ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΑΣΟΛΟΓΙΑΣ

Σειρά A

Ιανουάριος 2014 (Α' Εξαμήνου)

Επώνυμο………………………………. Όνομα ………………………. Α.Ε.Μ…………. Εξάμηνο…….

1	2	3	4	ΒΑΘΜΟΣ
/5	/2,5	/2,5	/2,5	

ΑΣΧΟΛΗΘΕΙΤΕ ΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ 1 ΚΑΙ ΜΕ ΔΥΟ ΑΠΟ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ 2,3,4

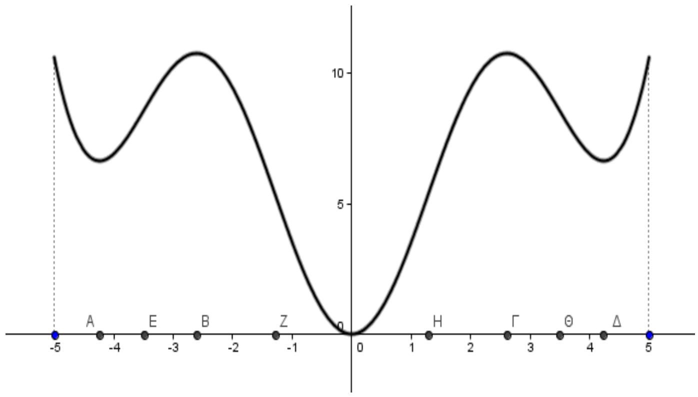
ΘΕΜΑ 1: Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα που είναι ισοδύναμα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας

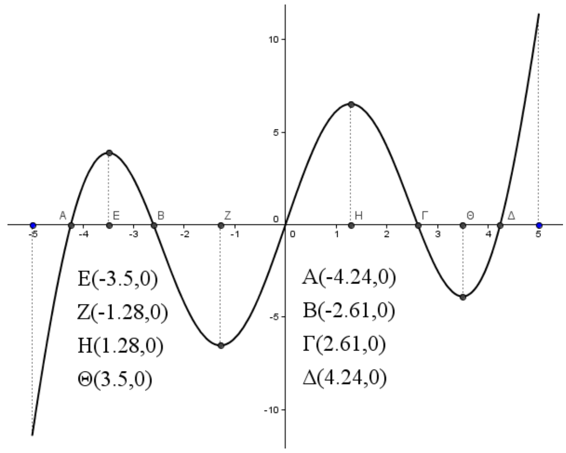
(α) Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{2n}{n-2}\frac{1}{3^{n-1}}$. Δείξτε ότι. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{3}$. Εξετάστε κατόπιν αν συγκλίνει ή όχι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n-2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 2e^{-x}}{2}$. Υπολογίστε τις τιμές $f(2\,ln3)$ και $f'(2\,ln3)$

(γ) Η καμπύλη στο αριστερό σχήμα είναι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα [-5,5], ενώ στο δεξιό σχήμα είναι η παράγωγός της. Δίνονται επίσης οι συντεταγμένες των σημείων που η καμπύλη στο δεξιό σχήμα τέμνει τους άξονες και εκείνα στα οποία έχει οριζόντια εφαπτομένη. Βρέστε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$, τα διαστήματα όπου είναι αύξουσα και τα διαστήματα όπου η δεύτερη παράγωγός της είναι θετική.





(δ) Βρέστε την α΄ παράγωγο της πεπλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από τη σχέση $x^2 y e^{xy} = 1$

(ε) Να βρεθούν οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης: $z = x^4 + 2x^2y - xy^2$.

ΘΕΜΑ 2: Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες που ορίζουν οι συναρτήσεις: $y = \sqrt{4-x},\ y = \frac{x+1}{4}, y = 2x + 2$. Στην απάντηση να περιλαμβάνονται: σχήμα με τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων, υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων που ορίζουν το χωρίο και δικαιολόγηση των σχέσεων που θα χρησιμοποιηθούν.

ΘΕΜΑ 3: Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $t = \sqrt{x-1}$

$$\int \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2 - 3x + 2}\,dx$$

ΘΕΜΑ 4: Δίνεται η διαφορική εξίσωση $xyy' = x^2 + y^2$

Να βρεθούν: α) η γενική λύση,

β) η μερική λύση που ικανοποιεί τη σχέση $y(1) = 2$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΑΣΟΛΟΓΙΑΣ

Σειρά B

Ιανουάριος 2014 (Α' Εξαμήνου)

Επώνυμο………………………………. Όνομα ………………………. Α.Ε.Μ…………. Εξάμηνο…….

1	2	3	4	ΒΑΘΜΟΣ
/5	/2,5	/2,5	/2,5	

ΑΣΧΟΛΗΘΕΙΤΕ ΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ 1 ΚΑΙ ΜΕ ΔΥΟ ΑΠΟ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ 2,3,4

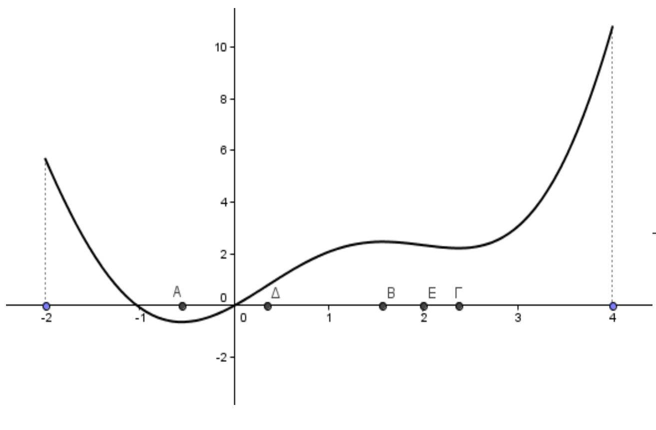
ΘΕΜΑ 1: Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα που είναι ισοδύναμα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας

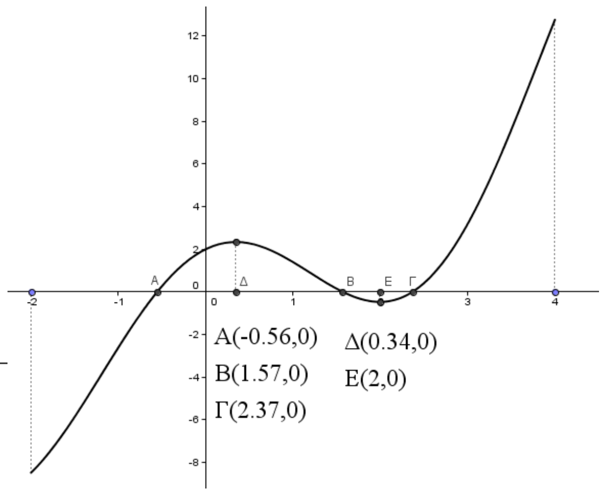
(α) Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{2n}{n-2}\frac{1}{3^{n-1}}$. Δείξτε ότι. $\sqrt[n]{\alpha_n} \to \frac{1}{3}$. Εξετάστε κατόπιν αν συγκλίνει ή όχι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n-2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{2}$. Υπολογίστε τις τιμές $f(2\ ln3)$ και $f'(2\ ln3)$

(γ) Η καμπύλη στο αριστερό σχήμα είναι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ που ορίζεται στο διάστημα [-2,4], ενώ στο δεξιό σχήμα είναι η παράγωγός της. Δίνονται επίσης οι συντεταγμένες των σημείων που η καμπύλη στο δεξιό σχήμα τέμνει τους άξονες και εκείνα στα οποία έχει οριζόντια εφαπτομένη. Να βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$, τα διαστήματα όπου είναι αύξουσα και τα διαστήματα όπου η δεύτερη παράγωγός της είναι θετική.





(δ) Βρέστε την α΄ παράγωγο της πεπλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από τη σχέση $xy^2e^{xy} = 1$

(ε) Να βρεθούν οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοι της: $z = x^3 + 2xy - xy^2$.

ΘΕΜΑ 2: Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες που ορίζουν οι συναρτήσεις: $y = \sqrt{4-x},\ y = \frac{x-1}{2}, y = 2 - 2x$. Στην απάντηση να περιλαμβάνονται: σχήμα με τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων, υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων που ορίζουν το χωρίο και δικαιολόγηση των σχέσεων που θα χρησιμοποιηθούν.

ΘΕΜΑ 3: Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $t = \sqrt{x+1}$

$$\int \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x^2 - 2x - 3}\, dx$$

ΘΕΜΑ 4: Δίνεται η διαφορική εξίσωση $xy^2y' = x^3 + y^3$

Να βρεθούν: α) η γενική λύση, β) η μερική λύση που ικανοποιεί τη σχέση $y(1) = 2$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Λύσεις

Σειρά Α

1. α) $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(2n+2)(n-2)}{(n-1)2n} \cdot \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$, Η σειρά συγκλίνει λόγω του κριτηρίου D' Alembert β) $\frac{83}{18}$, $\frac{79}{18}$

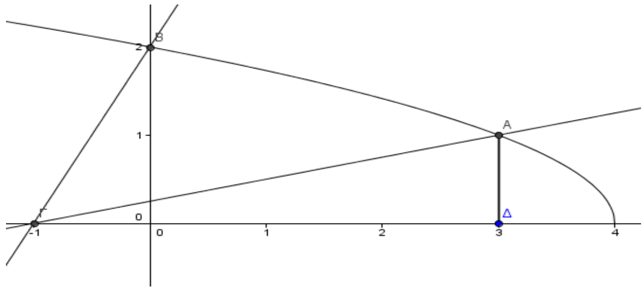
γ) Από το δεύτερο σχήμα βλέπουμε ότι η παράγωγος μηδενίζεται στα σημεία Α, Β, Ο, Γ, Δ. Από το πρώτο σχήμα προκύπτουν: Ολικό ελάχιστο στο Ο. Τοπικά ελάχιστα στα σημεία Α και Δ, Τοπικά μέγιστα στα Β, Γ . Επίσης τοπικά μέγιστα στα άκρα 5 και -5. Επομένως η συνάρτηση $f(x)$είναι αύξουσα από Α έως Β, από Ο έως Γ και Δ έως το 5, δηλαδή διαστήματα (-4.24, -2.61), (0, 2.61) και (4.24, 5). Από το δεύτερο σχήμα φαίνεται ότι η παράγωγός της μηδενίζεται στα Ε, Ζ, Η, Θ. Άρα η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ μηδενίζεται στα σημεία αυτά, τα οποία είναι επομένως σημεία καμπής. Άρα η δεύτερη παράγωγος είναι θετική στα (-5, -3.5), (-1.28, 1.28), (3.5,5) όπου τα κοίλα στρέφονται προς τα πάνω.

δ) $y' = -\frac{y(2+xy)}{x(1+xy)}$ (η ευκολότερη λύση είναι με λογαρίθμιση:

Λογαριθμίζοντας έχουμε: $2lnx + lny + xy = 0$ και παραγωγίζοντας $\frac{2}{x} + \frac{y'}{y} + y + xy' = 0$, κλπ)

ε) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 4xy - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 2xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x - 2y$

2. Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται αν βρώ το εμβαδόν του (ΑΔΟΒ), προσθέσω το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΟ (=1) και αφαιρέσω το εμβαδόν ΔΑΓ(=2).



$$(A\Delta OB) = \int_0^3 \sqrt{4-x}\, dx = \frac{14}{3}$$

Άρα το ζητούμενο είναι $\frac{14}{3} + 1 - 2 = \frac{11}{3}$

3. $\int \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\, dx = \cdots . = 2\int \frac{-1}{t(t+1)} dt = 2\, ln\left(1 + \sqrt{x-1}\right) - 2\, ln\left(\sqrt{x-1}\right) + c$

4. Είναι ομογενής. Γεν. λύση $y = \pm x\sqrt{2lnx + c}$, Μερική λύση $y = x\sqrt{2lnx + 4}$

Σειρά Β

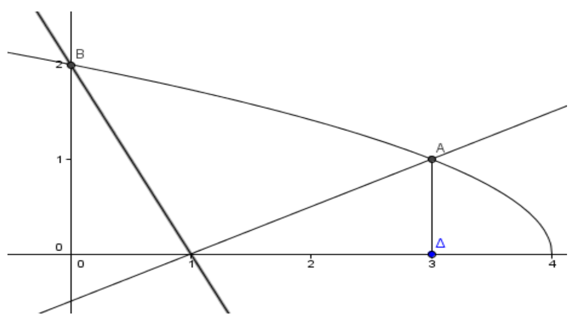
1. α) $\sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{\sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n]{n-2}} \cdot \frac{\sqrt[n]{3}}{3} \to \frac{1}{3}$, Η σειρά συγκλίνει λόγω του κριτηρίου Cauchy β) $\frac{79}{18}$, $\frac{83}{18}$

γ) Από το δεύτερο σχήμα βλέπουμε ότι η παράγωγος μηδενίζεται στα σημεία Α, Β, Γ. Από το πρώτο σχήμα προκύπτουν: Ολικό μέγιστο στο άκρο 4. Τοπικό ελάχιστο στο σημείο Γ. Τοπικά μέγιστα στο άκρο -2 και στο Β.. Επομένως η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα από Α έως Β, και από Γ έως το 4, δηλαδή διαστήματα (-0.56, 1.57) και (2.37, 4). Από το δεύτερο σχήμα φαίνεται ότι η παράγωγός της $f(x)$ μηδενίζεται στα Δ, Ε. Άρα η δεύτερη παράγωγος της αρχικής μηδενίζεται στα σημεία αυτά, τα οποία είναι επομένως σημεία καμπής. Άρα η δεύτερη παράγωγος είναι θετική στα (-2, 0.34), (2,4) όπου τα κοίλα στρέφονται προς τα πάνω δ) $y' = -\frac{y(1+xy)}{x(2+xy)}$ (η ευκολότερη λύση είναι με λογαρίθμιση:

Λογαριθμίζοντας έχουμε: $lnx + 2lny + xy = 0$ και παραγωγίζοντας $\frac{1}{x} + 2\frac{y'}{y} + y + xy' = 0$, κλπ)

ε) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2y - y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 - 2y$

2. Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται αν βρώ το εμβαδόν του (ΑΔΟΒ), και αφαιρέσω τα εμβαδά των τριγώνων ΒΓΟ (=1) και ΔΑΓ(=1).



$$(A\Delta OB) = \int_0^3 \sqrt{4-x}\, dx = \frac{14}{3}$$

Άρα το ζητούμενο είναι $\frac{14}{3} - 1 - 1 = \frac{8}{3}$

3. $\int \frac{2-\sqrt{x+1}}{x^2-2x-3}\, dx = \cdots = \int \frac{-2}{t(t+2)} dt = ln\left(2 + \sqrt{x+1}\right) - ln\left(\sqrt{x+1}\right) + c$

4. Είναι ομογενής. Γεν. λύση $y = x\sqrt[3]{3lnx + c}$, Μερική λύση $y = x\sqrt[3]{3lnx + 4}$