

# Στοιχεία Στατιστικής

Δημήτρης Κουγιουμτζής

8 Οκτωβρίου 2019

## Σημειακή εκτίμηση

- Μέση τιμή και διασπορά
- Βαθμοί ελευθερίας
- Κριτήρια καλών εκτιμητών
- Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

## Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης

- Διάστημα εμπιστοσύνης μέσης τιμής
- Διάστημα εμπιστοσύνης διασποράς

## Έλεγχος υπόθεσης

- Έλεγχος μέσης τιμής
- Έλεγχος διασποράς
- Έλεγχος καταλληλότητας  $\chi^2$

## Εισαγωγικά

**Πιθανότητα:** σχετική συχνότητα εμφάνισης  $n_i$  κάποιας τιμής  $x_i$  μιας διακριτής τ.μ.  $X$ .

$$P(x_i) \equiv P(X = x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}$$

$n$  παρατηρήσεις της  $X$

**Στατιστική** Εκτίμηση της  $p$  από  $n$  παρατηρήσεις της  $X$

$$\hat{p} = n_i/n.$$

**Σημειακή εκτίμηση, διάστημα εμπιστοσύνης, έλεγχος υπόθεσης**

## Στατιστικές προσεγγίσεις

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  δείγμα από την τ.μ.  $X$

Κατηγορηματικά δεδομένα: αναλογία  $p$ ;

Αριθμητικά δεδομένα: μέση τιμή  $\mu$ ; διασπορά  $\sigma^2$  της κατανομής της  $X$

Γενικά εκτίμηση / έλεγχο για άγνωστη παράμετρος  $\theta$

Προσεγγίσεις:

1. **παραμετρική**: υποθέτει γνωστή κατανομή
2. **μη-παραμετρική**: δεν υποθέτει γνωστή κατανομή
3. **με επαναδειγματοληψία** για να δημιουργήσει νέα δείγματα και την κατανομή του εκτιμητή.

## Σημειακή εκτίμηση

$\hat{\theta}$ : σημειακή εκτίμηση της  $\theta$ , στατιστικό που υπολογίζεται από το δείγμα,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_n)$  **εκτιμητής** της  $\theta$

$\hat{\theta}$  είναι τ.μ.

$\{x_1, \dots, x_n\}$  είναι τ.μ. με ασκ  $F_X(x; \theta)$

$\hat{\theta}$  συνάρτηση τ.μ. άρα και η ίδια είναι τ.μ.

μέση τιμή:  $\mu_{\hat{\theta}} \equiv E[\hat{\theta}]$

διασπορά:  $\sigma_{\hat{\theta}}^2 \equiv \text{Var}[\hat{\theta}]$ .

## Σημειακή εκτίμηση, Μέση τιμή και διασπορά

Εκτιμητής της  $\mu$ : **δειγματική μέση τιμή ή μέσος όρος**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Εκτιμητής της  $\sigma^2$ : **δειγματική διασπορά**

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right).$$

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Για μεγάλο  $n$  οι δύο εκτιμητές συγκλίνουν στην ίδια τιμή.

## Σημειακή εκτίμηση, Βαθμοί ελευθερίας

**Βαθμοί ελευθερίας:** ελεύθερες (τυχαίες) τιμές στο πρόβλημα.

Δείγμα  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow$  βαθμοί ελευθερίας  $n$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right).$$

Στον ορισμό της δειγματικής διασποράς περιλαμβάνεται η  $\bar{x}$ .

Δεσμεύονται οι  $n$  ελεύθερες τιμές να τηρούν την συνθήκη

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Οι βαθμοί έλευθερίας στον υπολογισμό της δειγματικής διασποράς είναι  $n - 1$ .

## Σημειακή εκτίμηση, κριτήρια καλών εκτιμητών

Είναι το  $\bar{x}$  καλός εκτιμητής της  $\mu$ ;  $s^2$  ή  $\tilde{s}^2$  για  $\sigma^2$ ;  
 $\hat{\theta}$  αμερόληπτος εκτιμητής

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

μεροληψία:  $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ .

$\hat{\theta}_1$  πιο αποτελεσματικός από  $\hat{\theta}_2$  αν  $\sigma_{\hat{\theta}_1}^2 < \sigma_{\hat{\theta}_2}^2$ .

- ▶  $\bar{x}$  αμερόληπτος και ο πιο αποτελεσματικός για  $\mu$
- ▶  $s^2$  αμερόληπτος και ο πιο αποτελεσματικός για  $\sigma^2$
- ▶  $\tilde{s}^2$  είναι μεροληπτικός με μεροληψία  $b(\tilde{s}^2) = -\sigma^2/n$ .
- ▶  $n \rightarrow \infty$ :  $b(\tilde{s}^2) \rightarrow 0$ ,  $\tilde{s}^2$  ασυμπτωτικά αμερόληπτος.



## Σημειακή εκτίμηση, κριτήρια καλών εκτιμητών

### μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\text{MSE}[\hat{\theta}] = b(\hat{\theta})^2 + \sigma_{\hat{\theta}}^2 = (E[\hat{\theta}] - \theta)^2 + E[\hat{\theta}^2] - (E[\hat{\theta}])^2 = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Στον ορισμό των  $\bar{x}$  και  $s^2$  δεν κάναμε κάποια υπόθεση για την κατανομή της τ.μ.  $X$  και άρα μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για οποιαδήποτε τ.μ.  $X$  που παρατηρούμε.

## Σημειακή εκτίμηση, εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

**Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας** δίνει την εκτίμηση που είναι η πιο πιθανή με βάση το δείγμα.

Προϋπόθεση:

- ▶  $F_X(x; \theta)$  γνωστή με  $\theta$  άγνωστη
- ▶  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ανεξάρτητες

συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f_X(x_1; \theta) \cdots f_X(x_n; \theta).$$

$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1) > L(x_1, \dots, x_n; \theta_2) \Rightarrow \theta_1$  πιο αληθοφανής από  $\theta_2$   
Η 'πιο αληθοφανής' τιμή της  $\theta$  μεγιστοποιεί τη  $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  ή  $\log L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ .

## Σημειακή εκτίμηση, Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας

εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας  $\hat{\theta}$ :

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Παράμετροι  $\theta_1, \dots, \theta_m$

Συνάρτηση πιθανοφάνειας  $L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m)$

εκτιμητές  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ : βρίσκονται από

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0 \quad \text{για } j = 1, \dots, m.$$

## Παράδειγμα

$\{x_1, \dots, x_n\}$  ανεξάρτητες,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  γνωστή. Εκτίμηση της  $\mu$ ;

Συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(x_1, \dots, x_n; \mu) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right],$$

$$\log L(x_1, \dots, x_n; \mu) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

που δίνει τη λύση

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x},$$

## Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω και η  $\sigma^2$  άγνωστη.

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0.$$

Επίλυση συστήματος δύο εξισώσεων

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Για κανονική κατανομή οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας είναι  $\bar{x}$  για  $\mu$  και  $\hat{\sigma}^2$  για  $\sigma^2$ .

## Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης

Πόσο κοντά είναι η  $\hat{\theta}$  στην  $\theta$ ;

Το διάστημα  $[\theta_1, \theta_2]$  περιέχει την  $\theta$  με κάποια πιθανότητα  $1 - \alpha$

?

Θεωρούμε  $x_1, \dots, x_n$  ανεξάρτητες.

Κατανομή του εκτιμητή; (π.χ.  $\bar{x}$  ή  $s^2$ )

## Κατανομή της $\bar{x}$ ;

Μέση τιμή της  $\bar{x}$ ;

$$\mu_{\bar{x}} \equiv E(\bar{x}) = \mu$$

Διασπορά της  $\bar{x}$ ;

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \equiv \text{Var}(\bar{x}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

και τυπική απόκλιση ή **σταθερό σφάλμα** του εκτιμητή  $\bar{x}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

Η μορφή της κατανομής της  $\bar{x}$  εξαρτάται από:

- ▶ το μέγεθος του δείγματος  $n$ ,
- ▶ από το αν η κατανομή της  $X$  είναι κανονική
- ▶ από το αν γνωρίζουμε τη διασπορά της.

## Διάστημα εμπιστοσύνης μέσης τιμής

1.  $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow x_1, \dots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ .
2. Αν  $n > 30$ , από το ΚΟΘ  $\Rightarrow \bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ .

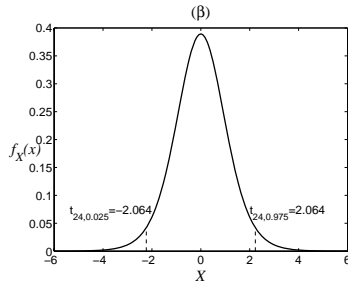
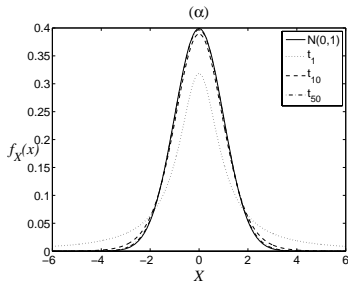
Αλλά ... δε γνωρίζω τη  $\sigma^2$ . Την αντικαθιστώ με το  $s^2$ .

Ισχύει  $\bar{x} \sim N(\mu, s^2/n)$  ή  $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$  ? ΟΧΙ

$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ ,  $n - 1$  βαθμοί ελευθερίας.



## Διάστημα εμπιστοσύνης μέσης τιμής



$t_1$ : κατανομή **Cauchy, Lorentzian, Breit-Wigner**

Για μεγάλα δείγματα δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ της κατανομής Student και της τυπικής κανονικής κατανομής.

Παράδειγμα: Αν  $\alpha = 0.05$  και  $n - 1 = 24$ ,  $t_{24,0.975} = 2.064$ , το διάστημα  $[-2.064, 2.064]$  περιέχει την τ.μ.  $t$  με πιθανότητα 0.95.

## Διάστημα εμπιστοσύνης μέσης τιμής

Για την τυπική κανονική κατανομή:

$$P(-z_{1-\alpha/2} < z \leq z_{1-\alpha/2}) = \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(-z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

Αντίστοιχα για  $t_{n-1}$

$$P(-t_{n-1,1-\alpha/2} < t \leq t_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$P(-t_{n-1,1-\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \alpha,$$

$$P(\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{ή} \quad \left[ \bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

διάστημα εμπιστοσύνης της  $\mu$  σε επίπεδο  $1 - \alpha$ .

## Παράδειγμα, ασφάλειες των 40 αμπέρ

Μετρήσεις έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος στις οποίες κάηκαν 25 ασφάλειες των 40 αμπέρ.

40.9	40.3	39.8	40.1	39.0	41.4	39.8	41.5	40.0	40.6
38.3	39.0	40.9	39.1	40.3	39.3	39.6	38.4	38.4	40.7
39.7	38.9	38.9	40.6	39.6					

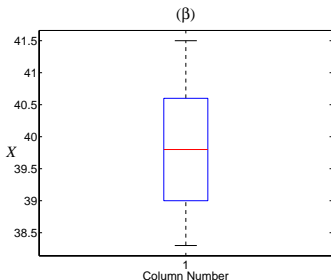
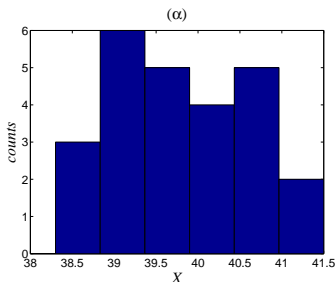
$X$ : όριο έντασης ηλεκτρικού ρεύματος που καίγονται ασφάλειες των 40 αμπέρ.

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{1}{25} 995.1 = 39.80$$

$$s^2 = \frac{1}{24} \left( \sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{24} (39629 - 25 \cdot 39.80^2) = 0.854.$$

$$n = 25 < 30. \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad ?$$

## Παράδειγμα (συνέχεια)



$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  δεκτό

Κρίσιμη τιμή για  $1 - \alpha/2 = 0.975$  και  $n - 1 = 24$ :

$$t_{n-1, 1-\alpha/2} = t_{24, 0.975} = 2.064$$

95% διάστημα εμπιστοσύνης για  $\mu$

$$39.80 \pm 2.064 \frac{\sqrt{0.854}}{5} \rightarrow [39.42, 40.18].$$

## Διάστημα εμπιστοσύνης διασποράς

Για  $\mu$ , εκτιμητής  $\bar{x}$  και  $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Για  $\sigma^2$ , εκτιμητής  $s^2$  και  $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$  ?

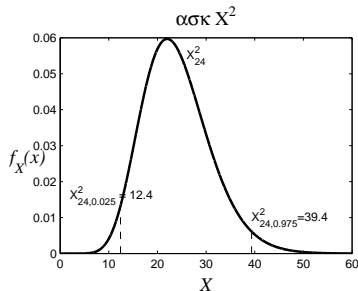
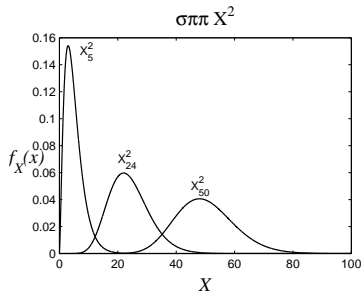
$\chi^2$ : άθροισμα τετραγώνων των διαφορών μεταξύ παρατηρούμενων και προσδοκώμενων τιμών διαιρούμενο με τη διασπορά τους

Αν οι παρατηρήσεις προέρχονται από την ίδια κατανομή

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

## Διάστημα εμπιστοσύνης διασποράς



- ▶  $n - 1$  μικρό:  $\chi^2_{n-1}$  ασύμμετρη
- ▶  $n - 1$  μεγάλο:  $\chi^2_{n-1}$  προσεγγίζει την κανονική κατανομή.
- ▶ Δύο κρίσιμες τιμές:  $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$  και  $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$

## Διάστημα εμπιστοσύνης διασποράς

$$P(\chi_{n-1, \alpha/2}^2 < \chi^2 < \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2) = 1 - \alpha. \quad \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$(1 - \alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για  $\sigma^2$

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \right].$$

$(1 - \alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για  $\sigma$

$$\left[ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2}} \right].$$

## Παράδειγμα, ασφάλειες των 40 αμπέρ

Σημειακή εκτίμηση:  $s^2 = 0.854$  (αμπέρ)<sup>2</sup>.

$n - 1 = 24$  και  $\alpha = 0.05 \Rightarrow \chi_{24,0.025}^2 = 12.4$  και  $\chi_{24,0.975}^2 = 39.4$

95% δ.ε. για τη διασπορά  $\sigma^2$  του ορίου έντασης

$$\left[ \frac{24 \cdot 0.854}{39.4}, \frac{24 \cdot 0.854}{12.4} \right] = [0.52, 1.65].$$

95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση  $\sigma$  του ορίου έντασης

$$[\sqrt{0.52}, \sqrt{1.65}] = [0.72, 1.28],$$



## Παράδειγμα (συνέχεια)

Όριο έντασης που καίγονται ασφάλειες των 40 αμπέρ:

μέση τιμή  $\mu$ :  $39.80 \pm 0.38$  ή  $[39.42, 40.18]$ .

τυπική απόκλιση  $\sigma$ :  $[0.72, 1.28]$ .

Τυπική μέτρηση  $x_i$ :  $\bar{x} \pm s = 39.80 \pm \sqrt{0.854} = 39.80 \pm 0.925$ .

διάστημα 95 % των μετρήσεων:

$\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} s = 39.80 \pm 2.064 \cdot 0.925 = 39.80 \pm 1.763$

## Έλεγχος υπόθεσης

Είναι 40 αμπέρ το μέσο όριο που καίγονται οι ασφάλειες ;

Προσεγγίσεις:

1. Ανήκει το 40 στο *διάστημα εμπιστοσύνης* της  $\mu$ ;
2. Μπορούμε να *υποθέσουμε*  $\mu = 40$ ;  $\Rightarrow$  **έλεγχος υπόθεσης**

Γενικά η διαδικασία ελέγχου μιας στατιστικής υπόθεσης:

- ▶ Ορίζουμε τη στατιστική υπόθεση
- ▶ Υπολογίζουμε το στατιστικό ελέγχου
- ▶ Αποφασίζουμε με βάση το στατιστικό από το δείγμα

$H_0$ : **μηδενική υπόθεση** που θέτουμε υπό έλεγχο

$H_1$ : **εναλλακτική υπόθεση** που δεχόμαστε αν απορρίψουμε την

$H_0$

## Δυνατές αποφάσεις ελέγχου

1. Σωστή απόφαση:

$$P(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ σωστή}) = 1 - \alpha$$

2. Σφάλμα τύπου II:

$$P(\text{αποδοχή της } H_0 \mid H_0 \text{ λανθασμένη}) = \beta$$

3. Σφάλμα τύπου I, **σημαντικότητα ελέγχου**:

$$P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_0 \text{ σωστή}) = \alpha$$

4. Σωστή απόφαση, **ισχύς ελέγχου**:

$$P(\text{απόρριψη της } H_0 \mid H_0 \text{ λανθασμένη}) = 1 - \beta$$

	Αποδοχή της $H_0$	Απόρριψη της $H_0$
$H_0$ σωστή	ορθή απόφαση ( $1 - \alpha$ )	σφάλμα τύπου I ( $\alpha$ )
$H_0$ λανθασμένη	σφάλμα τύπου II ( $\beta$ )	ορθή απόφαση ( $1 - \beta$ )

## Έλεγχος μέσης τιμής

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$H_0$  ορθή όταν η  $\mu$  βρίσκεται 'κοντά' στο  $\mu_0$

Εκτιμητής της  $\mu$ :  $\bar{x}$

Τιμές του  $\bar{x}$  'κοντά' στο  $\mu_0 \Rightarrow$  απόφαση ορθότητας της  $H_0$   
 $\Rightarrow$  ανήκουν στην περιοχή αποδοχής της  $H_0$

Τιμές της  $\bar{x}$  'μακριά' από το  $\mu_0$   
 $\Rightarrow$  σχηματίζουν την **περιοχή απόρριψης  $R$** .

'κοντά' / 'μακριά' καθορίζεται από το  $\alpha$  (ουρές της κατανομής του  $\bar{x}$ )

Έχει δειχθεί:  $X \sim N(\mu, \sigma^2) \vee n > 30 \Rightarrow t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Απορριπτική περιοχή  $R = \{t \mid |t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}\}$ .

## Έλεγχος μέσης τιμής, απόφαση ελέγχου

$\tilde{t}$ : τιμή του στατιστικού  $t$  από το δείγμα,

$\tilde{t} \in R \Rightarrow$  απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha$

$\tilde{t} \notin R \Rightarrow$  μη-απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha$

**$p$ -τιμή:** η μικρότερη τιμή του  $\alpha$  που δίνει απόρριψη της  $H_0$

$p$ -τιμή: η πιθανότητα να παρατηρήσουμε για το  $t$  μια τιμή τόσο ακραία όσο η  $\tilde{t}$  όταν ισχύει η  $H_0$ .

$$p = 2P(t > |\tilde{t}|) = 2(1 - P(t < |\tilde{t}|)).$$

Όσο πιο κοντά στο 0 είναι η  $p$ -τιμή τόσο πιο σίγουρη είναι η απόρριψη της  $H_0$

Η  $p$ -τιμή υπολογίζεται εύκολα από την ασκ της κατανομής  $t_{n-1}$

## Μονόπλευρος έλεγχος

Μονόπλευρος έλεγχος

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad (H_0 : \mu = \mu_0)$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

... αν γνωρίζουμε πως δε μπορεί  $\mu > \mu_0$ .

Η επιλογή μονόπλευρου ή δίπλευρου ελέγχου εξαρτάται από την έρευνα που θέλουμε να κάνουμε και από το κατά πόσο μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα της έρευνας.

## Παράδειγμα, ασφάλειες των 40 αμπέρ

$$H_0 : \mu = 40 \text{ και } H_1 : \mu \neq 40.$$

$$\text{Στατιστικό ελέγχου: } t = \frac{\bar{x}-40}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

$$\alpha = 0.05 \text{ και } t_{n-1, 1-\alpha/2} = t_{24, 0.975} = 2.064$$

$$R = \{t \mid t < -2.064 \vee t > 2.064\} = \{t \mid |t| > 2.064\}.$$

Τιμή του στατιστικού από το δείγμα ( $\bar{x} = 39.8$ ,  $s = 0.925$ )

$$\tilde{t} = \frac{39.8 - 40}{0.925/5} = -1.081$$

$\tilde{t} \notin R \Rightarrow$  μη-απόρριψη της  $H_0$

$$p = 2(1 - P(t \leq |\tilde{t}|)) = 2(1 - P(t \leq 1.081)) = 2(1 - 0.855) = 0.29$$

## Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν οι ασφάλειες δε μπορούν να καίγονται σε υψηλότερο όριο από 40 αμπέρ:

$$H_0 : \mu \geq 40 \text{ και } H_1 : \mu < 40$$

$$R = \{t \mid t < t_{n-1, \alpha/2}\} = \{t \mid t < t_{24, 0.05}\} = \{t \mid t < -1.71\}.$$

$$\tilde{t} = -1.081 \notin R \Rightarrow \text{μη-απόρριψη της } H_0$$

$$p = P(t \leq \tilde{t}) = 0.145$$



## Έλεγχος διασποράς

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  με  $H_1$  για δίπλευρο ή μονόπλευρο έλεγχο.

εκτιμητής  $s^2$  και στατιστικό ελέγχου:  $\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2$

1.  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ,  $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 < \chi_{n-1, \alpha/2}^2 \vee \chi^2 > \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2\}$ .
2.  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ,  $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 < \chi_{n-1, \alpha}^2\}$ .
3.  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ,  $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 > \chi_{n-1, 1-\alpha}^2\}$ .

Στατιστικό ελέγχου από το δείγμα  $\tilde{\chi}^2$

Αν  $\tilde{\chi}^2 \in R \Rightarrow H_0$  απορρίπτεται.

1.  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ,  $p = P(\chi^2 < \tilde{\chi}^2 \vee \chi^2 > \tilde{\chi}^2)$ .
2.  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ ,  $p = P(\chi^2 < \tilde{\chi}^2)$ .
3.  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ,  $p = P(\chi^2 > \tilde{\chi}^2)$ .

## Παράδειγμα, ασφάλειες των 40 αμπέρ

Έλεγχος για  $\alpha = 0.01$  αν  $\sigma = 0.7$

$$H_0 : \sigma^2 = 0.49, \quad H_1 : \sigma^2 \neq 0.49$$

$$n = 25, \quad s^2 = 0.49 \text{ (αμπέρ)}^2, \quad \alpha = 0.01$$

$$\Rightarrow \chi_{24,0.005}^2 = 9.886 \text{ και } \chi_{24,0.995}^2 = 45.558.$$

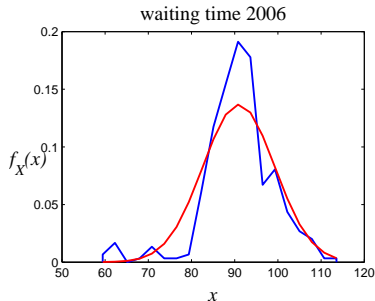
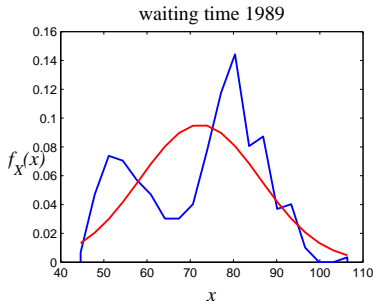
Περιοχή απόρριψης:  $R = \{\chi^2 \mid \chi^2 < 9.886 \vee \chi^2 > 45.558\}$

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \cdot 0.854}{0.49} = 41.829$$

$\tilde{\chi}^2 \notin R \Rightarrow$  μη-απόρριψη της  $H_0$  για  $\alpha = 0.01$ .

$$\begin{aligned} p &= P(\chi^2 < \tilde{\chi}^2 \vee \chi^2 > \tilde{\chi}^2) = P(\chi^2 > 41.829) \\ &= 1 - P(\chi^2 < 41.829) = 1 - 0.986 = 0.014. \end{aligned}$$

## Έλεγχος καταλληλότητας $\chi^2$



Προσαρμόζονται τα δεδομένα σε κάποια γνωστή κατανομή;

Έλεγχος καλής προσαρμογής  $\chi^2$

$H_0$ : Η κατανομή της παρατηρούμενης  $X$  είναι '...'

## Έλεγχος καταλληλότητας $\chi^2$

Αριθμητικές παρατηρήσεις  $\Rightarrow$  διακριτικοποίηση

$O_j, j = 1, \dots, K$ : παρατηρούμενες διακριτές τιμές

$E_j, j = 1, \dots, K$ : αναμενόμενες διακριτές τιμές

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

$X$  διακριτή:  $E_j = nf_X(x_j) = nP(X = x_j)$ .

$X$  συνεχής:  $E_j = n(F_X(x_j^u) - F_X(x_j^l))$ ,

$x_j^l$  και  $x_j^u$  είναι το κάτω και πάνω άκρο του διαστήματος  $j$ .

## Έλεγχος καταλληλότητας $\chi^2$

Βαθμοί ελευθερίας της  $\chi^2$ :  $K - c$ ,

$X$  διακριτή:  $c = 1$  ( $\sum_{j=1}^K E_j = n$ )

$X$  συνεχής: πλήθος παραμέτρων κατανομής + 1 ( $\sum_{j=1}^K E_j = n$ )

Αν  $H_0$  είναι ορθή  $\chi^2 \sim \chi_{K-c}^2$

Απόφαση ελέγχου:

- ▶  $\tilde{\chi}^2 \in R = \{\chi^2 \mid \chi^2 > \chi_{K-c, 1-\alpha/2}^2\}$  ?
- ▶  $p = P(\chi^2 > \tilde{\chi}^2)$  ?

## Παράδειγμα, εξάρεις

Ο παίχτης πετάει το ζάρι τρεις φορές και κερδίζει ανάλογα με το πλήθος των εξαριών που φέρνει.

Ένας παίχτης παίζει 100 φορές

πλήθος εξαριών	παρατηρούμενο πλήθος
0	47
1	36
2	14
3	4

Πιθανότητα 'επιτυχίας' (εξάρι):  $p = 1/6$ ,  $m = 3$  ρίψεις

$X$ : επιτυχίες στις  $m$  ρίψεις,  $X = 0, 1, 2, 3$

$H_0: X \sim B(m, p)$ , Ειδικά:  $H_0: X \sim B(3, 1/6)$ .

## Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν  $X \sim B(3, 1/6)$ :  $P(X = 0) = 0.579$ ,  $P(X = 1) = 0.347$ ,  
 $P(X = 2) = 0.069$ ,  $P(X = 3) = 0.005$ .

$$E_j = n \cdot P(X = x_j)$$

πλήθος εξαριών	παρατηρούμενο πλήθος	αναμενόμενο πλήθος
0	47	57.9
1	36	34.7
2	14	6.9
3	4	0.5

$$\tilde{\chi}^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} = 36.28$$

Κρίσιμη τιμή της  $\chi^2_3$  για  $\alpha = 0.05$ :  $\chi^2_{3,0.95} = 7.815$ .

$$p = P(\chi^2 > \tilde{\chi}^2) = P(\chi^2 > 36.28) = 6.5 \cdot 10^{-8}!!!$$