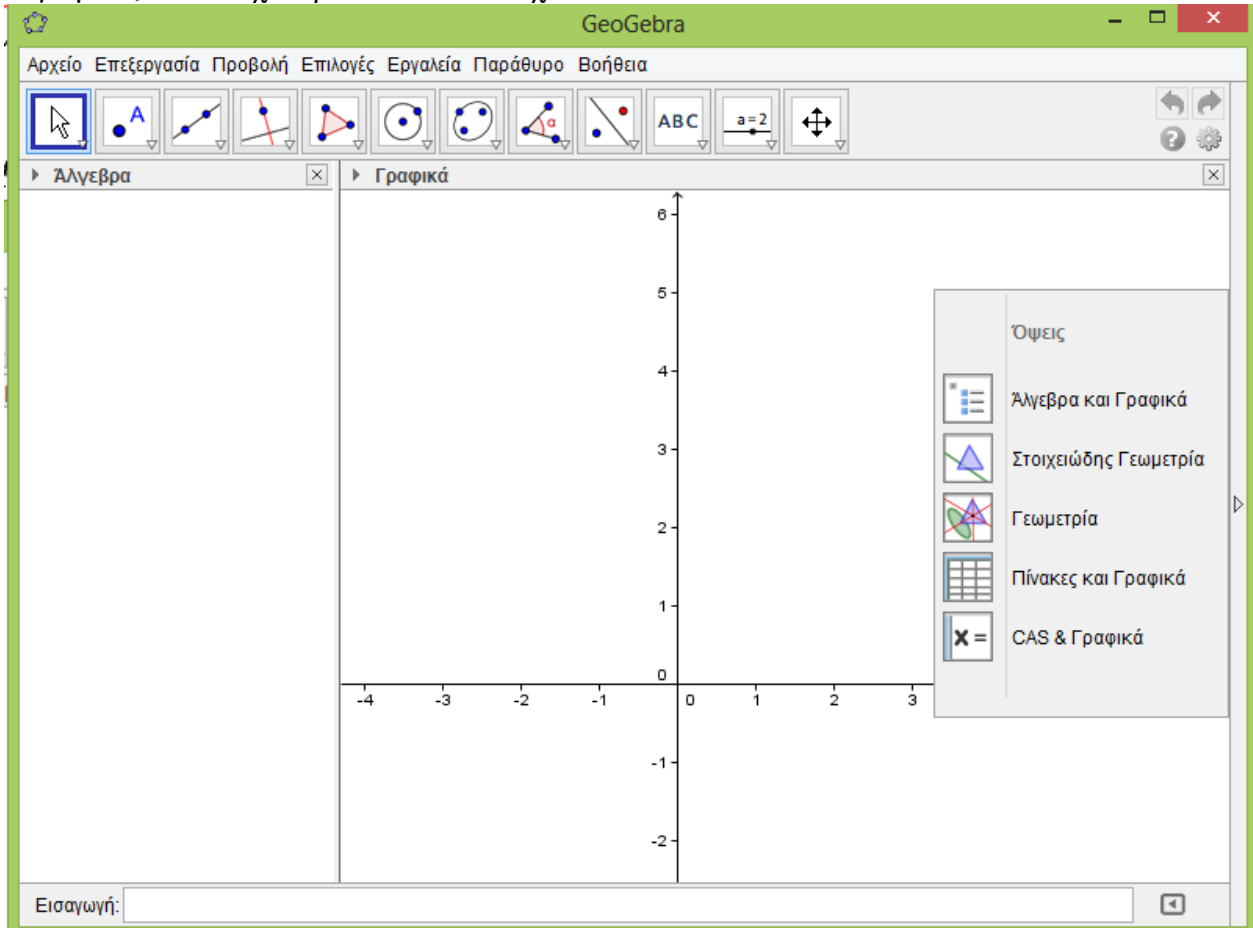


Οδηγίες για το Geogebra

Μουσιάδης Πολυχρόνης – Δόρτσιος Κώστας

Η πρώτη οθόνη μετά την εκτέλεση του προγράμματος διαφέρει κάπως από τα προηγούμενα λογισμικά, αν και έχει αρκετά κοινά στοιχεία.



Αποτελείται από μία σειρά επιλογών διάφορων ενεργειών (Αρχείο, Επεξεργασία, ...) τα οποία όταν επιλεγούν ανοίγουν μενού ενεργειών, που μπορούμε να τις εξερευνήσουμε. Υπάρχει μια σειρά κουμπιών που το σχέδιό τους δείχνει την τρέχουσα ενέργεια του κουμπιού αυτού, που πατώντας επάνω του δίνει και άλλες επιλογές. Αν αλλάξουμε, αλλάζει και το σχέδιο στο κουμπί και επίσης και η ενέργεια του κουμπιού. Μέχρι εδώ μοιάζει πολύ με τα άλλα λογισμικά που είδαμε. Η κυρίως επιφάνεια χωρίζεται σε διάφορες όψεις. Η μία αριστερά λέγεται Άλγεβρα και εδώ γράφονται αναλυτικά στοιχεία για τα αντικείμενα που εισάγουμε, όπως οι συντεταγμένες σημείων, οι εξισώσεις καμπύλων, μήκη, εμβαδά, κλπ. Μπροστά από κάθε εγγραφή υπάρχει μία βουλίτσα κυρτωμένη, την οποία αν κάνουμε κλικ γίνεται κοίλη και το αντικείμενο αποκρύπτεται από το τμήμα των Γραφικών. Αν ξανακάνουμε κλικ στη βουλίτσα επανεμφανίζεται. Στο τμήμα Γραφικά υπάρχει σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο σχεδιάζονται τα αντικείμενα που εισάγουμε. Αν όμως δεν θέλουμε τους άξονες μπορούμε με δεξί κλικ στο τμήμα αυτό να αποκρύψουμε τους άξονες. Μπορούμε αν θέλουμε (από την Προβολή) να αποκρύψουμε και το τμήμα Άλγεβρα, οπότε η

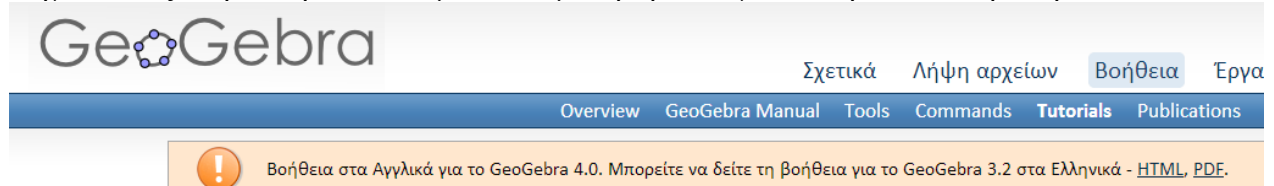
επιφάνεια γίνεται όλη για γραφικά. Στο τμήμα αυτό εργαζόμαστε περίπου όπως και στα άλλα λογισμικά γεωμετρίας.

Τέλος στο κάτω μέρος της επιφάνειας, υπάρχει ένα τμήμα-παράθυρο με όνομα Εισαγωγή. Στο παράθυρο αυτό εισάγουμε με τις αναλυτικές τους εκφράσεις, σημεία, ευθείες, συναρτήσεις αλλά και διάφορα άλλα στοιχεία (π.χ. σημεία τομής, ακρότατα, σημεία καμπής, κλπ), τα οποία μετά το πάτημα του Enter αναγράφονται στην «Άλγεβρα» ως εντολές και στα «Γραφικά» ως γεωμετρικά αντικείμενα.

Ενδιαφέρον είναι ότι στο κουμπί με τα γράμματα ABC (κειμένου) ανοίγει παράθυρο όπου μπορούμε να γράψουμε κείμενο είτε απλό είτε μαθηματικό με χρήση των εντολών του Latex, ώστε οι μαθηματικές εκφράσεις είναι όσο προσεγγμένες μπορούσαν να είναι.

Επίσης, από το πρώτο κουμπί, πατώντας συνεχόμενα μπορούμε να επιλέξουμε το λογιστικό φύλλο, οπότε ενσωματώνεται στην επιφάνεια εργασίας ένα φύλλο ανάλογο του Excel που κάνει την εξαγωγή τιμών από το GeoGebra ευκολότερη. Τέλος υπάρχουν πολλοί τρόποι μορφοποίησης τόσο των σημείων, όσο και των γραμμών και των επιφανειών, που εύκολα μπορούμε να τους ενεργοποιήσουμε είτε με δεξί κλικ πάνω στα αντικείμενα, είτε με διπλό κλικ στον ορισμό τους στην «Άλγεβρα», με την προϋπόθεση ότι έχουμε επιλέξει το βέλος επιλογών.

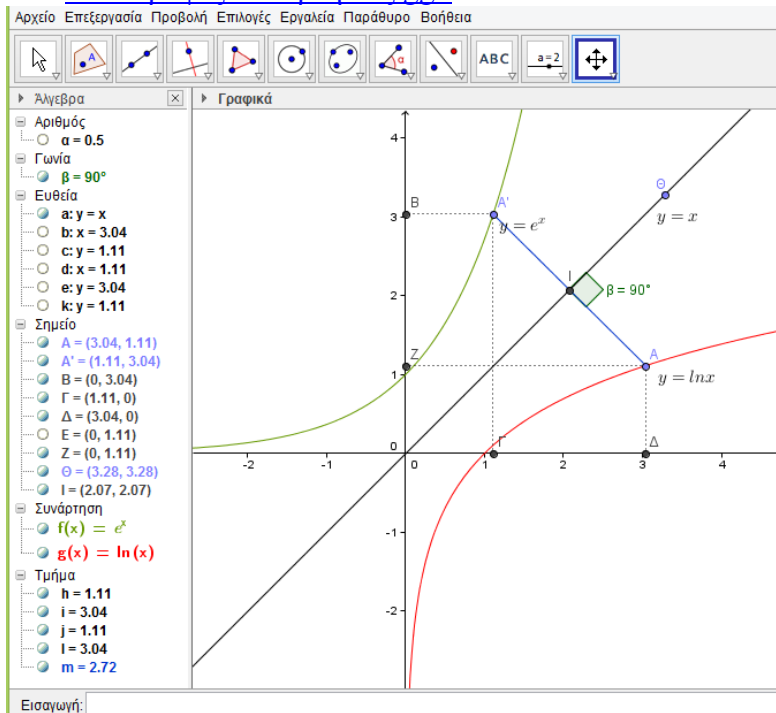
Πηγαίνοντας στη «Βοήθεια» και μετά «Εκμάθηση» ανοίγει το παρακάτω παράθυρο στο δίκτυο:




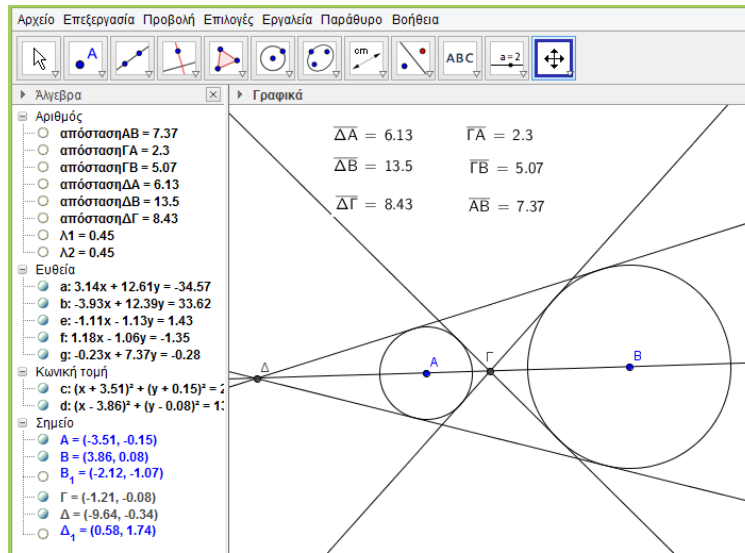
Αν κάνουμε κλικ στο PDF θα πάρουμε ένα αρχείο στα Ελληνικά με τα βασικά για την εκμάθηση του προγράμματος. Είναι βέβαια για παλιότερη έκδοση και πολλές από τις εντολές μπορεί και να μη δουλεύουν, είναι όμως πολύ κατατοπιστικό για τις λειτουργίες του προγράμματος. Για το λόγο αυτό στα επόμενα θα ασχοληθούμε με ορισμένα παραδείγματα, για τα οποία θα σας δώσουμε και τα δυναμικά αρχεία, που αν τα κατεβάσετε από τη σελίδα του μαθήματος, θα ανοίξουν στον δικό σας υπολογιστή.

Παράδειγμα 1. Αντίστροφες συναρτήσεις. Στο παράθυρο «Εισαγωγή» εισάγουμε διαδοχικά τις συναρτήσεις $y = \ln x$, $y = e^x$, $y = x$ και στο τμήμα Γραφικά εμφανίζονται οι γραφικές τους παραστάσεις. Εισάγουμε από το κουμπί ABC τα ονόματα των συναρτήσεων χρησιμοποιώντας Latex, δηλαδή ενεργοποιώντας την αντίστοιχη επιλογή και γράφοντας την εξίσωση ανάμεσα από τα δύο σύμβολα $\$$, που συμβολίζουν εισαγωγή μαθηματικών εκφράσεων. Δίνουμε αν θέλουμε χρώματα και πάχος για να διακρίνονται. Από το κουμπί με το σημείο, επιλέγουμε σημείο σε αντικείμενο και ορίζουμε ένα ελεύθερο σημείο A στην καμπύλη $y = \ln x$, πλησιάζοντας εκεί που θέλουμε τον κέρσορα. Οι συντεταγμένες του A εμφανίζονται στην Άλγεβρα. Κάνουμε κλικ στο βέλος και μετακινούμε το σημείο. Παρατηρούμε ότι μετακινείται πάνω στην καμπύλη και σε κάθε θέση έχουμε τις συν/νες του, που βεβαίως ικανοποιούν την εξίσωση της καμπύλης. Από το κουμπί μετασχηματισμών, τέταρτο από το τέλος, επιλέγουμε συμμετρία ως προς ευθεία. Πλησιάζουμε πρώτα το σημείο και μετά την ευθεία $y = x$ και εμφανίζεται το σημείο A' στην καμπύλη, $y = e^x$ όπως αναμένονταν. Για καλύτερη εποπτεία σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα AΔ, AZ, A'Γ,

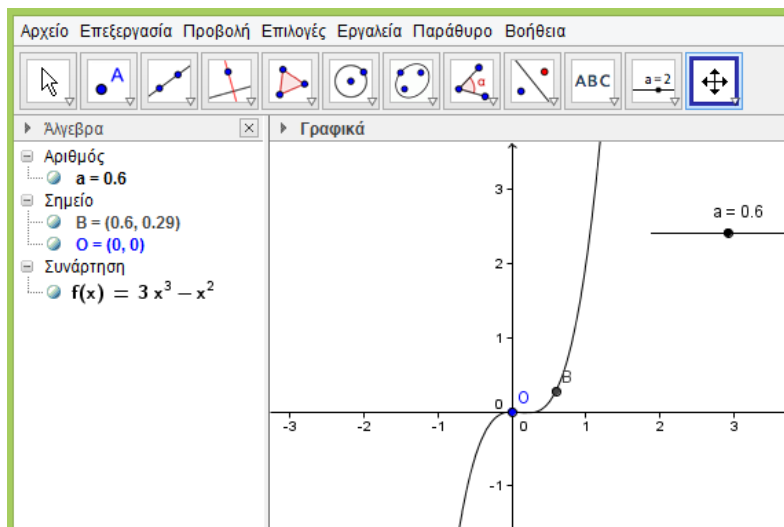
A΄B φέρνοντας πρώτα τις κάθετες στους άξονες, ώστε να οριστούν τα σημεία στους άξονες και αποκρύπτοντας μετά τις ευθείες. Τα κάθετα τμήματα τα κάνουμε λεπτά και διάστικτα. Τέλος φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα AA΄ και βρίσκουμε την τομή του I με τη διχοτόμο των αξόνων. Παίρνουμε και ένα ελεύθερο σημείο Θ στη διχοτόμο και πατώντας στο 8^ο κουμπί επιλέγουμε τη γωνία και δείχνουμε με τον κέρσορα τα σημεία A, I, Θ με τη σειρά αυτή οπότε εμφανίζεται η μέτρηση της γωνίας, που είναι 90°. Με τη σειρά Θ, I, A γίνεται η μη-κυρτή γωνία, αλλά η κορυφή της γωνίας πρέπει να είναι στη μέση. Μετακινώντας το A παρατηρούμε τη μετακίνηση όλων των συνδεδεμένων με το A αντικειμένων. Αυτόματη κίνηση του A πετυχαίνεται αν με διπλό κλικ πάνω στο A και επιλέγοντας «Ιδιότητες», τσεκάρουμε την ένδειξη «κίνηση ενεργή». Δυναμικό αρχείο για όλα αυτά είναι το [«αντίστροφες συναρτήσεις.ggb»](#).



Παράδειγμα 2. Κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων. Κρύβουμε τους άξονες (χωρίς να είναι απαραίτητο) και με το κουμπί κύκλων σχηματίζουμε δύο (μη τεμνόμενους) κύκλους με κέντρα A, B. Εμφανίζονται τότε, στο αριστερό μέρος (Άλγεβρα), οι εξισώσεις των κύκλων. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τους κύκλους και με τις αναλυτικές τους εξισώσεις στην «Εισαγωγή». Κατόπιν από το τέταρτο κουμπί επιλέγουμε εφαπτόμενες . Κάνοντας κλικ διαδοχικά στους δύο κύκλους, παίρνουμε τις δύο εσωτερικές και τις δύο εξωτερικές εφαπτόμενες των δύο κύκλων, που τέμνονται αντίστοιχα στα σημεία Γ, Δ. Φέρνοντας στη συνέχεια τη διάκεντρο AB, παρατηρούμε ότι περνά από τα σημεία Γ, Δ, όπως αναμένονταν. Στη συνέχεια για να επαληθεύσουμε ότι τα σημεία A,B,Γ,Δ αποτελούν αρμονική τετράδα μετρήσαμε τα μήκη που φαίνονται στο σχήμα (8^ο κουμπί «μήκος») και υπολογίσαμε τους λόγους $\lambda_1 = \frac{\Delta A}{\Delta B}$, $\lambda_2 = \frac{\Gamma A}{\Gamma B}$ και διαπιστώνουμε ότι είναι ίσοι. Μεταβάλλοντας την ακτίνα του ενός κύκλου, μεταβάλλονται και οι λόγοι, παραμένουν όμως ίσοι. Δυναμικό αρχείο για το παράδειγμα αυτό: [«κοινές εφαπτόμενες δύο κύκλων.ggb»](#)

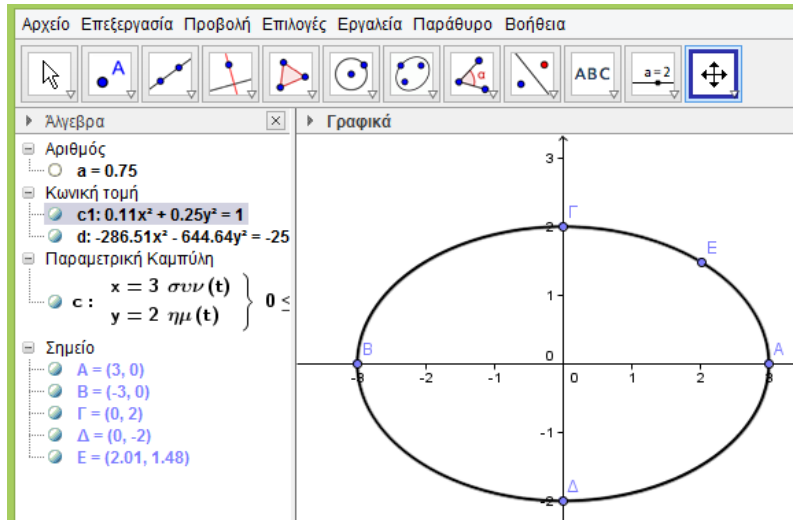


Παράδειγμα 3. Γραφική παράσταση συνάρτησης και σημείων της. Στην εισαγωγή ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^3 - x^2$, γράφοντας $f(x)=3*x^3-x^2$. Στη συνέχεια ορίζουμε ένα δρομέα a , δεύτερο κουμπί από το τέλος. Κατόπιν ορίζουμε το σημείο B της καμπύλης που αντιστοιχεί σε τετμημένη ίση με την τρέχουσα τιμή του a , γράφοντας στην «εισαγωγή»: $B=(a, f(a))$. Το σημείο B εμφανίζεται στην καμπύλη και οι συντεταγμένες του στο τμήμα Άλγεβρα. Μετακινώντας το δρομέα (τον οποίο μπορούμε με διπλό κλικ να τροποποιήσουμε) το σημείο B κινείται στην καμπύλη. Δυναμικό αρχείο για το παράδειγμα αυτό: [«Γραφική παράσταση συνάρτησης και σημείων της.ggb»](#).



Παράδειγμα 4. Κωνικές τομές. Με την εντολή ΚαρτεσιανήΚαμπύλη[3 συν(t), 2 ημ(t), t, 0, 2 pi] (προσέξτε ότι υπάρχει κενό μετά το 3 που είναι ισοδύναμο με το σύμβολο του πολλαπλασιασμού), εμφανίζεται η έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες 3 και 2. Την ίδια έλλειψη παίρνουμε και με την εντολή c1: $x^2/3^2+y^2/2^2=1$. Ακόμη την ίδια έλλειψη παίρνουμε και με την επιλογή 5 σημείων της και ύστερα πατώντας το κουμπί των κωνικών τομών. Το πρόγραμμα

έχει διάφορες τιμές που υπολογίζει για τις κωνικές τομές, όπως π.χ. την εκκεντρότητα. Στην πρώτη περίπτωση (δηλαδή στον ορισμό της κωνικής τομής με παραμετρική μορφή) αυτή η δυνατότητα δεν λειτουργεί, στις άλλες όμως λειτουργεί. Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε παραβολή και έλλειψη. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι κατασκευές με το 7^ο κουμπί, που χρησιμοποιούν τις εστίες και ένα σημείο για την έλλειψη και την υπερβολή, και την εστία, τη διευθετούσα και ένα σημείο για την παραβολή. Δυναμικό αρχείο για το παράδειγμα αυτό: «[Κωνικές τομές.ggb](#)».



Παράδειγμα 5. Γραφικές παραστάσεις με πολικές συντεταγμένες. Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε πολικές συν/νες χρησιμοποιούμε την παραμετρική μορφή της. Δηλαδή αν $r = r(\theta)$, είναι η εξίσωση σε πολικές συν/νες, η παραμετρική μορφή θα είναι $x = r(\theta)\sigma\upsilon\nu\theta, y = r\eta\mu\theta$, με παράμετρο το θ .

Έτσι, γράφοντας στην εισαγωγή $r_1(x)=a$ και μετά c_1 : ΚαρτεσιανήΚαμπύλη[$r_1(\theta) \sigma\upsilon\nu(\theta), r_1(\theta) \eta\mu(\theta), \theta, 0, 2 \pi$], και αποκρύπτοντας την καμπύλη $r_1(x)$, παίρνουμε τον κύκλο ακτίνας a . Μάλιστα, αν το a το ορίσουμε από ένα δρομέα, τότε αυξομοιώνοντας τον δρομέα, αυξομοιώνεται η ακτίνα του κύκλου.

Όμοια, γράφοντας εισαγωγή $r_2(x)=a(1-\sigma\upsilon\nu(x))$ και μετά c_2 : ΚαρτεσιανήΚαμπύλη[$r_2(\theta) \sigma\upsilon\nu(\theta), r_2(\theta) \eta\mu(\theta), \theta, 0, 2 \pi$], και αποκρύπτοντας την καμπύλη $r_2(x)$, παίρνουμε την καρδιοειδή καμπύλη. Αυξομοιώνοντας τον δρομέα, αυξομοιώνεται η παράμετρος a του καρδιοειδούς που είναι το σημείο τομής της με τον θετικό άξονα των y .

Επίσης, γράφοντας εισαγωγή $r_3(x)=a \eta\mu(\beta x)$ και μετά c_3 : ΚαρτεσιανήΚαμπύλη[$r_3(\theta) \sigma\upsilon\nu(\theta), r_3(\theta) \eta\mu(\theta), \theta, 0, 2 \pi$], και αποκρύπτοντας την καμπύλη $r_3(x)$, παίρνουμε τη γραφική παράσταση ενός πολύ-φυλλου (τρίφυλλου, τετράφυλλου, κλπ ανάλογα με το β , το οποίο το δίνουμε με ένα δρομέα που παίρνει ακέραιες τιμές –για να παίρνουμε πλήρη πολύ-φύλλα). Αυξομοιώνοντας τον δρομέα a , αυξομοιώνεται το μέγεθος του πολύ-φυλλου, ενώ αυξομοιώνοντας το δρομέα β , αυξομοιώνονται τα φύλλα του. Για β =περιττό τα φύλλα είναι σε πλήθος β , ενώ για β =άρτιο, τα φύλλα είναι σε πλήθος 2β . Ενδιαφέρον παρουσιάζει το τί συμβαίνει όταν η πολική ακτίνα παίρνει αρνητικές τιμές.

Και οι τρεις καμπύλες φαίνονται στο σχήμα. Για πιο απλά σχήματα, αποκρύψτε ότι θέλετε. Στο σχήμα υπάρχουν εκτός από το σύστημα καρτεσιανών συν/νων και σύστημα πολικών συντεταγμένων. Για το σύστημα πολικών συντεταγμένων, δηλαδή ένα πλήθος ημιευθειών από το O , με ίσες γωνίες, και ένα σύνολο ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το O και ακτίνες πολλαπλάσια κάποιας μονάδας, αρκεί να δώσετε στην «Εισαγωγή», τις εντολές:

Ακολουθία[Κύκλος[(0, 0), k / 2], k, 1, 20]

Ακολουθία[Ευθεία[(0, 0), (συν(a), ημ(a))], a, 0, 165°, 15°]

(στο σχήμα φαίνεται άλλος τρόπος εισαγωγής).

Μπορούμε να εμφανίσουμε ή να αποκρύψουμε το σύστημα των πολικών συντεταγμένων, και το ίδιο φυσικά ισχύει και για τις καρτεσιανές συντεταγμένες, αν θέλουμε άλλη εμφάνιση των καμπύλων μας. Δυναμικό αρχείο για το παράδειγμα αυτό: «[Γραφικές παραστάσεις με πολικές συντεταγμένες.ggb](#)».

