

Αβεβαιότητα και σφάλμα μέτρησης

Δημήτρης Κουγιουμτζής

29 Οκτωβρίου 2019

Συστηματικά και τυχαία σφάλματα

Διάδοση σφάλματος μέτρησης

Εισαγωγικά



Αβεβαιότητα μέτρησης

Παγκόσμιος Οργανισμός Μέτρων (International Organization for Standards, ISO): μεθοδολογίες για τον καθορισμό μέτρων και σταθμών και αβεβαιότητας των μετρήσεων

αβεβαιότητα { μοντέλου / προσομοίωσης
μέτρησης

Αβεβαιότητα μοντέλου: απλουστευμένο μαθηματικό μοντέλο για μια φυσική διαδικασία που περιέχει παράγοντες που δεν έχουμε συμπεριλάβει στο μοντέλο.

Υπολογιστική (αριθμητική) αβεβαιότητα: αριθμητική επίλυση μαθηματικών εξισώσεων \Rightarrow αβεβαιότητα μοντέλου

Αβεβαιότητα μοντέλου:

δύσκολο να προσδιοριστεί, εύκολο να απαλειφεί.

Αβεβαιότητα μέτρησης:

εύκολο να προσδιοριστεί, δύσκολο να απαλειφεί.

Αβεβαιότητα μοντέλου: πηγάζει από ανεπάρκεια του μοντέλου λόγω έλλειψης γνώσης για τη διαδικασία που μελετάμε

σφάλμα του μοντέλου: αναγνωρισμένη ανεπάρκεια που δίνει το μοντέλο όταν το εφαρμόζουμε στην πράξη.

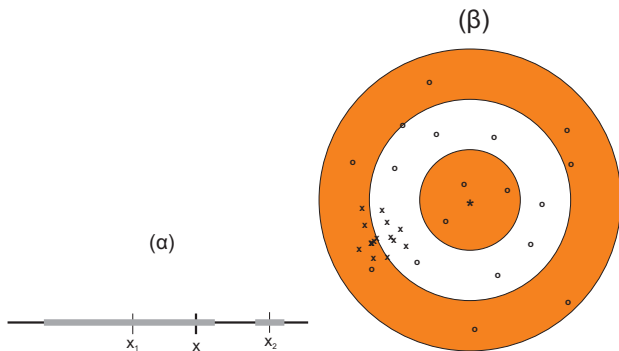
Αβεβαιότητα μέτρησης: σύνολο δυνατών τιμών για μια συγκεκριμένη μέτρηση

σφάλμα μέτρησης: διαφορά πραγματικής και παρατηρούμενης τιμής

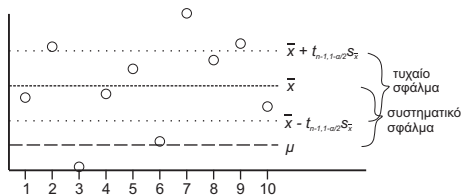
Συστηματικά και τυχαία σφάλματα

Άλλη μέτρηση \Rightarrow άλλο αποτέλεσμα (πειραματικές αποκλίσεις)

- ▶ **Συστηματικά σφάλματα:** επαναλαμβάνονται και υπάρχει κάποιο αίτιο που τα δημιουργεί.
Μπορούν να εξουδετερωθούν με *βαθμονόμηση*
Τα συστηματικά σφάλματα ορίζουν την **ακρίβεια (ορθότητα)** μέτρησης.
Εκτίμηση παραμέτρων \Rightarrow μεροληψία.
- ▶ **Τυχαία σφάλματα** δεν επαναλαμβάνονται με το πείραμα αλλά αντιπροσωπεύουν την τυχειότητα.
Τα τυχαία σφάλματα ορίζουν την **ακρίβεια επανάληψης**.



Αβεβαιότητα στην εκτίμηση της μέσης τιμής



τ.μ. X , n μετρήσεις

Αβεβαιότητα μέτρησης = εκτίμηση του σφάλματος μέτρησης =
τυπική απόκλιση s

Όριο της ακρίβειας επανάληψης: για κάθε (επόμενη) μέτρηση σε
επίπεδο σημαντικότητας α

$$\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} s$$

Αβεβαιότητα μέσης τιμής = εκτίμησης σφάλματος για μέση τιμή
= σταθερό σφάλμα του μέσου όρου $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}$

Όριο της ακρίβειας για τη μέση τιμή

$$\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} s/\sqrt{n}$$

Παράδειγμα: Τάση σε αντιστάτη

Μέτρηση τάσης V σε έναν αντιστάτη (σε mV)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_i	123.5	125.3	124.1	123.9	123.7	124.2	123.2	123.7	124.0	123.2

$$\bar{V} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} V_i = 123.880 \text{ mV}$$

Υπόθεση: $V \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$ αβεβαιότητα για κάθε μέτρηση V_i

$$s_V = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2} = 0.607 \text{ mV.}$$

$$V_1 = (123.5 \pm 0.6)\text{mV}, \quad V_2 = (125.3 \pm 0.6)\text{mV}, \\ \dots, \quad V_{10} = (123.2 \pm 0.6)\text{mV}.$$

Παράδειγμα: Τάση σε αντιστάτη (συνέχεια)

Αβεβαιότητα για \bar{V}

$$s_{\bar{V}} = \frac{s_V}{\sqrt{10}} = 0.192 \text{ mV}$$

$$\bar{V} = (123.880 \pm 0.192) \text{ mV.}$$

Όριο αβεβαιότητας ($\alpha = 0.05$) για κάθε νέα μέτρηση

$$\begin{aligned} \bar{V} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} s_V &= 123.88 \pm t_{9, 0.975} \cdot 0.607 \\ &= 123.88 \pm 2.2622 \cdot 0.607 \\ &= 123.88 \pm 1.373 \text{ mV,} \end{aligned}$$

Όριο αβεβαιότητας για μέση τιμή μ

$$\begin{aligned} \bar{V} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} s_V / \sqrt{n} &= 123.88 \pm 2.2622 \cdot 0.607 / \sqrt{10} \\ &= 123.88 \pm 0.434 \text{ mV.} \end{aligned}$$

Διάδοση σφάλματος μέτρησης

Έστω ότι γνωρίζουμε X με κάποια αβεβαιότητα σ_X .

$$Y = f(X)$$

Η μεταβολή του Y για κάθε μικρή μεταβολή dX γύρω από κάποια τιμή x

$$dY \simeq \left(\frac{df}{dX} \right)_{X=x} dX,$$

Έστω $dX = x - \bar{x}$ και $dY = y - \bar{y}$

$$\sigma_Y^2 \simeq \left(\frac{df}{dX} \right)_{X=x}^2 \sigma_X^2 \Leftrightarrow \sigma_Y \simeq \left| \frac{df}{dX} \right|_{X=x} \sigma_X$$

Διάδοση σφάλματος μέτρησης (συνέχεια)

Αν Y είναι συνάρτηση των X_1, X_2, \dots, X_m

$$\sigma_Y^2 \simeq \sum_{i=1}^m \left(\frac{df}{dX_i} \right)_{X_i=x_i}^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \left(\frac{df}{dX_i} \right)_{X_i=x_i} \left(\frac{df}{dX_j} \right)_{X_j=x_j} \sigma_{X_i, X_j}$$

νόμος διάδοσης των σφαλμάτων

Η σχέση είναι ακριβής μόνο όταν f γραμμική.

Αν X_1, X_2, \dots, X_m ανεξάρτητες

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{df}{dX_i} \right)_{X_i=x_i}^2 \sigma_{X_i}^2}$$

f γραμμική

$$Y = \sum_{i=1}^m a_i X_i = \mathbf{a}^T \mathbf{X}$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T, \quad \mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T.$$

Πίνακας συνδιασποράς

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1, X_2} & \dots & \sigma_{X_1, X_m} \\ \sigma_{X_2, X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \sigma_{X_2, X_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_m, X_1} & \sigma_{X_m, X_2} & \dots & \sigma_{X_m}^2 \end{bmatrix}.$$

f γραμμική (συνέχεια)

Η διασπορά της Y είναι

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i \sigma_{X_i, X_j} a_j = \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a}.$$

$\rho_{X_i, X_j} = \sigma_{X_i, X_j} / (\sigma_{X_i} \sigma_{X_j})$: συντελεστής συσχέτισης των X_i και X_j

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^m a_i \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m a_i a_j \rho_{X_i, X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}.$$

Αν X_1, X_2, \dots, X_m ανεξάρτητες

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^m a_i \sigma_{X_i}^2.$$

σχετική αβεβαιότητα : σ_X / X

Παράδειγμα: Νόμος του Ωμ

Νόμος του Ωμ: $R = V/I$,

- ▶ I : ένταση ρεύματος στον αντιστάτη με αβεβαιότητα σ_I
- ▶ V : τάση ρεύματος στον αντιστάτη με αβεβαιότητα σ_V
- ▶ R : αντίσταση με αβεβαιότητα σ_R

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{I}\right)^2 + \left(\frac{V}{I^2}\sigma_I\right)^2} = R\sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}.$$

Σχετική αβεβαιότητα σ_R/R : τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των σχετικών αβεβαιοτήτων της έντασης και τάσης.