Συνδυαστική

- Αρχές Απαρίθμησης,
- Μεταθέσεις,
- Διατάξεις,
- Συνδυασμοί,
- Παραδείγματα

Χρόνης Μωυσιάδης Ομότιμος Καθηγητής ΑΠΘ
Βασίλης Καραγιάννης ΕΔΙΠ Τμ. Μαθηματικών

Αρχές Απαρίθμησης

- Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$$

- Προσθετική Αρχή Απαρίθμησης

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

- Αρχή Συμπερίληψης – Εξαίρεσης

$$N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \ldots \text{ ή } \alpha_n) = \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i \alpha_j) + \sum N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k) - \ldots$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ είναι ιδιότητες

- Αρχή Περιστερώνα

Αν έχουμε n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον k·n+1 περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με k+1 ή περισσότερα περιστέρια

Μεταθέσεις, Διατάξεις, Συνδυασμοί

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n αντικείμενα (αριθμούς, γράμματα, άτομα, καταστάσεις κλπ.)

- Το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης σε σειρά λέγονται
  μεταθέσεις των n αντικειμένων.
- Αν είναι σε κύκλο λέγονται **κυκλικές μεταθέσεις**, ενώ
- αν υπάρχουν όμοια αντικείμενα έχουμε
  μεταθέσεις με επανάληψη.

Το πλήθος των τρόπων από τα n αυτά αντικείμενα να πάρουμε τα k, όπου $0 \leq k \leq n$ λέγονται :

- **διατάξεις των n ανά k** (όταν ενδιαφέρει η σειρά) ή
- **συνδυασμοί των n ανά k** (όταν **δεν** ενδιαφέρει η σειρά).

Αν μπορούμε να επιλέξουμε τα ίδια αντικείμενα περισσότερες από μία φορές, τότε το k μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός και μιλάμε για

- **διατάξεις με επανάληψη των n ανά k** (ενδιαφέρει η σειρά) ή
- **συνδυασμούς με επανάληψη των n ανά k (δεν** ενδιαφέρει η σειρά).

Μεταθέσεις

- Πλήθος τρόπων τοποθέτησης σε γραμμή n αντικειμένων:
  $$M_n = n! \ ,$$

- Πλήθος τρόπων τοποθέτησης σε κύκλο n αντικειμένων:
  $$\mathrm{K}_n = (n-1)! \ ,$$

- Πλήθος τρόπων τοποθέτησης σε γραμμή n αντικειμένων εκ των οποίων τα k_1 είναι όμοια μεταξύ τους, k_2 είναι όμοια μεταξύ τους διαφορετικά από τα προηγούμενα, και τελικά k_λ είναι όμοια μεταξύ τους διαφορετικά από όλα τα προηγούμενα, όπου ισχύει
  $k_1 + k_2 + \cdots + k_\lambda = n$, είναι:
  $$M_n^{k_1,k_2,\ldots,k_\lambda} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots k_\lambda!}, \qquad \mu\varepsilon \ k_1 + k_2 + \cdots + k_\lambda = n$$

Παράδειγμα 1

Οι πινακίδες των ιδιωτικών αυτοκινήτων στην Ελλάδα σχηματίζονται από τρία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου που έχουν αντίστοιχά τους στο Λατινικό και από 4 αριθμητικά ψηφία που σχηματίζουν τετραψήφιο αριθμό. Πόσα το πολύ ιδιωτικά αυτοκίνητα μπορούν να κυκλοφορούν στην Ελλάδα; Πόσα το πολύ από αυτά θα έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσα το πολύ θα έχουν όλα τα σύμβολα διαφορετικά; Πόσα το πολύ αρχίζουν από Μ ή Ν;

1ο γράμμα	2ο γράμμα	3ο γράμμα	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο	ΘΑΑ
14	14	14	9	10	10	10	24 696 000
14	14	14	9	9	8	7	12 446 784
14	13	12	9	9	8	7	9 906 624
2	14	14	9	10	10	10	3 528 000

Σημείωση: Αν οι πινακίδες είχαν 2 μόνο γράμματα και 3 αριθμούς, τότε θα υπήρχαν το πολύ 1764000 πινακίδες (με τα 14 γράμματα) ή το πολύ 5184000 πινακίδες (με όλα τα 24 γράμματα), **λίγες (!).**

Παράδειγμα 2

(1) Πόσες λέξεις, έστω και χωρίς νόημα, σχηματίζονται με τις διάφορες αναδιατάξεις των γραμμάτων της λέξης ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ;
(2) Πόσες από αυτές αρχίζουν και τελειώνουν με Α;

(1) Τα γράμματα της λέξης ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ είναι τα:
Τ Τ Τ Τ Α Α Υ Ο Η, δηλ. 4 (Τ), 2 (Α), και από 1 (Υ,Ο,Η)

Άρα: $M_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 7560$

(2) Χωρίς τα Α έχουμε 7 γράμματα: 4 (Τ), 1 (Υ), 1 (Ο) και 1 (Η) που σχηματίζουν $M_7^{4,1,1,1} = \frac{7!}{4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 210$. Θέτοντας το ένα Α μπροστά και το άλλο πίσω με μοναδικό τρόπο βρίσκουμε ότι υπάρχουν 210 λέξεις που αρχίζουν και τελειώνουν με Α.

Διατάξεις - Συνδυασμοί

- Διατάξεις n αντικειμένων ανά k, $(k \le n)$:

$$\Delta_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

- Διατάξεις με επανάληψη n αντικειμένων ανά k :

$$A_n^k = n^k,$$

- Συνδυασμοί n αντικειμένων ανά k, $(k \le n)$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

- Συνδυασμοί με επανάληψη n αντικειμένων ανά k:

$$\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

- Διαταράξεις n αντικειμένων (πλήθος μεταθέσεων με κανένα στοιχείο να μην παραμένει στη θέση του:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Διωνυμικοί Συντελεστές

Ισχύουν: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ και $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, οπότε

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$ Διώνυμο Νεύτωνα

που για $\alpha = x$ και $\beta = 1$, γράφεται:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n$$

Θέτοντας $x = 1$ έχουμε:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ενώ για $x = -1$ έχουμε:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$$

Παράδειγμα 3

(1) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία σχηματίζονται με τα ψηφία {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6};

(2) Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;

(3) Ποιες οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα αν επιτρέπεται επανάληψη;

(1) Παίρνοντας διατάξεις των 4 αριθμών από τους 7, θα έχουμε και κάποιους που αρχίζουν με 0, και επομένως δεν είναι τετραψήφιοι. Άρα υπάρχουν:

$$\Delta_7^4 - \Delta_6^3 = \frac{7!}{(7-4)!} - \frac{6!}{(6-3)!} = 720 \text{ τετραψήφιοι.}$$

(2) Οι άρτιοι λήγουν σε 2, 4, 6 ή σε 0. Άρα υπάρχουν:

$$3(\Delta_6^3 - \Delta_5^2) + \Delta_6^3 = 420 \text{ τετραψήφιοι.}$$

(3.1) Θα έχουμε επαναληπτικές διατάξεις αφαιρώντας όσους αρχίζουν με 0.
(3.2) Οι άρτιοι είναι 4 περιπτώσεις (λήγουν σε 0, 2, 4, 6).

(3.1) $A_7^4 - A_7^3 = 7^4 - 7^3 = 2058$ (3.2) $4(A_7^3 - A_7^2) = 1176$

Παράδειγμα 4

Πενταμελής επιτροπή εκλέγεται από σύνολο τεσσάρων καθηγητών και 30 φοιτητών. Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί η επιτροπή αν πρέπει να περιέχει: α) 2 καθηγητές και 3 φοιτητές; β) τουλάχιστον 2 καθηγητές;

(α) Με ΘΑΑ: Πρώτα επιλέγουμε τους 2 καθηγητές (συνδυασμοί των 2 από τους 4) και μετά τους 3 φοιτητές (συνδυασμοί των 3 από τους 30). Άρα υπάρχουν

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{30}{3} = 6 \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 24360 \text{ τρόποι.}$$

(β) Με ΠΑΑ: Θα εφαρμόσουμε τρεις φορές το (α), μία για 2 καθηγητές, μία για 3 καθηγητές και μία για τέσσερις. Άρα:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{30}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{30}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{30}{1} =$$
$$= 24360 + 1740 + 30 = 26130 \text{ τρόποι.}$$

Παράδειγμα 5

Από ένα μεγάλο πλήθος από νομίσματα των

5, 10, 20 και 50 λεπτών,

επιλέγουμε 5 νομίσματα, θεωρώντας ότι τα νομίσματα ίδιας αξίας δεν διακρίνονται μεταξύ τους, δηλ. είναι όμοια.

Πόσες διαφορετικές πεντάδες μπορούμε να επιλέξουμε;

Υπάρχουν

$$\varepsilon_4^5 = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56 \quad \text{τρόποι}$$

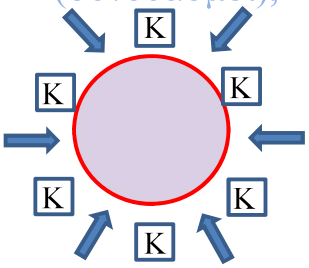
να επιλέξουμε τα 5 νομίσματα, δηλαδή όσοι οι συνδυασμοί με επανάληψη των 4 πραγμάτων ανά 5.

Άρα υπάρχουν 56 διαφορετικές πεντάδες

Παράδειγμα 6

Με πόσους τρόπους 4 αγόρια και 6 κορίτσια μπορούν να καθίσουν ώστε τα αγόρια να μην είναι σε γειτονικές θέσεις; (1) σε κυκλικό τραπέζι δέκα θέσεων; (2) σε «ουρά» σε κάποιο ταμείο.

(1) Βάζουμε 6 καρέκλες στο τραπέζι όπου θα κάτσουν τα 6 κορίτσια (1η φάση) τυχαία (κυκλικές μεταθέσεις).
Μετά (2η φάση) τα τέσσερα αγόρια διαλέγουν 4 από τις 6 θέσεις (συνδυασμοί), όπου κάθονται τυχαία (μεταθέσεις).



1η φάση 5!=120 τρόποι

2η φάση $\binom{6}{4}$ 4!=360 τρόποι

Με ΘΑΑ
$5! \cdot \binom{6}{4} \cdot 4! =$
$120 \cdot 360 = 43200$
τρόποι

(2) Τοποθετούμε τα 6 κορίτσια (1η φάση) τυχαία (μεταθέσεις) στη σειρά.
Μετά (2η φάση) τα τέσσερα αγόρια διαλέγουν 4 από τις 7 θέσεις (συνδυασμοί), όπου κάθονται τυχαία (μεταθέσεις).

1η φάση 6!=720 τρόποι

2η φάση $\binom{7}{4}$ 4!=840 τρόποι

Με ΘΑΑ
$6! \cdot \binom{7}{4} \cdot 4! =$
$720 \cdot 840 = 604800$
τρόποι

Αστεράκια και διαχωριστικά (*, |) (1)

Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε 4 ζάρια. Πόσες διαφορετικές τετράδες εμφανίζονται;
(εδώ οι τετράδες 1 1 2 3, 1 2 1 3, 2 1 3 1 δεν θεωρούνται διαφορετικές).
Έστω ότι ήρθαν 1 1 2 3 ή 2 3 4 6
Συμβολίζω τους αριθμούς με αστεράκια που τους τοποθετώ σε ένα ορθογώνιο που το χώρισα σε 6 κελιά χρησιμοποιώντας 5 διαχωριστικά (κάθετες γραμμές).

	Τα 1	Τα 2	Τα 3	Τα 4	Τα 5	Τα 6
Τότε η τετράδα 1 1 2 3 συμβολίζεται	* *	*	*			
ενώ η τετράδα 2 3 4 6 συμβολίζεται		*	*	*		*

Έτσι είναι σαν να έχουμε 9 θέσεις (4 για τα αστεράκια και 5 για τα διαχωριστικά) και μας ενδιαφέρει να επιλέξουμε τις 4 που θα βάλουμε τα αστεράκια, ενώ στις υπόλοιπες βάζουμε τα διαχωριστικά με μοναδικό τρόπο.

Άρα υπάρχουν:
$$\binom{9}{4} = \binom{9}{5} = 126$$
τρόποι

Το ίδιο βρίσκουμε αν σκεφτούμε ότι έχουμε 4 (*) και 5 (|) και τα βάζουμε στη σειρά (μεταθέσεις με επανάληψη)

δηλαδή:
$$M_9^{5,4} = \frac{9!}{5!\cdot 4!} = 126$$
τρόποι

(1) Η μέθοδος έγινε ευρέως γνωστή από το κλασικό βιβλίο εισαγωγής στις Πιθανότητες του W. Feller (1970)

Γενίκευση

Πως τοποθετούμε k όμοια σφαιρίδια σε n διακεκριμένα κελιά.
Συμβολίζοντας με $(*)$ τα k σφαιρίδια και χρησιμοποιώντας $n-1$ διαχωριστικά για να γίνουν τα n διακεκριμένα κελιά, έχουμε:

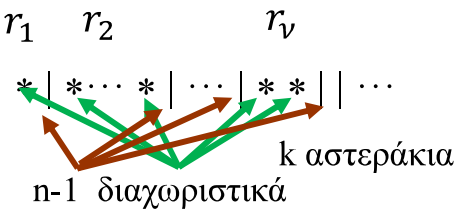
Έχουμε $n+k-1$ θέσεις να επιλέξουμε τις k :
$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$ τρόποι

Συμβολίζοντας με α τα σφαιρίδια στο 1ο κελί, με β τα σφαιρίδια στο 2ο κελί, κ.ο.κ. προκύπτει ότι οι ως άνω τοποθετήσεις είναι όσοι οι **επαναληπτικοί συνδυασμοί των n (πραγμάτων α, β, …) ανά k**.

Άρα οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των n πραγμάτων-κελιών ανά k είναι

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Πλήθος λύσεων Διοφαντικών Εξισώσεων



Συμβολίζοντας:
r_1= πλήθος από αστεράκια στο 1ο κελί
.....
r_ν= πλήθος από αστεράκια στο ν-στό κελί
.....

Τότε θα ισχύει προφανώς $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k \quad (1)$

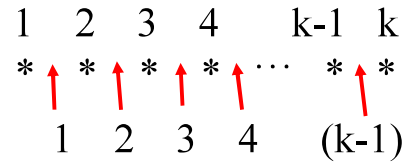
και κάθε τοποθέτηση θα είναι και μία μη-αρνητική λύση της διοφαντικής εξίσωσης (1)

Άρα οι μη-αρνητικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης (1) είναι: $\binom{n+k-1}{n-1}$

Θέτοντας τώρα $r_i = x_i + 1$ προκύπτει ότι οι θετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης (1) είναι: $\binom{k-1}{n-1}$

Για τις Θετικές Λύσεις (άλλος τρόπος)

Αν θέλουμε να είναι $r_i > 0$, σημαίνει ότι δεν πρέπει τα διαχωριστικά να είναι γειτονικά, ούτε να είναι στα άκρα.



Έτσι τοποθετούμε μόνο τα αστεράκια και δημιουργούνται k − 1 κενά, ανάμεσά τους. Στα κενά αυτά πρέπει να μπουν τα n − 1 διαχωριστικά (Πρέπει βεβαίως $n \le k$).

Και υπάρχουν: $\binom{k-1}{n-1}$ τρόποι να συμβεί αυτό.

Παράδειγμα 7

Έχουμε 10 καραμέλες τις οποίες θέλουμε να μοιράσουμε σε τρία παιδιά. Χρησιμοποιούμε 3 διαφορετικά κουτιά που χωρούν μέχρι και όλες τις καραμέλες, και τις μοιράζω τυχαία σ' αυτά. (1) Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν; (2) Σε πόσους κάθε παιδί παίρνει μία τουλάχιστον καραμέλα;

(1) x_1 x_2 x_3 και $x_1 + x_2 + x_3 = 10\,,\ x_i \geq 0$ (*)

Το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης (*) ισούται με τους επαναληπτικούς συνδυασμούς των 3 πραγμάτων ανά 10, άρα:

$$\varepsilon_3^{10} = \binom{3+10-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$$

(2) Αρκεί να δώσουμε πρώτα από μία καραμέλα σε κάθε παιδί και μετά να μοιράσουμε τις 7 καραμέλες στα 3 παιδιά, άρα:

Υπάρχουν $\varepsilon_3^7 = \binom{3+7-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$ τρόποι.

Καταγραφή διανομών για (1)

```
install.packages("combinat")
require(combinat)

comb=combn(12, 2)
d=dim(comb);d

a=rep(0,(d[1]+1)*d[2])
dim(a)=c(d[2],d[1]+1)
dimnames(a) <- list(NULL,
paste(1:3,"ο παιδί",
      sep=""))

for (i in 1:d[2]){
  x=comb[,i]
  a[i,1]=x[1]-1
  a[i,2]=x[2]-x[1]-1
  a[i,3]=10-a[i,1]-a[i,2]
}
a
```

```
      1ο παιδί 2ο παιδί 3ο παιδί
 [1,]        0        0       10
 [2,]        0        1        9
 [3,]        0        2        8
 [4,]        0        3        7
 [5,]        0        4        6
 [6,]        0        5        5
 [7,]        0        6        4
 [8,]        0        7        3
 [9,]        0        8        2
[10,]        0        9        1
.....................................
[57,]        7        0        3
[58,]        7        1        2
[59,]        7        2        1
[60,]        7        3        0
[61,]        8        0        2
[62,]        8        1        1
[63,]        8        2        0
[64,]        9        0        1
[65,]        9        1        0
[66,]       10        0        0
```

Καταγραφή διανομών για (2)

```
comb=combn(9, 2)
d=dim(comb);d

a=rep(1,(d[1]+1)*d[2])
dim(a)=c(d[2],d[1]+1)
dimnames(a) <-
list(NULL, paste(1:3,
   "ο παιδί",sep=""))

for (i in 1:d[2]){
 x=comb[,i]
 a[i,1]=1+x[1]-1
 a[i,2]=1+x[2]-x[1]-1
 a[i,3]=10-a[i,1]-a[i,2]
}
a
```

	1ο παιδί	2ο παιδί	3ο παιδί
[1,]	1	1	8
[2,]	1	2	7
[3,]	1	3	6
[4,]	1	4	5
[5,]	1	5	4
[6,]	1	6	3
[7,]	1	7	2
[8,]	1	8	1
[9,]	2	1	7
[10,]	2	2	6
.....	.....	.....	.....
[27,]	5	1	4
[28,]	5	2	3
[29,]	5	3	2
[30,]	5	4	1
[31,]	6	1	3
[32,]	6	2	2
[33,]	6	3	1
[34,]	7	1	2
[35,]	7	2	1
[36,]	8	1	1

Εφαρμογές

- Για δύο θετικούς αριθμούς k, n το πλήθος των διαφορετικών n −άδων θετικών αριθμών που αθροίζουν στο k είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων από $k-1$ πράγματα να επιλέξουμε $n-1$, δηλ. $\binom{k-1}{n-1}$.
- Το πλήθος μερικών παραγώγων τάξης r μιας αναλυτικής συνάρτησης n μεταβλητών είναι $\binom{n+r-1}{r}$.

  Π.χ. μία συνάρτηση τριών μεταβλητών ($n=3$) έχει $\binom{6}{4}=15$ παραγώγους 4ης τάξης και $\binom{7}{5}=21$ παραγώγους 5ης τάξης.
- Υπάρχουν $\binom{r+5}{5}$ διαφορετικά αποτελέσματα σε ρίψη r ζαριών.

Πόσοι τρόποι υπάρχουν να έχουμε άθροισμα k σε ρίψη n ζαριών;

Εδώ έχουμε πάλι τη σχέση $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k$ (2)
όπου πρέπει $1 \le r_i \le 6$. Μας χρειάζεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k \text{ , με } r_1 > \alpha_1, \quad r_2 > \alpha_2, \ \ldots, \quad r_n > \alpha_n$$

δίνονται από τον τύπο:

$$\binom{k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n - 1}{n-1} \qquad (3)$$

Για την απόδειξη παρατηρήστε ότι η αντικατάσταση στην (2) των r_i με $y_i + \alpha_i + 1$ την μετασχηματίζει ως προς y_i , όπου

$$r_i > a_i \quad \Rightarrow \quad y_i + a_i + 1 > a_i \quad \Rightarrow \quad y_i \ge 0,$$

δηλαδή στην προκύπτουσα διοφαντική εξίσωση ζητούνται οι μη-αρνητικές λύσεις της, που είναι γνωστές και εύκολα καταλήγουμε στη σχέση (3).

Με την Αρχή Συμπερίληψης-Εξαίρεσης αποδεικνύεται τώρα το:

Θεώρημα: Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = k, \ \text{με} \ \ 1 \le r_i \le \alpha, \ \ i = 1, 2, \ \ldots, n \qquad (3)$$

είναι:

$$\binom{k-1}{n-1} - \binom{n}{1}\binom{k-\alpha-1}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{k-2\alpha-1}{n-1} - \binom{n}{3}\binom{k-3\alpha-1}{n-1} + \cdots$$

Παράδειγμα 8

Με πόσους τρόπους ρίχνοντας 4 ζάρια παίρνουμε άθροισμα 18;

Αρκεί να πάρουμε $\alpha = 6, n = 4, k = 18$, οπότε:

$$\binom{18-1}{4-1} - \binom{4}{1}\binom{18-7}{4-1} + \binom{4}{2}\binom{18-13}{4-1} - \binom{4}{3}\binom{18-19}{4-1} + \cdots$$

δηλαδή:

$$\binom{17}{3} - \binom{4}{1}\binom{11}{3} + \binom{4}{2}\binom{5}{3} - \binom{4}{3}\cancel{\binom{-1}{3}} = \cdots = 80 \ \text{ τρόποι}$$

Με πολυώνυμα

Το παράδειγμα 8 μπορεί να λυθεί και με άλλο τρόπο.

Αν αναπτύξουμε το πολυώνυμο $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$ θα βρούμε:

$x^4 + 4x^5 + 10x^6 + 20x^7 + 35x^8 + 50x^9 + 80x^{10} + 104x^{11} + 125x^{12}$
$+ 140x^{13}146x^{14} + 140x^{15} + 125x^{16} + 104x^{17} + 80x^{18} + 56x^{19}$
$+ 35x^{20} + 20x^{21} + 10x^{22} + 4x^{23} + x^{24}$

Ο συντελεστής του όρου x^{18} δίνει το πλήθος των αθροισμάτων με 4 προσθετέους από τους 1, 2, 3, 4, 5, 6 που αθροίζουν στο 18.

Στη γλώσσα R οι εντολές:

```
library(polynom) ;  polynomial(c(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1))^4
```

δίνουν:

```
x^4 + 4*x^5 + 10*x^6 + 20*x^7 + 35*x^8 + 56*x^9 + 80*x^10 + 104*x^11
+ 125*x^12 + 140*x^13 + 146*x^14 + 140*x^15 + 125*x^16 + 104*x^17 +
80*x^18 + 56*x^19 + 35*x^20 + 20*x^21 + 10*x^22 + 4*x^23 + x^24
```


Διαμερίσεις ακεραίων

Η χρήση των πολυωνύμων βοηθά στην εύρεση του πλήθους των διαμερίσεων ενός ακεραίου με προσθετέους που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες.

Θα διατυπώσουμε μια σχετική πρόταση.

Πρόταση: Το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$$\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 + \cdots + \alpha_k\lambda_k = n, \quad \text{με } 0 \le \lambda_i \le \left[\frac{n}{\alpha_i}\right]$$

ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n με προσθετέους οσουσδήποτε και οσεσδήποτε φορές από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, και υπολογίζεται ως ο συντελεστής της δύναμης x^n στο πολυώνυμο:

$$(1 + x^{\alpha_1} + x^{2\alpha_1} + \cdots) \cdot (1 + x^{\alpha_2} + x^{2\alpha_2} + \cdots) \cdots (1 + x^{\alpha_k} + x^{2\alpha_k} + \cdots)$$

όπου οι αθροίσεις πηγαίνουν μέχρι όρους με εκθέτη $\le n$.

Παράδειγμα 9

Με πόσους τρόπους μπορούμε να χαλάσουμε 100€ σε μικρότερα χαρτονομίσματα (5, 10, 20 και 50€)

Το πρόβλημα ταυτίζεται με το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης

$$\mathbf{5\lambda_1 + 10\lambda_2 + 20\lambda_3 + 50\lambda_4 = 100}$$

Όπου λ_1 συμβολίζει πόσα τάλιρα θα χρησιμοποιήσουμε,
λ_2 συμβολίζει πόσα δεκάρικα θα χρησιμοποιήσουμε, κλπ

Από την προηγούμενη πρόταση αρκεί να βρούμε το συντελεστή του x^{100} στο ανάπτυγμα:

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots + x^{100}) \cdot (1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{100}) \cdot (1 + x^{20} + x^{40} + \cdots + x^{100}) \cdot (1 + x^{50} + x^{100})$$

Υπολογισμός με την R

Ο κώδικας για την R

```
library(polynom)
v=0:100
c1=c(1,diff(c(0,floor(v/5))));c1
c2=c(1,diff(c(0,floor(v/10))));c2
c3=c(1,diff(c(0,floor(v/20))));c3
c4=c(1,diff(c(0,floor(v/50))));c4
p1=polynomial(c1) ; p2=polynomial(c2)
p3=polynomial(c3) ; p4=polynomial(c4)
p=p1*p2*p3*p4  ;  p
```

Το εξαγόμενο

```
1 + x^5 + 2*x^10 + 2*x^15 + 4*x^20 + 4*x^25 + 6*x^30 + 6*x^35 +
9*x^40 + 9*x^45 + 13*x^50 + 13*x^55 + 18*x^60 + 18*x^65 + 24*x^70 +
24*x^75 + 31*x^80 + 31*x^85 + 39*x^90 + 39*x^95 + 49*x^100 +
48*x^105 + 58*x^110 + ……..
……+ x^395 + x^400
```

Αριθμοί Fibonacci

Είναι γνωστοί οι αριθμοί Fibonacci, που ορίζονται ως η ακολουθία:

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad με \quad n \geq 2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Οι 15 πρώτοι απ' αυτούς είναι:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

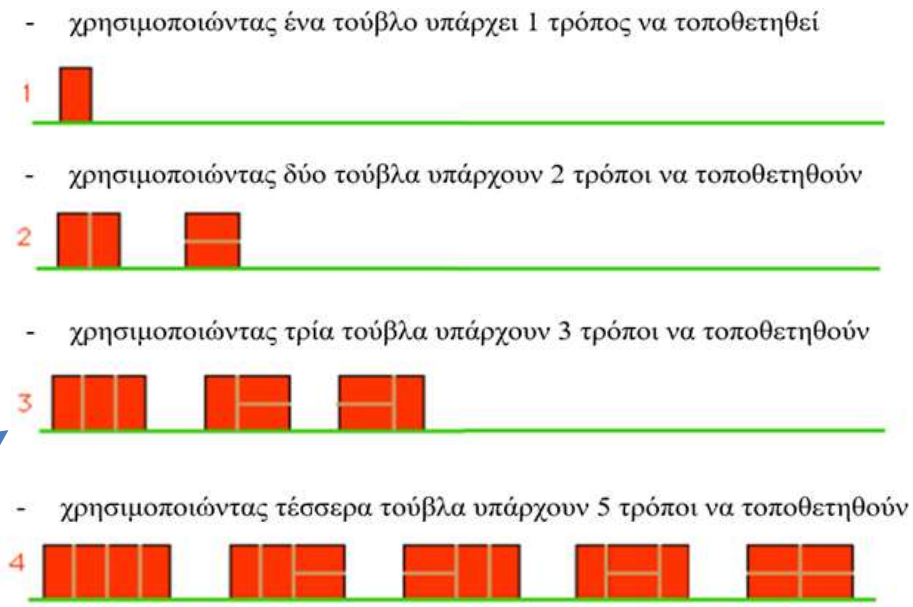
Μπορεί να δειχθεί ότι υπολογίζονται και από τη σχέση:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \; n \in \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 10

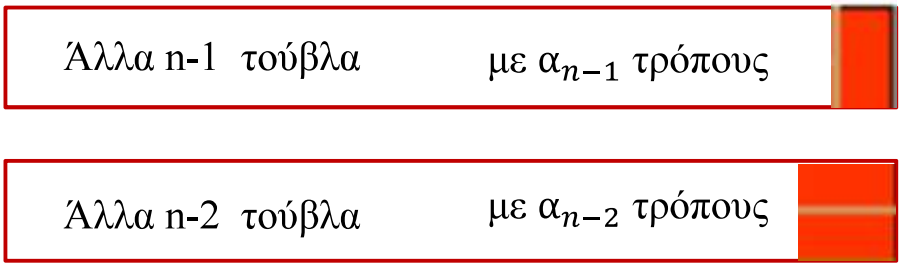
Ένα πρόβλημα με τούβλα

Χρησιμοποιώντας τούβλα $20 \times 10 \times 10$, με πόσους τρόπους μπορούμε να χτίσουμε μονό τοίχο ύψους 20 εκ., με n τούβλα;



Για $n = 1, 2, 3, 4$

Για τυχαίο n θεωρούμε ότι υπάρχουν α_n τρόποι



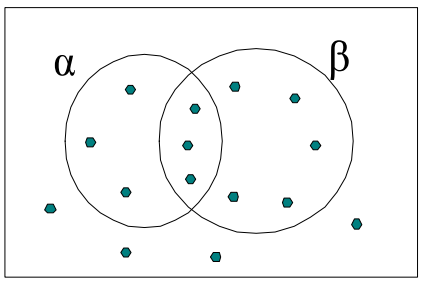
Άρα είναι φανερό (ΠΑΑ), ότι: $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}\,, \quad n \geq 3\,,$
ενώ όπως είδαμε πριν είναι $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$

Δηλαδή τα α_n ικανοποιούν την ίδια αναδρομική σχέση με τους αριθμούς Fibonacci και τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Άρα $\alpha_n = F_n$

Αρχή Συμπερίληψης - Εξαίρεσης (ΑΣΕ)

Έστω N άτομα και n ιδιότητες $a_1, a_2, \ldots, a_n$
που έχουν ή όχι τα N άτομα
Συμβολίζουμε:
$\mathrm{N}(\alpha_k)$ το πλήθος ατόμων που έχουν την ιδιότητα α_k
$\mathrm{N}(\alpha_k')$ το πλήθος ατόμων που δεν έχουν την ιδιότητα α_k
και γενικά
$\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_2 \ldots \beta_1'\beta_2')$ το πλήθος ατόμων που έχουν τις ιδιότητες
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ και δεν έχουν τις ιδιότητες $\beta_1, \beta_1', \ldots$

Για n=2 βρίσκουμε



Εδώ βλέπουμε ότι
N=15, $\mathrm{N}(\alpha)$=6, $\mathrm{N}(\beta)$=8, $\mathrm{N}(\alpha\beta)$=3
και μπορούμε να βρούμε το $\mathrm{N}(\alpha'\beta')$

$$\mathrm{N}(\alpha \text{ ή } \beta) = \mathrm{N}(\alpha) + \mathrm{N}(\beta) - \mathrm{N}(\alpha\beta) = 11$$
$$\Rightarrow \quad \mathrm{N}(\alpha'\beta') = \mathrm{N} - \mathrm{N}(\alpha \text{ ή } \beta) = 4$$

Για η ιδιότητες

$$N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } \alpha_n) = \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i \alpha_j) + \ldots + \\ + (-1)^{s+1} \sum N(\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_s}) \pm \ldots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

$$N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } \alpha_n) + N(\alpha_1' \; \alpha_2' \; \ldots \; \alpha_n') = N$$

Αν A_k το σύνολο των ατόμων που έχουν την ιδιότητα α_k και $|A_k|$ συμβολίζει τον πληθικό αριθμό του συνόλου A_k , τότε η ΑΣΕ γράφεται επίσης :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$$

όπου:

$$S_k = \sum_{1 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k \le n} |A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \ldots \cap A_{t_n}|, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

που δείχνεται επαγωγικά

Παράδειγμα 11

Πόσοι από τους αριθμούς 1, 2, …, 100 δεν διαιρούνται ούτε με το 2, ούτε με το 3 ούτε με το 7;

Με καταγραφή (Κόσκινο του Ερατοσθένη):

1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1				5					
11		13				17		19	
		23		25				29	
31						37			
41		43				47			
		53		55				59	
61				65		67			
71		73						79	
		83		85				89	
				95		97			

Άρα απομένουν οι παρακάτω 28 αριθμοί, που ικανοποιούν το ζητούμενο:
1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 79, 83, 85, 89, 95, 97

Με την αρχή Συμπερίληψης - Εξαίρεσης

Θεωρούμε ότι οι αριθμοί 1, 2, …, 100 έχουν ή όχι τις ιδιότητες:

α: Ο αριθμός διαιρείται με 2,
β: Ο αριθμός διαιρείται με 3,
γ: Ο αριθμός διαιρείται με 7,

Τότε οι αριθμοί που διαιρούνται είτε με 2 είτε με 3 είτε με 7 είναι (ΑΣΕ):

$$N(\alpha \text{ ή } \beta \text{ ή } \gamma) = N(\alpha) + N(\beta) + N(\gamma) - N(\alpha\beta) - N(\alpha\gamma) - N(\beta\gamma) + N(\alpha\beta\gamma) =$$

$$= \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{7}\right] - \left[\frac{100}{6}\right] - \left[\frac{100}{14}\right] - \left[\frac{100}{21}\right] + \left[\frac{100}{42}\right] =$$

$$= 50 + 33 + 14 - 16 - 7 - 4 + 2 = 72\,.$$

Άρα το ζητούμενο είναι $100 - 72 = 28$.

Παράδειγμα 12

Γενίκευση: Συνάρτηση Euler

φ(n)= πλήθος αριθμών μικρότερων του n που είναι πρώτοι προς τον n

Αν $n = {p_1}^{\pi_1}{p_2}^{\pi_2} \cdots {p_r}^{\pi_r}$
Για $i = 1, \ldots, n$ θέτουμε:
α_i =αριθ. διαιρ με p_i

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Παράδειγμα 13

Πόσες από τις μεταθέσεις των αριθμών 1,2, ..., 11:

α. αφήνουν κάθε άρτιο στη φυσική του θέση και κανένα περιττό στη θέση του;

Απ. $D_6 = \cdots = 265$

β. αφήνουν όλους τους άρτιους σε άρτιες θέσεις, τους περιττούς σε περιττές θέσεις, αλλά κανέναν στη φυσική του θέση;

Απ. $D_6 \cdot D_5 = \cdots = 11660$

γ. ακριβώς τέσσερις αριθμούς στη θέση τους;

Απ. $\binom{11}{4} D_7 = 330 \cdot 1854 = 611820$

Παράδειγμα 14

Τα γράμματα Δ, Γ, Υ, Ε, Σ, Ω, τοποθετούνται τυχαία σε σειρά. Ποια η πιθανότητα να μην εμφανιστούν οι λέξεις ΕΓΩ και ΣΥ;

Θεωρώ τις ιδιότητες:
Α = εμφανίζεται το «ΕΓΩ», Β = εμφανίζεται το «ΣΥ»

Τότε:
$$N(A'B') = N - N(A) - N(B) + N(AB) =$$
$$= 6! - 4! - 5! + 3! = 582$$

Άρα
$$P(\text{πιθανότητα να μην εμφανιστούν οι λέξεις ΕΓΩ και ΣΥ}) =$$
$$P(A'B') = \frac{N(A'B')}{N} = \frac{582}{720} = 0.808$$

Αρχή Περιστερώνα

Αν έχουμε n «φωλιές» και τουλάχιστον n+1 «περιστέρια» τότε υπάρχει φωλιά με τουλάχιστον 2 «περιστέρια»

Παράδειγμα 15

Ο πληθυσμός μιας κωμόπολης είναι 15000 κάτοικοι. Αν κάθε κάτοικος έχει τρία αρχικά, δηλ. τα αρχικά γράμματα του ονόματός του, του επωνύμου του και του πατρωνύμου (ή του ονόματος του συζύγου για τις έγγαμες γυναίκες), να εξεταστεί αν είναι αλήθεια ότι υπάρχουν οπωσδήποτε δύο κάτοικοι με τα ίδια αρχικά.

Με ΘΑΑ.

Υπάρχουν $24 \cdot 24 \cdot 24 = 13824$ τριάδες

διαφορετικών κωδικών.

Άρα από αρχή περιστερώνα ισχύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 16

Να δείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός που γράφεται μόνο με τα ψηφία 0 και 1, ο οποίος να διαιρείται με το 7

Πάρτε τους αριθμούς 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111.
Από αυτούς είτε κάποιος διαιρείται με το 7, οπότε ισχύει το ζητούμενο, είτε αφήνουν μη-μηδενικό υπόλοιπο.
Αν τα 6 μη-μηδενικά υπόλοιπα διά του 7 είναι οι «φωλιές» και τα 7 υπόλοιπα τα «περιστέρια» τότε από την αρχή του περιστερώνα, δύο τουλάχιστον αριθμοί είναι ισουπόλοιποι και επομένως η διαφορά τους έχει υπόλοιπο 0 διαιρούμενο με το 7.

Όμως η διαφορά δύο οποιωνδήποτε από τους αριθμούς έχει τη μορφή

$$1 \ldots 1\, 0 \ldots 0$$

Δηλαδή είναι ακέραιος που γράφεται μόνο με τα ψηφία 0 και 1, και ο οποίος όπως δείξαμε διαιρείται με το 7.

Πράγματι μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\frac{1111110}{7} = 158730$
Προφανώς υπάρχουν και άλλοι τέτοιοι αριθμοί π.χ.

$$\frac{11111101111110}{7} = 1587300158730$$

Παράδειγμα 17

Σε ένα δωμάτιο υπάρχουν n άνθρωποι, άλλοι χαιρετιούνται με χειραψία κι άλλοι όχι. Τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο άνθρωποι που έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό χειραψιών.

Οι δυνατές τιμές χειραψιών για έναν άνθρωπο είναι 0, 1, ..., n-1. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν δύο άνθρωποι που έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό χειραψιών, τότε υπάρχει ένας άνθρωπος που έχει κάνει n-1 χειραψίες (δηλαδή με όλους) και ένας με 0 χειραψίες, που είναι άτοπο.

Από τον Μαθηματικό Διαγωνισμό «ΘΑΛΗΣ». Σε μία κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν 2 τουλάχιστον με το ίδιο ύψος. Δείξτε ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών ίδιου φύλου από την ίδια χώρα με το ίδιο ύψος.

Υπάρχουν 18 φωλιές (ίδιου φύλλου και χώρας) και 577 περιστέρια (τα παιδιά) και ισχύει $577 = 18 \cdot 32 + 1$. Άρα υπάρχει φωλιά με 33 άτομα. Σ' αυτά τα 33 άτομα υπάρχουν 5 τουλάχιστον άτομα ίδιου ύψους. Πράγματι, αλλιώς τα άτομα ίδιου ύψους θα ήταν το πολύ 4 και λόγω της σχέσης $33 = 4 \cdot 8 + 1$, θα είχαμε τουλάχιστον 9 διαφορετικά ύψη. Αυτό είναι άτοπο, διότι επιλέγοντας 9 άτομα ένα από κάθε διαφορετικό ύψος, δεν θα ίσχυε η δοθείσα προϋπόθεση.

Παράδειγμα 18 (Erdös-Szekeres)

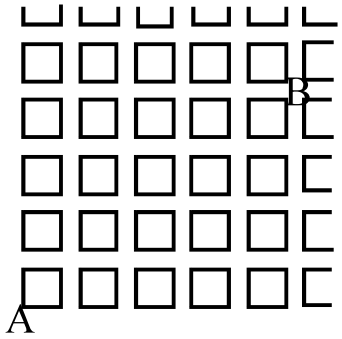
Αν $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $N>nm$, τότε είτε υπάρχει μία μονοτόνως αύξουσα ακολουθία μήκους μεγαλύτερου του m, είτε υπάρχει μία μονοτόνως φθίνουσα ακολουθία μήκους μεγαλύτερου του n.

Παράδειγμα: n=2, m=3 {17,15,12,8,28,13,29} Η μεγαλύτερου μήκους αύξουσα είναι η {17,28,29} ή {8, 28,29} με μήκος όχι μεγαλύτερο του m=3. Άρα υπάρχει η {17,15,12,8} φθίνουσα με μήκος μεγαλύτερο του 2.

Θεωρούμε $N=nm+1$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει μία μονοτόνως αύξουσα ακολουθία μήκους m+1 ή μεγαλύτερου. Για i=1, 2,…, m θέτουμε: $K_i=\{k:$ η μεγαλύτερου μήκους μονοτόνως αύξουσα ακολουθία που λήγει στο x_k έχει μήκος $i\}$. (Για το παράδειγμα $K_1=\{1,2,3,4\}$, $K_2=\{5,6\}$, $K_3=\{7\}$)
Τα $K_1, K_2,\ldots, K_m$ αποτελούν διαμέριση του {1, 2, …, nm+1} (nm+1 περιστέρια) σε m υποσύνολα (φωλιές). Άρα υπάρχει υποσύνολο έστω το K_λ με τουλάχιστον n+1 αριθμούς-δείκτες της ακολουθίας. Τα στοιχεία της αρχικής ακολουθίας με δείκτες τα στοιχεία του K_λ αποτελούν φθίνουσα ακολουθία. Πράγματι, έστω υπάρχουν k,l στο K_λ με $k<l$ και $x_k<x_l$. Αφού $k\in K_\lambda$, υπάρχει ακολουθία μήκους λ μονοτόνως αύξουσα που λήγει στο x_k έστω η $x_{i1}<x_{i2}<\ldots< x_k$. Τότε η ακολουθία $x_{i1}<x_{i2}<\ldots< x_k<x_l$ έχει μήκος λ+1 άτοπο αφού $l\in K_\lambda$.

Κίνηση σε δικτύωμα

Ένας διαβάτης κινείται σε ένα δίκτυο οικοδομικών τετραγώνων (σχήμα), από το σημείο Α στο σημείο Β. Αν του επιτρέπεται να κινείται μόνο προς τα Ανατολικά ή προς τα Βόρεια, να βρεθεί πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορεί να ακολουθήσει;

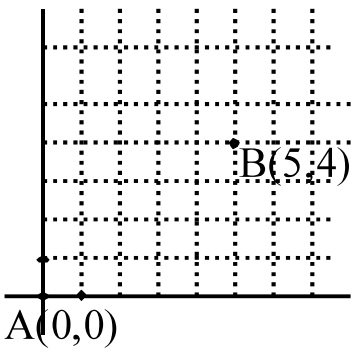


Για να βρεθεί κάποιος από το σημείο Α (x_0, y_0) στο σημείο $M(x_0+x, y_0+y)$ χρειάζεται να κάνει x+y διαδοχικά βήματα, κάποια προς τα ανατολικά (Α) και κάποια προς τα βόρεια (Β). Άρα, κάθε διαδρομή είναι μία διαδοχή από

x το πλήθος Α και y το πλήθος Β.

Επομένως το πλήθος των διαφορετικών δρόμων θα ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων x+y γραμμάτων, από τα οποία τα x είναι Α και τα y είναι Β, δηλ.:

$$M_{x+y}^{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$$

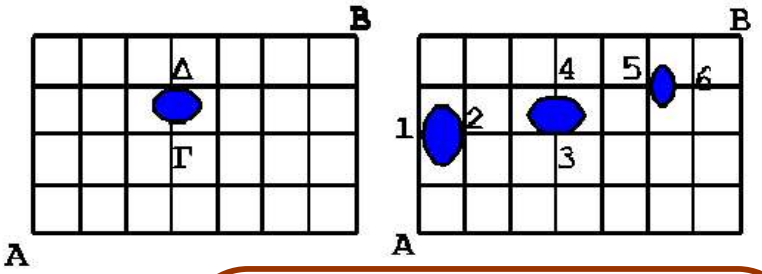


Εδώ

$$M_9^{5,4} = \binom{9}{4} = 126$$

Παράδειγμα 19

Στα σχήματα δίπλα υπάρχουν βήματα μη εφικτά, όπως μεταξύ των σημείων Γ, Δ στο πρώτο σχήμα, ή μεταξύ των σημείων 1,2 ή 3,4 ή 5,6 στο δεύτερο. Με πόσους τρόπους πάμε από το Α στο Β; Να δοθεί γενική λύση για το πρώτο σχήμα.



(1) Πρέπει από όλες τις διαδρομές που συνδέουν τα Α, Β, να αφαιρέσουμε όλες τις διαδρομές που περιέχουν το βήμα "ΓΔ". Αυτές οι τελευταίες αποτελούνται από τους συνδυασμούς των διαδρομών από το Α στο Γ, και αυτών από το Δ στο Β (πολλαπλασιαστική αρχή).

Λύση για Α(0, 0), Β(x, y), Γ(κ, λ), Δ(κ, λ+1),

$$\binom{x+y}{x} - \binom{\kappa+\lambda}{\kappa} \cdot \binom{x+y-\kappa-\lambda-1}{x-\kappa}$$

Εδώ: $\binom{11}{7} - \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} = 280$

(2) Στο δεύτερο σχήμα θέτουμε α την ιδιότητα «η διαδρομή δεν περιέχει το βήμα 12», και αντίστοιχα β και γ, για τις διαδρομές που δεν περιέχουν τα 34 ή 56. Το ζητούμενο ισοδυναμεί με το πλήθος N(α΄β΄γ΄) των διαδρομών που δεν ικανοποιούν καμία από τις τρεις ιδιότητες. Με ΑΣΕ βρίσκουμε 173 διαδρομές.

Παράδειγμα 20

Με πόσους τρόπους σχηματίζεται η λέξη ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ από το διπλανό σχήμα;

Π
Ι Ι
Θ Θ Θ
Α Α Α Α
Ν Ν Ν Ν Ν
Ο Ο Ο Ο Ο Ο
Τ Τ Τ Τ Τ
Η Η Η Η
Τ Τ Τ
Ε Ε
Σ

Ένας τρόπος

```
                *
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    6  15  20  15   6
  21  35  35  21
 56  70  56
126 126
252
```

Άλλος τρόπος

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$