

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' Εξαμήνου  
**ΔΑΣΟΛΟΓΩΝ (Σεπτέμβριος 2013)**

ΒΑΘΜΟΣ
--------

Επώνυμο ..... Όνομα .....

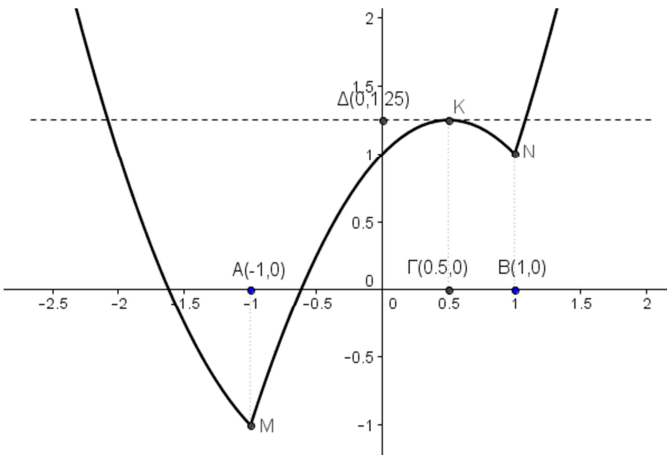
ΑΕΜ..... Εξάμηνο .....

**ΣΕΙΡΑ Α**

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>

Όλα τα θέματα βαθμολογούνται με 1,25 μονάδες  
**ΑΣΧΟΛΗΘΕΙΤΕ ΜΕ 8 από τα 9 ΘΕΜΑΤΑ**

1. Δίνεται το ανάπτυγμα της σειράς  $\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^{n+1}$ . Παραγωγίστε όρον προς όρον αυτό το ανάπτυγμα και βρείτε το ανάπτυγμα Taylor που προκύπτει. Ποιοί είναι οι 5 πρώτοι όροι του αναπτύγματος;
2. Η συνάρτηση  $y = y(x)$  ορίζεται παραμετρικά με τις σχέσεις  $x = 1 + \eta \mu t$  και  $y = t - \sigma \nu t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο της που αντιστοιχεί στο  $t = 0$ .
3. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος  $\frac{dy}{dx}$  της συνάρτησης που ορίζεται με πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση  $x^3 + y^4 + (x - y)^2 = 1$ .
4. Βρέστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες  $y = x^2$  και  $y - x = 2$ . (Να σχεδιαστεί το χωρίο).
5. Η καμπύλη στο σχήμα παριστάνει την καμπύλη  $f(x) = x + |x^2 - 1|$ . Βρέστε:
  - α) τα πεδία ορισμού και τιμών της  $f(x)$ ,
  - β) τα τοπικά και ολικά μέγιστα και ελάχιστα (με τις συντεταγμένες τους).
  - γ) το σύνολο στο οποίο η συνάρτηση είναι αύξουσα.
  - δ) ποιο το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για  $0.5 \leq x \leq 1$ .
6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int (x + \ln x) dx$ .
7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+2x^3} dx$ .
8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{(x-2)(x+3)} dx$ .
9. Να βρεθεί η συνάρτηση  $y = f(x)$  που είναι γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $x^2 y' = y^3$  και η μερική λύση της που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $y(1) = 1$ .



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' Εξαμήνου

## ΔΑΣΟΛΟΓΩΝ (Σεπτέμβριος 2013)

ΒΑΘΜΟΣ
--------

Επώνυμο ..... Όνομα .....

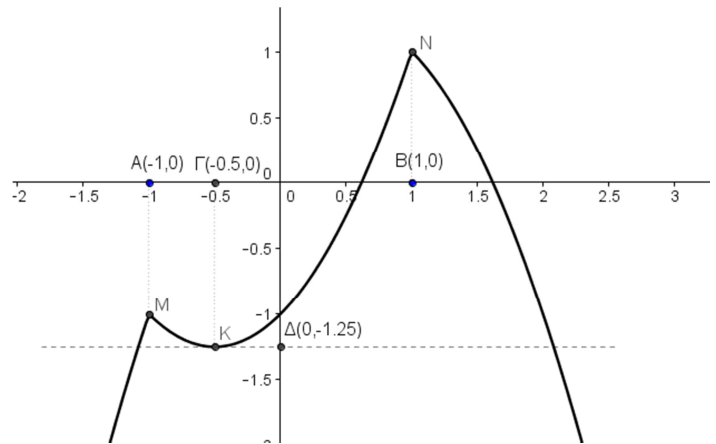
ΑΕΜ..... Εξάμηνο .....

**ΣΕΙΡΑ Β**

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>

Όλα τα θέματα βαθμολογούνται με 1,25 μονάδες  
**ΑΣΧΟΛΗΘΕΙΤΕ ΜΕ 8 από τα 9 ΘΕΜΑΤΑ**

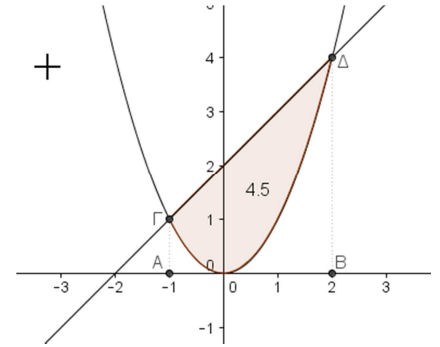
1. Δίνεται το ανάπτυγμα της σειράς  $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$ . Παραγωγίστε όρον προς όρον αυτό το ανάπτυγμα και βρείτε το ανάπτυγμα Taylor που προκύπτει. Ποιοί είναι οι 5 πρώτοι όροι του αναπτύγματος;
2. Η συνάρτηση  $y = y(x)$  ορίζεται παραμετρικά με τις σχέσεις  $x = 1 - \eta \mu t$  και  $y = t + \sigma \nu t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο της που αντιστοιχεί στο  $t = 0$ .
3. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος  $\frac{dy}{dx}$  της συνάρτησης που ορίζεται με πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση  $x^3 + y^4 - (x+y)^2 = 1$ .
4. Βρέστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις καμπύλες  $y = x^2$  και  $y + x = 2$ . (Να σχεδιαστεί το χωρίο).
5. Η καμπύλη στο σχήμα παριστάνει την καμπύλη  $f(x) = x - |x^2 - 1|$ . Βρέστε:
  - α) τα πεδία ορισμού και τιμών της  $f(x)$ ,
  - β) τα τοπικά και ολικά μέγιστα και ελάχιστα (με τις συντεταγμένες τους).
  - γ) το σύνολο στο οποίο η συνάρτηση είναι αύξουσα.
  - δ) ποιο το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου για  $-1 \leq x \leq -0.5$ .
6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int (x - \ln x) dx$ .
7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}} dx$ .
8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx$ .
9. Να βρεθεί η συνάρτηση  $y = f(x)$  που είναι γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης  $x^3 y' = y^2$  και η μερική λύση της που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη  $y(1) = -2$ .



Απαντήσεις Σεπτεμβρίου 2013 Σειρά Α

- $\frac{1-x}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$  οι 5 πρώτοι όροι  $1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 + 25x^4$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu(t)}$ , για  $t = 0$   $M(1, -1)$   $y'(M) = 1$ ,  $y + 1 = 1 \cdot (x - 1)$ ,  $y - x + 2 = 0$
- $3x^2 + 4y^3 y' + 2(x - y)(1 - y') = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-2x-3x^2}{4y^3+2y-2x}$
- Κοινά σημεία  $(-1,1), (2,4)$   

$$\int_{-1}^2 ((x+2) - x^2) dx = \dots = 4.5$$
- α) ΠΟ  $\mathbb{R}$ , ΠΤ  $[-1, \infty)$   
 β) Κ(0.5, 1.25) τοπ. μέγ., Ν(1,1) τοπ. ελ., Μ(-1,-1) ολ. ελ.  
 γ)  $(-1,0.5) \cup (1, \infty)$ , δ) αρνητικό
- $= \int x dx + \int \ln x dx = \dots = \frac{x^2}{2} + x \ln x - x + c$
- $= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 + 2x^3)^{\frac{1}{2}} d(1 + 2x^3) = \dots = \frac{1}{9} (3\sqrt{3} - 1)$
- $= \frac{1}{5} \int \frac{(x+3)-(x-2)}{(x-2)(x+3)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + c$
- Η δ.ε. γράφεται  $\frac{dy}{y^3} = \frac{dx}{x^2}$  άρα  $\int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{dx}{x^2}$  άρα ...  $y = \pm \sqrt{\frac{x}{2-2cx}}$  που είναι η γεν. λύση  
 Για τη μερ. λύση  $y(1) = \pm \sqrt{\frac{1}{2-2c}} = 1$  άρα  $c = \frac{1}{2}$  και η λύση είναι  $y(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$



Απαντήσεις Σεπτεμβρίου 2013 Σειρά Β

- $\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$  οι 5 πρώτοι όροι  $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4$
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\eta\mu t}{-\sigma\upsilon\nu(t)}$ , για  $t = 0$   $M(1,1)$   $y'(M) = -1$ ,  $y - 1 = -1 \cdot (x - 1)$ ,  $y + x - 2 = 0$
- $3x^2 + 4y^3 y' - 2(x + y)(1 + y') = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2y+2x-3x^2}{4y^3-2y-2x}$
- Κοινά σημεία  $(-2,4), (1,1)$   

$$\int_{-2}^1 ((-x+2) - x^2) dx = \dots = 4.5$$
- α) ΠΟ  $\mathbb{R}$ , ΠΤ  $(-\infty, 1]$   
 β) Κ(-0.5, -1.25) τοπ. ελ., Ν(1,1) ολικό μέγ., Μ(-1,-1) τοπ. μεγ.  
 γ)  $(\infty - 1) \cup (-0.5, 1)$ , δ) θετικό
- $= \int x dx - \int \ln x dx = \dots = \frac{x^2}{2} - x \ln x + x + c$
- $= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 + 2x^3)^{-\frac{1}{2}} d(1 + 2x^3) = \dots = \frac{1}{3} (\sqrt{3} - 1)$
- $= \frac{1}{5} \int \frac{(x+2)-(x-3)}{(x-3)(x+2)} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + c$
- Η δ.ε. γράφεται  $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^3}$  άρα  $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^3}$  άρα ...  $y = \frac{2x^2}{2cx^2-1}$  που είναι η γεν. λύση  
 Για τη μερ. λύση  $y(1) = \frac{2}{2c-1} = -2$  άρα  $c = 0$  και η λύση είναι  $y(x) = -2x^2$

