

Ένας ενδιαφέρων Γεωμετρικός Τόπος

Στον κ. Κώστα Δόρτσιο, ετέθη από συνάδελφό του τον κ. Αποστολόπουλο Γιώργο το παρακάτω πρόβλημα:

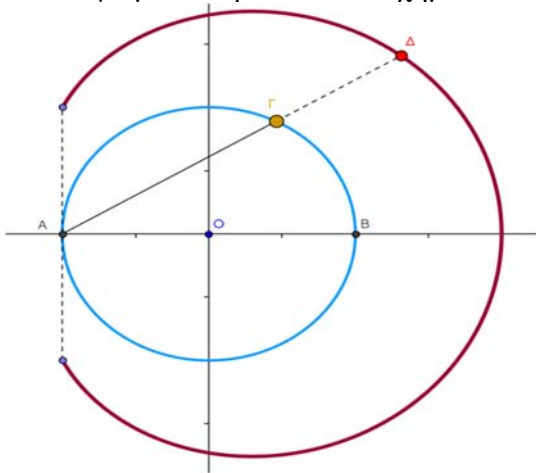
Δίνεται κύκλος διαμέτρου $AB=2$ και χορδή AG της οποίας το άκρο G είναι μεταβλητό ενώ το άκρο A είναι σταθερό. Στην προέκταση της AG και προς το μέρος του G θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $GA=1$. Να βρεθεί ο γ.τ. του άκρου Δ .

Χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό παίρνουμε το ακόλουθο σχήμα 1.

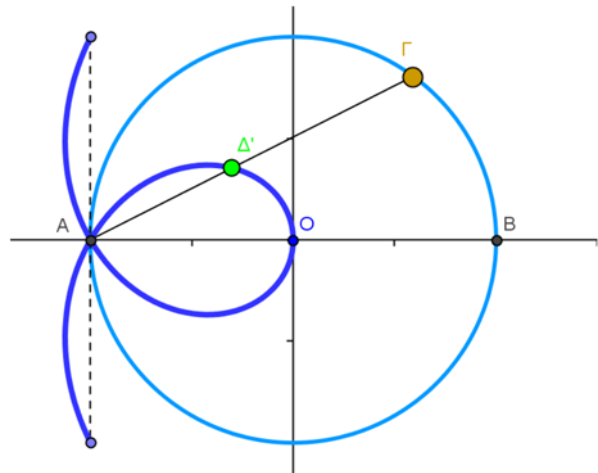
Παραλάσσοντας την εκφώνηση παίρνοντας την ακτίνα προς τα μέσα του κύκλου, το πρόβλημα γίνεται:

Δίνεται κύκλος διαμέτρου $AB=2$ και χορδή AG της οποίας το άκρο G είναι μεταβλητό ενώ το άκρο A είναι σταθερό. Εσωτερικά της χορδής AG θεωρούμε σημείο Δ' έτσι ώστε $GA'=1$. Να βρεθεί ο γ.τ. του άκρου Δ' .

Το λογισμικό τώρα δίνει το σχήμα 2.

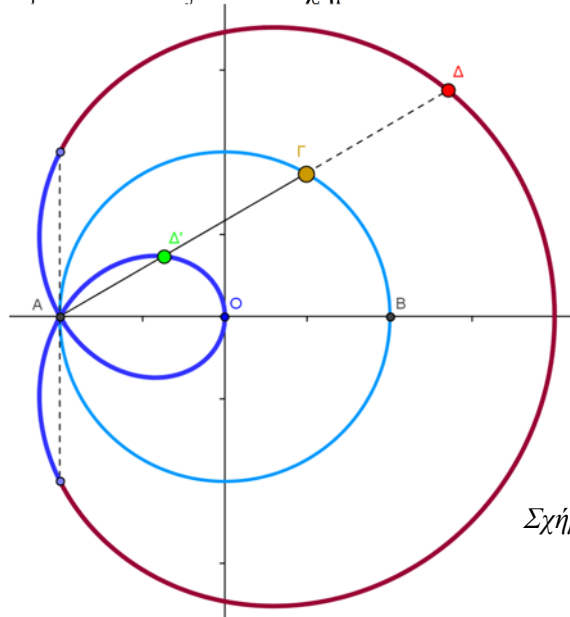


Σχήμα 1



Σχήμα 2

Οι δύο αυτοί γ.τόποι φαίνονται ως ενιαίο σχήμα στο ακόλουθο σχήμα 3:



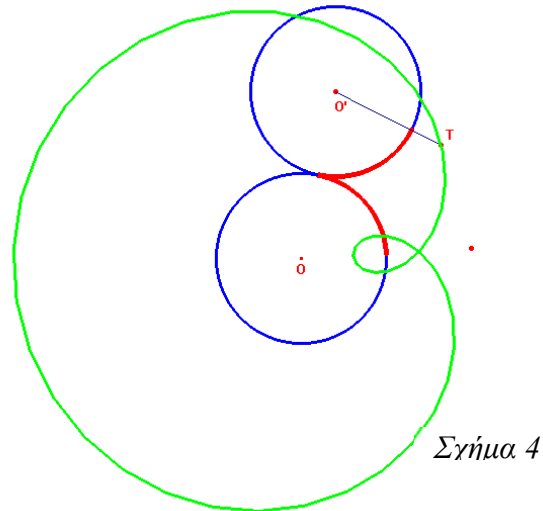
Σχήμα 3

Η καμπύλη αυτή λέγεται **επικυκλοειδής** ή **καμπύλη του Πασκάλ** (B. Φράγκου: *Ασκήσεις Διαφ. και Ολοκλ. Λογισμού. Τ. Α', σελ. 210. Εκδ. Gutenberg*) και είναι ειδική περίπτωση της καμπύλης που λέγεται **επιτροχοειδής**.

Η **επιτροχοειδής** μπορεί να κατασκευαστεί με τη διαδικασία που φαίνεται στο σχήμα 4 και που είναι στο συνημμένο αρχείο “epitrochoid.fig” του Cabri II. Ο κύκλος Ο είναι σταθερός και ο ίσος μ' αυτόν δεύτερος κύκλος Ο' κυλιέται γύρω από τον πρώτο. Τα κόκκινα τόξα δείχνουν την κύλιση αυτή.

Ένα σημείο Τ που βρίσκεται σε μια σταθερή σχέση με τα στοιχεία του δεύτερου τροχού, δηλαδή είναι ένα σταθερό σημείο πάνω στο φορέα μιας σταθερής ακτίνας γράφει την πράσινη γραμμή που είναι η ζητούμενη.

Στο ανωτέρω σχήμα μπορεί κανείς να αλλάξει τη θέση του σημείου Τ και να δει περισσότερες μορφές της καμπύλης αυτής.



Σχήμα 4

Η Εξίσωση της καμπύλης αυτής

Στο σχήμα 3 μπορεί να εργαστεί κανείς με καρτεσιανές συντεταγμένες και να βρει την εξίσωση που είναι αρκετά σύνθετη.

Όμως οι πολικές συντεταγμένες δίνουν εύκολα την εξίσωσή της.

Πράγματι:

Από το σχήμα 5 προκύπτει:

$$r(\theta) = (AG) + (GD) = (AB)\sigma\upsilon\upsilon\theta + \Gamma\Delta$$

και επειδή:

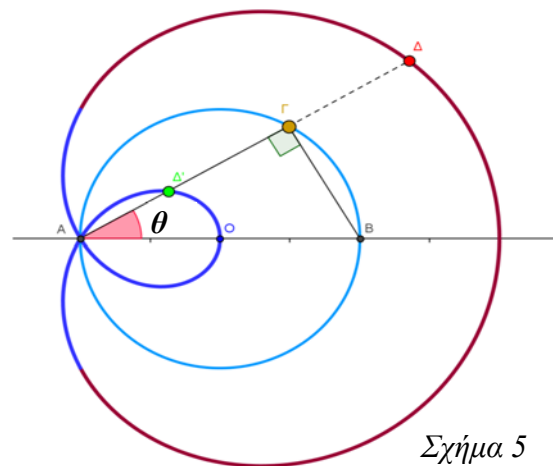
$$AB = 2\rho, \quad \Gamma\Delta = \rho$$

άρα η εξίσωση γίνεται:

$$r(\theta) = \rho(1 + 2\sigma\upsilon\upsilon\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.

Στη μορφή αυτή συμπεριλαμβάνονται και οι δύο περιπτώσεις (Σχ.1 και Σχ.2)



Σχήμα 5

Την καμπύλη αυτή μπορούμε να την κατασκευάσουμε με διάφορα λογισμικά, π.χ. με το Geogebra. Η κατασκευή δίνεται στο αρχείο “Eritrochoid.ggb”. Για την κατασκευή ορίσαμε έναν δρομέα με τιμές από 1 έως 10 και αύξηση 1, για καλύτερη εμφάνιση (μπορεί να παίρνει οποιεσδήποτε θετικές τιμές) και μετά εισάγοντας στη μπάρα εισαγωγής την επόμενη εξίσωση:

Καρτεσιανή Καμπύλη [$\rho (1 + 2\sigma\upsilon\upsilon(\theta)) \sigma\upsilon\upsilon(\theta)$, $\rho (1 + 2\sigma\upsilon\upsilon(\theta)) \eta\mu(\theta)$, θ , 0 , 2π]
Μετακινώντας τον δρομέα, παίρνουμε διάφορες μορφές της επιτροχειδούς.

