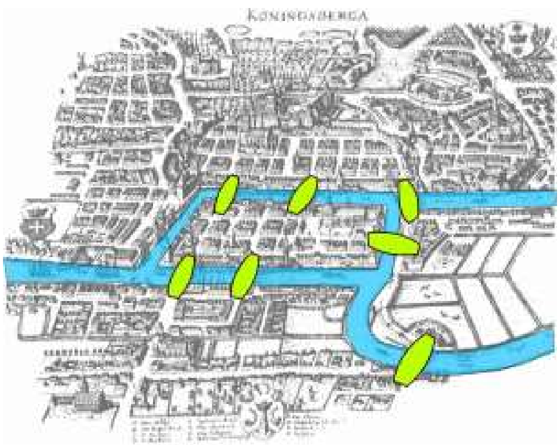
Γραφήματα

- Βασικές Ιδιότητες
- Ιδιότητες
- Ειδικά Γραφήματα

Χρόνης Μωυσιάδης Ομότ. Καθηγητής ΑΠΘ
Βασίλης Καραγιάννης ΕΔΙΠ Τμ. Μαθηματικών

Ανακάλυψη της Θ. Γραφημάτων

Το 1735 επτά γέφυρες συνέδεαν τις δύο νησίδες που σχηματίζει το ποτάμι της πόλης Königsberg (Kalliningrand) στη σημερινή Ρωσσία (Ρωσσικός Θύλακας μεταξύ Λιθουανίας και Πολωνίας).



Υπάρχει τρόπος να κάνει κάποιος βόλτα ξεκινώντας από ένα σημείο και επιστρέφοντας σ' αυτό περνώντας από κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά;

Ανακάλυψη της Θ. Γραφημάτων

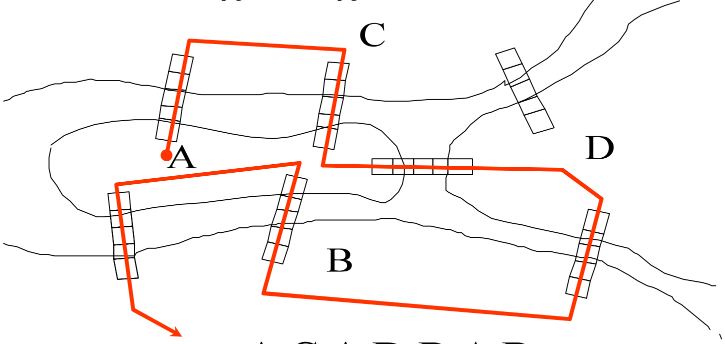
Οι κάτοικοι του Königsberg στην Κυριακάτικη βόλτα στην πόλη τους είχαν την υπόνοια ότι δεν υπάρχει διαδρομή που να περνά από όλες τις γέφυρες ακριβώς μία φορά, όμως δεν μπορούσαν να το αποδείξουν.

Ο δήμαρχος του Γκντανσκ ζήτησε από τον Λέοναρντ Όυλερ (1707-1783) να τους λύσει αυτό το πρόβλημα. Ο Όυλερ παρόλο που το θεώρησε τετριμμένο και χωρίς σχέση με τα μαθηματικά, ασχολήθηκε με αυτό. Σε κάποιες πρώτες σκέψεις του, που τις συζήτησε με τον Giovani Marinoni έναν Ιταλό μαθηματικό, φάνηκε ότι πίστευε πως το πρόβλημα δεν θα λύνονταν ούτε με γεωμετρία ούτε και με άλγεβρα.

Τότε σκέφτηκε τον Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς (1646-1716), συγγραφέα του De Arte Combinatoria, Γερμανού πανεπιστήμονα που όρισε μια γεωμετρία θέσης (geometria situs) όπου παίζει ρόλο μόνο η θέση και όχι το μέγεθος, όπως στην άλγεβρα μετρά μόνο το μέγεθος και όχι η θέση (τοπολογία)

Ανακάλυψη της Θ. Γραφημάτων

Στις 26-8-1735 ο Όυλερ παρουσίασε μια εργασία όπου αποδείκνυε ότι δεν έχει λύση το πρόβλημα. Η βασική του σκέψη ήταν ότι κάθε διαδρομή που περνάει από τις 7 γέφυρες, μπορεί να παρασταθεί με μια ακολουθία γραμμάτων που παριστάνουν τις τέσσερις στεριές A, B, C, D, που ενώνουν αυτές οι γέφυρες. Και για να λύνεται το πρόβλημα, πρέπει η ακολουθία της λύσης να αποτελείται από 8 γράμματα.

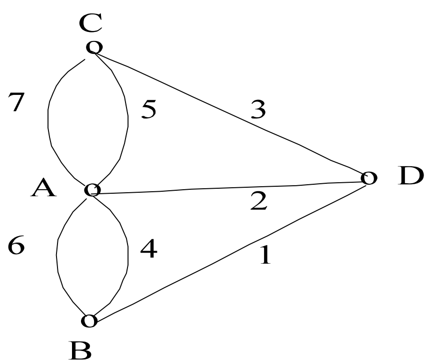


A C A D B A B.....

Πρέπει το A να εμφανίζεται 3 φορές, ενώ τα B, C, D να εμφανίζονται από δύο φορές.

Δηλαδή απαιτούνται 3+2+2+2=9>8 γράμματα

Σημερινή παράσταση του προβλήματος, ως γράφημα

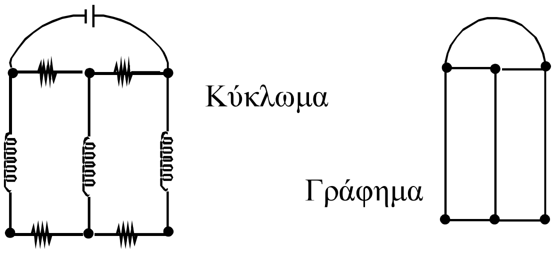


Γίνεται μονοκονδυλιά;

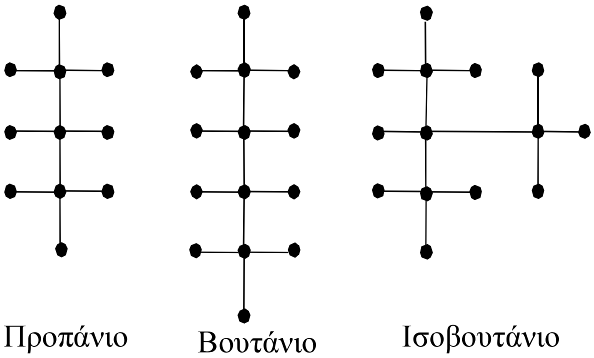
Άλλα ιστορικά

Σε κυρτά στερεά
H+S=A+2
H=έδρες , A=ακμές,
S=στερεές γωνίες

Euler (1750)

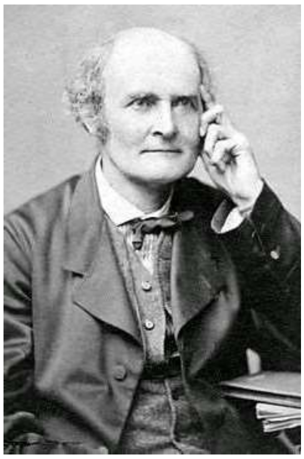


Kirchhoff (1847)



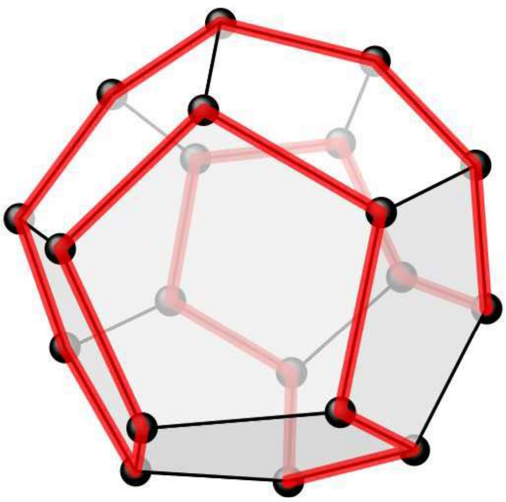
Cayley (1857)

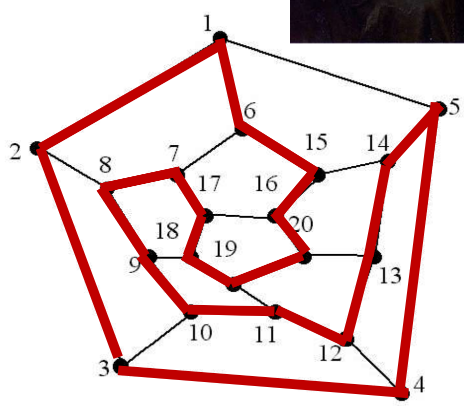
Arthur Cayley (1821-1895)



Sir *William Rowan Hamilton (1805-1865)*

Στα 1859 ανέπτυξε ένα παιχνίδι, που πουλήθηκε στο Δουβλίνο και βασίζονταν στην εύρεση μιας διαδρομής που να περνά από όλες τις κορυφές ενός 20-κόρυφου (12-εδρου) ακριβώς μία φορά δια μέσου των ακμών του και να επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης.
Το παιχνίδι δεν είχε ποτέ μεγάλη επιτυχία.





1, 2, 3, 4, 5, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 17, 18, 19, 20, 16, 15, 6, 1

Sir William Rowan Hamilton (1859)

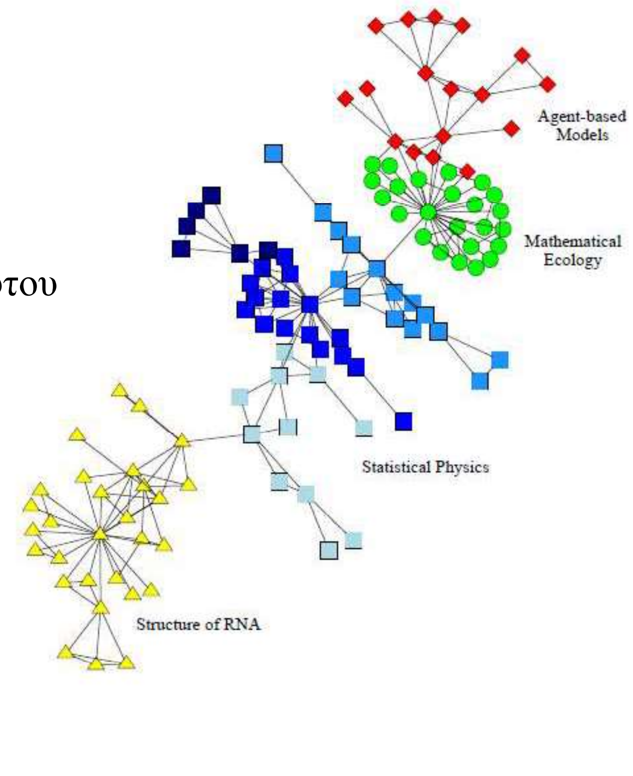
Σχεδιασμός Γραφημάτων

- Διάφορα προγράμματα και πακέτα σχεδιάζουν γραφήματα με διάφορους αλγορίθμους, με καθέναν από τους οποίους αποκαλύπτονται, με αισθητικό τρόπο, άλλες ιδιότητες.
- Ορισμένα από τα πακέτα αυτά είναι τα:
  - igraph (με την R)
  - Mathematica
  - NodeXL
  - ……
- Τα πακέτα αυτά διαθέτουν συναρτήσεις που υπολογίζουν χρήσιμες παραμέτρους των γραφημάτων, ή εκτελούν αλγορίθμους αναζήτησης για διάφορων ειδών βελτιστοποιήσεις

Πραγματικά δίκτυα: Κοινότητες σε κοινωνικά δίκτυα

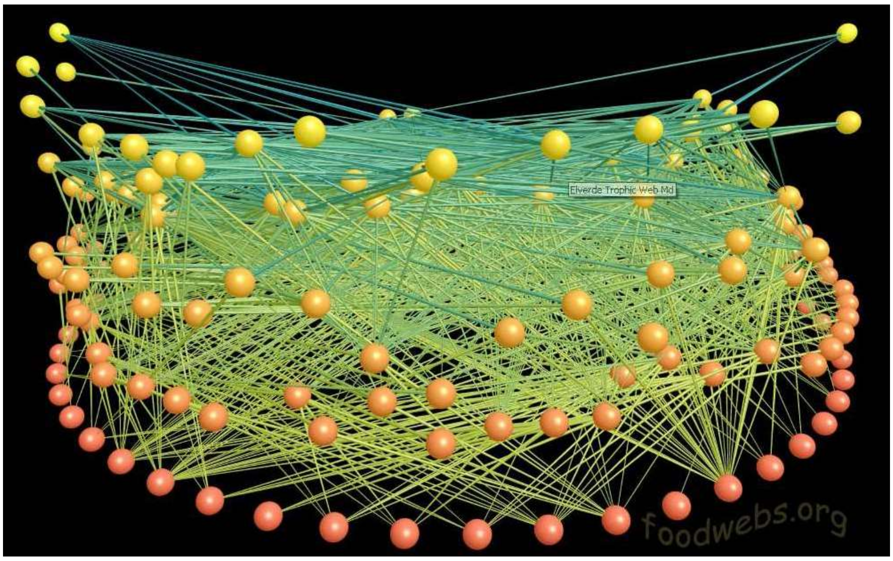
Girvan and Newman, 2001.

Η γιγάντια συνιστώσα του δικτύου επιστημονικών εργασιών του Ινστιτούτου Santa Fe (τα χρώματα παριστάνουν συνεργαζόμενες κοινότητες)



Πραγματικά δίκτυα: Οικοσυστήματα

Πως μπορεί η παράσταση της τροφικής διαδικασίας με μορφή δικτύου να αποκαλύψει νέες οπτικές των προβλημάτων των οικοσυστημάτων;

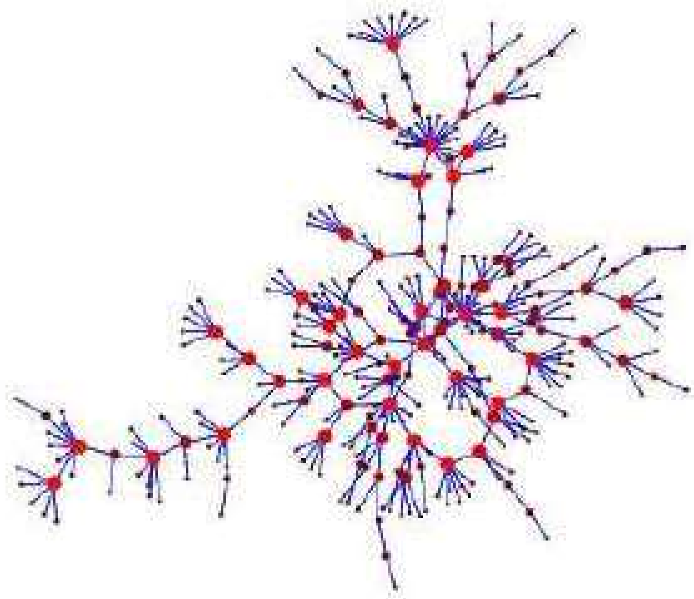


Martinez, 1991, 2004. El Verde ecosystem studies. Κόκκινες κορυφές παριστάνουν βασικά είδη, όπως φυτά και αποσαθρώματα. Πορτοκαλί κορυφές παριστάνουν ενδιάμεσα είδη. Κίτρινες κορυφές παριστάνουν ανώτερα είδη ή κυρίαρχα αρπακτικά. Οι ακμές δείχνου αλληλεπίδραση ειδών και είναι παχύτερες προς την πλευρά του αρπακτικού.

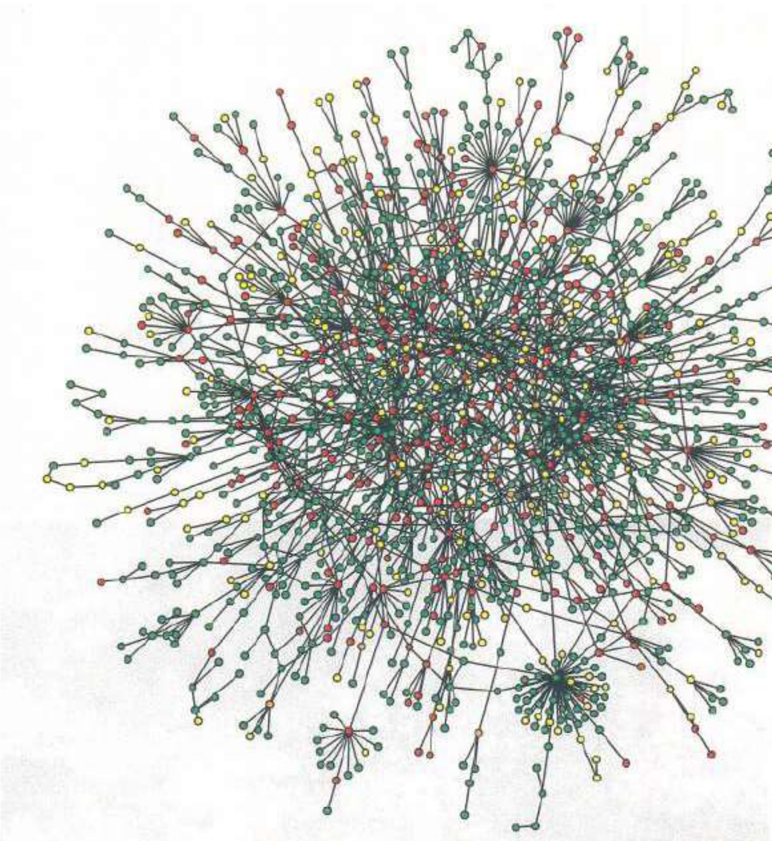
Πραγματικά δίκτυα: Διάδοση Ασθενειών

Potterat et al., 2002, Newman 2003.

Δίκτυο σεξουαλικών επαφών μεταξύ ατόμων, που αναδεικνύει μια δομή επικινδυνότητας για τη διάδοση του ιού HIV στο Colorado Springs

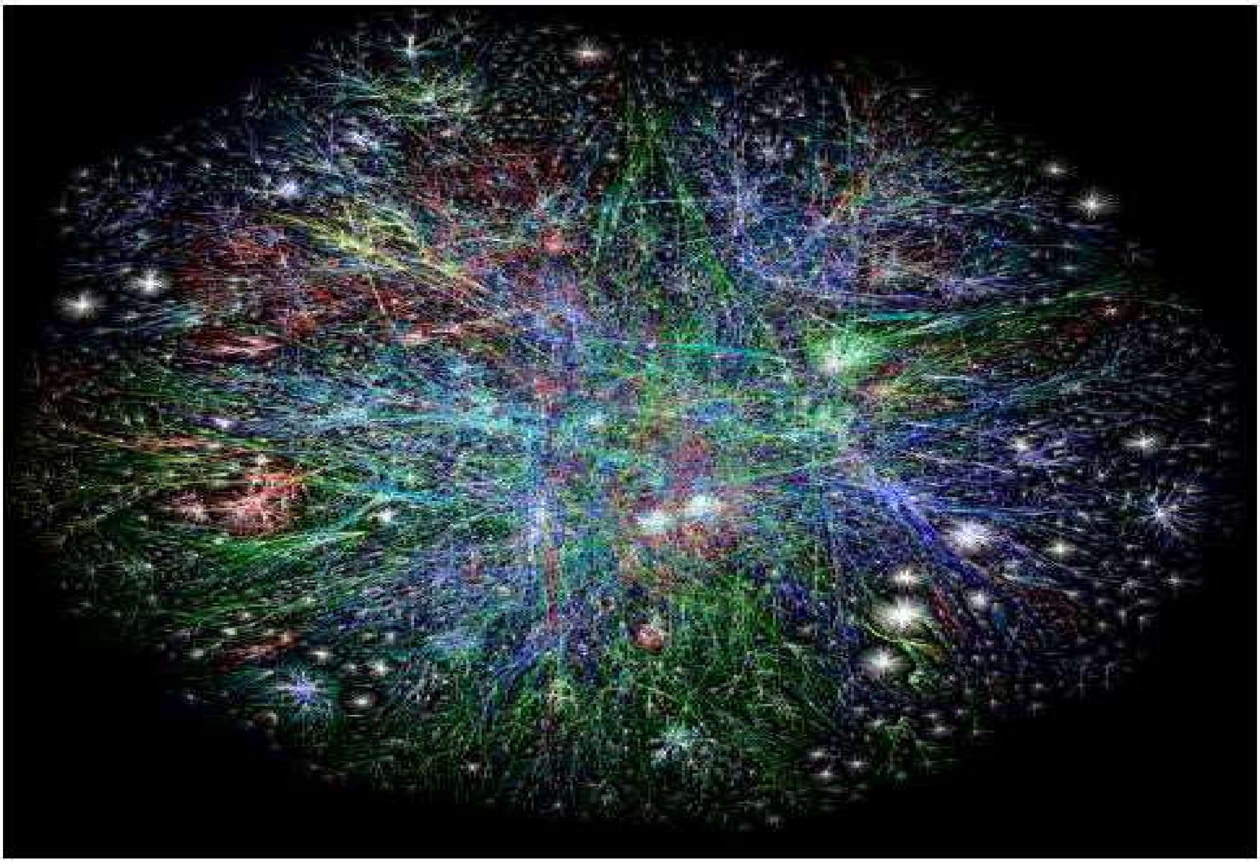


Πραγματικά δίκτυα: Βιολογικά δίκτυα



Barabási and Bonabeau, 2003.
Δίκτυο αλληλεπιδράσεων πρετεϊνών.
Πρωτεΐνες που παριστάνονται με κορυφές υψηλού βαθμού (ή hubs) και έχουν κόκκινο χρώμα είναι απαραίτητες για τη ζωή του κυττάρου.

Διαδίκτυο

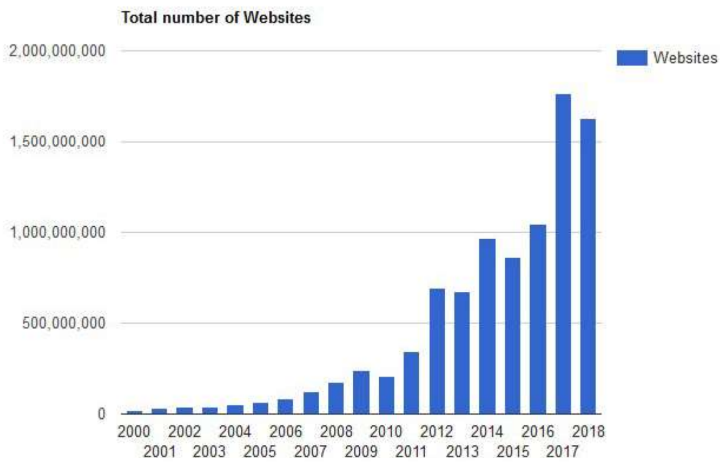


WWW και ο Tim Berners Lee

Ο Τιμ Μπέρνερς Λι γεννήθηκε στο Λονδίνο στις 8 Ιουνίου 1955. Σπούδασε Φυσική στην Οξφόρδη απ' όπου αποφοίτησε το 1976. Επειδή συνελήφθη ως χάκερ αποκλείστηκε από τη χρήση του πανεπιστημιακού υπολογιστή κατά τις σπουδές του. Εργάστηκε σε διάφορες επιχειρήσεις ως προγραμματιστής/σύμβουλος μέχρι το 1980, οπότε και μετακλήθηκε από το CERN, ως Σύμβουλος Μηχανικός Προγραμματισμού. Εκεί οραματίστηκε ένα παγκόσμιο σύστημα διακίνησης πληροφοριών, ταχύτερο και ολοσχερώς αποκεντρωμένο, ανεξάρτητο της πλατφόρμας του κάθε υπολογιστή, πολύγλωσσο και χωρίς γραφειοκρατικούς περιορισμούς και καθυστερήσεις. Με βάσεις τις εργασίες των Βάνεβαρ Μπους (Vannevar Bush), Τεντ Νέλσον (Ted Nelson) και Ντάγκλας Ένγκλεμπαρτ (Douglas Englebart), δημιούργησε το πρωτόκολλο http (hypertext transfer protocol), δηλαδή τη "γλώσσα" επικοινωνίας των υπολογιστών στο Διαδίκτυο και, παράλληλα, αυτό που σήμερα αποτελεί το URL Ενιαίο Χαρακτηριστικό Εντοπισμού (Uniform Resource Locator). Το 1990 ολοκλήρωσε τη δημιουργία του πρώτου προγράμματος περιήγησης (browser), και τη γλώσσα HTML (HyperText Markup Language). Στη συνέχεια δημιούργησε τον πρώτο server, τον info.cern.ch., διαθέτοντας παράλληλα ελεύθερα το πρόγραμμα περιήγησης και το λογισμικό του server μέσω του Διαδικτύου που το ονόμασε «Παγκόσμιο Ιστό» (World Wide Web) και είναι σήμερα η δημοφιλέστερη στο Διαδίκτυο, με περισσότερες από 25 δισεκατομμύρια δημοσιευμένες σελίδες και περίπου 1,3 δισ. χρήστες παγκοσμίως[2][3], αριθμός που αυξάνεται μέρα με την ημέρα. Η επινόηση του Τιμ Μπέρνερς Λι μεταμόρφωσε τον κόσμο, αφού άλλαξε τα στάνταρ όχι μόνο στην ανταλλαγή πληροφοριών, αλλά και σε θέματα της καθημερινότητας, όπως διακίνηση και εμπόριο αγαθών, εκπαίδευση, ταξίδια, ενημέρωση, χρηματοοικονομικές συναλλαγές. Είναι αυτή που πραγματικά άνοιξε το Διαδίκτυο σε πολύ ευρεία μάζα χρηστών σε ολόκληρο τον πλανήτη.

http://www.internetlivestats.com/watch/websites/

Στις 7/10/2019

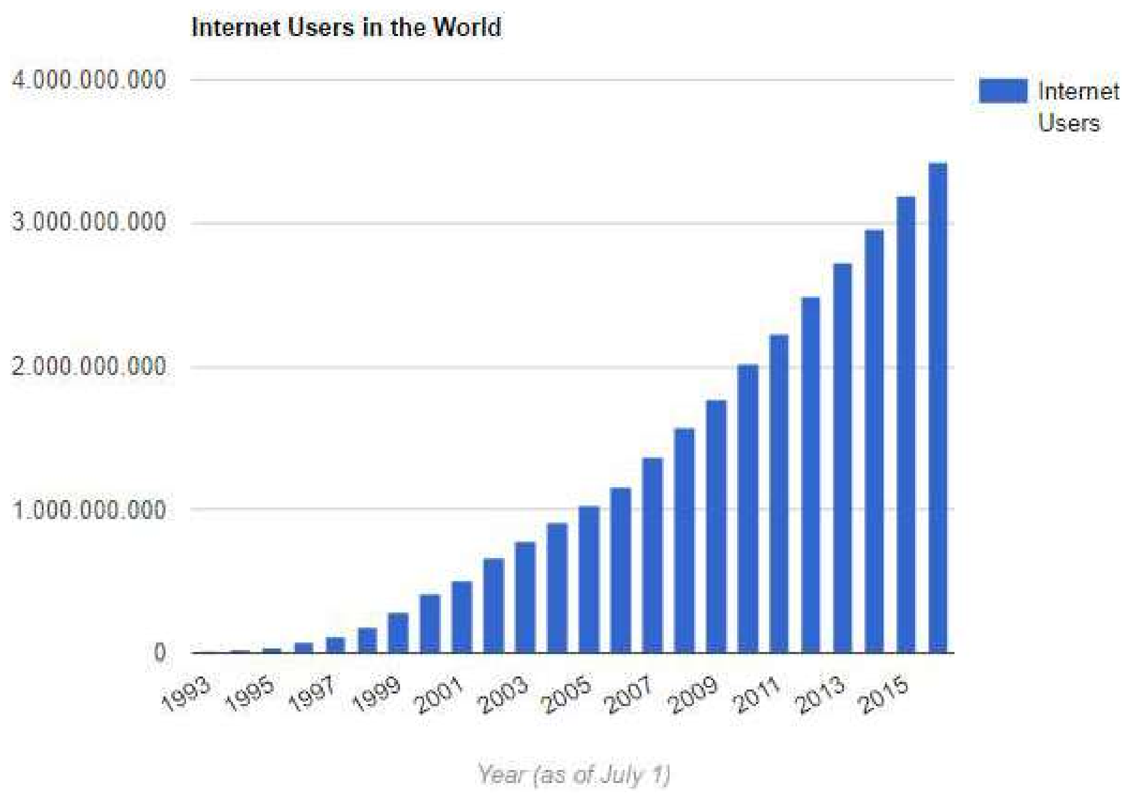


By "**Website**" we mean **unique hostname** (a name which can be resolved, using a name server, into an IP Address).
It must be noted that around 75% of websites today are not active, but parked domains or similar. [1]

Εξέλιξη Χρηστών του Διαδικτύου
http://www.internetlivestats.com/internet-users/

Year	Internet Users**	Penetration (% of Pop)	World Population	Non-Users (Internetless)	1Y User Change	1Y User Change	World Pop. Change
2016*	**3,424,971,237**	46.1 %	7,432,663,275	4,007,692,038	7.5 %	238,975,082	1.13 %
2015*	**3,185,996,155**	43.4 %	7,349,472,099	4,163,475,944	7.8 %	229,610,586	1.15 %
2014	**2,956,385,569**	40.7 %	7,265,785,946	4,309,400,377	8.4 %	227,957,462	1.17 %
2013	**2,728,428,107**	38 %	7,181,715,139	4,453,287,032	9.4 %	233,691,859	1.19 %
2012	**2,494,736,248**	35.1 %	7,097,500,453	4,602,764,205	11.8 %	262,778,889	1.2 %
2011	**2,231,957,359**	31.8 %	7,013,427,052	4,781,469,693	10.3 %	208,754,385	1.21 %
2010	**2,023,202,974**	29.2 %	6,929,725,043	4,906,522,069	14.5 %	256,799,160	1.22 %
2009	**1,766,403,814**	25.8 %	6,846,479,521	5,080,075,707	12.1 %	191,336,294	1.22 %
2008	**1,575,067,520**	23.3 %	6,763,732,879	5,188,665,359	14.7 %	201,840,532	1.23 %
2007	**1,373,226,988**	20.6 %	6,681,607,320	5,308,380,332	18.1 %	210,310,170	1.23 %
2006	**1,162,916,818**	17.6 %	6,600,220,247	5,437,303,429	12.9 %	132,815,529	1.24 %
2005	**1,030,101,289**	15.8 %	6,519,635,850	5,489,534,561	12.8 %	116,773,518	1.24 %
2004	**913,327,771**	14.2 %	6,439,842,408	5,526,514,637	16.9 %	131,891,788	1.24 %
2003	**781,435,983**	12.3 %	6,360,764,684	5,579,328,701	17.5 %	116,370,969	1.25 %
2002	**665,065,014**	10.6 %	6,282,301,767	5,617,236,753	32.4 %	162,772,769	1.26 %
2001	**502,292,245**	8.1 %	6,204,310,739	5,702,018,494	21.1 %	87,497,288	1.27 %
2000	**414,794,957**	6.8 %	6,126,622,121	5,711,827,164	47.3 %	133,257,305	1.28 %

Η εξέλιξη με ραβδόγραμμα



Μερικά στατιστικά στοιχεία

Χώρες με το μεγαλύτερο αριθμό χρηστών Internet (7/10/2019)

http://www.internetworldstats.com/top20.htm

Κίνα, Ινδία, ΗΠΑ, Βραζιλία, Ινδονησία, Ιαπωνία, Νιγηρία, Ρωσία, Μπαγκλαντές, Μεξικό, Γερμανία, Τουρκία, Φιλιππίνες, Βιετνάμ, Βρετανία, Ιράν, Γαλλία, Ταιλάνδη, Ιταλία, Αίγυπτος

Χώρες με τη μεγαλύτερη διάδοση χρηστών Internet στον πληθυσμό τους (πλήθος χρηστών δια πληθυσμού)

http://www.internetworldstats.com/top25.htm

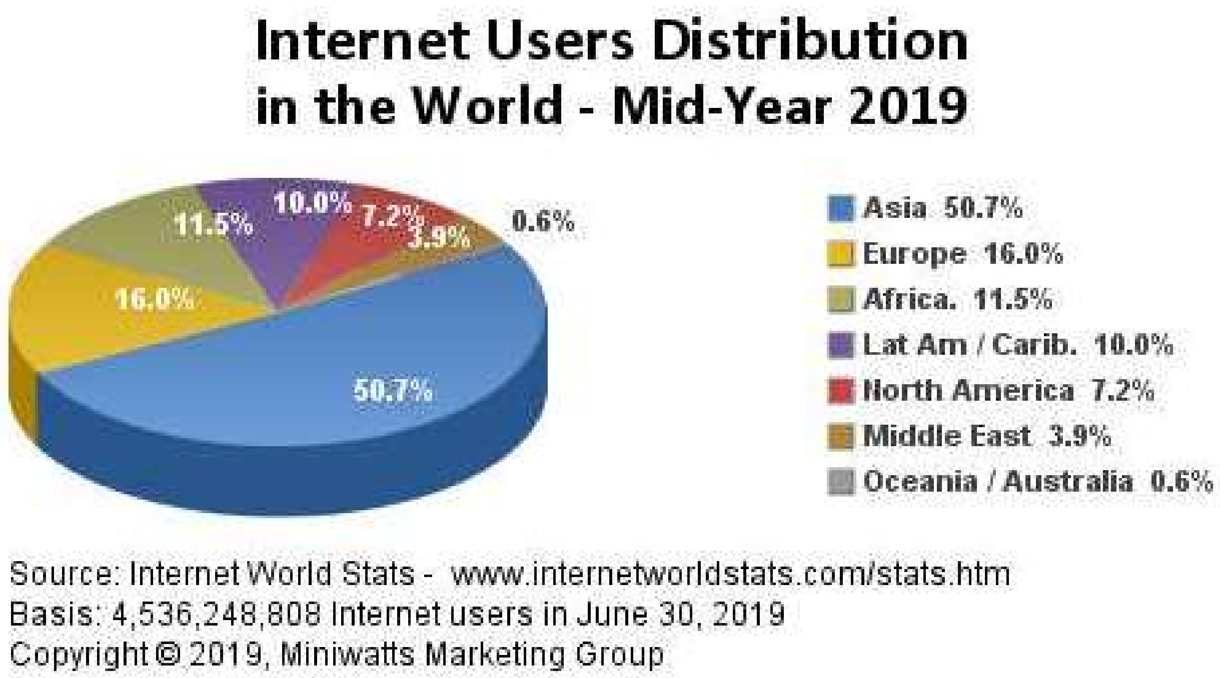
Κουβέϊτ (96,9%), Κατάρ (96,5%), Νησιά Φώκλαντ (95,3%), Βερμούδα (95,0%), Ισλανδία (94,8%), Ανδόρα (94,6%), Μπαχραίν (94,0%), UAE (94,0%), Νορβηγία (94,0%), …….

Ελλάδα (72,9%) πρόπερσι είχε 59.8%

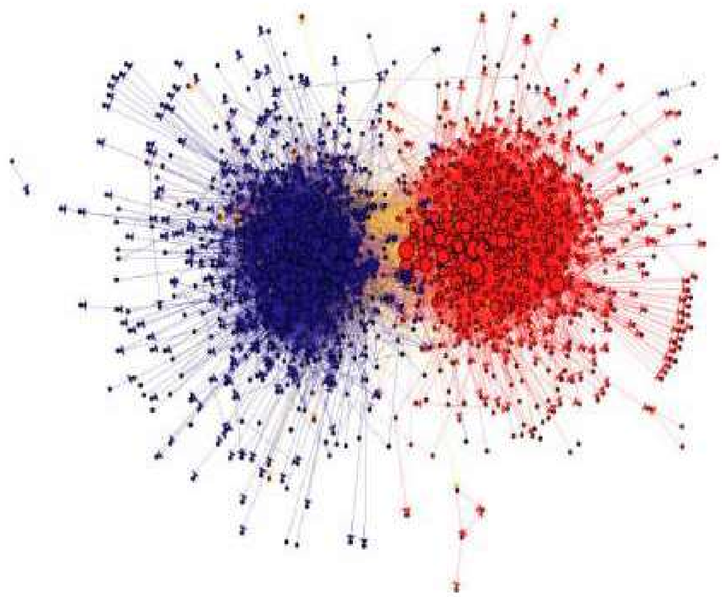
https://www.internetworldstats.com/stats9.htm

Οι χρήστες ανά Ήπειρο

https://www.internetworldstats.com/stats.htm



Πολιτικές διασυνδέσεις ως δίκτυο



Adamic and Glance, 2005.
Το δίκτυο των πολιτικών μπλογκς πριν τις προεδρικές εκλογές του 2004 στις ΗΠΑ αποκαλύπτουν δύο φυσικές και καλά διαχωρισμένες συστάδες..

Μία ταινία για το διαδίκτυο

Κυκλοφόρησε τον Αύγουστο του 2016 μια σύγχρονη ταινία που πραγματεύεται τη γέννηση του Internet, και την εξέλιξή του σε διάφορα δίκτυα.

“Lo and Behold,

Reveries of the Connected World”

Το επίσημο site της ταινίας είναι:
http://www.loandbeholdfilm.com/

Βασικές έννοιες

Γράφημα (graph) είναι ένα ζεύγος συνόλων $G = (V, E)$
V : σύνολο n στοιχείων $v_1, v_2, \dots, v_n$ και
E : υποσύνολο των 2-υποσυνόλων του V
$E \subseteq [V]^2$, όπου $[V]^2 = \{\{u, v\}: u, v \in V,\ u \neq v\}$
τα 2-υποσύνολα του V

Συμβολίζουμε:

$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n$ κορυφές (vertices. nodes)
$E(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, m$ ακμές (edges, arcs)
όπου $x_i = \{u_i, v_i\}$ με $u_i \in V(G), v_i \in V(G), i = 1,2, \dots, n$
ή απλούστερα $x_i = u_i v_i$

Γενικά για ακμές ή κορυφές του G γράφουμε:

$x_i \in G$ ή $u_i \in G$

$|V(G)| = n$: τάξη του γραφήματος G.

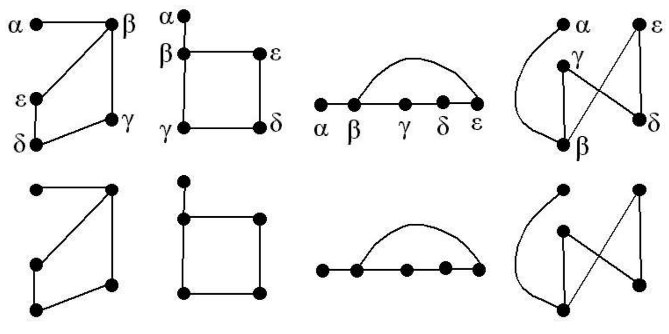
Βασικές έννοιες

Η απεικόνιση του G γίνεται με τελείες ή κυκλάκια κτλ, που συμβολίζουν τις κορυφές και γραμμές που ενώνουν τις κορυφές και συμβολίζουν τις ακμές.
Οι κορυφές $u, w \in V(G)$, λέγονται *διαδοχικές ή άμεσα συνδεδεμένες* αν η ακμή $\{u, w\} \in E(G)$.

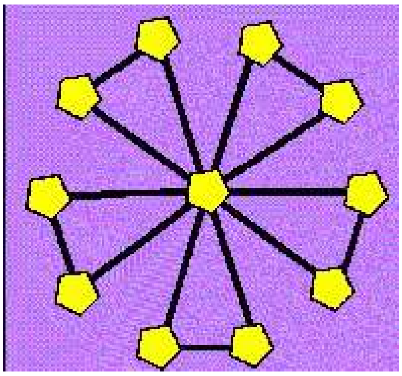
Η πληροφορία που εμπεριέχει το γράφημα δεν αλλοιώνεται από τον τρόπο απεικόνισής του, όμως πολλές φορές ο τρόπος απεικόνισής του μπορεί να αποκρύψει ή να αποκαλύψει αυτήν την πληροφορία.

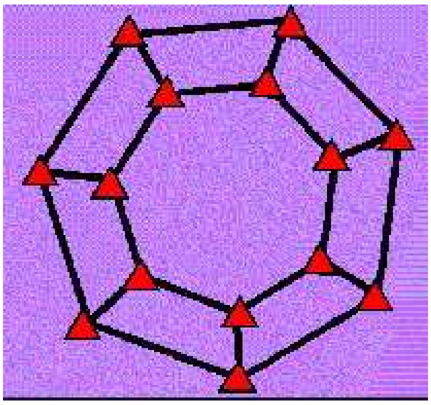
$V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$,
$E = \{\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\gamma, \delta\}, \{\delta, \varepsilon\}, \{\beta, \varepsilon\}\}$

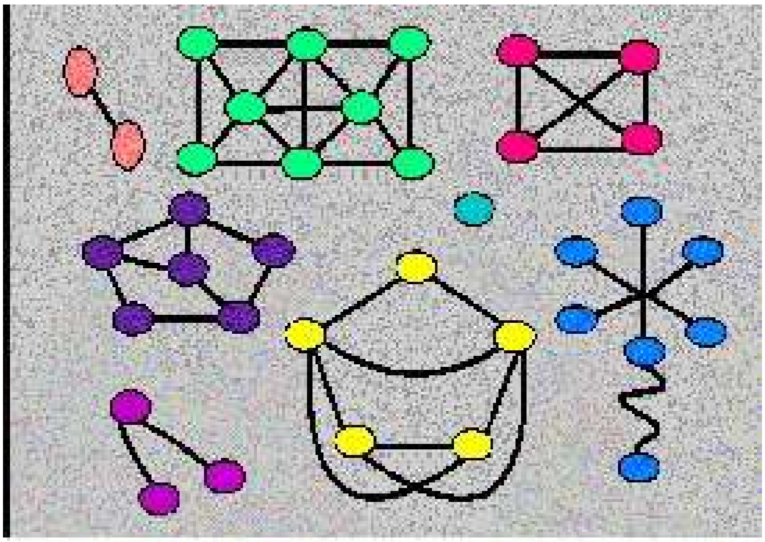
σημασμένα
(labeled)



Παραδείγματα



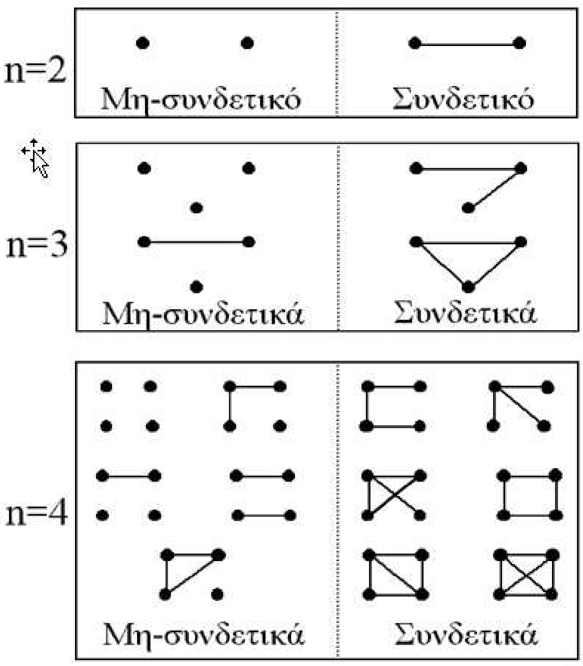




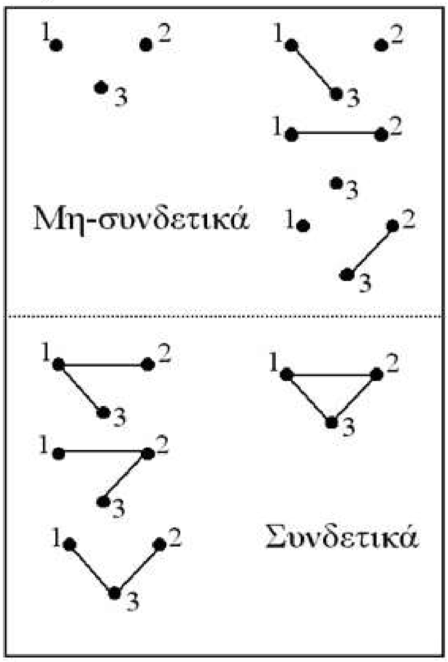
Καταγραφή Γραφημάτων

Γραφήματα με $|V(G)| = n = 2, 3, 4$

Μη σημασμένα



Σημασμένα για n=3



Ισομορφισμός

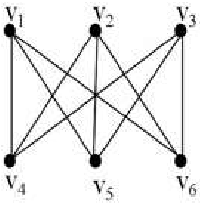
Γραφήματα που εμπεριέχουν ακριβώς την ίδια πληροφορία ονομάζονται ισόμορφα και αυτό φανερώνεται από την ύπαρξη μιας αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας φ τέτοιας ώστε:

Αν $G(V,E) \simeq G'(V',E')$, τότε υπάρχει μια
$1-1$ συνάρτηση φ: $V \rightarrow V'$, τέτοια ώστε για κάθε
$$xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

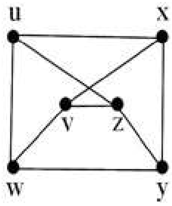
Είναι τα G_1, G_2 ισόμορφα γραφήματα;

Όμοια τα G_1, G_3;

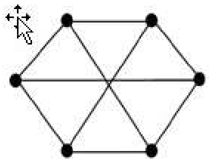
v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
φ(v)	u	v	y	w	x	z



G_1



G_2



G_3

Αρκεί να ονομάσουμε εναλλάξ τις κορυφές με v_1, v_2, v_3 και τις υπόλοιπες v_4, v_5, v_6 .

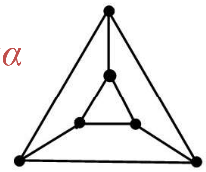
Βαθμός κορυφής

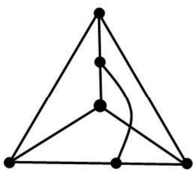
Το πλήθος των ακμών που ένα από τα άκρα τους είναι η κορυφή v, λέγεται *βαθμός* (degree) ή *αξία* (valency) της κορυφής v και συμβολίζεται $\delta(v)$.

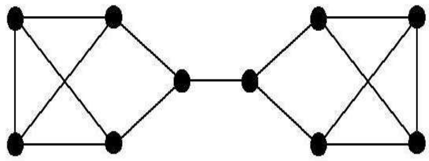
Ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $\delta(G)$ και ο μέγιστος βαθμός με $\Delta(G)$. Προφανώς ισχύει: $\delta(G) \leq \Delta(G)$.

$$\delta(G) = \min_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\} \quad \text{και} \quad \Delta(G) = \max_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\}$$

δ(G)=Δ(G)=k
κανονικό γράφημα
τάξης k.
k=3 κυβικό

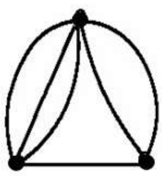






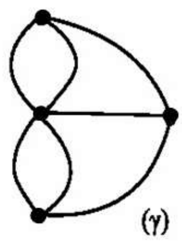
πολλαπλά γραφήματα

και ψευδογραφήματα



(α)

(β)



(γ)

Κύκλοι και μονοπάτια

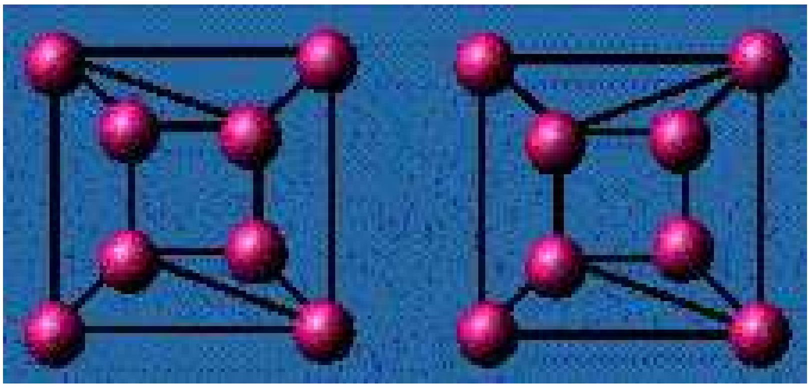
- Η ακολουθία

  $$v_1\{v_1, v_2\}v_2\{v_2, v_3\}v_3\{v_3, v_4\} \dots \{v_{n-1}, v_n\}v_n \, ,$$

  ή απλούστερα $v_1 v_2 v_3 v_4 \dots v_n$,

  λέγεται ***περίπατος*** ή ***άλυσσος*** (walk ή chain).
- Περίπατος που έχει όλες τις ακμές διαφορετικές λέγεται ***διαδρομή*** (trail).
- Περίπατος με όλες τις κορυφές διαφορετικές (άρα και ακμές διαφορετικές), λέγεται ***μονοπάτι*** (path).
- Αν $v_n = v_1$ τότε έχουμε αντίστοιχα ***κλειστό περίπατο***, ***κλειστή διαδρομή***, ***κύκλο*** (cycle ή circuit).
- Αν $\forall u, v \in V(G)$ υπάρχει περίπατος από u σε v, τότε το G λέγεται ***συνδετικό***. Αλλιώς λέγεται ***μη-συνδετικό***, ή ***ασυνδετικό***.

Παράδειγμα

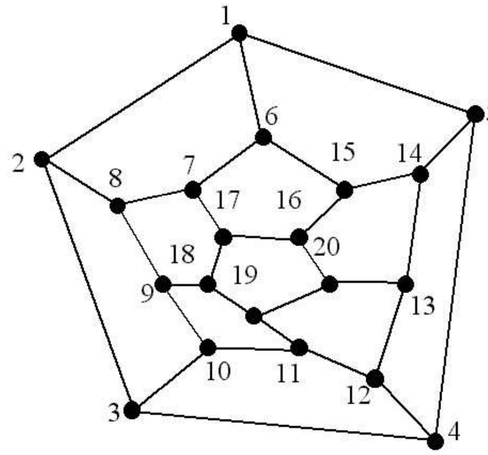


Βρέστε κύκλους μήκους 3, 4, 5, 6, 7, 8 στα δύο γραφήματα.

Εξετάστε τους κύκλους μήκους 4 και τους βαθμούς των κορυφών στα δύο γραφήματα.

Είναι τα δύο γραφήματα ισόμορφα;

Κύκλοι και μονοπάτια



1, 2, 3, 4, 5, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 17, 18, 19, 20, 16, 15, 6, 1

Sir William Hamilton (1859)

Κύκλος Hamilton

[1, 2, 3, 10, 3, 10, 9, 8] είναι περίπατος.

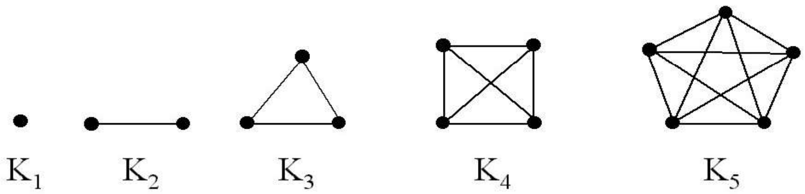
[1, 6, 7, 17, 18, 9] είναι διαδρομή.

[1, 6, 7, 17, 18, 9, 8, 2, 1] είναι κύκλος.

Εδώ κάθε κλειστή διαδρομή είναι κύκλος (γιατί;)

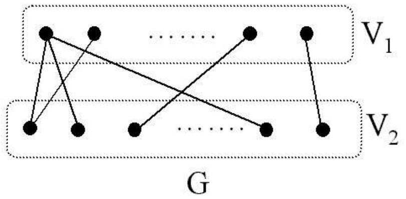
Πλήρη γραφήματα

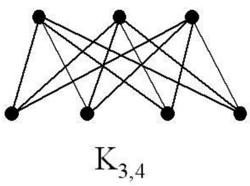
- Αν κάθε κορυφή του G συνδέεται άμεσα με οποιαδήποτε άλλη, τότε το G λέγεται πλήρες γράφημα και συμβολίζεται K_n.
- Αν καμία κορυφή του G δεν συνδέεται άμεσα με άλλη, (δηλαδή G δεν έχει ακμές), τότε το G λέγεται *πλήρως ασυνδετικό* γράφημα και συμβολίζεται A_v.

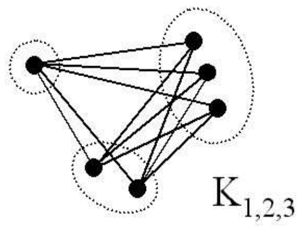


πλήρη γραφήματα

Αν $V(G)=V_1 \cup V_2$, και E(G) δεν περιέχει ακμή που συνδέει δύο κορυφές του V_1 ή του V_2, το G λέγεται *διγράφημα ή διμερές γράφημα*. Αν υπάρχουν όλες οι επιτρεπτές ακμές λέγεται *πλήρες διγράφημα* και συμβολίζεται $K_{m,n}$. Γενικεύεται.





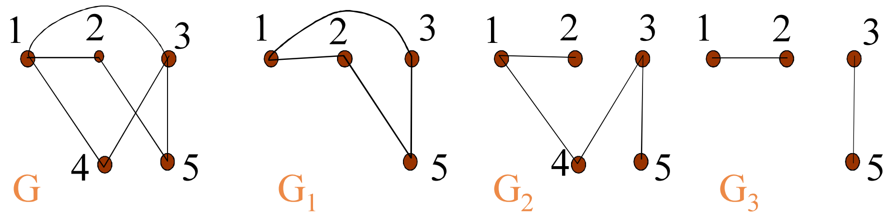


Υπογραφήματα

$G = (V, E)$, $H = (U, F)$ δύο γραφήματα.
ένωση $G \cup H = (V \cup U, E \cup F)$ τομή $G \cap H = (V \cap U, E \cap F)$
Αν $G \cap H = \emptyset$ τα γραφήματα G και H λέγονται ξένα.
Αν ισχύει $U \subseteq V$ και $F \subseteq E$, τότε το H λέγεται *υπογράφημα* του G,
ενώ το G λέγεται *υπεργράφημα* του H. Συμβολίζουμε $H \subseteq G$.

Αν $U \subseteq V$, τότε $G[U] = (U, E_U)$, όπου $E_U = \{x : x = \{u, v\} \in E, u \in U, v \in U\}$ λέγεται φέρον υπογράφημα του G επί του U

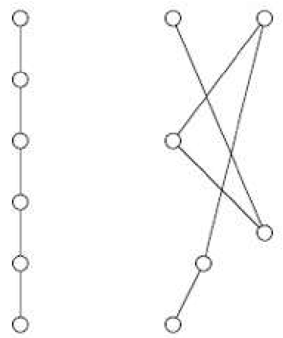
Αν $G = (V, E)$ και $H = (V, F)$ όπου $F \subseteq E$ (γνήσιο) τότε G λέγεται υπογράφημα ζεύξης (ή επικαλύπτον υπογράφημα, spanning subgraph)



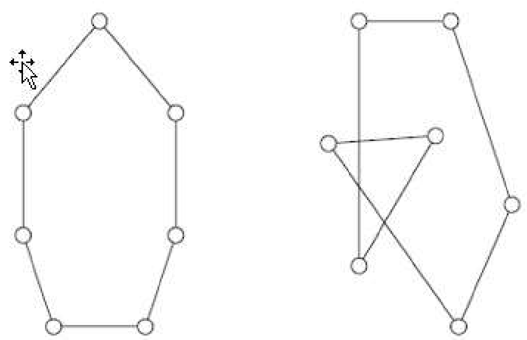
G_i υπογρ. του G
G_1 φέρον επί {1,2,3,5}
G_2 υπογρ. ζεύξης
$G_1 \cup G_2 = G$
$G_1 \cap G_2 = G_3$

Αποστάσεις

- Μήκος (length) περιπάτου, διαδρομής, μονοπατιού ή κύκλου λέγεται το πλήθος των ακμών του.
- Ένα μονοπάτι μήκους n συμβολίζεται με P_n.
- Ένας κύκλος μήκους n συμβολίζεται με C_n.



Δύο μονοπάτια P_5



Δύο κύκλοι C_7

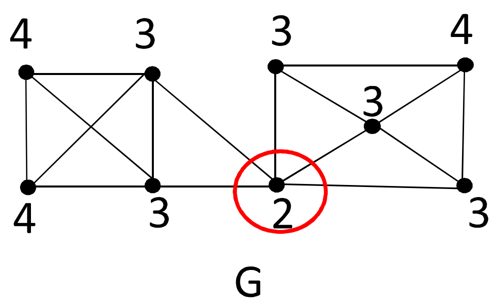
Αποστάσεις

- Το συντομότερο μονοπάτι που συνδέει δύο κορυφές u, v του G, λέγεται **γεωδαισιακή**.
- Το μήκος της γεωδαισιακής των u, v λέγεται **απόσταση** (distance) των u, v και συμβολίζεται $d(u, v)$. Η $d(u, v)$ είναι απόσταση, δηλ.
  - $d(u, v) \geq 0$
  - $d(u, v) = 0$, αν και μόνον αν $u \equiv v$
  - $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (τριγωνική)
- Το μήκος του μακρύτερου μονοπατιού στο G, δηλαδή το μέγιστο των αποστάσεων μεταξύ των κορυφών του G, λέγεται **διάμετρος** $d(G)$.

Εκκεντρότητα

Είναι η απόσταση μιας κορυφής u από την πλέον απομακρυσμένη κορυφή του G (ως προς την u), δηλ.:

$$\mathrm{E}(u) = \max(dist(u, v), \forall\, v \in V)$$



Οι κορυφές στο G σημειώνονται με την εκκεντρότητά τους

Η κορυφή ή το σύνολο κορυφών με την ελάχιστη εκκεντρότητα λέγεται κέντρο. Εδώ είναι το {2}

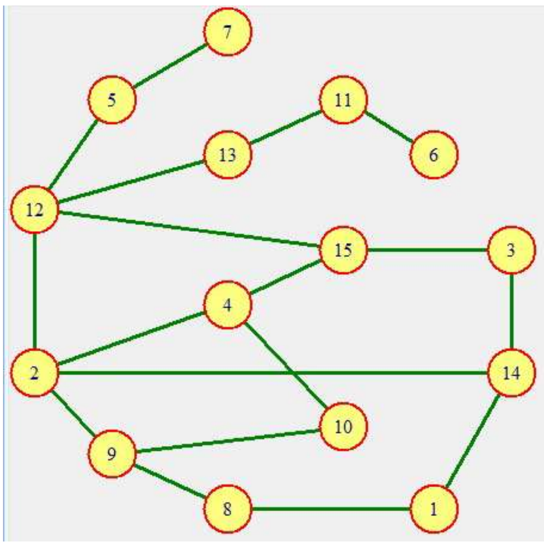
Παράδειγμα

G:ένα γράφημα που αντιστοιχεί σε υποσύνολο των δρόμων ενός χάρτη, με $V(G) = \{1,2,3,4,5,6\}$ και σύνολο ακμών τις σημειωμένες κόκκινες.

- $P = [1\{1,2\}2\{2,3\}3\{3,4\}4]$, μονοπάτι μήκους 4.
- $C = [2\{2,3\}3\{3,5\}5\{5,6\}6\{6,2\}2]$, κύκλος μήκους 4.
- $d(2,5) = 2, d(1,5) = d(1,4) = 3$ (αποστάσεις).
- $d(G) = 3$ (διάμετρος του G).

Ένα Γράφημα ορισμένο με τις ακμές του

Το γράφημα g με ακμές
$\{\{2,4\},\{5,7\},\{1,8\},\{2,9\},\{8,9\},\{4,10\},\{9,10\},\{6,11\},\{2,12\},\{5,12\},\{11,13\},\{12,13\},\{1,14\},\{2,14\},\{3,14\},\{3,15\},\{4,15\},\{12,15\}\}$

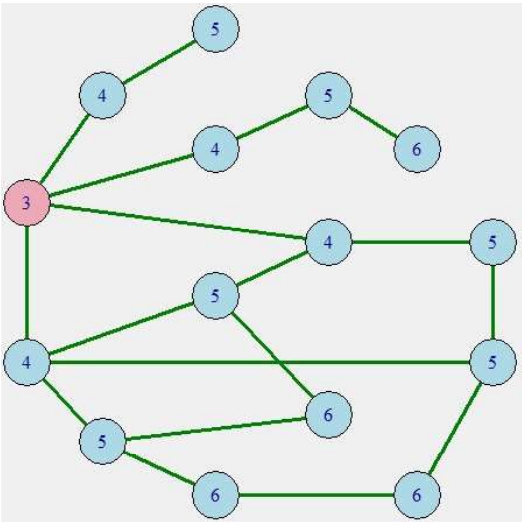


Με το πακέτο igraph:

```
require(igraph)
g=graph(c(2,4,5,7,1,8,2,9,8,9,4,
   10,9,10,6,11,2,12,5,12,11,13,
   12,13,1,14,2,14,3,14,3,15,4,
   15,12,15),dir=F)
coords<-matrix(c(31,0,37,15,6,31,
   15,15,6,24,24,0,15,37,24,0,10,
   19,15,30,26,35,0,4,6,30,22,26,
   10,19),ncol=2)
plot(g, vertex.size=20,
   layout=coords)
```

Εύρεση πίνακα αποστάσεων γραφήματος

```
D=shortest.paths(g)
d=NULL
for (i in 1:length(V(g))){
   d[i]=max(D[i,]);};d
V(g)$name <-d
plot(g, vertex.size=20, layout=coords)
V(g)$color <- "lightblue"
V(g)$color[V(g)$name==min(d)] <- "pink2"
plot(g, vertex.size=20, layout=coords)
```



Πίνακας αποστάσεων

$$D_d=(d_{ij})= \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15 \end{array} & \begin{pmatrix} 0&2&2&3&4&6&5&1&2&3&5&3&4&1&3\\ 2&0&2&1&2&4&3&2&1&2&3&1&2&1&2\\ 2&2&0&2&3&5&4&3&3&3&4&2&3&1&1\\ 3&1&2&0&3&5&4&3&2&1&4&2&3&2&1\\ 4&2&3&3&0&4&1&4&3&4&3&1&2&3&2\\ 6&4&5&5&4&0&5&6&5&6&1&3&2&5&4\\ 5&3&4&4&1&5&0&5&4&5&4&2&3&4&3\\ 1&2&3&3&4&6&5&0&1&2&5&3&4&2&4\\ 2&1&3&2&3&5&4&1&0&1&4&2&3&2&3\\ 3&2&3&1&4&6&5&2&1&0&5&3&4&3&2\\ 5&3&4&4&3&1&4&5&4&5&0&2&1&4&3\\ 3&1&2&2&1&3&2&3&2&3&2&0&1&2&1\\ 4&2&3&3&2&2&3&4&3&4&1&1&0&3&2\\ 1&1&1&2&3&5&4&2&2&3&4&2&3&0&2\\ 3&2&1&1&2&4&3&4&3&2&3&1&2&2&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Θεώρημα

Θ. Σε συνδετικά γραφήματα ισχύει

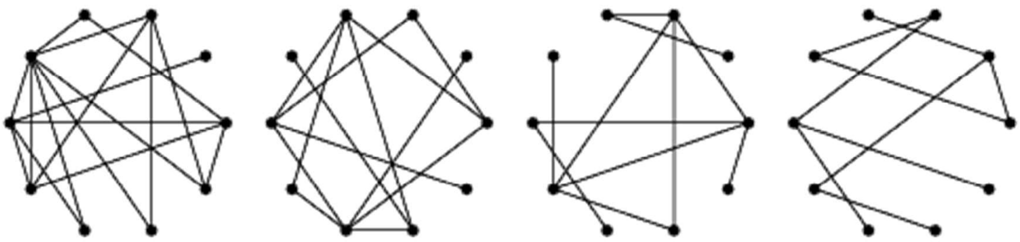
$$rad(G) \leq d(G) \leq 2 \cdot rad(G)$$

Για την απόδειξη του β΄ μέλους:
Έστω x, y δύο κορυφές που είναι άκρα μιας διαμέτρου (υπάρχουν πάντα) και μια κορυφή z του κέντρου του G. Ισχύουν τα επόμενα:

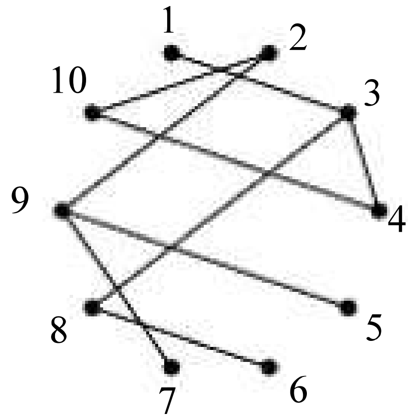
Από την υπόθεση $d(x,z) = rad(G)$ και $d(y,z) = rad(G)$

Άρα έχουμε: $d(G) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) = 2 \cdot rad(G)$

Στα παρακάτω γραφήματα διαπιστώστε ότι η διάμετρος είναι αντίστοιχα 3, 4, 5 και 7 και επαληθεύσατε το θεώρημα



Επαλήθευση για το 4ο γράφημα



Ακμές: {1,3}, {3,4}, {4,10}, {2,10}, {2,9}, {7,9}, {5,9}, {3,8}, {6,8}

Πίνακας αποστάσεων (shortest.paths(g))

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]
[1,]	0	4	1	2	6	3	6	2	5	3
[2,]	4	0	3	2	2	5	2	4	1	1
[3,]	1	3	0	1	5	2	5	1	4	2
[4,]	2	2	1	0	4	3	4	2	3	1
[5,]	6	2	5	4	0	7	2	6	1	3
[6,]	3	5	2	3	7	0	7	1	6	4
[7,]	6	2	5	4	2	7	0	6	1	3
[8,]	2	4	1	2	6	1	6	0	5	3
[9,]	5	1	4	3	1	6	1	5	0	2
[10,]	3	1	2	1	3	4	3	3	2	0

εκκεντρότητες = (6 5 5 4 7 7 7 6 6 4)
ακτίνα =4
διάμετρος =7

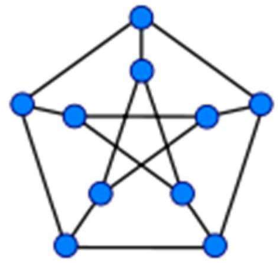
επαλήθευση

ακτίνα	διάμετρος	διπλάσια ακτίνα
4	7	8

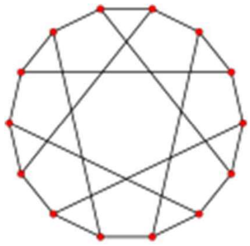
Girth (Περίμετρος)

- Η περίμετρος (girth) ενός γραφήματος είναι το μήκος του συντομότερου κύκλου που περιέχεται στο γράφημα.
- Αν το γράφημα δεν περιέχει κύκλους (είναι δέντρο ή δάσος) τότε θεωρούμε ότι έχει άπειρη περίμετρο (girth=∞)
- Ένα γράφημα με girth ≥ 4 δεν περιέχει τρίγωνα.

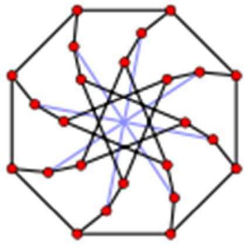
Κυβικά Γραφήματα με girth 5,6,7 και 8



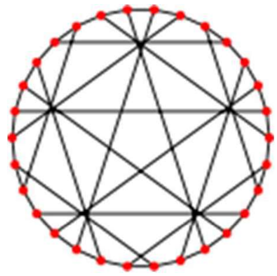
Το γράφημα Petersen έχει girth 5



Το γράφημα Heawood έχει girth 6



Το γράφημα McGee έχει girth 7



Ο 8-κλωβός Tutte έχει girth 8

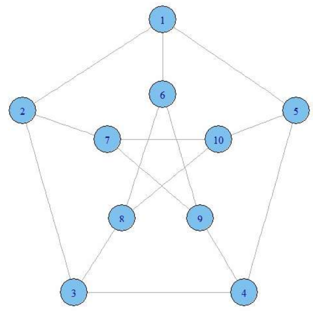
Π.χ.
```
edg=c(1,2,1,5,1,6,2,3,2,7,3,4,3,8,4,5,4,9,5,10,6,8,6,9,7,9,7,10,8,10)
g=graph(edg,dir=F)
coords<-matrix(c(24,5,12,35,42,24,16,18,29,31,33,22,0,0,22,24,18,9,9,18),
               nrow=10)
plot(g, vertex.size=30, edge.arrow.size=0.6, layout=coords)# το γράφημα Petersen
girth(g)    # το girth του g που προκύπτει 5
```

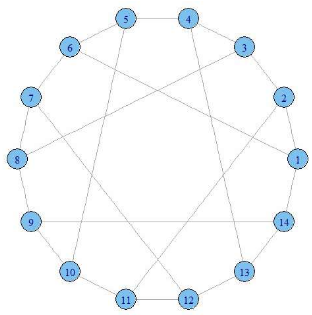

Η εντολή make_graph

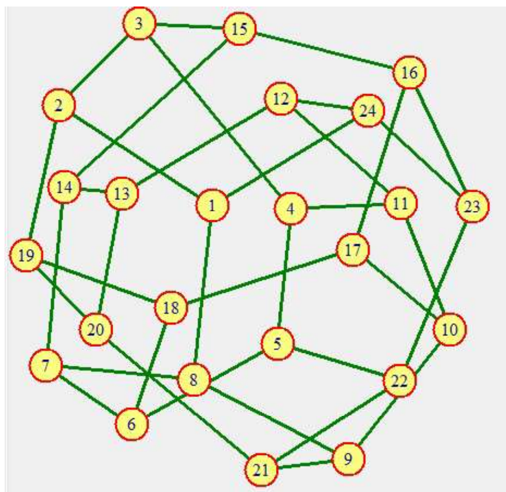
```
gP=make_graph("Petersen")
plot(gP)
coords.gP <-matrix(c(240,50,120,350,420,
240,165,185,290,315,330,220,0,0,220,240,
185,90,90,185),nrow=10);coords.gP
plot(gP, vertex.size=20,
edge.arrow.size=0.6, layout=coords.gP)
girth(gP)   #  δίνει 5

gH= make_graph("Heawood")
plot(gH, layout=layout.circle(gH))
girth(gH)   #  δίνει 6

gMG= make_graph("McGee")
tkplot(gMG)
girth(gMG)  #  δίνει 7
```





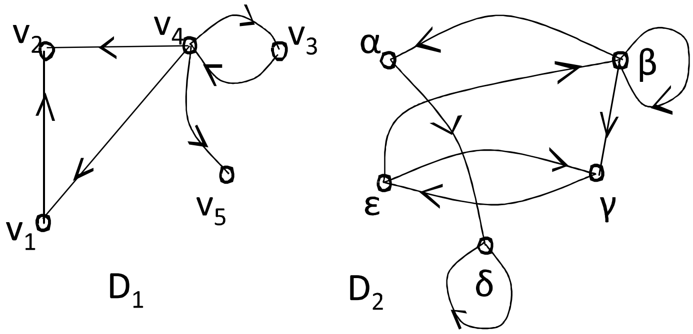


Για τα γνωστά γραφήματα λειτουργεί και η εντολή graph.famous, π.χ.

```
gP=graph.famous("Petersen")
plot(gP)
```

Κατευθυνόμενα γραφήματα

Αν στο G=(V,E), το στοιχείο (α,β) ∈E, θεωρηθεί ως διατεταγμένο ζεύγος και όχι ως 2-σύνολο, τότε G είναι κατευθυνόμενο.



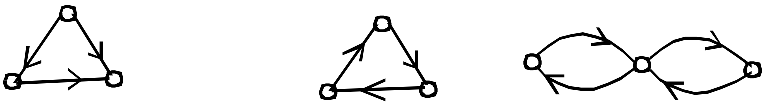
$\delta_-(v) = d_{in}(v)$ *έσω-βαθμός*

$\delta_+(v) = d_{out}(v)$ *έξω-βαθμός*

ασθενικά συνδετικό

μονόδρομα συνδετικό

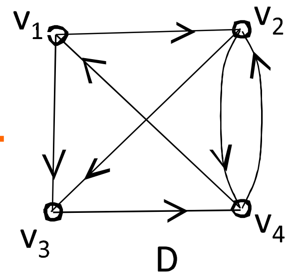
ισχυρά συνδετικό



Μονόδρομα συνδετικό

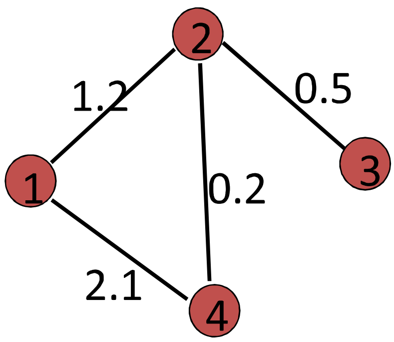
Ισχυρά συνδετικά

v_1v_2 , $v_2v_4v_1$,
v_1v_3 , $v_3v_4v_1$,
$v_1v_2v_4$, v_4v_1 ,
……………………………

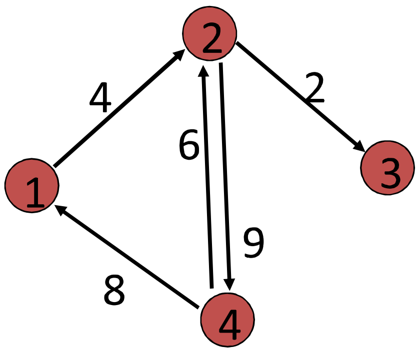


Σταθμισμένα Γραφήματα - Δίκτυα

Ζυγισμένο Γράφημα



Δίκτυο

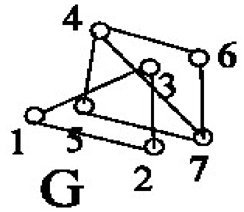


Δηλαδή στις ακμές του γραφήματος G(V,E) αντιστοιχούμε τιμές μέσω μιας συνάρτησης w: E(G)→ $\mathbb{R}$

Στο γράφημα μας ενδιαφέρει περισσότερο ποιες κορυφές συνδέονται με ποιες, με ποιον τρόπο και τι ιδιότητες προκύπτουν.

Στο δίκτυο μας ενδιαφέρει περισσότερο αν υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ των κορυφών και πόσο ισχυρές είναι και ποιες είναι οι συνέπειες.

Παράγοντες – Τομές – Γέφυρες



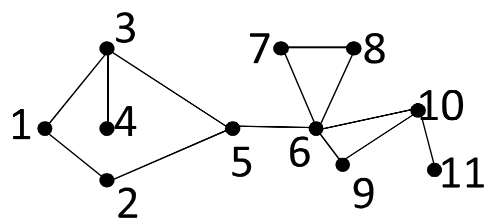
Ένα υπογράφημα του G λέγεται (συνδετικός) *παράγοντας* (connected component) του G αν είναι μέγιστο συνδετικό υπογράφημα του G.
H, με V(H)={1,2,3}, E(H)={12,13,23} είναι παράγοντας του G.

K, με V(K)={4,6,7}, E(K)={46, 47, 67} δεν είναι παράγοντας διότι το K περιέχεται στο L με V(L)={4,5,6,7}, E(L)={45, 46, 47, 57, 67}.

Αν $A, B \subseteq V$ και για το σύνολο $X \subseteq V \cup E$ ισχύει ότι κάθε μονοπάτι που συνδέει κορυφές του A με κορυφές του B περνάει οπωσδήποτε από μία κορυφή ή ακμή του X, τότε το X χωρίζει τα σύνολα κορυφών A, B. Γενικότερα, αν το X χωρίζει δύο κορυφές του $G - X$, τότε το X λέγεται *σύνολο τομής του G* ή λέμε ότι το σύνολο X χωρίζει το G.

Αν X ={v}, v∈V, τότε η κορυφή v λέγεται *σημείο τομής* (cutvertex).

Αν X ={x}, x∈E, τότε η ακμή x λέγεται γέφυρα (bridge).

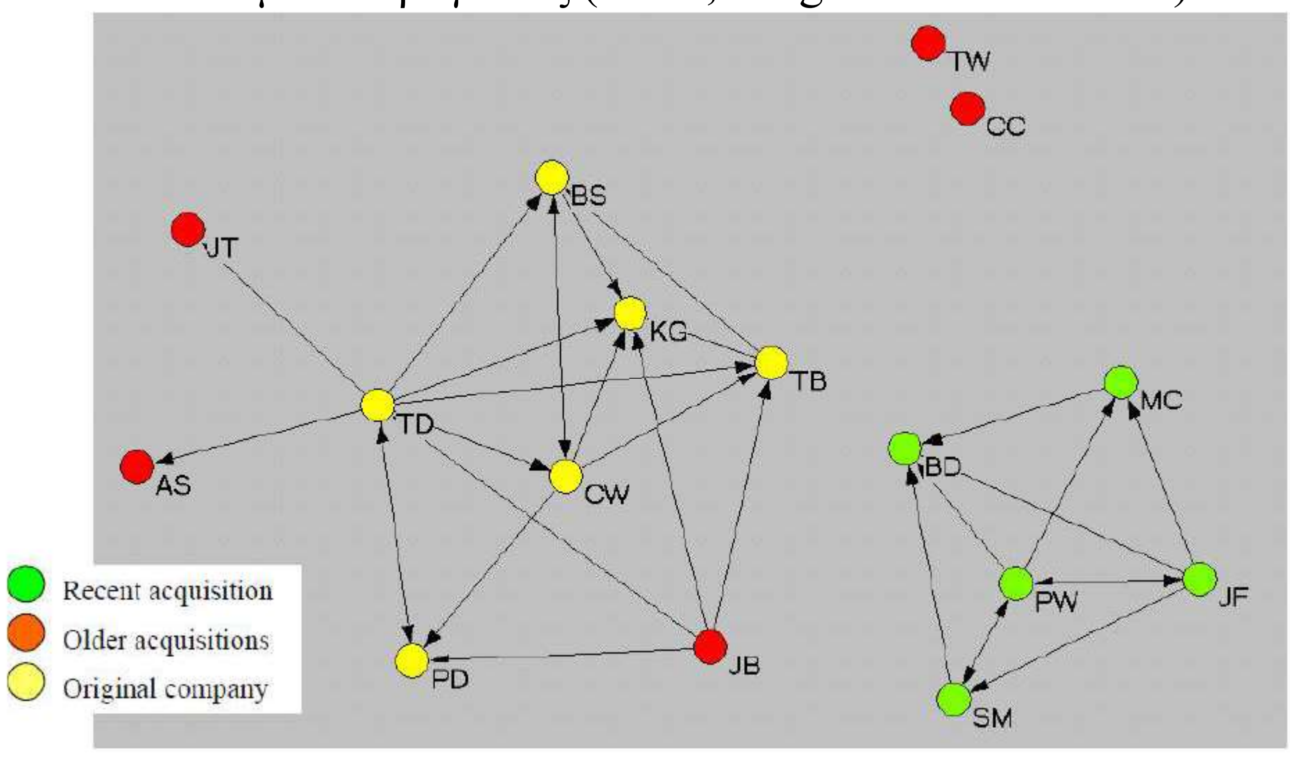


σημεία τομής 3,5,6,10

γέφυρες 34,56, (10)(11)

Παράδειγμα

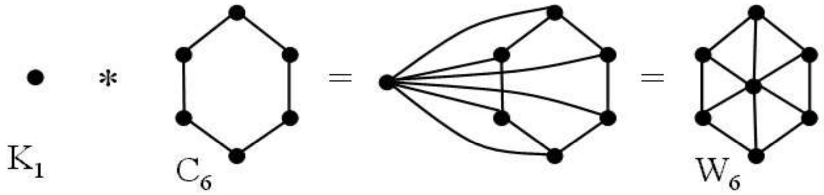
Δίκτυο με 4 παράγοντες (Cross, Borgatti & Parker 2001)



Σύνδεση - Συμπλήρωμα

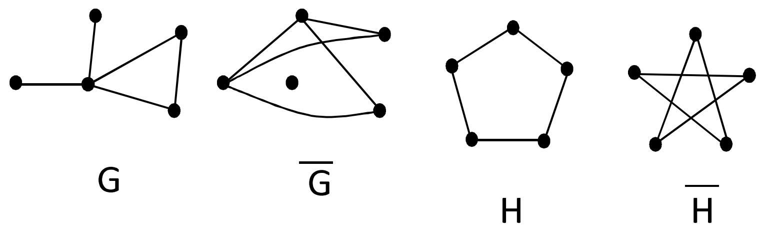
Έστω $G = (V, E)$ και $H = (U, F)$ δύο ξένα γραφήματα. Τότε:

$G * H$ (*σύνδεση* των G και H)= $G \cup H$ με την προσθήκη όλων των ακμών που συνδέουν τις κορυφές του G με τις κορυφές του H.



(πλήρες τάξης 1)*
(κύκλος μήκους 6)=
(τροχός τάξης 6)

Συμπλήρωμα $\bar{G}$ του $G = (V, E)$, είναι το γράφημα $(V, \bar{E})$, όπου το $\bar{E} = [V]^2 - E$ περιέχει όλα τα 2-σύνολα του V που δεν περιέχονται στο E



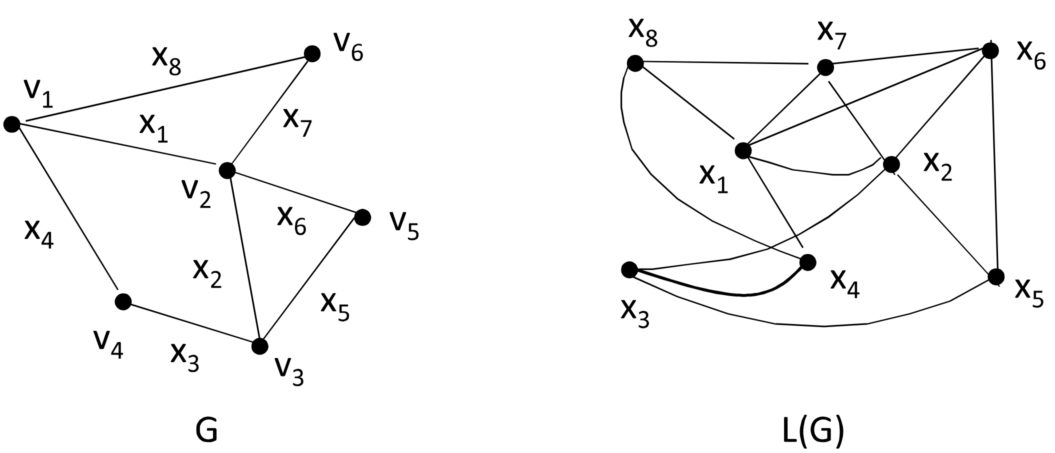
H και $\bar{H}$ είναι
Επί πλέον ισόμορφα
αυτοσυμπληρωματικά

Γραμμογράφημα

Αν σε γράφημα εναλλάξουμε ρόλους μεταξύ των κορυφών και των ακμών του, προκύπτει το *γραμμογράφημα* (line graph) του G, $L(G)$.

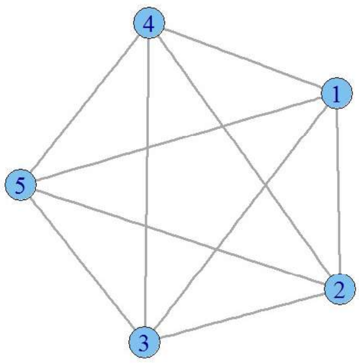
$V(L(G)) = E(G)$,

$E(L(G)) = \{\{x, y\}\colon\ x = \{a, b\}, y = \{c, d\}, \{a, b\} \cap \{c, d\} \neq \emptyset, a, b, c, d \in V\}$

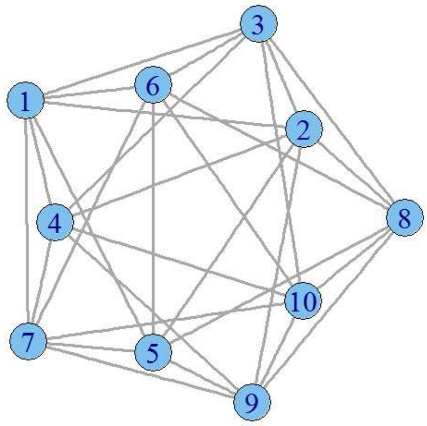


Άσκηση

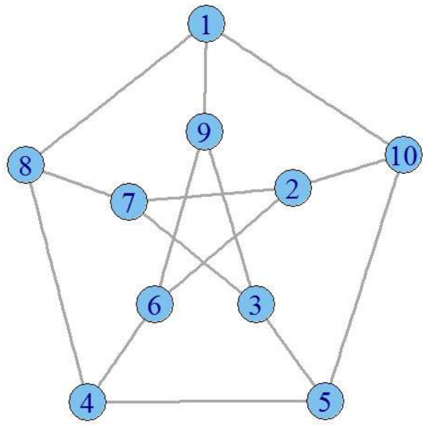
Δείξτε με τη βοήθεια του igraph ότι το συμπληρωματικό του γραμμογραφήματος του πλήρους γραφήματος K_5 είναι το γράφημα του Petersen.



K_5



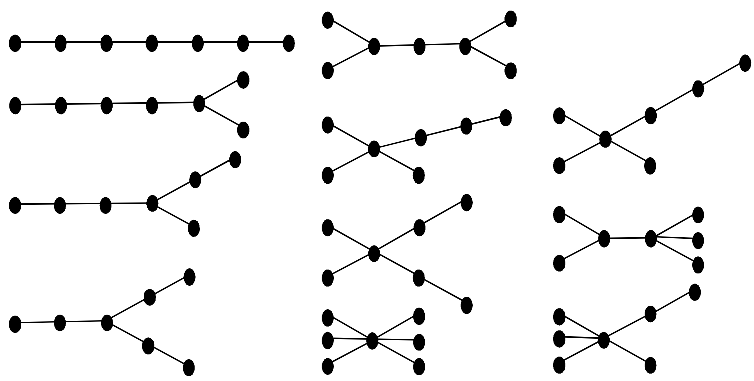
$\mathrm{L}(K_5)$



$\overline{\mathrm{L}(K_5)}$
Petersen

Δένδρα

Γράφημα συνδετικό χωρίς κύκλους λέγεται *δένδρο* (tree)



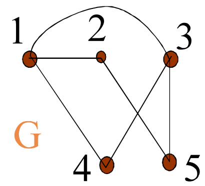
όλα τα δένδρα 7 κορυφών

Υπογράφημα ζεύξης που είναι δένδρο λέγεται δένδρο ζεύξης
Είναι βασικό πρόβλημα

Ιδιότητες

Θ. (Euler). Σε κάθε $G(p,q)$ με $V = \{v_i, i = 1,2,\ldots,p\}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \delta(v_i) = 2 \cdot q}$$



(λέγεται και handshaking lemma, λήμμα χειραψιών)

Απόδειξη.
Η απόδειξη του Euler έγινε με διπλή απαρίθμηση. Ονόμασε «συμπτωτικό ζεύγος» (incident pair) το ζεύγος (v, e) όταν e είναι ακμή που ένα άκρο της είναι η κορυφή v. Π.χ. τα (1,{1,2}), (2,{2,1}), (5,{5,2}) στο G είναι διαφορετικά συμπτωτικά ζεύγη. Τότε στην κορυφή v θα έχουμε $\delta(v)$ συμπτωτικά ζεύγη, και άρα το συνολικό πλήθος των συμπτωτικών ζευγών είναι ίσο με το άθροισμα των βαθμών (α΄ μέλος). Επίσης, σε κάθε ακμή e αντιστοιχούν 2 συμπτωτικά ζεύγη και άρα το συνολικό πλήθος των συμπτωτικών ζευγών είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών (β΄ μέλος). Άρα τα δύο μέλη ταυτίζονται.

Π. Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού σε κάθε G είναι άρτιος αριθμός.
Απόδειξη: Διαγράφοντας στην παραπάνω σχέση τις κορυφές άρτιου βαθμού, μένουν οι περιττού βαθμού που οφείλουν να έχουν άθροισμα άρτιο. Αλλά τότε θα είναι υποχρεωτικά άρτιου πλήθους.

Ιδιότητες

Θ. Δεν υπάρχει κυβικό γράφημα με περιττό πλήθος κορυφών.

Το κυβικό γράφημα n κορυφών, με n περιττό, έχει άθροισμα βαθμών $3 \cdot n$ που είναι προφανώς περιττός. Όμως σύμφωνα με το θεώρημα Euler όφειλε να είναι άρτιος, κάτι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

Το πλήθος των ακμών του πλήρους γραφήματος K_n είναι ίσο με $\binom{n}{2}$

Το πλήθος κορυφών του διγραφήματος $K_{m,n}$ είναι $m \cdot n$.

Το πλήθος ακμών κανονικού γραφήματος βαθμού k ισούται με $\frac{k \cdot n}{2}$.

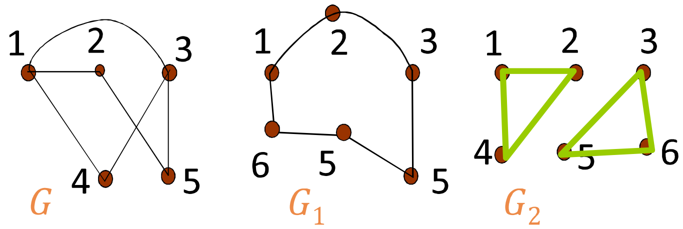
Θ. Ο μέγιστος αριθμός ακμών σε γράφημα p κορυφών χωρίς τρίγωνα, είναι $\left[\frac{p^2}{4}\right]$, όπου $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού x.

Απόδειξη για $p = 2k$ (με επαγωγή). (Ανάλογα γίνεται και για για $p = 2k + 1$)
Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε k και $p = 2k$ κορυφές έχει το πολύ $q = k^2$ ακμές.
Για $k = 2$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για k και θεωρούμε $p = 2(k + 1)$. Διαλέγω δύο κορυφές που συνδέονται και τις διαγράφω. Για το απομένον γράφημα G' από υπόθεση έχουμε $q' \leq k^2$. Ξαναβάζουμε τις δύο κορυφές και παρατηρούμε ότι οι ακμές που προστίθενται είναι μία που υπήρχε συν το πολύ $2k$ αφού δεν μπορούμε να έχουμε ακμές από τις δύο κορυφές στην ίδια κορυφή (τότε θα είχαμε τρίγωνο). Άρα: $q \leq q' + 1 + 2k \leq k^2 + 2k + 1 = (2k + 1)^2$ που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Γραφικές Ακολουθίες

Ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών που μπορεί να είναι βαθμοί των κορυφών ενός γραφήματος λέγεται γραφική (graphic).

π.χ. 3,3,2,2,2,2 για G
2,2,2,2,2,2 για G_1
2,2,2,2,2,2 για G_2



Αποδεικνύεται ότι: (Θεώρημα Havel (1955) και Hakimi (1962)). Έστω

$$s, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, t_s, \quad d_1, .., d_n \quad (1)$$
$$t_1 - 1, t_2 - 1, \ldots, t_s - 1, \quad d_1, .., d_n \quad (2)$$

δύο ακολουθίες μη-αρνητικών, η (1) σε φθίνουσα διάταξη. Τότε η (1) είναι τότε και μόνον γραφική αν είναι η (2) γραφική.

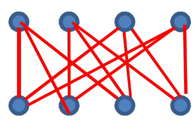
Ασκήσεις

- Επτά φοιτητές πήγαν διακοπές. Αποφάσισαν καθένας να στείλει από μία κάρτα σε τρεις από τους άλλους. Είναι δυνατόν καθένας τους να πάρει κάρτα από τους τρεις που έστειλε και ο ίδιος;

  Όχι, διότι τότε θα είχαμε κυβικό γράφημα 7 κορυφών (???) που δεν υπάρχει (???)

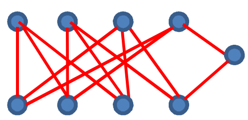
- Δείξτε ότι για κάθε άρτιο $n \geq 4$ υπάρχει γράφημα με όλες τις κορυφές βαθ. 3

  Π.χ. για n=8 υπάρχει το διπλανό. Γενικεύστε.



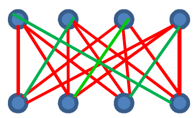
- Δείξτε ότι για κάθε περιττό $n \geq 5$ υπάρχει γράφημα με $n+1$ κορυφές, ώστε ακριβώς n να έχουν βαθμό 3.

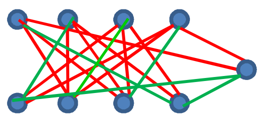
  Π.χ. για n=9 υπάρχει το διπλανό. Γενικεύστε.



- Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 5$ υπάρχει γράφημα με όλες τις κορυφές βαθ. 4

  Π.χ. για n=8 και n=9 υπάρχουν τα παρακάτω: Γενικεύστε.





Ασκήσεις

- Ποιες από τις ακολουθίες είναι γραφικές; Αν είναι να κατασκευαστεί γράφημα με βαθμούς κορυφών τα στοιχεία της ακολουθίας

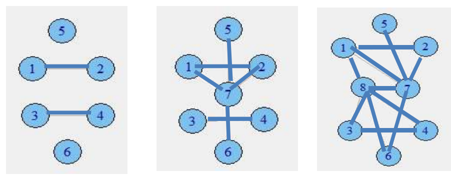
α. $5, 4, 3, 2, 2, 1$	β. $5, 5, 4, 4, 0$
γ. $5, 5, 3, 2, 2, 2, 2, 1$	δ. $6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0$
ε. $6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2$	στ. $6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2$

α. 3 κορυφές περιττού βαθμού, δεν υπάρχει γράφημα, άρα δεν είναι γραφική.

β. Βαθμός 5 σε γράφημα με 5 κορυφές, , δεν υπάρχει γράφημα, άρα δεν είναι γραφική.

γ. $5, 5, 3, 2, 2, 2, 2, 1$
$4, 2, 1, 1, 1, 2, 1 \equiv$
$4, 2, 2, 1, 1, 1, 1$
$1, 1, 0, 0, 1, 1$

Η τελευταία είναι γραφική και παριστάνεται από το πρώτο σχήμα. Πηγαίνοντας τη διαδικασία προς τα πίσω παίρνουμε το δεύτερο και μετά το τρίτο σχήμα..



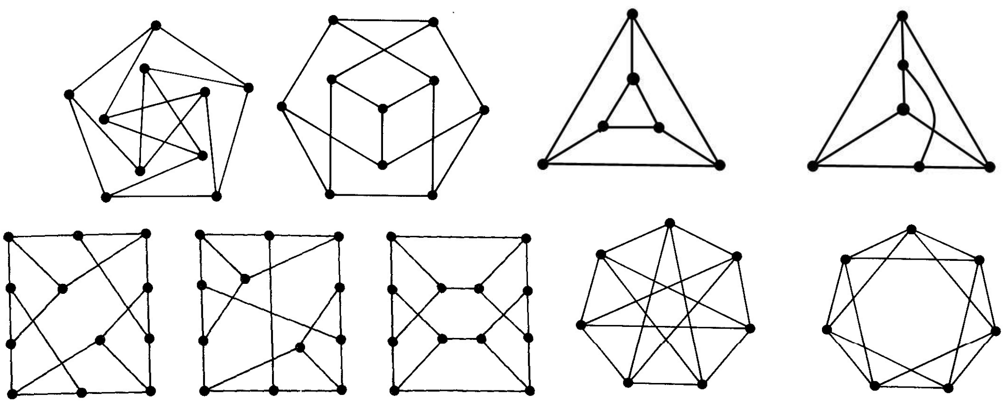
Δείξτε επαγωγικά ότι η ακολουθία $(n, n, n-1, n-1, \dots, 2,2,1,1)$ είναι γραφική για κάθε n.

Για $n = 1$ η ακολουθία 1 1 είναι προφανώς γραφική, δηλ. ισχύει.
Για $n = k$ υποθέτουμε ότι ισχύει, δηλ. η $(k, k, k-1, k-1, \dots, 2, 2, 1, 1)$ είναι γραφική.
Θεωρούμε την $(k, k, k-1, k-1, \dots, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$ δηλ. την προηγούμενη συν 2 κορυφές ασύνδετες (που είναι γραφική). Συνδέω την 1η κορυφή με την τελευταία την $(2k+2)$–στή, τη 2η με την προτελευταία την $(2k+1)$–στη και γενικά την λ-στή με την $(2k+3-\lambda)$-στή για $\lambda = 1,2,\dots,(k+1)$, και τέλος την $(k+1)$-στή με την $(k+2)$-στή και απεδείχθη, αφού όλοι οι βαθμοί, στο γράφημα που υπήρχε, αυξήθηκαν κατά 1.

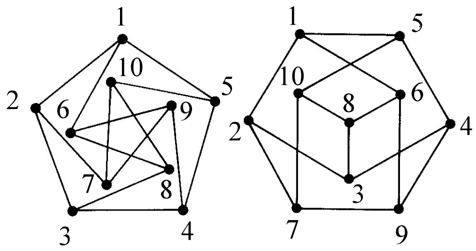
Ασκήσεις

- Βρέστε γράφημα 5 κορυφών με ακριβώς
  (α) Ένα κύκλο, (β) τρεις κύκλους, (γ) έξι κύκλους
- Βρέστε γράφημα $G(6,7)$ που να μην έχει υπογράφημα ισόμορφο με το C_4.
- Βρέστε γράφημα $G(6,12)$ που να μην έχει υπογράφημα ισόμορφο με το K_4.

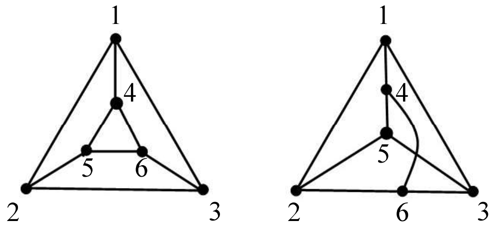
Ποια ζεύγη από τα γραφήματα είναι ισόμορφα;



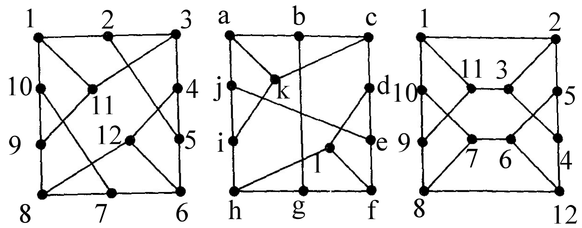
Απάντηση για την τελευταία



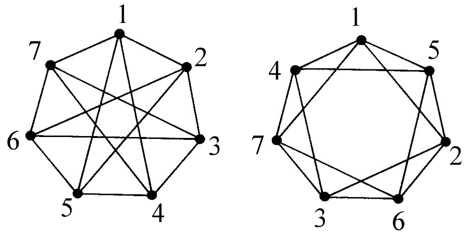
Έθεσα κατάλληλη σήμανση



Αριστερά έχουμε δύο τρίγωνα 123, 456 (girth=3). Δεξιά δεν υπάρχουν τρίγωνα (girth=4).
Επίσης, το αριστερό είναι επίπεδο γράφημα, το δεξιό όχι.

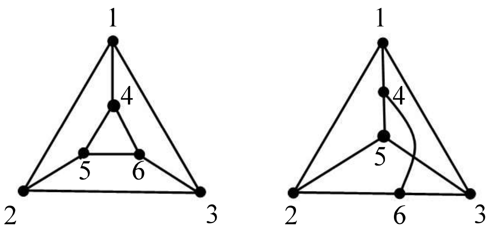


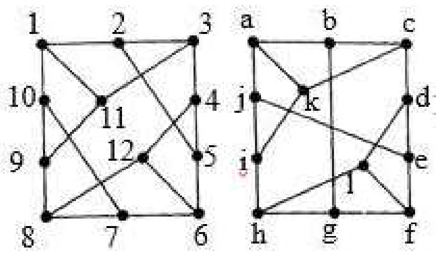
Έθεσα κατάλληλη σήμανση στο 1ο και στο 3ο .
Το 1ο είναι επίπεδο γράφημα ενώ το 2ο δεν είναι.
Άρα 1ο και 3ο είναι μη-ισόμορφα.



Έθεσα κατάλληλη σήμανση

Επιβεβαίωση με την R





```
g1=make_graph(c(1,2,1,3,
   1,4,2,3,2,5,3,6,4,5,
   4,6,5,6),dir=F)
tkplot(g1)
girth(g1)
g2=make_graph(c(1,2,1,3,
   1,4,2,5,2,6,3,6,3,5,
   4,6,4,5),dir=F)
tkplot(g2)
girth(g2)
```

```
g3=make_graph(c(1,2,1,10,1,11,2,3,
  2,5,3,11,3,4,4,5,4,12,5,6,6,7,6,
  12,7,8,7,10,8,9,8,12,9,10,9,11),
  dir=F)
tkplot(g3)
girth(g3)
g4=make_graph(c("a","b","a","j","a",
  "k","b","c","b","g","c","d","c",
  "k","d","e","d","l","e","f","e",
  "j","f","g","f","l","g","h","h",
  "i","i","j","i","k","h","l"),
  dir=F)
tkplot(g4)
girth(g4)
```

Επιπεδότητα

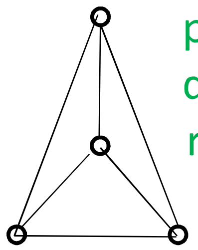
Ένα γράφημα G λέγεται *επίπεδο* αν μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι γραμμές του να μην τέμνονται.

Το 1750, ο Euler παρατήρησε ότι στα κυρτά γεωμετρικά στερεά ισχύει η σχέση:

$H + S = A + 2$,

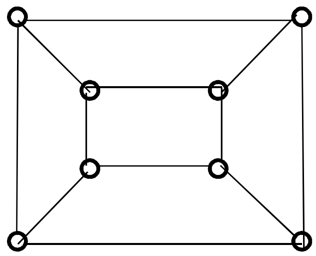
όπου H (έδρες), S (στερεές γωνίες), A (ακμές).

Θ. Στα στα επίπεδα γραφήματα ισχύει :
$p - q + r = 2$, p (κορυφές), q (ακμές), r (επιφάνειες). π.χ.



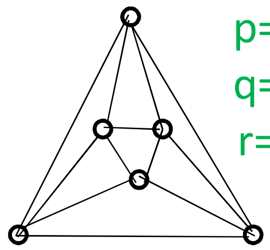
p=4
q=6
r=4

Τετράεδρο



p=4
q=6
r=4

Κύβος



p=4
q=6
r=4

Οκτάεδρο

Προτάσεις για επίπεδα γραφήματα

1. Αν G(p,q;r) είναι επίπεδο γράφημα και κάθε επιφάνειά του είναι n-κύκλος, τότε:

$$\boxed{q = \frac{n(p-2)}{n-2}}$$

$r \cdot n = 2 \cdot q$, και $p - q + r = 2 \Rightarrow 2 - p + q = \frac{2 \cdot q}{n} \Rightarrow (n-2)q = n(p-2)$

2. Αν G(p,q;r) μέγιστο επίπεδο γράφημα τότε κάθε επιφάνειά του θα είναι τρίγωνο και θα ισχύει:

$$\boxed{q = 3p - 6}$$

Αρκεί στη σχέση $q = \frac{n(p-2)}{n-2}$ να θέσουμε n=3

3. Αν G επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε επιφάνεια είναι 4-κύκλος είτε 5-κύκλος, τότε θα έχει υποχρεωτικά άρτιο πλήθος 5-κύκλων, έστω 2t, και θα ισχύει:

$$\boxed{q = 2p - 4 - t}$$

Αν οι 4-κύκλοι είναι x και οι 5-κύκλοι είναι y, τότε θα είναι $x \cdot 4 + y \cdot 5 = 2 \cdot q$ που σημαίνει y άρτιος (έστω $y = 2t$), οπότε: $x \cdot 4 + 2t \cdot 5 = 2 \cdot q$ και $r = x + 2t$. Τότε: $p - q + r = 2 \Rightarrow \{ r = x + 2t = 2 - p + q,\ 2x + 5t = q \}$ και απαλείφοντας το x παίρνουμε $q = 2p - 4 - t$

Προτάσεις για επίπεδα γραφήματα

4. Αν G είναι επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε επιφάνεια είναι 4-κύκλος, τότε θα ισχύει: $\boxed{q = 2p - 4}$

Αρκεί στη σχέση $q = 2p - 4 - t$ να θέσουμε t=0 (δεν υπάρχουν 5-κύκλοι)

---

5. Αν G είναι επίπεδο γράφημα με p≥ 3, τότε: $\boxed{q \leq 3p - 6}$

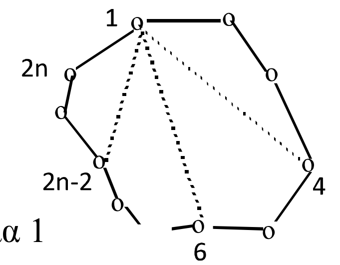
Προκύπτει αμέσως από την πρόταση (2)

---

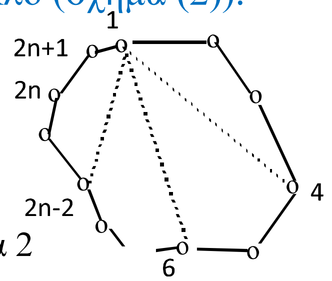
6. Αν G είναι επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα, τότε: $\boxed{q \leq 2p - 4}$

Αν το γράφημα έχει κύκλο με άρτιο πλήθος κορυφών $2n$ με $n > 2$, τότε ο κύκλος αυτός χωρίζεται σε $(n-1)$ 4-κύκλους (σχήμα (1)).
Αν έχει κύκλο με περιττό πλήθος κορυφών $2n + 1$ με $n > 2$, τότε ο κύκλος αυτός χωρίζεται σε $(n-2)$ 4-κύκλους και σ' έναν 5-κύκλο (σχήμα (2)).

Από την πρόταση (3) προκύπτει αμέσως το ζητούμενο



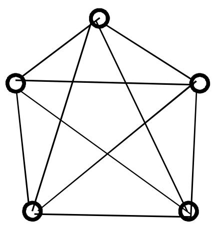
Σχήμα 1



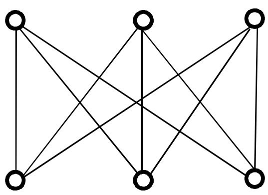
Σχήμα 2

Τα γραφήματα K_5, $K_{3,3}$

7. Τα K_5 και $K_{3,3}$, δεν είναι επίπεδα.



K_5



$K_{3,3}$

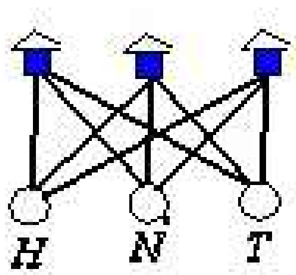
Απόδειξη

K_5: $q = 10$ και $p = 5$
ενώ θα έπρεπε $q \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$

$K_{3,3}$: $q = 9$ και $p = 6$ και δεν έχει τρίγωνα,
ενώ θα έπρεπε $q \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Τρία γειτονικά σπίτια πρόκειται να συνδεθούν με τρεις παροχές (π.χ. ηλεκτρικό φως, νερό, τηλέφωνο), από τρία σημεία που βρίσκονται ανά ένα απέναντι από κάθε σπίτι. Είναι δυνατόν να βρεθούν συνδέσεις, τέτοιες ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους;



Δένδρα

Θ. Αν όλες οι κορυφές ενός γραφήματος G έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με 2, τότε υπάρχει κύκλος στο G.

Π. Αν Τ δένδρο με τουλ. μία ακμή, τότε έχει μία τουλ. κορυφή βαθμού 1 (άκρο).

Θ. Αν G είναι συνδετικό με $p \geq 2$ και $q < p$, τότε έχει κορυφή βαθμού 1.

Θ. Αν το $G(p, q)$ είναι δένδρο τότε ισχύει $p = q + 1$. Αντίστροφα, αν ένα συνδετικό γράφημα $G(p, q)$ ικανοποιεί τη σχέση $p = q + 1$, τότε είναι δένδρο.

Επαγωγικά. $\Rightarrow$ q=0 τότε υποχρεωτικά p=1 (αφού συνδετικό). Έστω ισχύει για q και G δένδρο με q+1 ακμές. Τότε υπάρχει κορυφή βαθμού 1. Διαγράφοντάς την παίρνουμε δένδρο με 1 κορυφή και μία ακμή λιγότερες ….

$\Leftarrow$ q=0 τότε p=1, δηλ. δένδρο. Έστω ισχύει για q και G με q+1 ακμές. Αφού G συνδετικό και ακμ.<κορυφ. έχει κορυφή βαθμού 1. Η διαγραφή της δεν χαλάει τη συνδετικότητα και αφαιρεί 1 κορυφή και1 ακμή κλπ.

Θ. (Caylay). Για $p \geq 2$ υπάρχουν p^{p-2} διαφορ. σημασμ. δένδρα με p κορυφές.

Θ. (Με ακολουθίες Prüfer): Το πλήθος δένδρων $p \geq 2$ κορυφών με βαθμούς $d_1, d_2, \dots, d_p$, οπότε $\sum_{i=1}^{p}(d_i - 1) = p - 2$, είναι:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{p-2}}^{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1} = \frac{(p-2)!}{(d_1-1)!\,(d_2-1)!\cdots(d_p-1)!}$$

Αλγόριθμος Kruskal

Έστω ένα δίκτυο G (γράφημα του οποίου οι ακμές έχουν διαφορετικό βάρος). Για να βρούμε ένα ελάχιστο δένδρο ζεύξης εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1. Διατάσσουμε τις ακμές του G σε αύξουσα σειρά ως προς το βάρος, ακολουθώντας τυχαία τοποθέτηση στη σειρά σε περίπτωση ίσων βαρών. Θέτουμε T=$\emptyset$, όπου T οι ακμές του ζητούμενου δένδρου.

Βήμα 2. Προσθέτουμε την πρώτη ακμή στο σύνολο T.

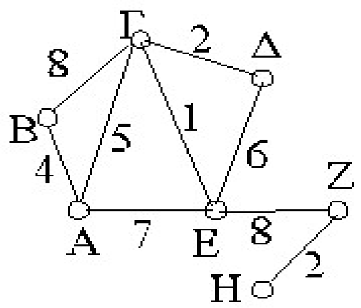
Βήμα 3. Αν κάθε ακμή έχει εξεταστεί, σταματούμε και συμπεραίνουμε ότι το G είναι μη-συνδετικό. Αλλιώς εξετάζουμε την πρώτη μη εξετασθείσα ακμή στη διάταξη που αναφέρθηκε και την προσθέτουμε στο T αν και μόνον αν δεν δημιουργεί κύκλο με κάποιες από τις ακμές που έχουν ήδη προστεθεί στο T. Αν η ακμή προστεθεί στο T πηγαίνουμε στο βήμα 4, αλλιώς επαναλαμβάνουμε το βήμα 3.

Βήμα 4. Αν T έχει n-1 ακμές όπου n το πλήθος κορυφών του G, σταματούμε και συμπεραίνουμε ότι το T είναι το ζητούμενο δένδρο. Αλλιώς πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Παράδειγμα

Το δίκτυο του σχήματος παριστάνει το οδικό δίκτυο 7 οικισμών σ' ένα νησί. Οι αριθμοί στις ακμές παριστάνουν χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των αντίστοιχων οικισμών. Ζητείται να βρεθεί διαδρομή ελαχίστου μήκους που να συνδέει τους 7 οικισμούς. Άρα, ζητείται το ελάχιστο δένδρο ζεύξης.

Διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά τις ακμές π.χ.
E(G)={ΓΕ, ΓΔ, ΖΗ, ΑΒ, ΑΓ, ΕΔ, ΕΑ, ΕΖ, ΒΓ}
και θέτουμε $T = \emptyset$.

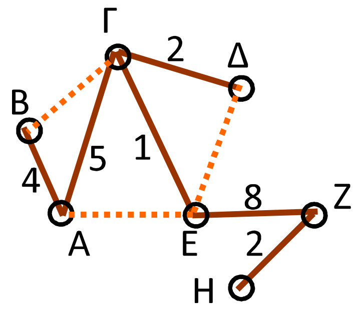


Προσθέτουμε την πρώτη ακμή στο σύνολο Τ και την σημειώνουμε στο γράφημα (χωρίς ακμές)

Εξετάζουμε διαδοχικά τις ακμές του E(G) και αν δεν σχηματίζουν τρίγωνο τις προσθέτουμε στο Τ. Το τελικό Τ είναι ένα σχεδόν βέλτιστο δένδρο ζεύξης

Τ={ΓΕ,ΓΔ , ΖΗ ,ΑΒ , ΑΓ , ΕΖ }

ελάχιστο μήκος =22



Χρωματισμοί

Χρωματισμός του G είναι η αντιστοίχιση χρωμάτων στις κορυφές του G ώστε συνδεδεμένες κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα. Το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτούνται λέγεται *χρωματικός αριθμός* και συμβολίζουμε X(G). Το σύνολο των κορυφών με το ίδιο χρώμα λέγεται *χρωματική κλάση*.

Ισχύουν:	$X(K_p - x) = p - 1$,	$X(C_{2n}) = 2$
$X(G) \leq p$,	$X(A_p) = 1$,	$X(C_{2n+1}) = 3$
$X(K_p) = p$,	$X(K_{m,n}) = 2$,	$X(T) = 2$ για Τ δένδρο.

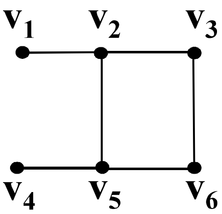
Θ. (Köning)
Ένα γράφημα έχει έναν 2-χρωματισμό (δηλαδή $X(G) = 2$), αν και μόνο αν δεν έχει περιττούς κύκλους.

Πίνακας συνδέσεων

Πίνακας συνδέσεων είναι ο $p \times p$ πίνακας $\mathrm{A} = (a_{ij})$, με όπου $G(p,q)$ σημασμένο γράφημα με $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

$$\mathrm{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\,\{v_i,\, v_j\} \in E(G) \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

G:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Θ. (1) $\mathrm{a_{ii}} = 0$, $\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{p}$

(2) $\mathrm{a_{ij}} = \mathrm{a_{ji}}$, $\mathrm{i,j} = 1,2,\dots,\mathrm{p}$

(3) $\mathbf{1}'\mathrm{A} = \boldsymbol{\delta}'$ και $\mathrm{A} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}$

$$\delta = \left(\delta(v_1),\quad \delta(v_2),\quad \dots,\quad \delta(v_p)\right)'$$

Πίνακας συνδέσεων

Ο πίνακας συνδέσεων του πλήρους γραφήματος $\mathrm{K_n}$ έχει όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία ίσα με 1.

$$\mathrm{A}(\mathrm{K}_n) = J_n - I_n$$

Ο πίνακας συνδέσεων του πλήρους διγραφήματος $\mathrm{K_{m,n}}$ με κατάλληλη σήμανση γράφεται:

$$A(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} 0 & J_{m,n} \\ J_{n,m} & 0 \end{pmatrix}$$

$A + \bar{A} = J_n - I_n$
συμπληρωματικά

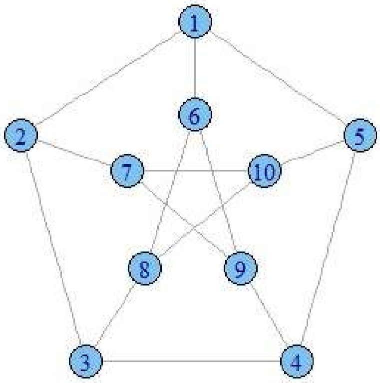
G μη συνδετικό,
τότε A(G) γράφεται $A(G) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$
ως διαχωρισμένος

Πίνακας συνδέσεων -παράδειγμα

```
gP=graph.famous("Petersen")    ;     id=tkplot(gP)
coords.gP <- tkplot.getcoords(id)
coords.gP <-matrix(c(240, 50,120,350,420,240,165,185,290,315,
                     330,220,  0,  0,220,240,185, 90, 90,185),nrow=10);coords.gP
plot(gP, vertex.size=20, edge.arrow.size=0.6, layout=coords.gP)
A=get.adjacency(gP);A
A=as.matrix(A);A
A2=A%*%A;A2
B2=A+A2;B2
A3=A2%*%A;A3
```

$A =$

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]
[1,]	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
[2,]	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
[3,]	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
[4,]	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
[5,]	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
[6,]	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
[7,]	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
[8,]	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
[9,]	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
[10,]	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0



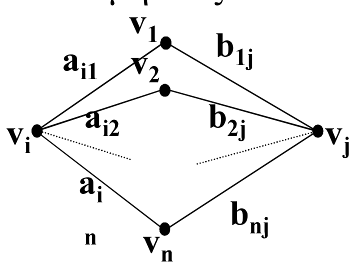
$A^2 =$

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	[,9]	[,10]
[1,]	3	0	1	1	0	0	1	1	1	1
[2,]	0	3	0	1	1	1	0	1	1	1
[3,]	1	0	3	0	1	1	1	0	1	1
[4,]	1	1	0	3	0	1	1	1	0	1
[5,]	0	1	1	0	3	1	1	1	1	0
[6,]	0	1	1	1	1	3	1	0	0	1
[7,]	1	0	1	1	1	1	3	1	0	0
[8,]	1	1	0	1	1	0	1	3	1	0
[9,]	1	1	1	0	1	0	0	1	3	1
[10,]	1	1	1	1	0	1	0	0	1	3

Τυχαίνει εδώ $B = A + A^2 = 2 \cdot I + J$,
δηλαδή $B(i,j) \neq 0, \ \forall i,j$

Ιδιότητες του πίνακα συνδέσεων

Θ. Έστω A ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G. Το (i,j) στοιχείο του πίνακα A^k δίνει το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους k που συνδέουν τις κορυφές v_i και v_j.



Απόδ. $A=(a_{ij})$, $A^s=(b_{ij})$ και $A^{s+1}=(c_{ij})$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+ a_{i2}b_{2j}+ a_{i3}b_{3j}+\dots+ a_{in}b_{nj}$$

Π. Έστω G γράφημα με n κορυφές m ακμές και t τρίγωνα. Αν A είναι ο πίνακας συνδέσεων του G θα ισχύουν:

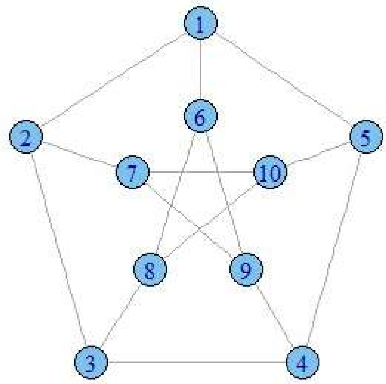
1. tr(A)=0   (a_{ii}=0 για κάθε $i \in \{1,2,\dots,n\}$).
2. tr(A^2)=2m (κλειστοί περίπατοι μήκους 2, δηλαδή στην ίδια ακμή)
3. tr(A^3)=6t (οι τρείς διαφορετικές κορυφές κάθε τριγώνου παράγουν 3 τρίγωνα, ενώ κάθε τρίγωνο μπορεί να σχηματιστεί με 2 τρόπους – πχ ΑΒΓ ή ΑΓΒ-κλειστοί περίπατοι μήκους 3)

tr(A)=άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του A

Ίχνος πίνακα συνδέσεων=
Πλήθος περιπάτων δοθέντος μήκους

Έστω gP το γράφημα Petersen

```
A=get.adjacency(gP);A
A=as.matrix(A);A
A2=A%*%A;A2
A3=A2%*%A;A3
A4=A3%*%A;A4
tr=function(A) sum(diag(A))
tr(A)   #  0
tr(A2)  #  30
tr(A3)  #  0
tr(A4)  #  150
```



Από κάθε κορυφή 3 περίπατοι μήκους 2, άρα συνολικά 30 (121, 161, 151, ….)

Από κάθε κορυφή 15 περίπατοι μήκους 4, άρα συνολικά 150 (12121, 16161, 15151, 12321, 12721,16861, 16961, 15(10)51, 15451, 12161, 12151, 16121, 16151, 15121, 15161, ………………………..)

Πίνακας συνδέσεων-Συνδετικότητα

Θ. Αν υπάρχει περίπατος που συνδέει τις κορυφές α και β ενός γραφήματος G τότε υπάρχει και μονοπάτι μεταξύ αυτών των κορυφών.

Π. Αν G συνδετικό γράφημα n κορυφών, τότε οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με μονοπάτι μήκους το πολύ n-1.

Θ. Έστω Α ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G που έχει n>2 κορυφές. Το G είναι συνδετικό αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του πίνακα $A+A^2+A^3+...+A^{n-1}$, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

Θ. Αν το γράφημα G είναι μη-συνδετικό τότε το $\overline{G}$ είναι συνδετικό.

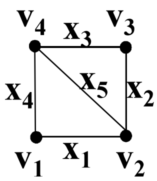
Π. Κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα είναι συνδετικό.

Πίνακας αντιστοιχιών

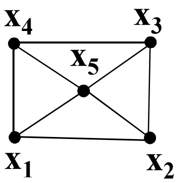
Πίνακας αντιστοιχιών είναι ο p×q πίνακας $B=(b_{ij})$, με όπου G(p,q) σημασμένο γράφημα με

$V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ και $E(G)=\{x_1, x_2, ..., x_q\}$

$$\boxed{b_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ v_i \in x_j \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}}$$



G=K_4-x



L(G)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Θ. (1) $\mathbf{1_p{'}B=2\cdot 1_q{'}}$

(2) $B\cdot\mathbf{1_q} = \boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\delta} = \big(\delta(v_1),\ \delta(v_2),\ ...,\ \delta(v_p)\big)'$$

Πίνακας αντιστοιχιών

Θ. Αν L(G) το γραμμογράφημα του G, τότε ο πίνακας συνδέσεων A(L(G)) του L(G) και ο πίνακας αντιστοιχιών B(G) του G, ικανοποιούν τη σχέση:

$$A(L(G)) \ = \ B(G)'B(G) - \ 2\cdot I_q$$

Επαλήθευση του θεωρήματος για το προηγούμενο παράδειγμα

$$A(L(G)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B'B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα Kirchoff

G συνδετικό, A(G) πίνακας συνδέσεων, **δ**(G) το διάνυσμα των βαθμών και M(G) ο πίνακας

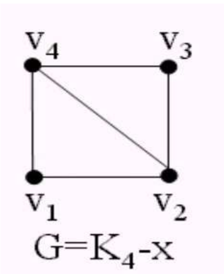
$$M(G) = -A(G) + diag(\boldsymbol{\delta}(G))$$

Τότε οι συμπαράγοντες του M(G) είναι όλοι ίσοι και η κοινή τιμή τους δίνει το πλήθος των δένδρων ζεύξης του G

Ο πίνακας M(G) λέγεται Λαπλασιανός Πίνακας (Laplacian)

Θεώρημα Kirchoff

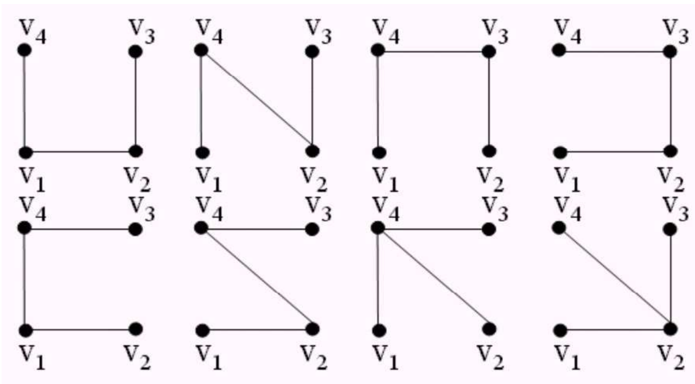
Παράδειγμα



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{M}(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

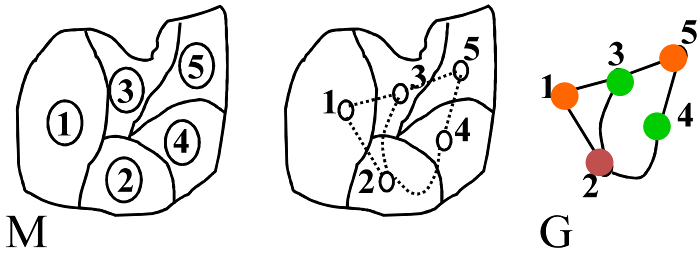
$$(-1)^{1+1}\mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$(-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$



Π. (Caylay) Το πλήθος σημασμένων δένδρων με p κορυφές είναι p^{p-2}.

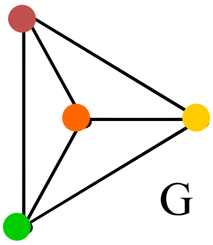
Χάρτες



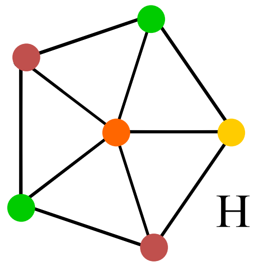
Ο χρωματισμός των κορυφών του G, ισοδυναμεί με χρωματισμό των χωρών του χάρτη Μ. Το G είναι προφανώς επίπεδο γράφημα.

Θ. Ισχύει

X(G) ≤1 + Δ(G)



X(G)=4=
=1 + Δ(G)



X(G)=4<
<1 + Δ(G)

Θ. (Heawood 1890). Για κάθε επίπεδο γράφημα X(G)≤5.

Το πρόβλημα των 4 χρωμάτων

Οι Appel and Haken στο Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) σελ. 711-712, απέδειξαν με Η/Υ με εκτύπωση αρκετών εκατοντάδων σελίδων, ότι αρκούν 4 χρώματα για το χρωματισμό κάθε επίπεδου γραφήματος. Η προσπάθεια συνεχίζεται για απλούστερη απόδειξη.

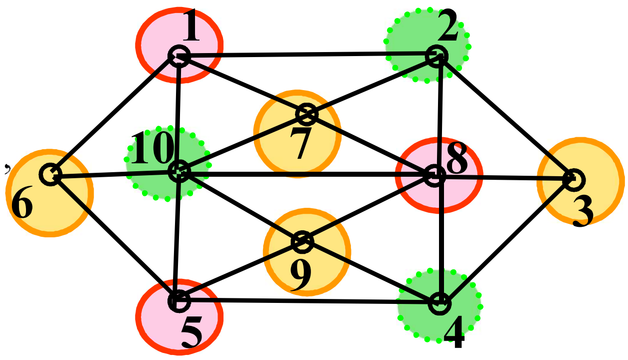
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ (με ανεξάρτητα σύνολα κορυφών)

Πρώτη φάση: Εύρεση όλων των ανεξάρτητων συνόλων κορυφών με την ιδιότητα κανένα από αυτά να μην είναι υποσύνολο άλλου.

Δεύτερη φάση: Εύρεση όλων των δυνατών ενώσεων των ανεξαρτήτων συνόλων κορυφών που έχουν ένωση το V. Το s που δίνει το μικρότερο πλήθος τέτοιων συνόλων είναι ο χρωματικός αριθμός.

Παράδειγμα

α΄: Τα ανεξάρτητα σύνολα:
{1,3,5}, {1,3,9}, {1,4}, {1,5,8}, {2,4,6}, {2,4,10}, {2,5}, {2,6,9}, {3,5,7}, {3,6,7,9}, {3,10}, {4,6,7}, {6,8}.



β΄: Η ένωση των λιγότερων από αυτά που συμπληρώνουν το V είναι:
{1,5,8}∪{2,4,10}∪{3,6,7,9}=V.

Άρα
X(G)=3.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ (του Χριστοφίδη)

1. Διατάσσουμε τις κορυφές σε φθίνουσα σειρά βαθμών, δηλ.
   $x_1, x_2, \ldots, x_p$ αν $\delta(x_1) \geq \delta(x_2) \geq \ldots \geq \delta(x_p)$.
2. Αντιστοιχίζω το χρώμα 1 στην x_1.
3. Ελέγχουμε την επόμενη κορυφή στη σειρά, αν δεν συνδέεται άμεσα με κάποια από τις κορυφές που έχει εξεταστεί προηγούμενα. Αν συμβαίνει αυτό δίνουμε στην κορυφή το χρώμα αυτό και μάλιστα το μικρότερο δυνατό. Αλλιώς της δίνουμε το επόμενο χρώμα, αυτό που δεν είχε δοθεί μέχρι τώρα.

Παράδειγμα

$x_1 \leftarrow 1$

$x_2 \leftarrow 2$ (συνδέεται με x_1)

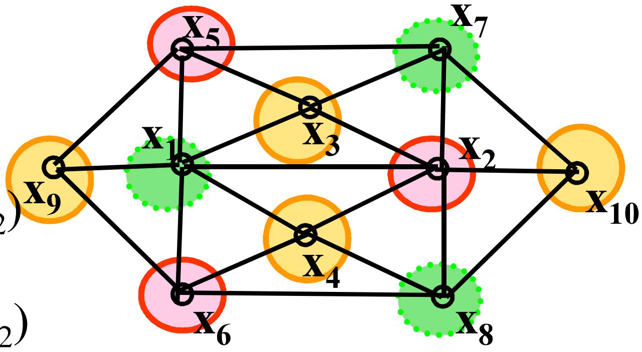
$x_3 \leftarrow 3$ (συνδέεται με x_1 και με x_2)

$x_4 \leftarrow 3$ (δεν συνδέεται με x_3)

$x_5 \leftarrow 2$ (συνδέεται με x_1, όχι με x_2)

κλπ.

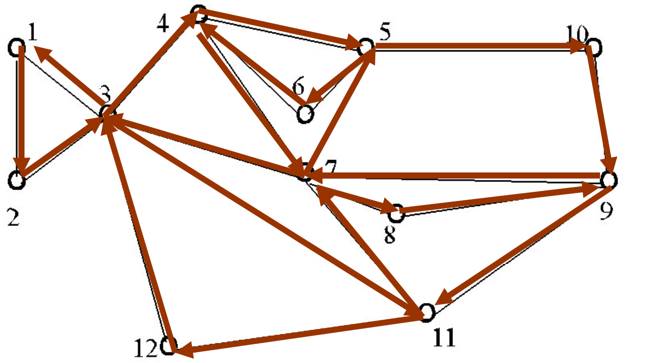
Τελικά **1, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 3**



Άρα X(G)=3.

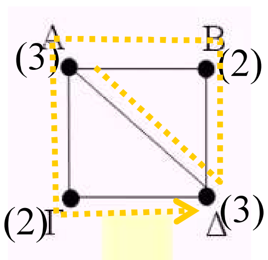
Γραφήματα Euler

Θ. Οι προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(1) Το G είναι γράφημα Euler.
(2) Κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.
(3) Το σύνολο των κορυφών του G μπορεί να χωριστεί σε κύκλους



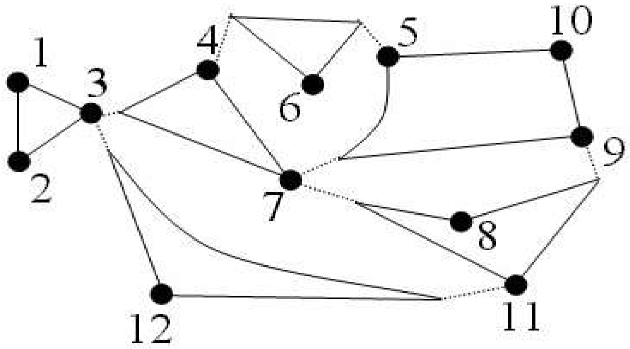
1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 7, 5, 10, 9, 7, 8, 9, 11, 7, 3, 11,12, 3, 1

Κλειστή μονοκονδυλιά



Ανοικτή μονοκονδυλιά = ανοικτή διαδρομή Euler

Θ. Αν G έχει 2n κορυφές περιττού βαθμού, τότε υπάρχουν n ανοιχτές διαδρομές Euler, ξένες μεταξύ τους.



Αλγόριθμος Fleury

Υποθέτουμε ότι το γράφημα G είναι Euler (περ. 1) ή ότι έχει μονοπάτι Euler (περ. 2).

Για την εύρεση της διαδρομής ξεκινάμε από οποιαδήποτε κορυφή (στην περ. 1) ή από μια κορυφή περιττού βαθμού (στην περ. 2). Και εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1. Ορίζουμε την κορυφή c που επιλέξαμε ως **τρέχουσα** κορυφή και ένα σύνολο ακμών F, αρχικά κενό, που θα είναι η διαδρομή.

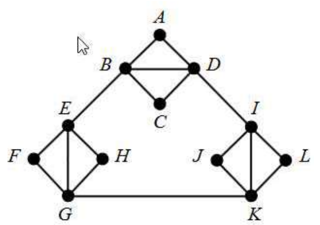
Βήμα 2. Επιλέγουμε τυχαία μία ακμή e (**τρέχουσα**), από αυτές που έχουν άκρο την τρέχουσα κορυφή φροντίζοντας να μην είναι γέφυρα στο G-F, εκτός αν δεν υπάρχει άλλη επιλογή.

Βήμα 3. Προσθέτουμε την στο F. Ορίζουμε ως τρέχουσα κορυφή το άλλο άκρο της (που μπορεί να είναι ίδιο με το προηγούμενο αν έχουμε βρόχο).

Βήμα 4. Διαγράφουμε την ακμή από το γράφημα και πηγαίνουμε στο βήμα 2 μέχρι να διαγραφούν όλες οι ακμές.

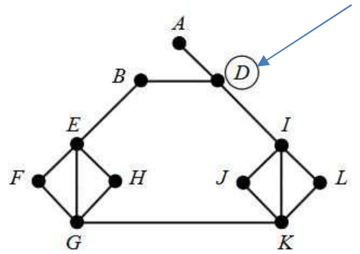
Παράδειγμα

Έστω το γράφημα Euler

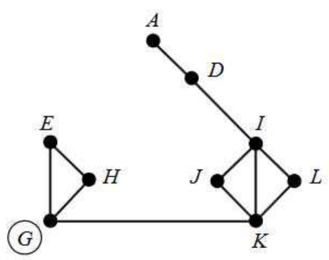


Ξεκινάμε από την κορυφή A και επιλέγουμε διαδοχικά AB, BC, CD. Το γράφημα γίνεται:

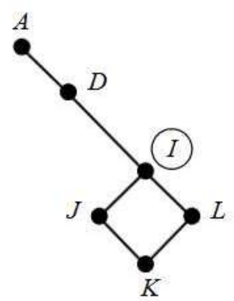
Τρέχουσα κορυφή



H DA είναι γέφυρα. Επιλέγουμε διαδοχικά DB, BE, EF, FG και φτάνουμε στο γράφημα:



H GK είναι γέφυρα. Επιλέγουμε διαδοχικά GE, EH, HG, GK, KI και φτάνουμε στο γράφημα:



H ID είναι γέφυρα. Επιλέγουμε διαδοχικά IJ, JK, KL, LI, ID, DA και τελειώνουμε.

H διαδρομή Euler είναι: ABCDBEFGEHGKIJKLIDA

Αλγόριθμος Hierholzer

Έστω ένα γράφημα Euler (μπορεί και κατευθυνόμενο)

Εργαζόμαστε ως εξής

Βήμα 1. Ξεκινούμε από μια τυχαία κορυφή v και πηγαίνουμε σε διαδοχικές κορυφές μέχρι να επιστρέψουμε στην κορυφή v που ξεκινήσαμε. Αυτό θα συμβεί οπωσδήποτε διότι αφού κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό με κάθε επίσκεψη σε οποιαδήποτε κορυφή, υπάρχει ακμή για να φύγουμε. Έτσι έχει δημιουργηθεί ένας κύκλος. Αν ο κύκλος περιέχει όλες τις ακμές έχει βρεθεί η διαδρομή Euler. Αν όχι, πάμε στο βήμα 2.

Βήμα 2. Διαγράφουμε τις ακμές του προηγούμενου κύκλου. Από τις ακμές που απέμειναν, υπάρχει τουλάχιστον μία που έχει κορυφή μία από τις κορυφές του προηγούμενου κύκλου, έστω την w. Ξεκινούμε από αυτήν και επαναλαμβάνουμε το Βήμα 1 και αν χρειαστεί και το Βήμα 2.

Βήμα 3. «Προσθέτουμε» τους κύκλους που προέκυψαν, δηλαδή στον πρώτο κύκλο αντικαθιστούμε το σημείο v με τον δεύτερο κύκλο και συνεχίζουμε ομοίως. Το «άθροισμα» είναι η ζητούμενη διαδρομή.

Παράδειγμα

Ξεκινούμε από το 1 και βρίσκουμε τον κύκλο:

1 2 3 1

Η 3 έχει αχρησιμοποίητες ακμές και ξεκινώ από αυτήν και κάνω τον κύκλο:

3 7 11 12 3

Ξεκινώ από την 7

7 5 4 7

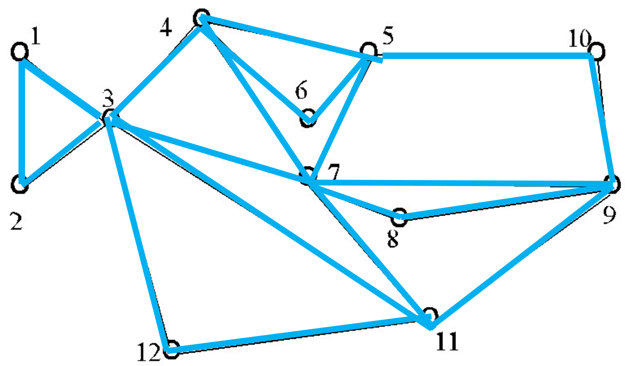
Ξεκινώ από την 5

5 6 4 3 11 9 10 5

Ξεκινώ από την 9

9 7 8 9

Και τελείωσαν όλες οι ακμές



Αθροίζω του κύκλους:

1 2 3 1 + 3 7 11 12 3 =

1 2 3 $\boxed{7}$ 11 12 3 1

Προσθέτοντας τον 7 5 4 7

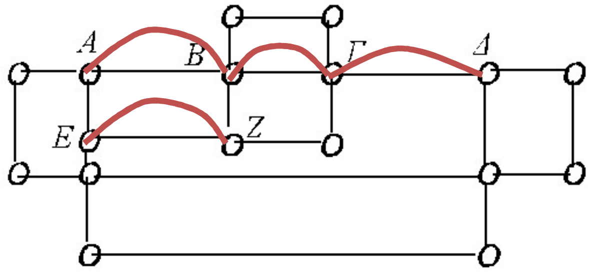
1 2 3 7 5 4 7 11 12 3 1

Τελικά:

1 2 3 7 5 6 4 3 11 9 7 8 9 10 5 4 7 11 12 3 1

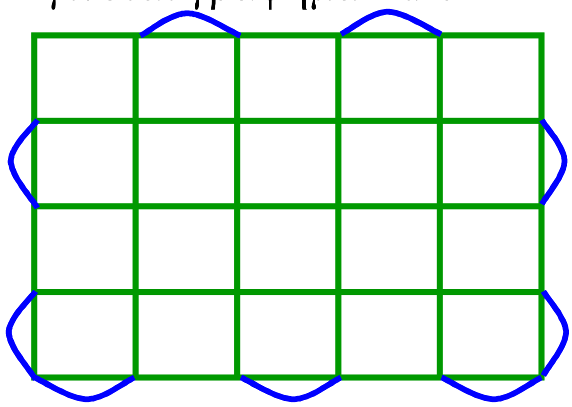
Πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου

Διαπιστώσατε ότι το γράφημα δίπλα δεν είναι Euler, ούτε έχει ανοικτή διαδρομή Euler. Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος προσθήκης ακμών (επιτρεπτών) ώστε να υπάρξει διαδρομή Euler; (chinese postman problem).



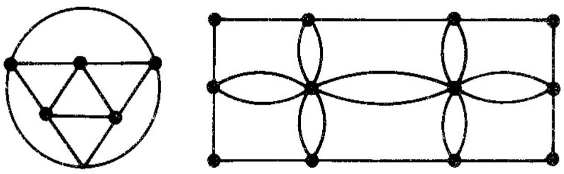
Με ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΖ, γίνεται γράφημα Euler

καλή μετατροπή γραφήματος οικοδομικών τετραγώνων, σε γράφημα Euler

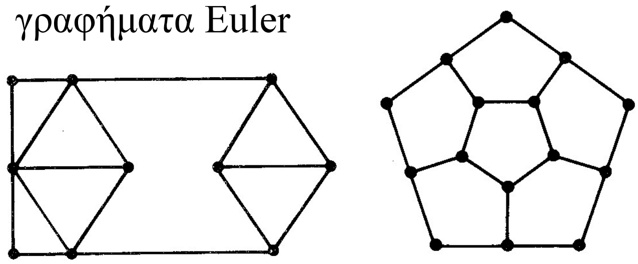


Ασκήσεις

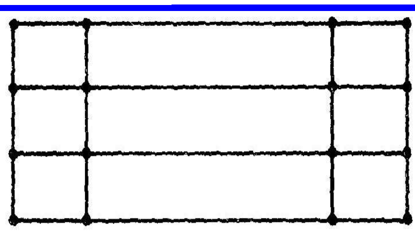
Βρέστε μία κλειστή διαδρομή Euler στα παρακάτω γραφήματα.



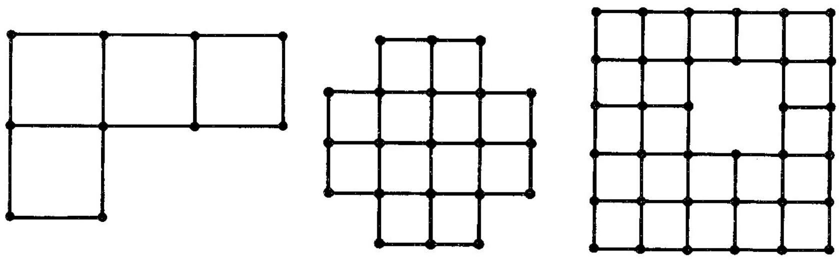
Συμπληρώστε ώστε να γίνουν γραφήματα Euler



Τα τετράγωνα στο σχήμα έχουν πλευρά 1000 μ., ενώ η μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου 4000 μ. Μετατρέψτε το σε γράφημα Euler με τρόπο ώστε οι επί πλέον ακμές να έχουν μήκος 8000 μ.

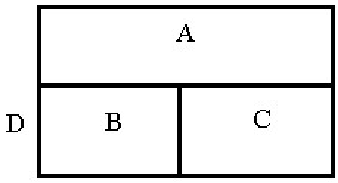


Συμπληρώστε με καλές μετατροπές, ώστε να γίνουν γραφήματα Euler

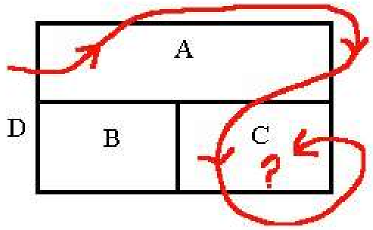


Ένα πρόβλημα ανάλογο των Γεφυρών του Konigsberg

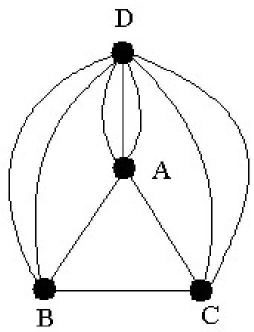
- Στο διπλανό σχήμα υπάρχει κλειστή (ανοικτή) γραμμή που να περνά ακριβώς μία φορά από κάθε μία από τις 10 ακμές του;



- Μία πιθανή αρχή τέτοιας γραμμής

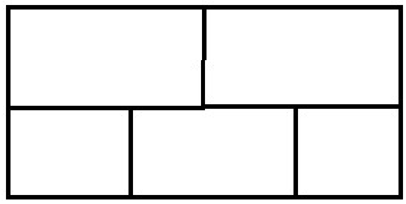


- Ισοδύναμο γράφημα:



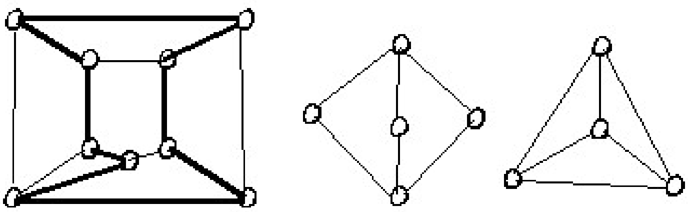
Λύση (ανοικτή γραμμή):
D A C D C B D A B D A

Εξετάστε ανάλογα το σχήμα



Γραφήματα Hamilton

Αν το γράφημα G περιέχει έναν κύκλο Z που περνά από όλες τις κορυφές του G ακριβώς μία φορά, (αν δηλαδή ο Z είναι κύκλος ζεύξης), τότε το G λέγεται ***γράφημα Hamilton*** και ο Z λέγεται ***κύκλος Hamilton***.

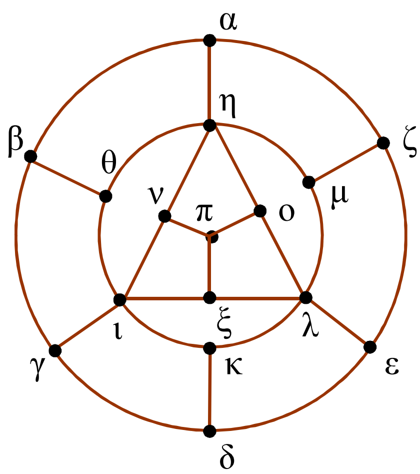


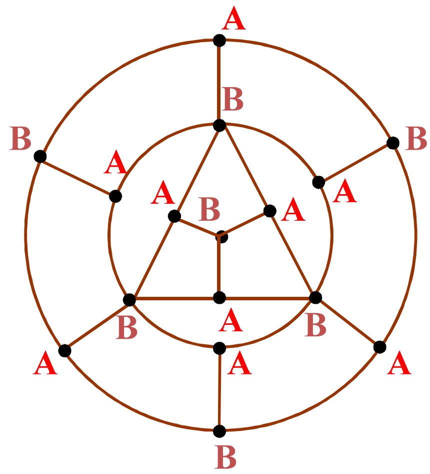
Το α΄ γράφημα έχει κύκλο Hamilton (όπως φαίνεται), το β΄ δεν έχει, ενώ το γ΄ έχει τρεις διαφορετικούς κύκλους.

Αν και έχουν δοθεί διάφορες ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα γράφημα G να περιέχει έναν κύκλο Hamilton, δεν υπάρχει μέχρι τώρα μία συνθήκη που να οδηγεί σε πολυωνυμικό αλγόριθμο. Το πρόβλημα του **περιοδεύοντος εμπορικού αντιπροσώπου** (traveling salesman problem) είναι μία γενίκευση του παραπάνω προβλήματος. Το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί με ένα γράφημα, στο οποίο ζητείται να εξετάσουμε αν περιέχεται κύκλος Hamilton και, αν ναι, να ευρεθεί εκείνος που ελαχιστοποιεί κάποια αντικειμενική συνάρτηση των ακμών που μπορεί να αφορά χρόνο, μήκος, κόστος, κλπ. Το πρόβλημα αυτό που είναι το διασημότερο στην Επιχειρησιακή έρευνα, είναι ένα NP-complete πρόβλημα.

Μία μέθοδος για μη-Hamilton

Για το γράφημα αριστερά

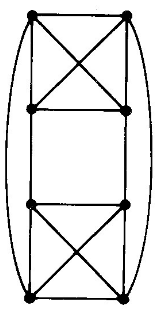


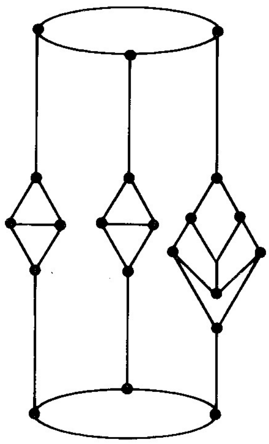


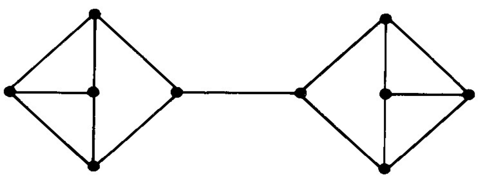
σημάναμε τις κορυφές με δύο γράμματα (χρώματα) ώστε διαδοχικές κορυφές να έχουν διαφορετικό γράμμα και δεν υπήρξε πρόβλημα. Επειδή υπάρχουν 9 κορυφές A και 7 κορυφές B, και ένας κύκλος Hamilton θα περιέχει εναλλάξ A και B, άρα δεν υπάρχει τέτοιος κύκλος.

Ασκήσεις

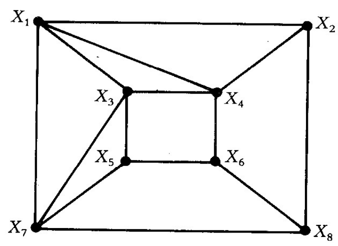
Βρέστε, αν υπάρχει, μία διαδρομή Hamilton στα παρακάτω γραφήματα.



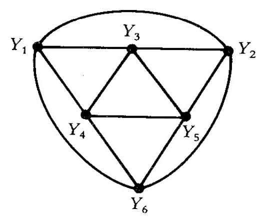




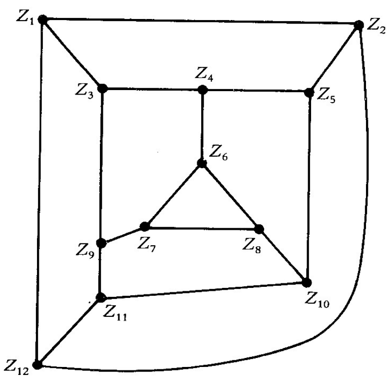
Βρέστε, αν υπάρχει, διαδρομή Euler ή Hamilton στα παρακάτω γραφήματα.



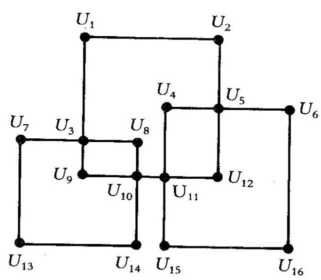
(a)



(b)



(c)

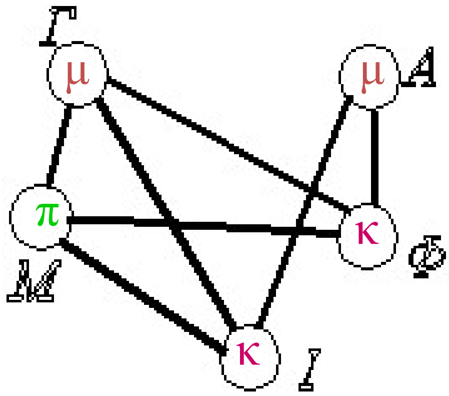


(d)

Εφαρμογή

Δίνονται οι παρακάτω μαθητές και το μάθημα που πρόκειται να εξεταστούν:
Ιωάννου, Κων/νου, Χρήστου και Δήμου, θα εξεταστούν στη (Γ)λώσσα,
Νικολάου, Δήμου, Σιδεράς και Ιωάννου, θα εξεταστούν στα (Μ)αθηματικά
Λαδάς, Μανδαρίνος, θα εξεταστούν στα (Α)γγλικά,
Λαδάς, Δήμου και Γεωργός, θα εξεταστούν στη (Φ)υσική, και
Μανδαρίνος, Παπάς, Ιωάννου και Ιατρού, θα εξεταστούν στην (Ι)στορία.

Ερώτημα:
Μπορούν τα μαθήματα αυτά να εξεταστούν τις μέρες Δευτέρα, Τετάρτη και Παρασκευή χωρίς να υπάρξει πρόβλημα με τους μαθητές που χρωστούν περισσότερα από ένα μαθήματα;



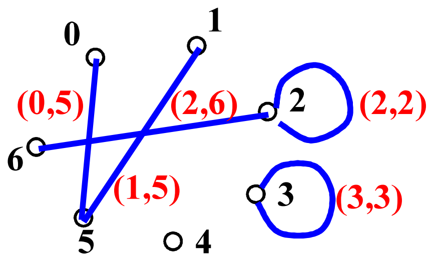
κορυφές= μαθήματα

ακμές=κοινός εξεταζόμενος

Απάντηση. ΝΑΙ
Δευτέρα=κ, Τετάρτη=μ, Παρασκευή=π

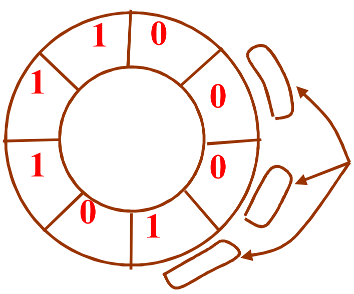
Εφαρμογές

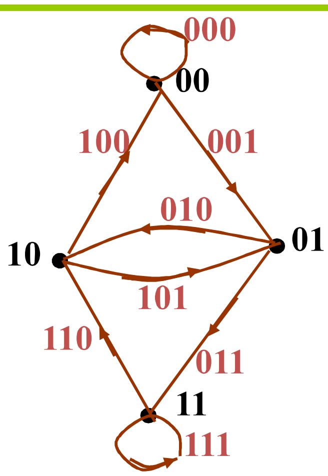
Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν όλα τα «ντόμινο» σε κυκλική διάταξη, ώστε τα γειτονικά να εφάπτονται με το ίδιο πλήθος τελειών;



Ας θεωρήσουμε το γράφημα K_7 μαζί με τους 7 βρόχους. Κάθε μία από τις 21 ακμές παριστάνει το ντόμινο με διαφορετικά μισά (αυτά των άκρων της), ενώ οι βρόχοι με τα ίδια μισά.
Η λύση πετυχαίνεται με διαδρομή Euler που είναι εφικτή (γιατί;)

Αναγνώριση θέσης τυμπάνου χωρίς οπτική επαφή. Με αγώγιμα (1) και μη αγώγιμα (0) υλικά





Διαδρομή Euler

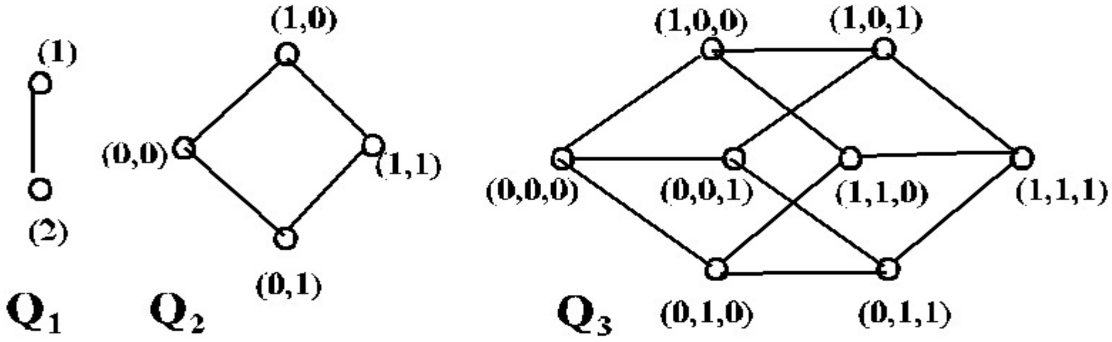
000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100

00010111

n-κύβοι

Q_n : $V(Q_n)= \{(x_{n-1}, x_{n-2}, ...,x_1, x_0) : x_i=0$ ή $1\}$

$E(Q_n)$ περιέχει ζεύγη στοιχείων που διαφέρουν σε ακριβώς 1 θέση.



Θ. Κάθε n-κύβος Q_n είναι γράφημα Hamilton.

(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0), (1,1,0), (1,1,1), (1,0,1), (1,0,0), (0,0,0)

Κώδικες Gray (Gray codes)

Δεκαδικοί	
001	1
002	1
.....	...
009	2
010	1
011	1
.....	...
099	3
100	1
101	

Δυαδικοί	
0001	2
0010	1
0011	3
0100	1
0101	2
0110	1
0111	4
1000	1
1001	2
1010	...

$N= x_{n-1}...x_0$

Κώδ. Gray	
0001	1
0011	1
0010	1
0110	1
0111	1
0101	1
0100	1
1100	1
1101	1
1111	...

$M= y_{n-1}...y_0$

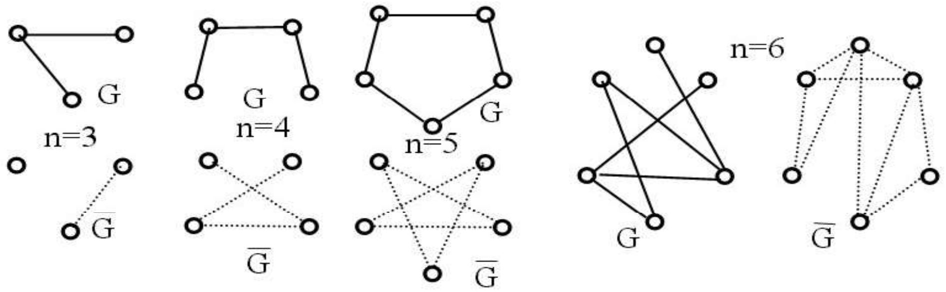
κύκλος Hamilton στον 4-κύβο

Αποδεικνύεται:

x_i γνωστά, τότε: y_i/x_i+x_{i+1}(mod2), $i=0,1,...,n-1$ $(x_n=0)$

y_i γνωστά, τότε: $x_i/y_i+y_{i+1}+...+y_{n-1}$ (mod2), $i=0,1,...,n-1$

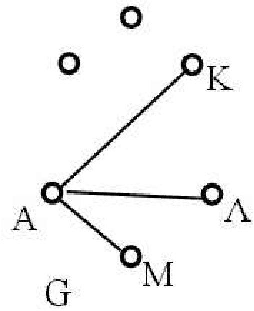
Αριθμοί Ramsey



Θ. Αν G είναι γράφημα με 6 κορυφές τότε είτε το G είτε το $\overline{G}$ περιέχει τρίγωνο

(α) Η κορυφή Α έχει βαθμό ≥ 3

(β) Η κορυφή Α έχει βαθμό <3



Π. Σε οποιαδήποτε συντροφιά 6 ατόμων, τα οποία μπορούν να μιλούν οποιεσδήποτε γλώσσες, **υπάρχουν** είτε τρία άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα είτε τρία άτομα που ανά δύο δε μιλούν την ίδια γλώσσα.

Βιβλιογραφία

- Diestel Reinhard: Graph Theory, Electronic Edition 2005

  http://diestel-graph-theory.com/GrTh.html
- Bondy J.A. & Murty U.S.R.: Graph Theory, 2008
- Χρόνη Μωυσιάδη: Συνδυαστική Απαρίθμηση, 2002
- Παπαϊωάννου: Θεωρία Γραφημάτων, 2004
- Bronshtein I.N., K.A. Semendyayev, G. Musiol, H. Muehlig: Handbook of Mathematics, 2007