορεί να δημιουργεί σύγχυση καθώς υπάρχει συγκεκριμένος τύπος ευσταθής κατανομής με το ίδιο όνομα (η περίπτωση 3).

2.5.5 Η ευσταθής κατανομή Lévy

Στο Σχήμα 10α δίνεται η σππ της τυποποιημένης κατανομής Lévy ($\mu = 0$ και $\gamma = 1$) μαζί με την σππ της τυποποιημένης Γκαουσιανής και Cauchy κατανομή. Η κατανομής Lévy ($\mu = 0$) ορίζεται μόνο για θετικές τιμές και για αυτό το σχήμα περιορίζεται σε αυτές τις τιμές. Παρατηρούμε ότι η ουρά της κατανομής Lévy φαίνεται να είναι η πιο παχιά (heavy tail). Στο Σχήμα 10β δίνεται η μορφή της κατανομής Lévy για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου κλίμακας ($\mu = 0$).



Σχήμα 10 (α) Η σπп της τυποποιημένης κατανομής Lévy μαζί με την τυποποιημένη Γκαουσιανή και Cauchy κατανομή. (β) Η σπп της κατανομής Lévy για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου κλίμακας.

Το ενδιαφέρον με τις ευσταθείς κατανομές εστιάζεται στις ουρές τους που για τις χρηματιστηριακές αγορές αυτό σημαίνει ότι κάποιος δείκτης μπορεί να πάρει πολύ ακραίες τιμές (να πέσει ή να ανέβει σε απρόβλεπτα (;) επίπεδα). Όπως φαίνεται στο Σχήμα 10α η ουρά της Γκαουσιανής κατανομής φθίνει γρήγορα προς το 0 και για αυτό έχει πεπερασμένη διασπορά ενώ η ουρά της κατανομής Cauchy και Lévy δε μηδενίζεται ασυμπτωτικά και η διασπορά της είναι άπειρη.

2.5.6 Νόμος δύναμης στις κατανομές και γενίκευση του ΚΟΘ

Μπορεί κάποιος να δείξει ότι για μεγάλες τιμές y της Y που ακολουθεί μη-Γκαουσιανή ευσταθή κατανομή ($\alpha < 2$) ισχύει

$$f_Y(|y|) \sim |y|^{-(1+\alpha)}, \tag{9}$$

δηλαδή η σπп για μεγάλο y ακολουθεί *νόμο δύναμης* (power-law) ως προς το y. Για τις ροπές τάξης k, $\mathrm{E}\left[|y|^k\right]$, αυτό σημαίνει πως αποκλίνουν για $k \geq \alpha$.

Μια άλλη ιδιότητα των ευσταθών κατανομών είναι η *κλιμάκωση* (scaling) που επιδέχονται. Στο Σχήμα 6 και Σχήμα 8 χρησιμοποιήθηκε η τυποποίηση της τυχαίας μεταβλητής Y_n για να φανεί η σύγκλιση στη Γκαουσιανή κατανομή. Ένας άλλος μετασχηματισμός που έχει το ίδιο αποτέλεσμα είναι με *αλλαγή κλίμακας* (rescaling) (με βάση το n) $Y_n^s = Y_n n^{-1/2}$. Αυτή η αλλαγή κλίμακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει κάποιος ότι αν τα τυχαία βήματα X_i ακολουθούν νόμο δύναμης για μεγάλες τιμές τότε το άθροισμα τους Y_n προσεγγίζει την ευσταθή κατανομή με τον ίδιο νόμο δύναμης. Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι κάθε βήμα είναι iid με σπп που έχει την παρακάτω ιδιότητα στις ουρές της

$$f_{X_i}(x) \sim \begin{cases} C_-|x|^{-(1+\alpha)} & x \to -\infty \\ C_+|x|^{-(1+\alpha)} & x \to +\infty \end{cases} \tag{10}$$

και ας θέσουμε την παράμετρο ασυμμετρίας ως

$$\beta = \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}.$$

Τότε με την κατάλληλη αλλαγή κλίμακας η $f_{Y_n^s}(y)$ προσεγγίζει την σπп της ευσταθούς κατανομής με δείκτη α και παράμετρο ασυμμετρίας β.

Η ύπαρξη τέτοιας σύγκλισης αποτελεί τη γενίκευση του ΚΟΘ για κατανομές με ροπές που απειρίζονται (ή αλλιώς για κατανομές με νόμο κλιμάκωσης στις ουρές τους ή στην ουρά τους). Οι συνθήκες του γενικευμένου ΚΟΘ είναι όπως και πριν, δηλαδή τα τυχαία βήματα είναι iid. Άρα για κάθε *α*, όπου $0<\alpha<2$, υπάρχει και μια ευσταθή κατανομή που έλκει όλες τις σππ $f_{Y_n}(y)$ που έχουν την ιδιότητα της (10), δηλαδή είναι ευσταθές σταθερό σημείο στο χώρο των συνεχών κατανομών, όπως η Γκαουσιανή κατανομή για $\alpha=2$. Η διαφορά είναι πως η λεκάνη έλξης της Γκαουσιανής κατανομής περιλαμβάνει όλες τις κατανομές με πεπερασμένη διασπορά ενώ η λεκάνη έλξης για κάθε άλλη ευσταθή κατανομή περιέχει κατανομές με άπειρη διασπορά.

Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στην ουρά (ή στις ουρές) της κατανομής, αν η μορφή της σππ στην ουρά της κατανομής ακολουθεί νόμο δύναμης τότε η διασπορά είναι άπειρη και την αντιστοιχίζουμε σε ευσταθή κατανομή (με τον αντίστοιχο δείκτη *α* στον εκθέτη της δύναμης) ενώ αλλιώς την αντιστοιχίζουμε σε Γκαουσιανή κατανομή. Από τη φυσική είναι γνωστό ότι νόμος δύναμης στις ουρές παρατηρείται σε κατανομές ανοιχτών συστημάτων, όπως είναι και το σύστημα χρηματιστηριακής αγοράς. Ένα τέτοιο ανοιχτό σύστημα είναι στο παρακάτω παράδειγμα.

2.5.7 Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης

Το παράδοξο αυτό είναι ένα τυχερό παιχνίδι που όρισε ο N. Bernulli και αργότερα ο D. Bernulli δημοσίευσε στο *Commentaries of the Imperial Academy of Science of Saint Petersburg* και για αυτό ονομάστηκε το *παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης* (St Petersburg paradox).

Στο τυχερό αυτό παιχνίδι μπαίνει ένας παίκτης δίνοντας ένα ποσό Α (για κάθε φορά που συμμετέχει). Το παιχνίδι αρχίζει με τη ρίψη του νομίσματος και συνεχίζει ας πούμε μέχρι να έρθει «γράμματα». Το παιχνίδι ξεκινάει με ένα ευρώ (πριν την πρώτη ρίψη του νομίσματος) και το ποσό διπλασιάζεται πριν την κάθε νέα ρίψη του νομίσματος. Ο παίχτης κερδίζει το ποσό που αθροίστηκε ως τη λήξη του παιχνιδιού. Έτσι αν το παιχνίδι τερματίσει στην *n* επανάληψη (στην *n* ρίψη το νόμισμα είναι στη θέση «γράμματα») ο παίχτης κερδίζει 2^{n-1} ευρώ, όπως φαίνεται στον Πίνακας 1.

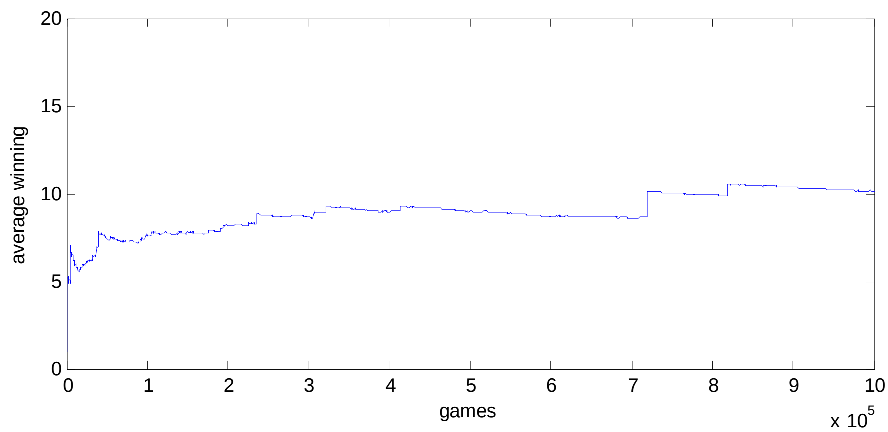
Πίνακας 1 Ανάλυση του παραδόξου της Αγίας Πετρούπολης στις πιθανές καταστάσεις τερματισμού.

ρίψη	κέρδος	πιθανότητα	αναμενόμενο κέρδος
1	1	1/2	1 x 1/2 = 1/2
2	2	1/4	2 x 1/4 = 1/2
3	4	1/8	4 x 1/8 = 1/2
⋮	⋮	⋮	⋮
n	2^{n-1}	$1/2^n$	2^{n-1} x $(1/2^n)$= 1/2
⋮	⋮	⋮	⋮

Η πιθανότητα να τερματίσει το παιχνίδι στη *n*-στη ρίψη του νομίσματος είναι $1/2^n$. Η πιθανότητα να προχωρήσει το παιχνίδι σε κάποια μεγάλη επανάληψη (και να έχει ο παίχτης μεγάλα κέρδη) μειώνεται με νόμο δύναμης αλλά παραμένει μη-μηδενική για οσοδήποτε μεγάλη επανάληψη. Από την άλλη το αναμενόμενο κέρδος για οποιαδήποτε επανάληψη που σημάνει λήξη του παιχνιδιού είναι πάντα 1/2, όπως δίνεται στην τελευταία στήλη του Πίνακας 1. Το συνολικό αναμενόμενο κέρδος που αντιστοιχεί στη μέση τιμή του κέρδους είναι άπειρο, 1/2+1/2+… ! που προϋποθέτει βέβαια ότι ο διοργανωτής του παιχνιδιού έχει να διαθέσει το άπειρο ποσό. Το παράδοξο του παιχνιδιού είναι πως ο διοργανωτής του παιχνιδιού και ο παίχτης δε θα συμφωνούσαν γιατί:

- Ο διοργανωτής θα ζητούσε το ποσό συμμετοχής Α του παίχτη να είναι τουλάχιστον στο μέσο κέρδος (και κάτι παραπάνω για να έχει ο ίδιο κέρδος!), δηλαδή «άπειρα ευρώ».
- Ο παίχτης δε θα συμφωνούσε για ένα ποσό Α πολύ μεγάλο (που έστω να αγγίζει τα «άπειρα ευρώ») γιατί υποθέτει δε θα είναι τόσο τυχερός να κερδίσει μεγάλα ποσά αφού αυτά εμφανίζονται σπάνια.

Μάλιστα ακόμα και αν ένας διοργανωτής του παιχνιδιού που υποσχόταν να καλύψει πολύ μεγάλα ποσά ζητούσε ένα σχετικά μικρό ποσό για τη συμμετοχή των παιχτών, π.χ. 100 ευρώ, λίγοι λογικοί παίχτες θα ενθουσιάζονταν και θα ήθελαν να παίξουν. Η απάντηση δίνεται από την προσομοίωση 10^6 επαναλήψεων του παιχνιδιού στο Σχήμα 11. Με την αύξηση του πλήθους των παιχνιδιών που συμμετέχει ο παίκτης ο μέσος όρος του κέρδους του αυξάνεται με γενικά αργά όμως ρυθμό. Η ραγδαία αύξηση του μέσου όρου συμβαίνει σε παιχνίδια που δίνουν πολύ μεγάλη απόδοση (τα οποία όμως συμβαίνουν σπάνια!).



Σχήμα 11 Διάγραμμα του μέσου κέρδους του παίχτη ως προς τον αριθμό των παιχνιδιών που συμμετέχει.

Η εξήγηση για το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης δίνεται από την κατανομή του κέρδους του παίχτη σε κάθε παιχνίδι ή καλύτερα σε κάθε τιμή κέρδους. Από τον Πίνακας 1 μπορεί κάποιος να υπολογίσει πως η πιθανότητα του κάθε κέρδους δίνεται από νόμο δύναμης ως προς το κέρδος με εκθέτη -1. Η διασπορά όπως και η μέση τιμή της κατανομής αυτής απειρίζεται και για αυτό δεν υπάρχει μια *χαρακτηριστική κλίμακα* (characteristic scale) τιμών του κέρδους που να μπορούν να συμφωνήσουν ο διοργανωτής του παιχνιδιού και ο παίχτης.

Στο παράδειγμα αυτό ο νόμος κλιμάκωσης ορίζεται θεωρητικά για $n \to \infty$ αλλά πρακτικά το παιχνίδι μπορεί να παίζεται μόνο ως κάποιο πεπερασμένο n. Στην πράξη στα συστήματα που συναντάμε οι τυχαίες μεταβλητές των οποίων εξετάζουμε την κατανομή έχουν πεπερασμένα όρια. Ο νόμος κλιμάκωσης, αν υπάρχει, περιμένουμε να διατηρείται για κάποιο εύρος μεγάλων τιμών της τυχαίας μεταβλητής.

Επιστρέφοντας στο σύστημα της χρηματιστηριακής αγοράς θέτουμε το ερώτημα κατά πόσο οι μεταβολές τιμών για κάποιο χρηματιστηριακό δείκτη ακολουθούν ευσταθή κατανομή. Σύμφωνα με το γενικευμένο οριακό θεώρημα θα πρέπει τα τυχαία βήματα, που αντιστοιχούν στις επακόλουθες μεταβολές τιμών σε μια περίοδο να είναι iid. Ενώ υπάρχουν ενδείξεις ότι οι επακόλουθες μεταβολές τιμών είναι ανεξάρτητες δε φαίνεται να ακολουθούν την ίδια κατανομή (δες για παράδειγμα τις αποδόσεις του δείκτη S&P500 στο Σχήμα 4).

2.5.8 Άπειρα διαιρετές κατανομές

Όταν οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες αλλά δεν έχουν την ίδια κατανομή, υπάρχει ένα άλλο θεώρημα που ορίζει ότι η σύγκλιση είναι σε κατανομή με την ιδιότητα όχι απαραίτητα της ευστάθειας αλλά της **άπειρης διαιρετότητας** (infinitely divisibility). Μια κατανομή είναι άπειρα διαιρετή όταν για κάθε φυσικό αριθμό n, η τυχαία μεταβλητή Y της κατανομής μπορεί να παρασταθεί ως το άθροισμα n τυχαίων μεταβλητών iid X_i, i=1,…,n. Με τη βοήθεια της χαρακτηριστικής συνάρτησης αυτή η ιδιότητα μπορεί να ελεγχθεί αν ισχύει για κάθε n

$$\varphi_Y(q) = \left(\varphi_X(q)\right)^k, \tag{11}$$

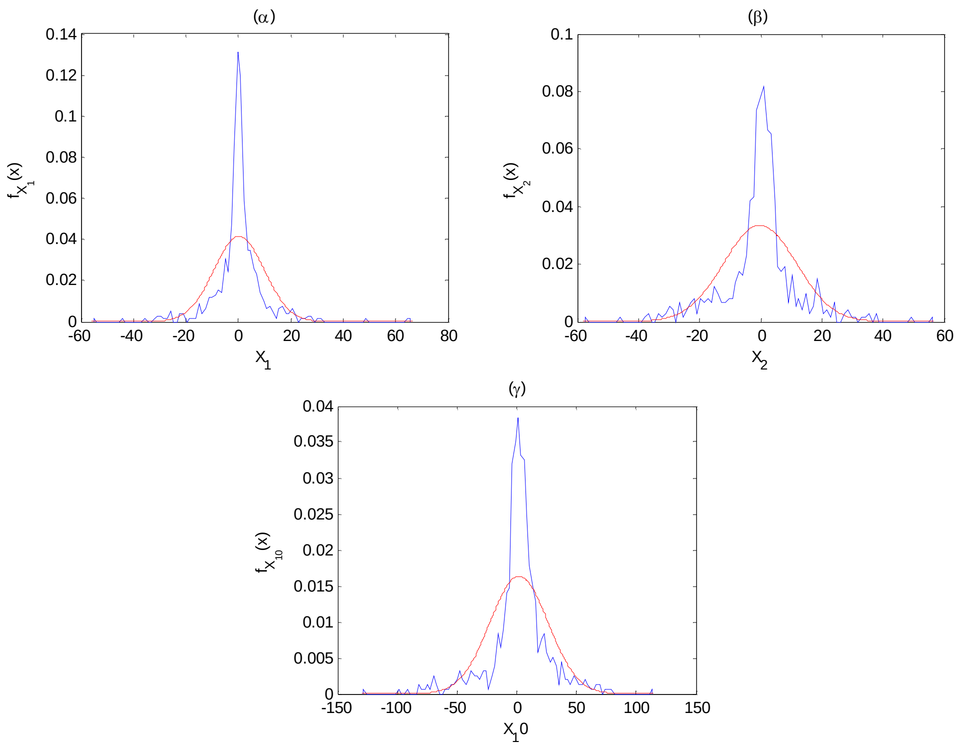
όπου $\varphi_Y(q)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y και $\varphi_X(q)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κάθε X_i. Όλες οι ευσταθείς κατανομές αλλά και άλλες κατανομές, όπως η κατανομή Poisson και η Γάμμα κατανομή, είναι άπειρα διαιρετές, δηλαδή το σύνολο των άπειρων διαιρετών κατανομών είναι υπερσύνολο του συνόλου των ευσταθών κατανομών και περιέχει και άλλες κατανομές με πεπερασμένη ή άπειρη διασπορά. Βέβαια υπάρχουν και κατανομές που δεν είναι άπειρα διαιρετές, όπως η ομοιόμορφη κατανομή.

Θεωρώντας την κατανομή ενός χρηματιστηριακού δείκτη μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η οριακή κατανομή του αθροίσματος πολλών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (ή αλλαγές σε κάθε χρονικό βήμα συναλλαγής) αλλά όχι απαραίτητα με την ίδια κατανομή, δηλαδή η κατανομή είναι άπειρα διαιρετή, αλλά όχι απαραίτητα και ευσταθή. Ένα άλλο ερώτημα είναι κατά ποσό η κατανομή ακολουθεί στις ουρές της νόμο δύναμης, δηλαδή έχει άπειρη διασπορά, ή έχει πεπερασμένη διασπορά και μπορεί να προσδιοριστεί από κάποια χαρακτηριστική κλίμακα των τιμών της. Η χαρακτηριστική κλίμακα είναι ιδιότητα των πεπερασμένων συστημάτων ως προς τις τιμές τους αλλά και ως προς το χρόνο συσχέτισης όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα: Κατανομή για τη χρονοσειρά μεταβολών του δείκτη S&P500

Κλείνουμε το θέμα για τον τύπο της κατανομής τυχαίων μεταβλητών με ένα παράδειγμα για την κατανομή του ημερήσιου δείκτη S&P500 (τιμή κλεισίματος) την περίοδο 20/10/1982 – 13/3/2008. Η χρονοσειρά του δείκτη S&P500 είναι $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ και N=6424. Οι πρώτες διαφορές $x_t = y_t - y_{t-1}$ παριστάνουν τη χρονική εξέλιξη της μεταβολής του δείκτη και αποτελούν τα τυχαία βήματα αν υποθέσουμε ότι ο δείκτης είναι τυχαίος περίπατος. Στο Σχήμα 12α δίνεται η κατανομή των πρώτων διαφορών μαζί με την κανονική κατανομή κατάλληλα προσαρμοσμένη (με μέση τιμή και τυπική απόκλιση όπως αυτή εκτιμάται από τη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών). Η σππ εκτιμήθηκε με ιστόγραμμα. Παρατηρούμε πως η κατανομή των πρώτων διαφορών είναι λεπτοκυρτή και σημαντικά διαφορετική από τη Γκαουσιανή κατανομή. Το ίδιο παρατηρούμε και στο Σχήμα 12β για τη χρονοσειρά των δεύτερων διαφορών $y_t - y_{t-2}$, που μπορεί να θεωρηθεί και ως δείγμα του αθροίσματος δύο τυχαίων βημάτων, δηλαδή $Y = X_1 + X_2$ (δες παρ.2.4). Η μορφή της κατανομής παραμένει η ίδια και για μεγαλύτερες υστερήσεις, όπως δίνεται στο Σχήμα 12γ για υστέρηση 10 (ή αντίστοιχα άθροισμα 10 τυχαίων βημάτων). Στην τελευταία περίπτωση, από το πλήθος των 6423 τυχαίων βημάτων, μπορούμε να σχηματίσουμε 642 παρατηρήσεων για το άθροισμα τυχαίων βημάτων ($y_t - y_{t-10}$).

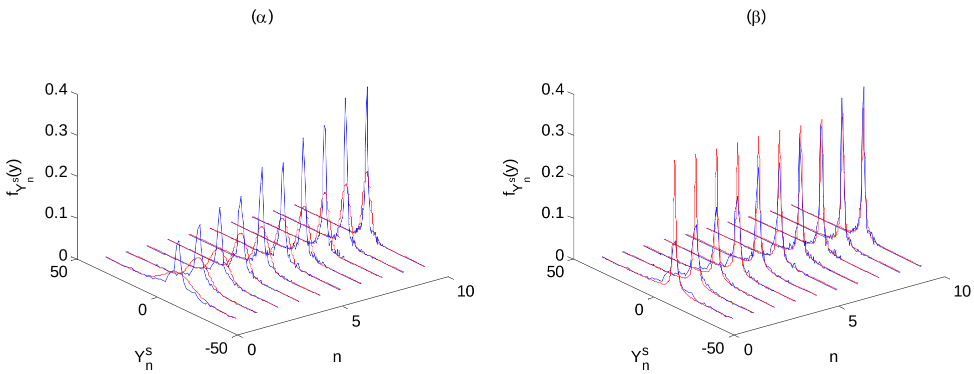
Αυτό το πλήθος δεδομένων χρησιμοποιήθηκε και για τα άλλα σχήματα για να είναι συγκρίσιμα τα ιστογράμματα.



Σχήμα 12 Η εκτίμηση της σππ με ιστόγραμμα για τις πρώτες διαφορές $y_t - y_{t-1}$ του ημερήσιου δείκτη S&P500 στο (α) τις διαφορές υστέρησης 2 $y_t - y_{t-2}$ στο (β) και τις διαφορές υστέρησης 10 $y_t - y_{t-10}$ στο (γ). Σε κάθε σχήμα παρουσιάζεται και το γράφημα της σππ της Γκαουσιανής κατανομής που προσαρμόζεται στα δεδομένα. Το πλήθος των στοιχείων και στις τρεις περιπτώσεις είναι 642, όπου για το (α) αυτά επιλέχτηκα τυχαία από 6423 στοιχεία και για το (β) επιλέχτηκαν τυχαία από 3211 στοιχεία.

Οι μεταβολές του ημερήσιου δείκτη S&P500 (οι πρώτες διαφορές) δε φαίνεται να ακολουθούν κανονική κατανομή και επίσης τα αθροίσματα μεταβολών δε φαίνεται να συγκλίνουν σε Γκαουσιανή κατανομή. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο Σχήμα 13α όπου δίνεται η σππ για τα 10 πρώτα αθροίσματα των μεταβολών με την Γκαουσιανή κατανομή να μην προσαρμόζεται καθώς πληθαίνουν οι όροι του αθροίσματος. Αντίθετα η κατανομή Cauchy φαίνεται να προσαρμόζεται ικανοποιητικά καθώς πληθαίνουν οι όροι του αθροίσματος, όπως δίνεται στο Σχήμα 13β.

Από την ανάλυση αυτή οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι αν θεωρήσουμε τις μεταβολές του ημερήσιου δείκτη S&P500 ως παρατηρήσεις από iid τυχαία βήματα, τότε ασυμπτωτικά το άθροισμα τους συγκλίνει σε ευσταθή κατανομή, όχι όμως Γκαουσιανή, δηλαδή ο ημερήσιος δείκτης S&P500 είναι τυχαίος περίπατος όχι όμως Γκαουσιανός. Σημειώνεται ότι το παραπάνω συμπέρασμα προέρχεται από απλή παρατήρηση της εκτίμησης των σππ για τα διάφορα αθροίσματα μεταβολών και βασίζεται στην υπόθεση ότι οι μεταβολές είναι τυχαία βήματα, δηλαδή iid. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε αν οι μεταβολές των δεικτών είναι ανεξάρτητες (independent) ή συσχετίζονται και αν έχουν την ίδια κατανομή (identical distribution) ή η κατανομή τους μπορεί να αλλάζει σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα.



Σχήμα 13 Οι σππ για την τυποποιημένη $Y_n^s = Y_n / \sqrt{n}$, όπου $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ για $n = 1,\ldots,10$ όπου X_i, $i = 1,\ldots,n$, είναι οι πρώτες διαφορές του ημερήσιου δείκτη S&P500. Στο (α) δίνεται για κάθε *n* η σππ της Γκαουσιανής κατανομής και στο (β) της Cauchy.