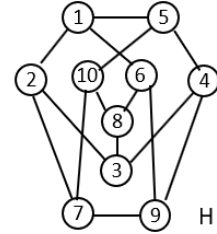
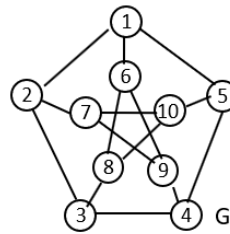


## Ασκήσεις υποδειγματικές για το θεωρητικό μέρος του μαθήματος

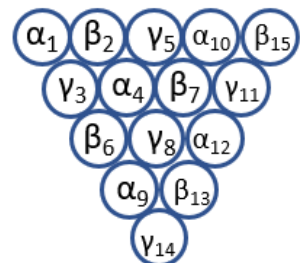
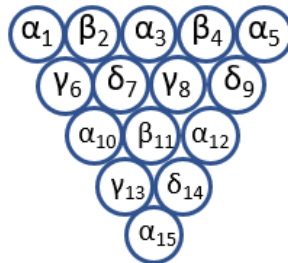
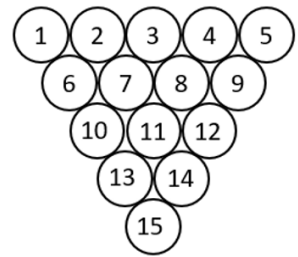
A1. Εξετάστε αν είναι Σωστή ή Λάθος κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις. Εξηγήστε την απάντησή σας.

1. Σε ένα τουρνουά με 8 παίκτες μπορεί οι παίκτες να συμμετείχαν σε: 6,5,4,4,4,3,1,1 αγώνες αντίστοιχα;
2. Η ακολουθία 5, 5, 4, 3, 2, 1, 1 είναι γραφική.
3. Το γράφημα  $G$  έχει 3 κορυφές, και για τα διαγώνια στοιχεία του  $A^3$ , όπου  $A$  ο πίνακας συνδέσεων του  $G$  ισχύει  $a_{11}^3 + a_{22}^3 + a_{33}^3 \neq 0$ , επομένως το γράφημα περιέχει κύκλο
4. Ο κύκλος με 5 κορυφές είναι αυτοσυμπληρωματικό γράφημα
5. Ένα γράφημα με 40 κορυφές και 120 ακμές δεν μπορεί να είναι επίπεδο
6. Στα διπλανά γραφήματα  $G, H$  η αρίθμηση μας βοηθά να αποδείξουμε ότι είναι ισόμορφα.
7. Ο μικρότερου μήκους κύκλος στο γράφημα  $H$  είναι ο κύκλος 1,2,3,4,5,1 (μήκους 5) και ο μεγαλύτερου μήκους κύκλος 1,5,10,7,9,4,3,2,1 (μήκους 8).

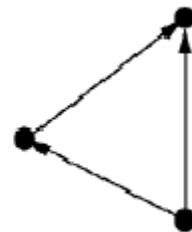
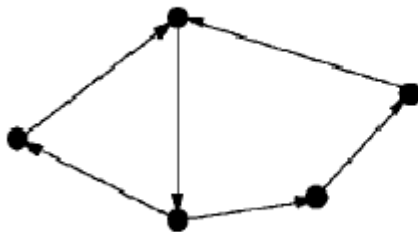


8. Κάθε δένδρο 10 κορυφών έχει ακριβώς 9 γέφυρες και τουλάχιστον μια τομή

9. Έχουμε 15 μπάλες μπυλιάρδου με τον διπλανό τριγωνικό σχηματισμό. Ζητείται να χρωματίσουμε τις μπάλες με τέτοιο τρόπο ώστε μπάλες που εφάπτονται να έχουν διαφορετικό χρώμα, με το μικρότερο αριθμό χρωμάτων. Μία απάντηση δόθηκε με το παρακάτω σχήμα στα αριστερά που χρειάζεται 4 χρώματα. Η αντιστοίχιση έγινε με τον τρόπο που υποδεικνύουν οι υποδείκτες. Δηλαδή δόθηκε το χρώμα α στην άνω αριστερή μπάλα, το β στη δεξιά της, ξανά το α στην επόμενη μέχρι να τελειώσει η πρώτη σειρά. Μετά στη δεύτερη σειρά δόθηκε το χρώμα γ (εφάπτεται με τα α, β) και στη δεξιά της το δ (εφάπτεται με τα α, β, γ) κλπ. Μια δεύτερη απάντηση δόθηκε με το δεξιό σχήμα, όπου πάλι οι υποδείκτες δείχνουν τη σειρά αντιστοίχισης και εδώ ξεκίνησε ο χρωματισμός από την άνω αριστερή μπάλα και συνέχισε τελειώνοντας με τις κοντινότερες μπάλες. Έτσι χρειάστηκαν 3 χρώματα. Προφανώς δεν αρκούν δύο χρώματα άρα η δεύτερη λύση είναι η σωστή.



10. Το μοντέλο Watts-Strogatz μειώνει τη μέση απόσταση μεταξύ των κορυφών αλλά έχει πολύ μικρή επίδραση στον συντελεστή συσταδοποίησης (clustering coefficient)
11. Τα παρακάτω γραφήματα είναι ισχυρά συνδεδεμένα



A2. Δίνεται ο πίνακας συνδέσεων  $A$  του γραφήματος  $G$ .  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Αφού κάνετε την αναπαράσταση του  $G$  στο επίπεδο, να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις.

(α) Βρείτε τις εκκεντρότητες των κορυφών.

(β) Βρείτε το/τα κέντρα του  $G$ .

(γ) Υπολογίστε τη διάμετρο και παρουσιάστε ένα μονοπάτι με μήκος ίσο με αυτό της διαμέτρου.

(δ) Υπολογίστε την ακτίνα και επαληθεύστε για το  $G$  τη σχέση  $rad(G) \leq d(G) \leq 2 \cdot rad(G)$ .

(ε) Παρουσιάστε το γραμμογράφημα του  $G$ .

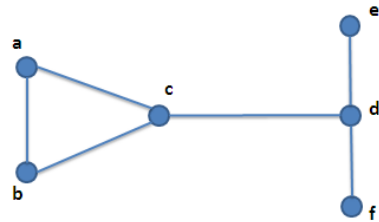
A3. (α) Δίπλα δίνεται το γράφημα  $G(5,7)$ . Να σημάνετε τις κορυφές του και να βρείτε: το χρωματικό αριθμό  $\chi(G)$ , τον αριθμό ανεξαρτησίας  $\alpha(G)$  τον αριθμό κλίκας  $\omega(G)$  και τον αριθμό κλίκας  $\omega(\bar{G})$  όπου  $\bar{G}$  το συμπληρωματικό του  $G$ .



(β) Να χρωματίσετε τις κορυφές του  $G$ , σύμφωνα με το χρωματικό αριθμό που βρήκατε και να παρουσιάσετε μια διαμέριση του συνόλου των κορυφών του σε ανεξάρτητα μεταξύ τους σύνολα (καταγράψτε τα σύνολα).

(γ) Με τη βοήθεια των ερωτημάτων (α) και (β) να δείξετε ότι για ένα οποιοδήποτε γράφημα  $G(n, m)$ , με χρωματικό αριθμό  $\chi(G)$ , και αριθμό ανεξαρτησίας  $\alpha(G)$ , θα ισχύει  $n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ , δηλαδή  $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$ .

A.4 Το δίκτυο  $G$  αναπαριστά την ύπαρξη ή όχι επαγγελματικής σχέσης στο τμήμα μιας εταιρείας όπου οι  $c, d$  είναι προϊστάμενοι των  $a, b$  και  $e, f$  αντίστοιχα.



- 1 Βρείτε τις κορυφές (nodes) που αποτελούν τομές (cut-vertices).
- 2 Βρείτε τις ακμές (links) που αποτελούν γέφυρες (bridges).
- 3 Ποιο από τα δυο υπογράφημα (subgraphs) αποτελεί 2-συνιστώσα (bi-component).
  - 3.1. Το υπογράφημα με κορυφές:  $a, b, c$
  - 3.2. Το υπογράφημα με κορυφές:  $e, d, f$ .
- 4 Βρείτε το κέντρο (center) του  $G$ .
- 5 Συμπληρώστε τον πίνακα:

	Node c	Node d	Node b
Degree centrality			
Closeness centrality			
Clustering coefficient			

6. Ποιος ο δείκτης σύμπλεξης και ποιος ο λόγος μεταβατικότητας του  $G$ ;
- 7 Αν επρόκειτο να εργαστείτε σε αυτό το τμήμα της εταιρίας και είχατε τη δυνατότητα να επιλέξετε προϊστάμενο ποιον θα επιλέγατε και γιατί (η ερώτηση δεν έχει σωστή και λάθος απάντηση, ζητάμε να υποστηρίξετε τη γνώμη σας με αυτά που έχετε υπολογίσει από το γράφημα).

A.5 Δίνεται το δίκτυο  $H$  δίπλα.

- 1 Βρήτε τη βαθμική κεντρικότητα του  $H$ .
2. Βρήτε την ενδιάμεση κεντρικότητα στο δίκτυο  $H$ .
3. Βρήτε την κεντρικότητα εγγύτητας για το δίκτυο  $H$ .
4. Γράψτε ένα κώδικα R που να επαληθεύονται τα παραπάνω

