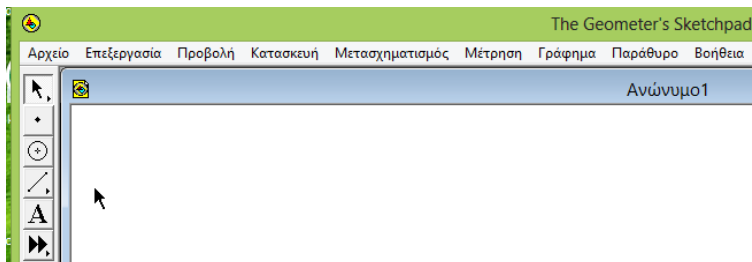


Οδηγίες για το SKETCHPAD

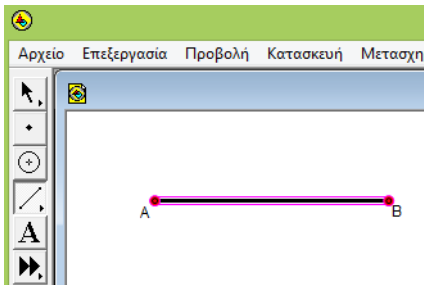
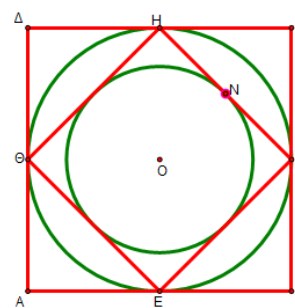
Μουσιάδης Πολυχρόνης - Δόρτσιος Κώστας

Με την εκτέλεση του Sketchpad παίρνουμε το παρακάτω παράθυρο σχεδίασης:



παρόμοιο με του Cabri με αρκετές όμως διαφορές στην αρχιτεκτονική τους. Εδώ παίζει μεγαλύτερο ρόλο η επιλογή στοιχείων που ανάλογα με το είδος τους ενεργοποιούν κάποιες πιθανές περαιτέρω ενέργειες. Η μορφοποίηση πετυχαίνεται πολύ εύκολα με διπλό κλικ που ανοίγει κατάλληλα παράθυρα. Κατά τα άλλα και εδώ έχουμε ανάγκη να αποκρύψουμε στοιχεία για να φανεί αυτό που θέλουμε, ή να τα μετακινήσουμε για να διαπιστώσουμε αν έχουν τη σχέση που θέλαμε όταν τα κατασκευάσαμε. Π.χ. αν τοποθετήσουμε ένα σημείο στο μέσον ενός τμήματος με το «μάτι» και μετακινήσουμε το ένα άκρο του τμήματος θα διαπιστώσουμε ότι δεν πετύχαμε ακριβώς το μέσον. Πιο σωστά θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τα δύο μήκη, όπως θα περιγράψουμε πιο κάτω, και να το διαπιστώσουμε.

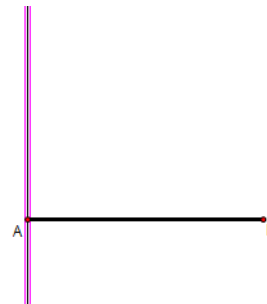
Ας κάνουμε ως μια πρώτη κατασκευή το σχήμα δίπλα, για να δούμε τη λειτουργία του SketchPad. Δηλαδή, θα κατασκευάσουμε πρώτα ένα τετράγωνο, θα εγγράψουμε στη συνέχεια ένα τετράγωνο με κορυφές τα μέσα του και στη συνέχεια θα σχεδιάσουμε τους δύο εγγεγραμμένους κύκλους στα δύο τετράγωνα.



Αρχικά σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB. Κάνουμε κλικ στο κουμπί των γραμμών στο αριστερό περιθώριο της επιφάνειας σχεδίασης. Το κουμπί αυτό μένει πατημένο (επιλεγμένο) μέχρι να πατήσουμε κάποιο άλλο. Κατόπιν πηγαίνουμε τον κέρσορα σε κάποιο σημείο και κάνοντας κλικ βλέπουμε να σχηματίζεται έντονα το

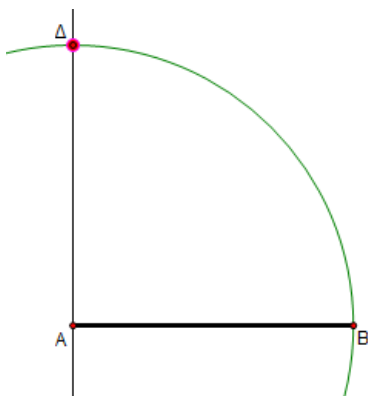
πρώτο άκρο του AB. Σύρουμε τον κέρσορα και σταματούμε όταν το μήκος είναι αυτό που θέλουμε. Αν είχαμε πατημένο το Shift η ευθεία γίνεται οριζόντια. Κάνουμε κλικ στο κουμπί A (εργαλείο κειμένου) στο αριστερό περιθώριο και πλησιάζουμε στα δύο άκρα και κάνουμε κλικ σ' αυτά. Μας δίνει δύο γράμματα, αυθαίρετα. Με διπλό κλικ πάνω σ' αυτά δίνουμε τις επιθυμητές ονομασίες εδώ A και B.

Κατόπιν επιλέγω το ευθύγραμμο τμήμα που σημαίνει ότι γίνεται έντονο και στη συνέχεια επιλέγω και το σημείο A. έχοντας και τα



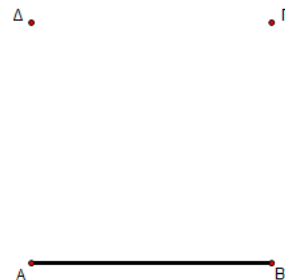
δύο επιλεγμένα κάνουμε κλικ στο κουμπί «Κατασκευή» στην οριζόντια γραμμή της επιφάνειας σχεδίασης. Ανοίγει τότε ένα μενού, αυτό που φαίνεται δίπλα, που εμφανίζει με έντονα γράμματα όλες τις κατασκευές που είναι δυνατόν να γίνουν με ένα σημείο και ένα ευθύγραμμο τμήμα που περνά από τούτο το σημείο. Όλες οι άλλες επιλογές είναι θαμπές. Από τις δύο επιλογές που είναι έντονα μπορούμε να επιλέξουμε την «κάθετη ευθεία» ή τον «κύκλο από το κέντρο + ακτίνα». Επιλέγουμε την κάθετη στο A. Μετά κάνουμε κλικ σε ένα κενό σημείο για να από-επιλεγούν όλα και στη συνέχεια επιλέγουμε πάλι την AB και το A και από την «Κατασκευή» κάνουμε τον κύκλο $K(A, AB)$, που δίνει το επόμενο σχήμα.

Κατασκευή	Μετασηματισμός	Μέτρηση	Γράφημ
Σημείο σε αντικείμενο			
Μέσου σημείου			Ctrl+M
Τομής			Ctrl+I
Τμήματος			Ctrl+L
Ημικυκλίου			
Ευθείας			
Παράλληλης ευθείας			
Κάθετης ευθείας			
Διχοτόμου γωνίας			
Κύκλου από το κέντρο+σημείο			
Κύκλου από το κέντρο+ακτίνα			
Τόξου σε κύκλο			
Τόξου που ορίζεται από 3 σημεία			
Εσωτερικού			Ctrl+P
Γεωμετρικού τύπου			

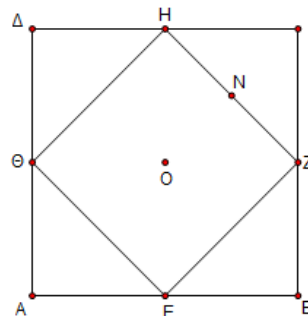


Κατόπιν επιλέγουμε την κάθετη στο A και τον κύκλο και κάνουμε κλικ στο κουμπί των κατασκευών. Τώρα έχει φωτιστεί η επιλογή «τομών» που σημαίνει ότι θα βρει τις τομές των δύο αντικειμένων (της ευθείας και του κύκλου). Εδώ μας δίνει δύο αντιδιαμετρικά σημεία στον κύκλο από τα οποία ένα είναι το Δ δηλαδή μία από τις ζητούμενες κορυφές. Ονομάζουμε το σημείο Δ. Μένει να βρούμε και την τέταρτη κορυφή. Αυτή μπορεί να βρεθεί με πολλούς τρόπους. Π.χ. Να φέρουμε την κάθετη στο B, και μετά τον κύκλο $K(B, BΣA)$ και να βρούμε την τομή τους. Ή να φέρουμε τις κάθετες στην AB στο B και στην

AD στο Δ και να βρούμε την τομή τους. Ονομάζουμε και την κορυφή Γ και στη συνέχεια αποκρύπτουμε (δεν τα διαγράφουμε) όλα τα αντικείμενα που δεν μας ενδιαφέρουν, όπως τον ή τους κύκλους και τις κάθετες καθώς και το σημείο το αντιδιαμετρικό του Δ. Τότε παίρνουμε ένα τετράγωνο με τις τέσσερις κορυφές του αλλά μόνο με τη μία πλευρά του, όπως το διπλανό. Από το κουμπί των γραμμών ενώνουμε τώρα τα σημεία B και Γ, το Γ και Δ και το Δ με το A και ολοκληρώθηκε το τετράγωνο. Αν θέλουμε οι πλευρές να είναι πιο έντονες ή να έχουν άλλο χρώμα, μπορούμε να τις επιλέξουμε και να κάνουμε δεξί κλικ οπότε από το μενού που ανοίγει μπορούμε να επιλέξουμε διάφορα στοιχεία μορφοποίησης.



Στη συνέχεια επιλέγουμε τις τέσσερις πλευρές και από την «Κατασκευή» επιλέγουμε «των μέσων» και σχηματίζονται έτσι τα μέσα των τεσσάρων πλευρών. Ονομάζουμε τα σημεία E, Z, H, Θ και ενώνουμε διαδοχικά και παίρνουμε το σχήμα δίπλα. Κατόπιν φέρουμε τις ευθείες HE, ΘZ, βρίσκουμε την τομή τους O και αποκρύπτουμε τις ευθείες. Επίσης, επιλέγουμε την HZ και βρίσκουμε το μέσον της. Τέλος, με το κουμπί των κύκλων και τον κέρσορα στο O σχηματίζουμε κύκλο που τον «ανοίγουμε» μέχρι να τονιστεί το σημείο N. Αυτό σημαίνει ότι ο κύκλος εκείνη σε εκείνη τη θέση περνά από το N, πράγμα που εξασφαλίζει ότι ο κύκλος θα εφάπτεται στην HZ και επομένως

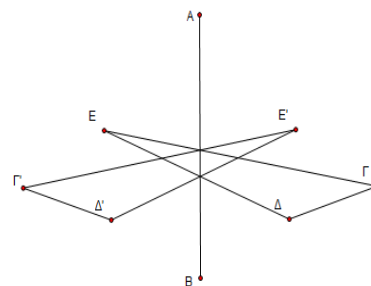


θα εφάπτεται και στις άλλες κορυφές του μικρού τετραγώνου. Τέλος για να κάνουμε και το δεύτερο κύκλο, πηγαίνουμε τον κέρσορα στο κέντρο του τετραγώνου O και «ανοίγουμε» τον κύκλο μέχρι να τονιστεί π.χ. το σημείο H . Για να ολοκληρώσουμε την κατασκευή κάνουμε όλες τις γραμμές (με διπλό κλικ επάνω τους) να έχουν μέτριο πάχος, κάνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα κόκκινα και τους κύκλους πράσινους.

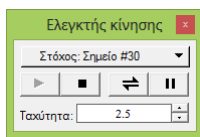
Ας δούμε τώρα κάποιους μετασχηματισμούς με το SketchPad, π.χ. την Ανάκλαση.

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB γύρω από το οποίο θα κάνουμε ανάκλαση σχημάτων, δηλαδή θα σχεδιάσουμε τα συμμετρικά τους ως προς άξονα AB , ή αλλιώς να βρούμε τα κατοπτρικά σχήματα ως προς καθρέπτη την AB . Πάρτε ένα σημείο Γ στα δεξιά της AB . Κατόπιν επιλέξτε το σημείο και την AB με διπλό κλικ επάνω της (που το βλέπουμε να ενεργοποιείται με δύο τετράγωνα που αναβοσβήνουν). Πηγαίνουμε τότε στους μετασχηματισμούς και επιλέγουμε «Ανάκλαση». Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται αριστερά το συμμετρικό σημείο του Γ . Αν πάμε να ονομάσουμε το συμμετρικό, η προτεινόμενη ονομασία είναι Γ' . Επιλέγοντας το ένα από τα δύο συμμετρικά και κινώντας το όπως θέλουμε, το άλλο κινείται ώστε να είναι πάντα σε συμμετρική θέση. Μπορούμε να δούμε την κίνηση του σημείου αν επιλέξουμε από το μενού «Προβολή» την εμφάνιση του ίχνους.

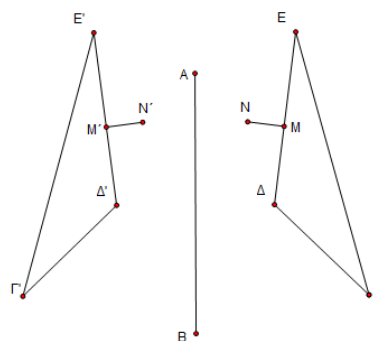
Έστω τώρα ότι σχηματίζουμε το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$. Στη συνέχεια και με πατημένο το Shift επιλέγουμε τις πλευρές και τις κορυφές του και με διπλό κλικ ορίζουμε τον άξονα συμμετρίας. Από το μενού «Μετασχηματισμός» επιλέγουμε «Ανάκλαση» και σχηματίζεται το συμμετρικό του τριγώνου $\Gamma'\Delta'E'$. Μετακινώντας κάποια από τις κορυφές μετακινείται ανάλογα το συμμετρικό του. Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε και όλο το τρίγωνο οπότε να κινείται μεταφερόμενο και να κάνει το ίδιο και το συμμετρικό του.



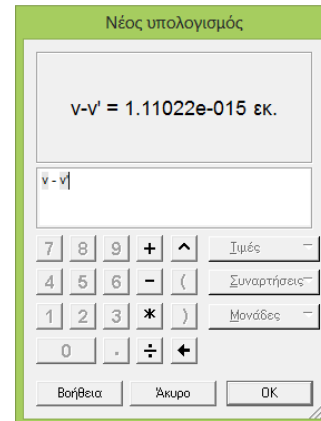
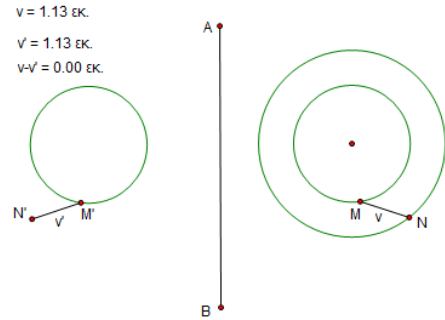
Αν επιλέξουμε τώρα ένα τυχαίο σημείο M στο τμήμα ΔE . Μπορούμε να δώσουμε κίνηση στο σημείο M επιλέγοντας από το μενού «Προβολή» το «Προσθήκη κίνησης σε σημείο», οπότε το σημείο κινείται πάνω στην ευθεία που επιλέχτηκε. Ένα μικρό παράθυρο, ο ελεγκτής κίνησης, εμφανίζεται που επιτρέπει να ελέγξουμε την κίνηση να αυξήσουμε



την ταχύτητα ή να την σταματήσουμε, κλπ. Αν ορίσουμε και το συμμετρικό του σημείου M και δώσουμε κίνηση στο M , τότε θα κινείται και το συμμετρικό του. Μπορούμε να ορίσουμε πιο σύνθετο αντικείμενο στο M , π.χ. ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα MN και να ορίσουμε το συμμετρικό του. Τότε δίνοντας κίνηση στο M κινείται το MN αλλά και το συμμετρικό του.

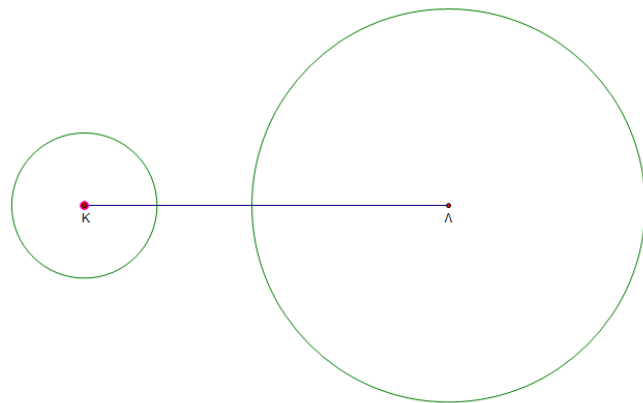


Αντί τριγώνου μπορούμε να σχηματίσουμε κύκλο και να κάνουμε το συμμετρικό του. Στη συνέχεια να επιλέξουμε ένα σημείο M στον κύκλο και να του δώσουμε κίνηση και να παρατηρήσουμε ότι κινείται αναλόγως το συμμετρικό του. Στο σχήμα που δώσαμε σχηματίσαμε και ένα δεύτερο ομόκεντρο κύκλο πήραμε ένα τυχαίο σημείο N στο δεύτερο κύκλο και φέραμε το ευθύγραμμο τμήμα MN . Σχηματίσαμε επίσης τα συμμετρικά τους. Δώσαμε κατόπιν κίνηση στα σημεία M και N και παρατηρούμε πως κινούνται τα δύο ευθύγραμμο τμήματα. Για να επαληθεύσουμε ότι τα μήκη παραμένουν ίσα, μετρήσαμε τα μήκη MN και $M'N'$. Για τη μέτρηση επιλέγουμε το ευθύγραμμο τμήμα και από το μενού «Μέτρηση» επιλέγουμε το «μήκους». Εμφανίζεται τότε κείμενο με την ετικέτα «μήκος του $MN=x.xx$ εκ.» όπου $x.xx$ είναι το ζητούμενο μήκος. Αν θέσουμε όνομα στο ευθύγραμμο τμήμα (επιλέγοντας το τμήμα και το κουμπί ονομασιών) τότε αλλάζει και η ετικέτα του μήκους. Μπορούμε επίσης, πάλι από το μενού «Μέτρηση», να πάρουμε τον «Υπολογισμό» για να υπολογίσουμε τη διαφορά των δύο τμημάτων. Εμφανίζεται το διπλανό παράθυρο και επιλέγοντας τη μέτρηση για το v ($=MN$) μείον τη μέτρηση για το $v'=(M'N')$ μας δίνει 0, όπως αναμένονταν.



Ας θεωρήσουμε τώρα δύο μη τεμνόμενους άνισους κύκλους K , Λ και ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε τις κοινές εφαπτομένες τους. Υπάρχουν δύο κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες, που τέμνονται σ' ένα σημείο έστω H (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί και ως κέντρο ομοιοθεσίας με κάποιο λόγο λ). Υπάρχουν επίσης δύο κοινές εσωτερικές εφαπτόμενες που τέμνονται σ' ένα σημείο έστω Θ (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί και ως κέντρο ομοιοθεσίας με λόγο $1/\lambda$).

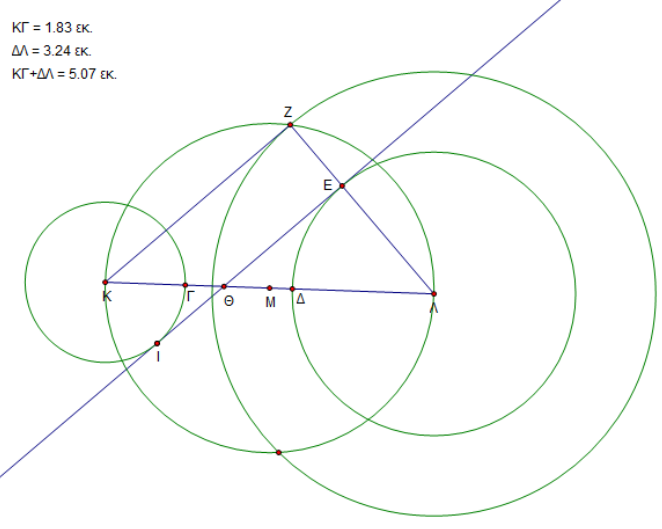
Κατασκευάζουμε πρώτα ένα κύκλο με κέντρο το σημείο K . Στη συνέχεια πατώντας Shift κατασκευάζω ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$ από το κέντρο του κύκλου προς τα δεξιά. Κατόπιν με κέντρο το Λ και ακτίνα μεγαλύτερη κατασκευάζω ακόμη έναν κύκλο. Αποκρύπτω τα σημεία ορισμού των κύκλων και ονομάζω τα κέντρα τους. Έτσι παίρνω το σχήμα δίπλα.



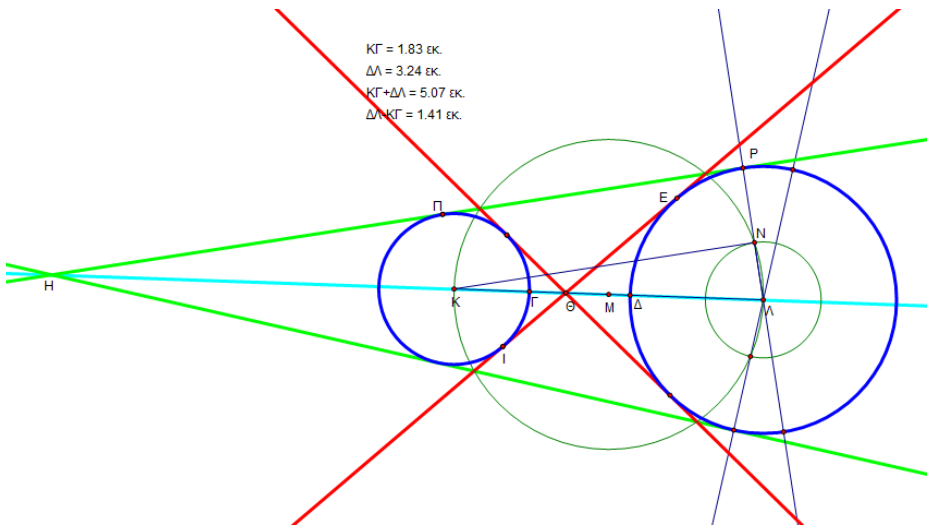
Βρίσκω μετά τα σημεία τομής της διακέντρου $\Xi\Lambda$ με τους δύο κύκλους Γ και Δ . Από τη μέτρηση μετράω τις ακτίνες $K\Gamma$ και $\Lambda\Delta$ και από τον υπολογιστή βρίσκω το άθροισμά τους. Επιλέγοντας το σημείο Λ ως κέντρο και τη μέτρηση του αθροίσματος των ακτίνων (ως

ακτίνα) πηγαίνω στο μενού «Κατασκευή» και επιλέγω «κύκλου από κέντρο και ακτίνα» και σχηματίζεται έτσι κύκλος κέντρου Λ και ακτίνας $\Lambda\Delta+ΚΓ$.

Βρίσκω το μέσον M της διάκεντρο $ΚΛ$ (από κατασκευή μέσου) και με επιλεγμένο το M ως κέντρο και το K ως σημείο πηγαίνω στην «Κατασκευή» και επιλέγω «κύκλος με κέντρο και σημείο». Ο κύκλος αυτός τέμνει τον κύκλο με ακτίνα $\Lambda\Delta+ΚΓ$ στο σημείο Z και η $Z\Lambda$ τον κύκλο $(\Lambda, \Lambda\Delta)$ στο E . Επιλέγοντας την ΛZ και το E φέρνω κάθετη που τέμνει την $ΚΛ$ στο Θ και είναι κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων. Το σχήμα τώρα έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος. Σχεδιάζω όμοια και τη δεύτερη εσωτερική διχοτόμο. Αποκρύπτω στη συνέχεια τα βοηθητικά στοιχεία δηλ. τις ευθείες $KZ, \Lambda Z$, τον κύκλο $(\Lambda, \Lambda Z)$ και τα σημεία τομών που δεν μου χρειάζονται. Το κύκλο διαμέτρου $ΚΛ$ τον χρειάζομαι και δεν τον αποκρύπτω.



Ότι έκανα με το άθροισμα των ακτίνων το κάνω τώρα με τη διαφορά ακτίνων. Σχεδιάζω



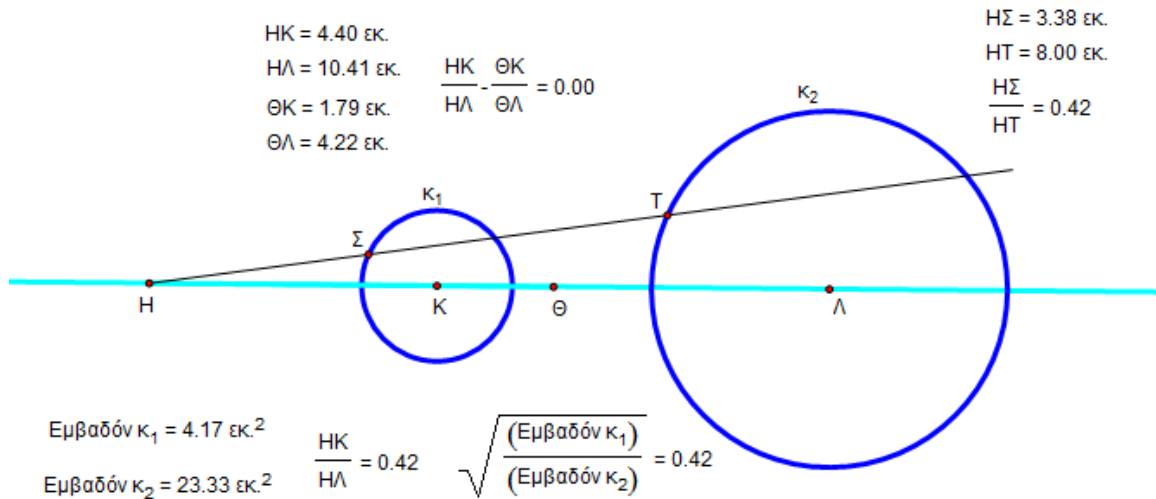
τον κύκλο $(\Lambda, \Lambda N)$ όπου ΛN =η διαφορά των δύο ακτίνων. Βρίσκω την τομή N των δύο κύκλων $(\Lambda, \Lambda N)$ και αυτόν με διάμετρο την διάκεντρο και προεκτείνω την ΛN . Η τομή της ΛN με τον κύκλο $(\Lambda, \Lambda\Delta)$ είναι το σημείο P . Η κάθετος από το R είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη και τέμνει τη διάκεντρο στο H . Ομοίως κάνουμε και την άλλη εξωτερική εφαπτομένη. Μορφοποιούμε με πιο παχιές γραμμές και χρώματα τα στοιχεία που μας ενδιαφέρουν.

Στη συνέχεια αποκρύπτουμε όλα τα άλλα στοιχεία εκτός από τους κύκλους, τη διάκεντρο και τις εφαπτόμενες. Διερευνήστε στη συνέχεια τι συμβαίνει όταν μεταβάλλονται οι κύκλοι, όταν γίνονται ίσοι όταν εφαπτονται, όταν τέμνονται, κλπ.

Για το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ότι τα σημεία Κ, Λ είναι αρμονικά συζυγή των Η, Θ, ή ότι τα Η, Θ χωρίζουν τα Κ, Λ εις μέσον και άκρον λόγον, ή ότι τα σημεία Κ, Λ, Η, Θ είναι μια αρμονική τετράδα ή αρμονική σημειοσειρά.

Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $\frac{HK}{HL} = \frac{\theta K}{\theta L}$

Για να επαληθεύσουμε τη σχέση αυτή αποκρύπτουμε από το σχήμα όλα τα στοιχεία εκτός από τα Κ,Λ,Η,Θ και τους κύκλους και κάνουμε τις μετρήσεις των μεγεθών που υπάρχουν στον τύπο. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τη διαφορά των δύο λόγων και διαπιστώνουμε ότι είναι ίσοι.



Αν επιλέξουμε την ονομασία και φωτίσουμε τον ένα κύκλο μας τον ονομάζει κ₁, ενώ τον άλλο μας τον ονομάζει κ₂. Στη συνέχεια από τη μέτρηση υπολογίζουμε τα εμβαδά («Μέτρηση» και μετά «εμβαδού») των δύο κύκλων. Αν τώρα υπολογίσουμε το λόγο των αποστάσεων ΗΚ προς ΗΛ τότε αυτός θα είναι ο λόγος ομοιοθεσίας των δύο κύκλων και συγκεκριμένα του (Κ) ως προς τον (Λ). Παρατηρούμε ότι ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιοθεσίας.

Επίσης παρατηρούμε ότι ομόλογα σημεία των δύο κύκλων έχουν λόγο αποστάσεων ίσο με το λόγο ομοιοθεσίας. Για να κατασκευάσουμε ομόλογα σημεία φέρουμε μια ευθεία από το Η και τέμνουμε τους δύο κύκλους σε σημεία προς την ίδια πλευρά.

Ανάλογα ισχύουν και για το Θ που είναι επίσης κέντρο ομοιοθεσίας, που αναφέρεται και ως αντι-ομοιοθεσία, επειδή τα σχήματα είναι εκατέρωθεν του κέντρου.