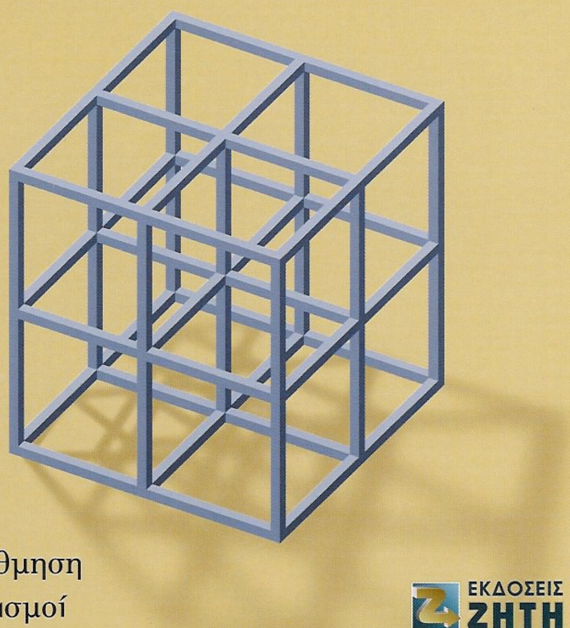
ΧΡΟΝΗΣ Θ. ΜΩΥΣΙΑΔΗΣ
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ

Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα



- Απαρίθμηση
- Σχεδιασμοί
- Γραφήματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

5.1. Ανακάλυψη

Ο W. Leibniz, σε επιστολή του το 1679 προς τον C. Huygens, παρατήρησε ότι "*μας χρειάζεται ένα άλλο είδος ανάλυσης, γεωμετρικής ή γραμμικής, που να ασχολείται απ' ευθείας με τη θέση, όπως η άλγεβρα ασχολείται με το μέγεθος*".

Χρησιμοποίησε τον όρο "analysis situs" (δηλ. ανάλυση της θέσης) για το είδος αυτό της ανάλυσης το οποίο κατά καιρούς ονομάστηκε "geometria situs ή geometry of position", για να καταλήξει σήμερα στον όρο θεωρία γραφημάτων (Graph theory).

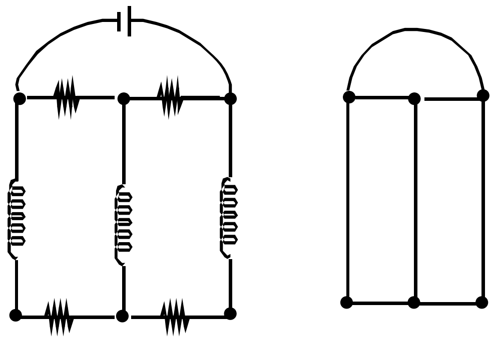
Το 1735 ο L. Euler παρουσίασε στην ακαδημία επιστημών της Αγίας Πετρούπολης το περίφημο πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg (πρόβλημα 11 της παραγράφου 1.1). Αυτό το πρόβλημα θεωρείται ως το γενέθλιο πρόβλημα της θεωρίας γραφημάτων, διότι στη λύση που πρότεινε έλαβε υπόψη του μόνο τις θέσεις και όχι τις σχετικές αποστάσεις των γεφυρών.

Το 1750 πάλι ο Euler παρατήρησε ότι στα κυρτά γεωμετρικά στερεά, ανεξάρτητα από το μέγεθος ή τη μορφή τους, ισχύει η σχέση:

$$H+S=A+2,$$

όπου Η το πλήθος εδρών, S το πλήθος στερεών γωνιών και Α το πλήθος των ακμών του στερεού. Η σχέση θα αποδειχθεί παρακάτω στα επίπεδα γραφήματα.

Το 1847 ο Kirchhoff θέλοντας να υπολογίσει τη ζεύξη σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, αντιστοίχισε ένα γράφημα στο κύκλωμα, όπως στο Σχήμα 5.1.

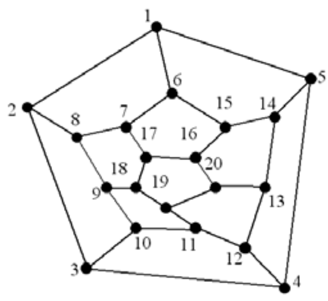


το Κύκλωμα το Γράφημα

Σχήμα 5.1

Ο Cayley το 1857 αντιστοίχισε γραφήματα στα μόρια των υδρογονανθράκων, έτσι ώστε τα άτομα του άνθρακα παριστάνονται με μικρούς κύκλους και τα άτομα του υδρογόνου με γραμμές.

Ο Sir William Hamilton σκέφθηκε στα 1859 ένα παιχνίδι που το ονόμασε *Γύρος του κόσμου* (around the world). Ας θεωρήσουμε ότι 20 πόλεις στον κόσμο είναι κορυφές ενός κανονικού 20-γωνου, στερεό που εγγράφεται σε κύκλο. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η συγκοινωνία μεταξύ αυτών των πόλεων είναι εφικτή μόνον δια των ακμών του 20-γώνου. Είναι δυνατόν να βρεθεί διαδρομή που να περνά από όλες τις πόλεις και να επιστρέφει στην πόλη εκκίνησης, χωρίς να περνά δεύτερη φορά από καμία πόλη;



Σχήμα 5.2

Το παιχνίδι περιγράφεται στο σχήμα 5.2. Οι κορυφές στο σχήμα αυτό παριστάνουν τις 20 πόλεις και οι ακμές που τις συνδέουν, παριστάνουν σχηματικά τους επιτρεπτούς τρόπους μετάβασης από τη μία στην άλλη. Μία διαδρομή που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του παιχνιδιού, είναι η:

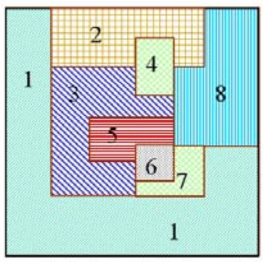
1, 2, 3, 4, 5, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 17, 18, 19, 20, 16, 15, 6, 1.

όπου με 1 συμβολίσαμε την πόλη εκκίνησης και άφιξης.

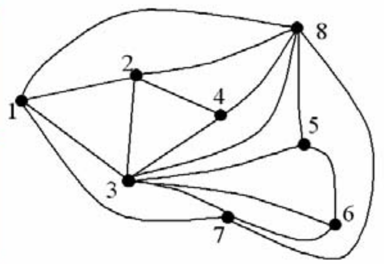
Διαδρομές τέτοιες σε γραφήματα, δηλαδή διαδρομές που περνούν από όλες τις κορυφές ενός γραφήματος, ακριβώς από μία φορά και επιστρέφουν στην πόλη εκκίνησης, λέγονται διαδρομές Hamilton και το γράφημα που περιέχει μία τουλάχιστον τέτοια διαδρομή, λέγεται γράφημα Hamilton ή Hamiltonian γράφημα.

Δεν υπάρχει γενικός τρόπος να διαπιστωθεί αν ένα τυχαίο γράφημα είναι Hamiltonian. Ακόμη πιο δύσκολο είναι να βρεθεί ποια διαδρομή Hamilton έχει ελάχιστο μήκος, ή ελάχιστο κόστος κλπ. Το πρόβλημα αυτό στη γενική περίπτωση είναι άλυτο, με την έννοια ότι οι αλγόριθμοι που κατασκευάζονται δε συγκλίνουν σε πολυωνυμικό χρόνο (NP-Complete Problem).

Διάσημο είναι επίσης το πρόβλημα των 4 χρωμάτων. Το πρόβλημα αυτό διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1840 από τον Möbious και αφορά τη δυνατότητα χρωματισμού οποιουδήποτε χάρτη με τέσσερα μόνον χρώματα. Στο σχήμα 5.3 φαίνεται η σχέση ενός χάρτη με ένα γράφημα. Οι χώρες συμβολίζονται με τις κορυφές του γραφήματος, ενώ η ιδιότητα δύο χωρών να



ο χαρτης



το γράφημα

Σχήμα 5.3

συνορεύουν, παριστάνεται με μία ακμή που συνδέει τις χώρες. Το πρόβλημα των 4 χρωμάτων ανάγεται με τον τρόπο αυτό στο πρόβλημα του χρωματισμού των επίπεδων γραφημάτων.

Οι Appel και Haken το 1976 απέδειξαν με τη βοήθεια υπολογιστή ότι αρκούν τέσσερα χρώματα για να χρωματιστεί οποιοσδήποτε χάρτης. Η απόδειξη όμως είναι αρκετά πολύπλοκη και είναι δύσκολο να ελεγχθεί εάν πράγματι καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Ότι όμως αρκούν 5 χρώματα για να χρωματίσουν ένα χάρτη ήταν ήδη γνωστό από το 1890 (Heawood).

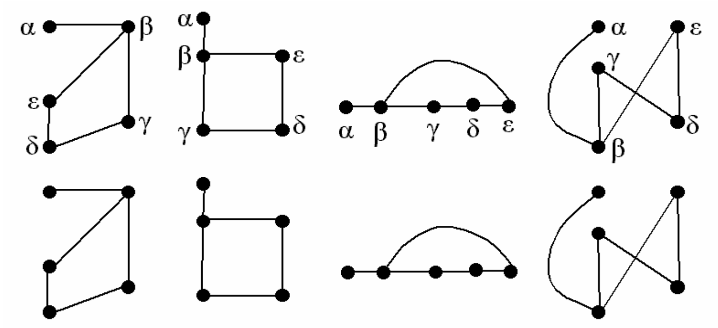
Σήμερα τα γραφήματα χρησιμοποιούνται σε όλες σχεδόν τις επιστήμες, διότι το μόνο που απαιτείται είναι κάποια αντικείμενα που μεταξύ τους έχουν ή δεν έχουν κάποια σχέση.

5.2. Βασικές έννοιες

Δίνουμε τον επόμενο ορισμό

Γράφημα (graph) G είναι ένα σύνολο p κορυφών (vertices) $V(G)=\{v_1, v_2,..., v_p\}$, εφοδιασμένο με ένα σύνολο q ακμών (edges) $E(G)=\{x_1, x_2,..., x_q\}$, όπου $x_i=\{u_i, v_i\}$ με u_i, v_i , $i=1,2,…, q$, στοιχεία του V(G).

Τα 2-σύνολα x={u, v} που αποτελούν τις ακμές ενός γραφήματος είναι μη-διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων του V(G). Δηλαδή για το γράφημα G=(V, E) ισχύει $E\subseteq[V]^2$, όπου $[V]^2$ παριστάνει τα 2-υποσύνολα του V. Οι κορυφές u, v που ανήκουν σε κάποια από τις ακμές του G λέγονται διαδοχικές (adjacent) ή άμεσα συνδεδεμένες (directly connected), ή γειτονικές. Λέγονται επίσης άκρα (endpoints) της ακμής x={u, v}. Η ακμή {u, v} συμβολίζεται επίσης uv.



Σχήμα 5.4

Παράδειγμα 5.1. Έστω V = { α, β, γ, δ, ε }, και E = { {α, β},{β, γ}, {γ, δ}, {δ, ε}, {β, ε} }

Οποιοδήποτε από τα γραφήματα της πρώτης σειράς του σχήματος 5.4, έχει σύνολο κορυφών το δοθέν V και σύνολο ακμών το δοθέν E. Δηλαδή αν και φαινομενικά διαφορετικά παριστάνουν το ίδιο γράφημα. Τα γραφήματα αυτά λέγονται *σημασμένα* (labeled) και θεωρούνται ίδια αφού έχουν ίδια σύνολα V(G), E(G). Τα γραφήματα της δεύτερης σειράς είναι *μη-σημασμένα*, μπορούν όμως, με κατάλληλη σήμανση να γίνουν σημασμένα και να είναι ταυτόσημα με τα προηγούμενα.

■

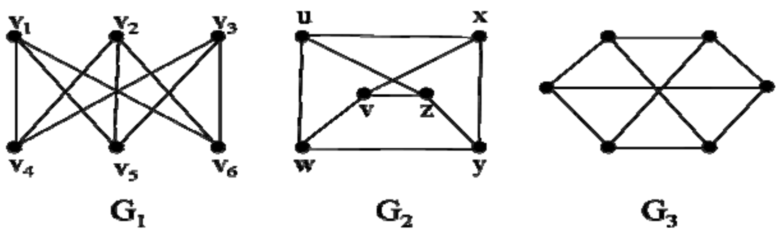
Γραφήματα που έχουν την ιδιότητα να γίνονται ταυτόσημα με κατάλληλη σήμανση, λέγονται *ισόμορφα*. Ακριβέστερα, αν $G=(V, E)$ και $G'=(V', E')$ είναι δύο ισόμορφα γραφήματα, τότε υπάρχει αμφιμονότιμη απεικόνιση $\varphi: V \rightarrow V'$ τέτοια ώστε αν $\{u,v\} \in E$, να ισχύει $\{\varphi(u),\varphi(v)\} \in E'$. Συμβολίζουμε $G \rhd G'$ και θεωρούμε ότι τα δύο γραφήματα δεν διαφέρουν μεταξύ τους.

Παράδειγμα 5.2. Τα γραφήματα G_1, G_2, G_3 του σχήματος 5.5 είναι ισόμορφα.

Πράγματι θεωρώντας τη συνάρτηση φ που ορίζεται με τον πίνακα

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
φ(v)	u	V	y	w	x	z

ισχύει $\{\varphi(v_1), \varphi(v_5)\}=\{u, x\}$, $\{\varphi(v_1), \varphi(v_6)\}=\{u, z\}$,… δηλαδή οι εικόνες των κορυφών του G_1, που ορίζουν ακμή στο G_1, είναι κορυφές ακμής του G_2.



Σχήμα 5.5

Άρα ισχύει $G_1 \rhd G_2$.

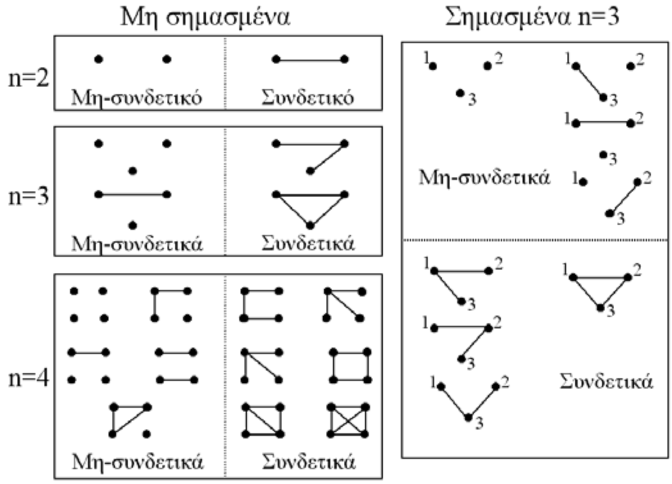
Όμοια, συμβολίζοντας v_1, v_2 και v_3 τρεις μη διαδοχικές κορυφές του G_3 και με v_4, v_5 και v_6 τις υπόλοιπες τρεις και θεωρώντας την ταυτοτική απεικόνιση βρίσκουμε εύκολα ότι $G_1 \rhd G_3$.

Άρα, τα τρία γραφήματα είναι ισόμορφα. ■

Παράδειγμα 5.3. Πόσο είναι το πλήθος των διαφορετικών μη-ισομόρφων μη-σημασμένων γραφημάτων για 2, 3 και 4 κορυφές; Πόσο το αντίστοιχο πλήθος για σημασμένα γραφήματα;

Λύση

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι αντίστοιχα 2, 4 και 11, ενώ για το δεύτερο είναι 2, 8 και 32. Στο σχήμα 5.6 αριστερά δίνονται όλα τα μη-ισόμορφα γραφήματα 2, 3 ή 4 κορυφών. Στο ίδιο σχήμα δεξιά δίνονται όλα



Σχήμα 5.6

τα μη-ισόμορφα σημασμένα γραφήματα 3 κορυφών.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα γράφημα με p κορυφές, και q ακμές. Το γράφημα αυτό θα συμβολίζεται G(p,q). Δίνουμε τους ορισμούς:

Δύο κορυφές u, w του γραφήματος G, λέγονται *διαδοχικές* ή *άμεσα συνδεδεμένες* αν η ακμή $\{u,w\}\in E(G)$.

Μία ακολουθία διαδοχικών κορυφών μαζί με τις ακμές που τις συνδέουν, δηλαδή μία ακολουθία της μορφής

$$v_1\{v_1,v_2\}v_2\{v_2,v_3\}v_3\{v_3,v_4\}\ldots\{v_{n-1},v_n\}v_n\ ,$$

λέγεται *περίπατος* ή *άλυσσος* (walk ή chain).

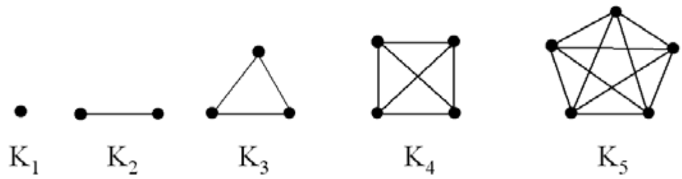
Ένας περίπατος του οποίου όλες οι ακμές (όχι αναγκαστικά οι κορυφές) είναι διαφορετικές λέγεται *διαδρομή* (trail).

Ένας περίπατος του οποίου όλες οι κορυφές (άρα και οι ακμές) είναι διαφορετικές, λέγεται *μονοπάτι* (path).

Αν οι κορυφές που αποτελούν την αρχή και το τέλος ενός περιπάτου, διαδρομής ή μονοπατιού, δηλαδή αν $v_n=v_1$, τότε έχουμε αντίστοιχα, *κλειστό περίπατο*, *κλειστή διαδρομή* και *κύκλο* (cycle ή circuit).

Αν για κάθε ζεύγος $u,v\in V(G)$ υπάρχει περίπατος που ξεκινά από το u και τελειώνει στο v, τότε το γράφημα λέγεται *συνδετικό*. Αλλιώς λέγεται *μη-συνδετικό*, ή *ασυνδετικό*. Στο σχήμα 5.6 διακρίνονται τα συνδετικά και τα μη συνδετικά γραφήματα, 2,3 ή 4 κορυφών.

Αν κάθε κορυφή του G συνδέεται άμεσα με οποιαδήποτε άλλη, δηλαδή αν το G έχει όλες τις δυνατές ακμές, τότε το G λέγεται *πλήρες* γράφημα και συμβολίζεται K_v. Στο σχήμα 5.7 δίνονται τα πλήρη γραφήματα

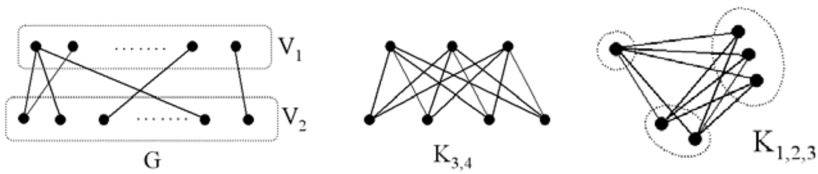


Σχήμα 5.7

K_1 έως K_5.

Αν καμία κορυφή του G δεν συνδέεται άμεσα με άλλη, δηλαδή αν το G δεν έχει ακμές, τότε το G λέγεται *πλήρως ασυνδετικό* γράφημα και συμβολίζεται A_v.

Όταν ισχύει $V(G)=V_1 \cap V_2$, με τρόπο ώστε το E(G) να μην περιέχει καμία ακμή που συνδέει δύο κορυφές του V_1 ή του V_2, το G λέγεται *διγράφημα ή διμερές γράφημα.* Τα δύο πρώτα γραφήματα στο σχήμα 5.8 είναι διγραφήματα. Στο δεύτερο απ' αυτά παρατηρούμε ότι υπάρχουν όλες οι επιτρεπτές ακμές. Για το λόγο αυτό λέγεται *πλήρες διγράφημα* και συμβολίζεται $K_{m,n}$ όπου m. n είναι τα πλήθη των κορυφών των συνόλων V_1, V_2. Ο ορισμός μπορεί εύκολα να γενικευτεί. Έτσι, το τρίτο γράφημα στο σχήμα 5.8 παριστάνει ένα πλήρες τριγράφημα.



Σχήμα 5.8

Μήκος (length) περιπάτου, διαδρομής, μονοπατιού ή κύκλου λέγεται το πλήθος των ακμών του. Ένα μονοπάτι μήκους n συμβολίζεται με P_n. Ένας κύκλος μήκους n συμβολίζεται με C_n.

Το συντομότερο μονοπάτι που συνδέει δύο κορυφές u, v του G, λέγεται *γεωδαισιανή*. Το μήκος της γεωδαισιανής των u, v, λέγεται *απόσταση* (distance) των u, v και συμβολίζεται d(u,v).

Το μήκος της μακρύτερης γεωδαισιανής στο G, δηλαδή το μέγιστο των αποστάσεων μεταξύ των κορυφών του G, λέγεται *διάμετρος* d(G).

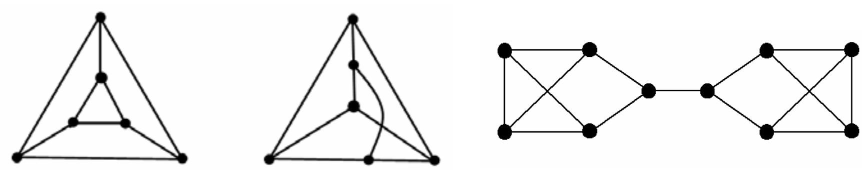
Το πλήθος των ακμών που ένα από τα άκρα τους είναι η κορυφή v, λέγεται *βαθμός* (degree) ή *αξία* (valency) της κορυφής v και συμβολίζεται δ(v).

Ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με δ(G) και ο μέγιστος βαθμός με Δ(G). Είναι δηλαδή

$$\delta(G) = \min_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\} \qquad \text{και} \qquad \Delta(G) = \max_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\}$$

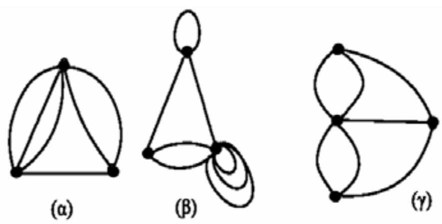
και προφανώς ισχύει $\delta(G) \leq \Delta(G)$.

Αν είναι $\delta(G)=\Delta(G)=k$ τότε το G λέγεται *κανονικό γράφημα* τάξης k. Στην περίπτωση k=3 το G λέγεται *κυβικό γράφημα*. Στο σχήμα 5.9 τα δύο πρώτα γραφήματα είναι μη-ισόμορφα κυβικά γραφήματα με 6 κορυφές. Το τρίτο είναι κυβικό γράφημα με 10 κορυφές.



Σχήμα 5.9

Γραφήματα στα οποία υπάρχουν περισσότερες από μία ακμές που συνδέουν τις ίδιες κορυφές, λέγονται *πολλαπλά* γραφήματα (Σχήμα 5.10).



Σχήμα 5.10

Γραφήματα ή πολλαπλά γραφήματα, στα οποία υπάρχουν *βρόχοι* (loops), δηλαδή ακμές που συνδέουν κορυφές με τον εαυτό τους, λέγονται *ψευδογραφήματα* (Σχήμα 5.10 β).

Στα επόμενα δεν ασχολούμαστε με πολλαπλά γραφήματα ή ψευδογραφήματα, εκτός ελαχίστων περιπτώσεων που αναφέρονται.

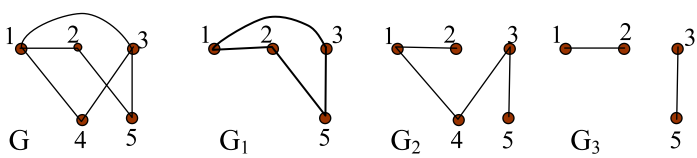
Αν G=(V, E) και H=(U, F) είναι δύο γραφήματα, ορίζουμε την ένωση G∩H= (V∩U, E∩F), την τομή G∪H= (V∪U, E∪F). Αν ισχύει G∪H=∅ τα γραφήματα G και H λέγονται ξένα. Αν ισχύει U⊆V και F⊆E, τότε το H λέγεται *υπογράφημα* του G, ενώ το G λέγεται *υπεργράφημα* του H. Συμβολίζουμε H⊆G.

Αν U⊆V είναι ένα υποσύνολο κορυφών του G, συμβολίζουμε με G[U] το υπογράφημα του G, που έχει σύνολο κορυφών το U και σύνολο ακμών E_U που περιέχει όλες τις ακμές του E που έχουν και τα δύο άκρα τους στο U. Το γράφημα αυτό λέγεται *φέρον υπογράφημα* του G επί του U. Δηλαδή G[U]=(U, E_U), όπου $E_U=\{x : x=\{u,v\}\in E, u\in U, v\in U\}$.

Ένα υπογράφημα του G=(V, E) με σύνολο κορυφών το ίδιο το V, αλλά με σύνολο ακμών γνήσιο υποσύνολο του E, λέγεται *υπογράφημα ζεύξης* (ή επικαλύπτον υπογράφημα, spanning subgraph).

Στο σχήμα 5.11 τα γραφήματα G_1, G_2 , G_3 είναι υπογραφήματα του G, ενώ το G_3 είναι υπογράφημα όλων. Από αυτά το πρώτο είναι φέρον επί του U={1, 2, 3, 5}, ενώ το δεύτερο είναι υπογράφημα ζεύξης. Επίσης ισχύει $G_1\cap G_2=G$ και $G_1\cup G_2=G_3$. Κάθε περίπατος, μονοπάτι ή κύκλος σε ένα γράφημα G, είναι υπογράφημα του G.

Αν U είναι υποσύνολο των κορυφών του G=(V, E), τότε το φέρον υπογράφημα επί του V-U συμβολίζεται απλούστερα G-U (αντί G[V-U]). Με άλλα λόγια το γράφημα G-U προκύπτει από το G με διαγραφή των κορυφών που περιέχονται στο U μαζί με όλες τις ακμές που ένα τουλάχιστον από τα άκρα τους περιέχεται στο U. Αν το U είναι μονοσύνολο, π.χ. U={v}, συμβολίζουμε με G-v, (αντί G-{v}) , το γράφημα που προκύπτει από το G με τη διαγραφή της κορυφής v και όλων των ακμών που έχουν άκρο το v.

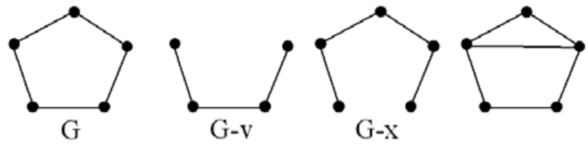


Σχήμα 5.11

Αν F είναι υποσύνολο του $[V]^2$ και G=(V, E), τότε συμβολίζουμε με G-F το γράφημα (V, E-F), αυτό δηλαδή που προκύπτει με τη διαγραφή των ακμών του E που περιέχονται στο F. Όμοια, συμβολίζουμε με G+F το γράφημα (V, E∩F), αυτό δηλαδή που προκύπτει με την προσθήκη των ακμών του F που δεν περιέχονται στο E. Αν το F είναι μονοσύνολο,π.χ. F={x}, συμβολίζουμε με G-x και αντίστοιχα G+x, (αντί G-{x}, G+{x}) , το γράφημα που προκύπτει από το G με τη διαγραφή (ή την προσθήκη αντίστοιχα) της ακμής x.

Στο σχήμα 5.11 είναι G_1=G-4, G_2=G-{13, 25}, G_3=G_2-4, όπου 4 συμβολίζει την κορυφή 4 και 13, 25 τις ακμές {1,3} και {2,5}.

Υπάρχουν γραφήματα στα οποία το αποτέλεσμα της διαγραφής μιας κορυφής ή/και μιας ακμής ή της προσθήκης μιας γραμμής, είναι ανεξάρτητο από τη συγκεκριμένη ακμή ή κορυφή. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το γράμμα v για να συμβολίσουμε την τυχαία κορυφή, και το x για να συμβολίσουμε την τυχαία ακμή. Στο σχήμα 5.12 φαίνεται ένα



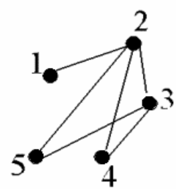
Σχήμα 5.12

γράφημα G και τα γραφήματα G-v, G-x, G+x, για τυχαίο v ή x.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το αντίστροφο πρόβλημα της ανασύνθεσης ενός γραφήματος, όπως φαίνεται στο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.4. Ανασυνθέσατε το γράφημα G από τα G_i=G-v_i, όπου v_i=i, με i=1, 2, ..., 5, όταν:

$G_1=K_4$-x, $G_2=P_2 \cap K_1$, $G_3=K_{1,3}$, $G_4=G_5=K_{1,3}$+x .

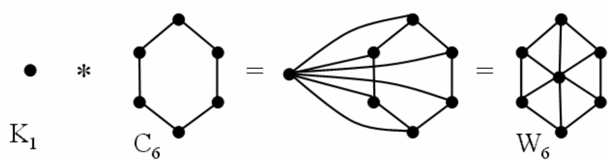


Σχήμα 5.13

Λύση

Από την πρώτη συνθήκη έχουμε 6 πιθανά γραφήματα. Η δεύτερη και τρίτη συνθήκη απορρίπτουν όλα εκτός από ένα που οδηγεί στο σχήμα 5.13. Λεπτομέρειες στο παράρτημα. ■

Αν G=(V, E) και H=(U, F) δύο ξένα γραφήματα, θα συμβολίζουμε με G∗H τη *συνένωση* των G και H, δηλαδή το γράφημα που προκύπτει από την ένωση G$\cap$H με την προσθήκη όλων των ακμών που συνδέουν τις κορυφές του G με τις κορυφές του H.

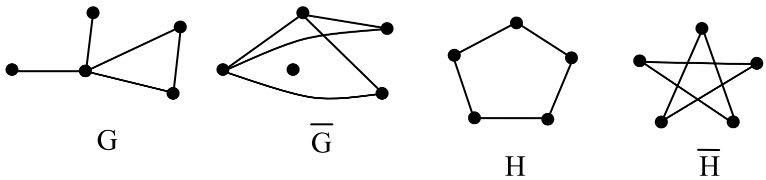


Σχήμα 5.14

Στο σχήμα 5.14, φαίνεται ότι η συνένωση του K_1 με τον κύκλο C_6 δίνει γράφημα, που είναι ισόμορφο με τον τροχό W_6 τάξης 6. Εύκολα, επίσης διαπιστώνουμε ότι στο σχήμα 5.11 έχουμε $G+\{24, 45\}=K_1*G_1$. Τέλος, εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν A_n συμβολίζει το πλήρως ασυνδετικό γράφημα n κορυφών, τότε: $K_{n,m}=A_n*A_m$. Όμοια, $K_{n,m,l}=A_n*A_m*A_l$.

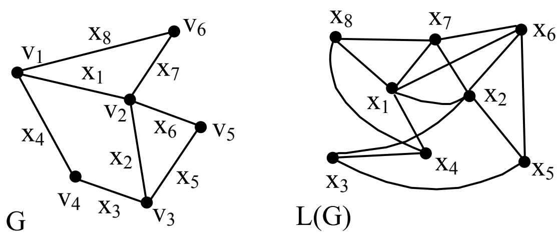
Συμπλήρωμα $\overline{G}$ του γραφήματος G=(V, E), είναι το γράφημα $(V, \overline{E})$ όπου το $\overline{E}=[V]^2-E$ περιέχει όλα τα 2-σύνολα του V που δεν περιέχονται στο E.

Στο σχήμα 5.15 δίνονται τα γραφήματα G, H και τα συμπληρωματικά τους. Παρατηρούμε ότι το $\overline{G}$ είναι μη-συνδετικό ενώ το G είναι συνδετικό. Επίσης, παρατηρούμε ότι το $\overline{H}$ είναι ισόμορφο με το H, αφού και τα δύο είναι κύκλοι C_5. Γραφήματα που είναι ισόμορφα με τα συμπληρώματά τους λέγονται αυτοσυμπληρωματικά.



Σχήμα 5.15

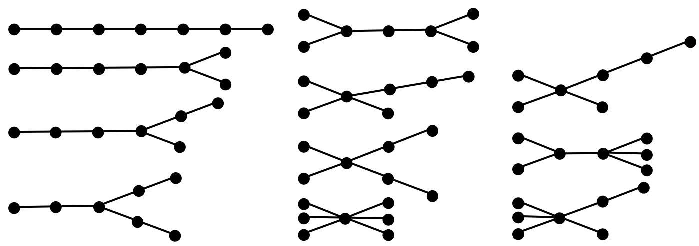
Αν σε ένα γράφημα εναλλάξουμε ρόλους μεταξύ των κορυφών και των ακμών του, προκύπτει ένα γράφημα που αναφέρεται ως το *γραμμογράφημα* (line graph) του G. Το γράφημα αυτό έχει ως σύνολο κορυφών το E(G), και συμβολίζεται με L(G). Δύο από τις «κορυφές» του L(G).είναι άμεσα συνδεδεμένες στο γραμμογράφημα αν είναι «συντρέχουσες» ως ακμές του G, αν δηλαδή έχουν κοινό άκρο. Στο σχήμα 5.16 δίνουμε ένα γράφημα G και το γραμμογράφημά του L(G).



Σχήμα 5.16

Ένα γράφημα συνδετικό που δεν περιέχει κανένα κύκλο λέγεται *δένδρο* (tree). Στο σχήμα 5.17 δίνονται όλα τα μη-ισόμορφα δένδρα με 7 κορυφές.

Τα δένδρα παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία γραφημάτων. Πολύ ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα της εύρεσης των *δένδρων ζεύξης* σε ένα γράφημα, δηλαδή των υπογραφημάτων ζεύξης ενός γραφήματος που δεν έχει κύκλους. Σε επόμενη παράγραφο περιγράφουμε ένα αλγόριθμο εύρεσης του ελάχιστου δένδρου ζεύξης σ' ένα γράφημα σε

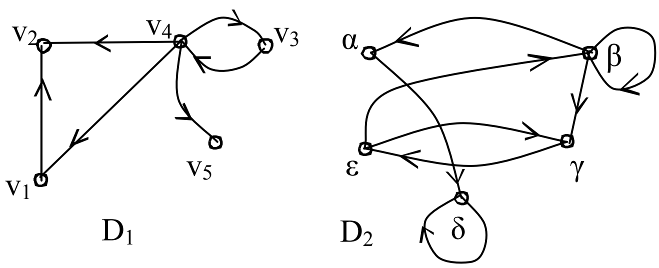


Σχήμα 5.17

σχέση με κάποια συνάρτηση κόστους επί των ακμών.

Ας υποθέσουμε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου, που τα παριστάνουμε με τις κορυφές ενός γραφήματος, έχουν σχέση μεταξύ τους αλλά προς μία μόνο κατεύθυνση. Για παράδειγμα, αν έχουμε τις ομάδες που συμμετέχουν σε ένα τουρνουά, όπου γίνεται το πολύ ένας αγώνας μεταξύ δύο ομάδων, τότε εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι ποια από τις δύο ομάδες νίκησε την άλλη. Αυτό μπορεί να συμβολίζεται με μία ακμή εφοδιασμένη με ένα βέλος από την ομάδα που έχασε προς την ομάδα που κέρδισε. Όμοια, αν περιγράψουμε με γράφημα το διάγραμμα ροής ενός προγράμματος, ένα δενδροδιάγραμμα αναζήτησης, ένα γενεαλογικό δένδρο, ένα κυκλοφοριακό σύστημα με μονοδρόμους, ένα δίκτυο μεταφοράς υλικών από μία πηγή σε κάποιους προορισμούς, κλπ, χρειαζόμαστε να δηλώνουμε κατεύθυνση στις ακμές του γραφήματος. Τέτοια γραφήματα λέγονται *κατευθυνόμενα*.

Η διαφορά ενός κατευθυνόμενου γραφήματος (V, E) από ένα απλό γράφημα είναι ότι το σύνολο των ακμών του E, θεωρείται ως υποσύνολο του



Σχήμα 5.18

καρτεσιανού γινομένου V×V. Η ακμή (α, β) δηλώνει κατεύθυνση από το α προς το β και είναι διαφορετική από την ακμή (β, α). Έτσι για παράδειγμα στο γράφημα D_1 στο σχήμα 5.18 το διατεταγμένο ζεύγος (v_4, v_2) παριστάνει ακμή του γραφήματος, ενώ το (v_2, v_4) δεν παριστάνει. Όμως, υπάρχουν τα ζεύγη (v_3, v_4) και (v_4, v_3) που αποτελούν και τα δύο ακμές του γραφήματος. Αυτό φαίνεται στο γράφημα με δύο διαφορετικά τόξα. Δεν επιτρέπεται δηλαδή στα κατευθυνόμενα γραφήματα να έχουμε ακμές χωρίς κατεύθυνση. Επίσης, όπως φαίνεται από το D_2, επιτρέπονται και βρόχοι.

Οι ορισμοί του περίπατου, μονοπατιού, κύκλου επεκτείνονται ανάλογα και στα κατευθυνόμενα γραφήματα, αρκεί η κίνηση να είναι κατά τη διεύθυνση των βελών. Μια κορυφή u λέγεται προσιτή από μια άλλη v όταν υπάρχει μονοπάτι με κατευθυνόμενα τμήματα από την v προς την u. Ορίζουμε επίσης με:

$\delta_-(v)$ τον *έσω-βαθμό* της κορυφής v, ως το πλήθος των ακμών που έρχονται προς την v από άλλες κορυφές.

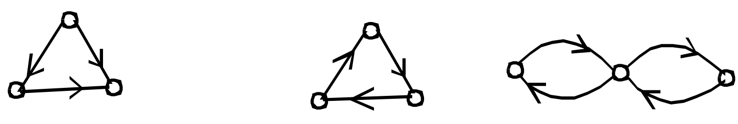
$\delta_+(v)$ τον *έξω-βαθμό* της κορυφής v, ως το πλήθος των ακμών που φεύγουν από την v προς άλλες κορυφές.

ασθενικά συνδετικό εκείνο το κατευθυνόμενο γράφημα, που αν αγνοήσουμε τα βέλη γίνεται συνδετικό γράφημα.

μονόδρομα συνδετικό εκείνο το κατευθυνόμενο γράφημα, που για κάθε ζεύγος κορυφών του (u, v) υπάρχει μονοπάτι που πηγαίνει είτε από το u προς το v είτε από το v προς το u.

ισχυρά συνδετικό όταν για κάθε ζεύγος κορυφών (u, v) υπάρχει μονοπάτι και από το u προς το v και από το v προς το u.

Το πρώτο από τα γραφήματα στο σχήμα 5.19, είναι μονόδρομα συνδετικό, ενώ τα άλλα δύο είναι ισχυρά συνδετικά.



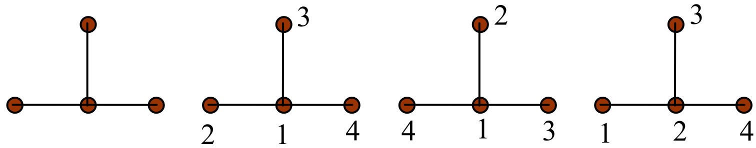
Μονόδρομα συνδετικό Ισχυρά συνδετικά

Σχήμα 5.19

Ασκήσεις

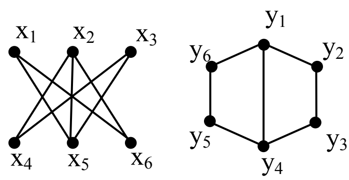
5.2.1. Να Σχηματιστεί ένα γράφημα με κορυφές τις πόλεις Αθήνα, Θεσσαλονίκη, Δράμα, Σέρρες, Ηράκλειο, Λευκωσία και Κάιρο. Δύο πόλεις στο γράφημα αυτό να συνδέονται αν είναι δυνατή η μετάβαση από τη μία στην άλλη οδικώς. Να σχηματιστεί ένα δεύτερο γράφημα για τις δυνατότητες θαλάσσιας μετάβασης.

5.2.2. Δίνονται ένα μη-σημασμένο γράφημα και τρεις διαφορετικές

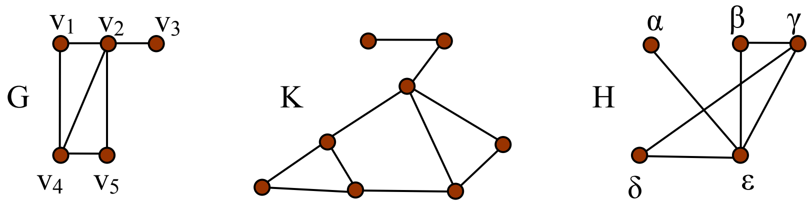


σημάνσεις. Ποιες σημάνσεις μπορούν να θεωρηθούν ίδιες και γιατί;

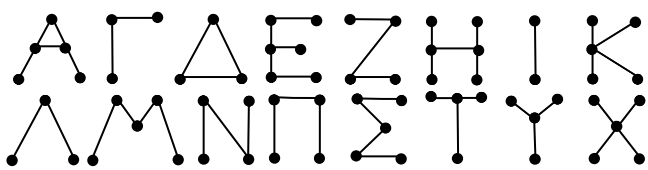
5.2.3. Είναι τα γραφήματα στο διπλανό σχήμα ισόμορφα; Υπολογίστε τα γραφήματα G-v, για διάφορες κορυφές v και δείξτε ότι με προσέγγιση ισομορφίας υπάρχουν δύο είδη. Όμοια, υπολογίστε τα γραφήματα G-x, για διάφορες ακμές x και δείξτε ότι με προσέγγιση ισομορφίας υπάρχουν τρία είδη.



5.2.4. Σε καθένα από τα παρακάτω γραφήματα να βρεθεί ένας περίπατος, ένα μονοπάτι, ένας κύκλος και ένα δένδρο ζεύξης. Να βρεθούν επίσης οι βαθμοί όλων των κορυφών. Ακόμη να βρεθούν οι κορυφές που ορίζουν τη διάμετρο και να υπολογιστεί η απόστασή τους.



5.2.5. Χωρίστε τα γράμματα σε ομάδες ισόμορφων γραφημάτων



5.2.6. Σχεδιάστε όλα τα μη-ισόμορφα γραφήματα με p=5, q=3.

5.2.7. Έστω V={α, β, γ, δ, ε}. Να σχεδιαστεί το γράφημα G(V,E), όπου

α) E={{α, β}, {α, δ}, {β, γ}, {β, δ}, {β, ε}, {δ, ε}},

β) E={{α, β}, {β, γ}, {γ, δ}, {γ, ε}, {δ, ε}}.

Βρέστε το βαθμό κάθε κορυφής και τη διάμετρο κάθε γραφήματος.

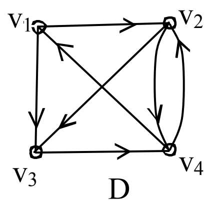
5.2.8. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 6 κορυφές. Γενικεύσατε, αποδεικνύοντας ότι αν G(p,q) είναι αυτοσυμπληρωματικό, τότε υπάρχει n, τέτοιος ώστε p=4n ή p=4n+1.

5.2.9. Ένα γράφημα G(p,q) έχει κορυφές με βαθμούς μόνο k ή (k+1). Αν είναι p_k το πλήθος των κορυφών με βαθμό k δείξτε ότι p_k=(k+1)p-2q.

Δείξτε επίσης ότι k=[p_k/p], όπου [x] ακέραιο μέρος του x.

5.2.10. Βρέστε το πλήθος ακμών των γραφημάτων

$$C_n,\ P_n,\ K_n,\ K_{n,m},\ K_{n,m,l}$$



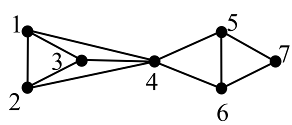
5.2.11. Δείξτε ότι το κατευθυνόμενο γράφημα του διπλανού γραφήματος είναι ισχυρά συνδετικό. Δώστε επίσης τους έσω- και εξω-βαθμούς των κορυφών του.

5.2.12. Είναι γνωστό ότι το αίμα κατατάσσεται σε 4 ομάδες A, B, AB και O, ανάλογα με τη δυνατότητα μετάγγισής του από άτομο σε άτομο. Θεωρείστε τις κατηγορίες αίματος ως κορυφές και ως ακμές (προσανατολισμένες) τη δυνατότητα μετάγγισης και σχεδιάστε το σχετικό γράφημα. Χαρακτηρίστε το γράφημα ως προς τη συνδετικότητα.

5.2.13. Σχεδιάστε τα γραμμογραφήματα των:

$$H_1=L(K_{1,3}+x),\quad H_2=L(H_1),\quad H_3=L(K_4)$$

5.2.14. Το γράφημα δίπλα είναι γραμμογράφημα του G. Να σχεδιάσετε το G.



5.2.15. Σχηματίστε δύο μη-ισόμορφα κυβικά γραφήματα με 8 κορυφές.

5.2.16. Σχηματίστε κυβικά γραφήματα με 2n κορυφές χωρίς τρίγωνα. (Υπόδειξη: Αναζητείστε κυβικά διγραφήματα).

5.3. Ιδιότητες – Χαρακτηριστικοί πίνακες

Μία βασική πρόταση που οφείλεται στον Euler είναι:

Θεώρημα 5.1. (Euler). Σε κάθε γράφημα G(p,q) με κορυφές v_i, i=1,2,...,p και q ακμές, ισχύει

$$\sum_{i=1}^{p} \delta(v_i) = 2q \qquad (5.1)$$

Απόδειξη

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε ακμή "αθροίζεται" στο βαθμό ακριβώς δύο κορυφών που αποτελούν τα άκρα της. ■

Αγνοώντας τις κορυφές άρτιου βαθμού από το πρώτο μέλος της (5.1), προκύπτει αμέσως το επόμενο:

Πόρισμα 5.1. Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού σε κάθε γράφημα είναι άρτιος αριθμός. ■

Μία άμεση συνέπεια του πορίσματος 5.1, είναι το επόμενο.

Θεώρημα 5.2. Δεν υπάρχει κυβικό γράφημα με περιττό πλήθος κορυφών. ■

Θεώρημα 5.3. Το πλήθος των σημασμένων γραφημάτων με p κορυφές ισούται με $2^{p(p-1)/2}$. Ειδικότερα, τα σημασμένα γραφήματα p κορυφών και q ακμών είναι σε πλήθος $\binom{p(p-1)/2}{q}$.

Απόδειξη

Οι p κορυφές ορίζουν p(p-1)/2 ακμές τις οποίες μπορούμε να διατάξουμε με κάποια σειρά. Ένα τυχαίο γράφημα μπορεί να θεωρηθεί ότι σχηματίζεται με την τοποθέτηση πρώτα των κορυφών του και στη συνέχεια με την τοποθέτηση των ακμών του σε p(p-1)/2 φάσεις. Σε κάθε φάση έχουμε 2 δυνατότητες, αφού η αντίστοιχη ακμή είτε τοποθετείται στο γράφημα είτε όχι. Και, επειδή οι φάσεις είναι ανεξάρτητες, άρα θα έχουμε, σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή, $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2}_{p(p-1)/2\ \phi o\rho \acute{\varepsilon}\varsigma} = 2^{p(p-1)/2}$ διαφορετικά σημασμένα γραφήματα.

Για το δεύτερο ερώτημα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι διαλέγοντας κάποιες q από τις p(p-1)/2 ορίζουμε μονοσήμαντα ένα από τα ζητούμενα γραφήματα. Έτσι, τα σημασμένα γραφήματα p κορυφών και q ακμών, είναι σε πλήθος όσοι και οι συνδυασμοί των p(p-1)/2 ανά q.

Αθροίζοντας ως προς το πλήθος ακμών βρίσκουμε

$$\sum_{q=0}^{p(p-1)/2} \binom{p(p-1)/2}{q} = 2^{p(p-1)/2},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το διώνυμο του Νεύτωνα. Η τελευταία σχέση επαληθεύει το αποτέλεσμα που δώσαμε πιο πριν με άλλο τρόπο. ■

Το πλήθος των μη-σημασμένων διαφορετικών ως προς ισομορφία γραφημάτων δεν είναι εύκολο να υπολογιστεί. Για τον υπολογισμό του βοηθά ένα περίφημο θεώρημα που αποδείχθηκε το 1937 από τον Polya και το οποίο συνδυάζει ομάδες μεταθέσεων, προβολικές γεωμετρίες, χρωματισμούς γραφημάτων κλπ. Μερικοί από τους πρώτους όρους της γεννήτριας συνάρτησης του πλήθους των διαφορετικών γραφημάτων είναι:

$F(x)=1+x+2x^2+4x^3+11x^4+34x^5+156x^6+1044x^7+12346x^8+308708x^9+...$

Οι συντελεστές των δυνάμεων x^2, x^3, x^4 επαληθεύονται στο σχήμα 5.6.

Ορισμός. Έστω G ένα σημασμένο γράφημα με κορυφές $V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$. Ορίζουμε έναν p×p πίνακα $A=(a_{ij})$, όπου:

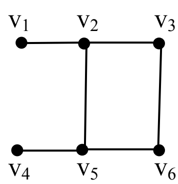
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν οι κορυφές } v_i, v_j \text{ είναι διαδοχικές} \\ 0, & \text{σε άλλη περίπτωση .} \end{cases}$$

Ο πίνακας A λέγεται *πίνακας συνδέσεων.*

Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G:



Σχήμα 5.20

είναι πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G, που δίνεται στο σχήμα 5.20.

Εύκολα προκύπτουν από τον ορισμό οι ιδιότητες των πινάκων συνδέσεων, που περιγράφονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4. Για τον πίνακα συνδέσεων A ενός γραφήματος με p κορυφές ισχύουν:

(1) $a_{ii}=0,\ i=1,2,...,p$

(2) $a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,2,...,p$

(3) $\mathbf{1}'A=\delta'=\big(\delta(v_1),\ \delta(v_2),\ ...,\ \delta(v_p)\big)$ και $A\cdot\mathbf{1}=\boldsymbol{\delta}$. ■

Ο πίνακας συνδέσεων του πλήρους γραφήματος K_n έχει όλα τα μή διαγώνια στοιχεία ίσα με 1. Άρα ισχύει:

$A(K_n)=J_n-I_n$.

Όμοια για το πλήρες διγράφημα $K_{m,n}$ έχουμε, αν αριθμήσουμε τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}$,

$$A(K_{m,n})=\begin{pmatrix} 0 & J_{m,n} \\ J_{n,m} & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν A και $\overline{A}$ είναι οι πίνακες συνδέσεων των γραφημάτων G και $\overline{G}$, που έχουν n κορυφές, θα ισχύει

$A+\overline{A}=J_n-I_n$.

Αν G είναι μη-συνδετικό γράφημα, τότε υπάρχουν V_1, V_2 ξένα υποσύνολα του V, τέτοια ώστε να ισχύει $V=V_1\cap V_2$ και να μην υπάρχει ακμή που να συνδέει κορυφές του V_1 με κορυφές του V_2. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας συνδέσεων γράφεται με τη μορφή $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Και αντίστροφα, αν ο πίνακας συνδέσεων γραφεί ως διαγώνιος διαχωρισμένος πίνακας, το γράφημα είναι μη-συνδετικό.

Ο πίνακας συνδέσεων ενός κατευθυνόμενου γραφήματος ορίζεται με τον ίδιο τρόπο. Στην περίπτωση όμως αυτή δεν ισχύει το θεώρημα 5.4. Πράγματι αν υπάρχουν βρόχοι τα διαγώνια στοιχεία που αντιστοιχούν ισούνται με 1, ενώ ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός. Το γινόμενο $A\cdot\mathbf{1}=\boldsymbol{\delta}_+$, δίνει το διάνυσμα των έξω-βαθμών των κορυφών, ενώ το $\mathbf{1}'A=\boldsymbol{\delta}_-'$ δίνει το διάνυσμα των έξω-βαθμών.

Για τα γραφήματα του σχήματος 5.18 οι πίνακες συνδέσεων είναι:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και ισχύουν $A_1 \cdot \mathbf{1} = (1,0,1,4,0)'$, $\mathbf{1}' A_1 = (1,2,1,1,1)$,

και $A_2 \cdot \mathbf{1} = (1,3,1,1,2)'$, $\mathbf{1}' A_2 = (1,2,2,2,1)$,

που όπως διαπιστώνεται εύκολα δίνουν τους έξω- και έσω-βαθμούς των κορυφών των γραφημάτων D_1 και D_2.

Με τη βοήθεια των πινάκων συνδέσεων μπορούμε να ελέγξουμε την ισομορφία των γραφημάτων. Ισχύει το επόμενο.

Θεώρημα 5.5. Αν A_1 και A_2 είναι οι πίνακες συνδέσεων των γραφημάτων G_1 και G_2, αντίστοιχα, και υπάρχει πίνακας μεταθέσεων P, για τον οποίο

$$A_2 = PA_1P',$$

τότε τα γραφήματα G_1 και G_2 είναι ισόμορφα.

Απόδειξη

Ένας πίνακας μετάθεσης προκύπτει με εναλλαγές γραμμών ή στηλών του μοναδιαίου πίνακα. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι πολλαπλασιάζοντας έναν πίνακα A από αριστερά με έναν πίνακα μετάθεσης P, προκύπτει πίνακας που έχει τις ίδιες γραμμές με τον A, αλλά με άλλη σειρά. Όμοια, πολλαπλασιάζοντας ένα πίνακα A από δεξιά με έναν πίνακα μετάθεσης Q, προκύπτει πίνακας που έχει τις ίδιες στήλες με τον A, αλλά με άλλη σειρά.

Αν ο A είναι πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G, τότε οι γραμμές του και οι στήλες του αριθμούνται ανάλογα με τις κορυφές του G. Αν πολλαπλασιάσουμε τον A από αριστερά με τον πίνακα P, θα πάρουμε πίνακα που έχει διαφορετική αρίθμηση στις γραμμές του από αυτήν των στηλών. Για να αλλάξουμε και τη σειρά των στηλών αρκεί να πολλαπλασιάσουμε από δεξιά με τον ανάστροφο P′ του P. Ο πίνακας PAP′ που προκύπτει με τον τρόπο αυτό επίσης πίνακας συνδέσεων του G, αλλά έχει τις κορυφές του με άλλη σειρά. Οι συνδέσεις μεταξύ των κορυφών δεν έχουν μεταβληθεί. Άρα, το γράφημα που αντιστοιχεί στον πίνακα PAP΄ είναι ισόμορφο με το G, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

■

Μια εφαρμογή του θεωρήματος αυτού δίνεται παρακάτω.

Παράδειγμα 5.5. Να αποδειχθεί με τη βοήθεια πινάκων συνδέσεων η ισομορφία των γραφημάτων G_1, G_2 και G_3 του παραδείγματος 5.2.

Λύση

Οι πίνακες συνδέσεων των γραφημάτων αυτών είναι αντίστοιχα:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix},$$

όπου στο τρίτο γράφημα θεωρήσαμε μια σήμανση (τυχαία) από 1 έως 6 των διαδοχικών κορυφών του εξαγώνου.

Θεωρώντας τους πίνακες μετάθεσης

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

διαπιστώνουμε ότι:

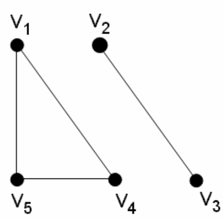
$$P_1\, A_2\, P_1' = A_1 \qquad \text{και} \qquad P_2\, A_3\, P_2' = A_1\,,$$

που σύμφωνα με το θεώρημα αποδεικνύει την ισομορφία των τριών γραφημάτων. ■

Παράδειγμα 5.6. Το γράφημα με πίνακα συνδέσεων

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

είναι αυτό του σχήματος 5.21.



Σχήμα 5.21

Από το σχήμα διαπιστώνεται ότι το γράφημα είναι μη-συνδετικό. Αυτό μπορεί επίσης να διαπιστωθεί και με τη βοήθεια του θεωρήματος 5.5. Αρκεί να δείξουμε ότι το δοθέν γράφημα είναι ισόμορφο με ένα μη-συνδετικό γράφημα. Πράγματι, για κατάλληλο P, ισχύει:

$$P\cdot A\cdot P'=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|cc}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

δηλαδή PAP΄=$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$. Σύμφωνα με την παρατήρηση της σελίδας 254, ο πίνακας PAP΄ είναι πίνακας συνδέσεων μη-συνδετικού γραφήματος. Και, σύμφωνα με το θεώρημα 5.5, ο πίνακας PAP΄ είναι πίνακας συνδέσεων ισόμορφου γραφήματος με το δοθέν, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Στην πραγματικότητα ο πίνακας μετάθεσης P που χρησιμοποιήσαμε μετονομάζει τις κορυφές v_1, v_4, v_5 σε w_1, w_2 , w_3, και τις v_2, v_3 σε w_4, w_5 . Με την αρίθμηση αυτή το γράφημα αποτελείται από δύο τμήματα που μεταξύ τους δεν έχουν καμία σχέση. ■

Το πλήθος των ακμών του πλήρους γραφήματος K_n είναι ίσο με $\binom{n}{2}$. Πράγματι, αρκεί να πάρουμε όλους τους συνδυασμούς των n κορυφών ανά δύο και να τις ενώσουμε με μία ακμή για να προκύψει το πλήρες γράφημα n κορυφών.

Το πλήθος κορυφών του διγραφήματος $K_{m,n}$ είναι m·n. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή το σύνολο V των κορυφών του γραφήματος υποδιαιρείται στα ξένα σύνολα V_1 και V_2 με πληθικούς αριθμούς m και n αντίστοιχα, και κάθε μία από τις m κορυφές του V_1 συνδέεται με τις n κορυφές του V_2 και με καμία άλλη. Έτσι σχηματίζονται m·n ακμές.

Θα δείξουμε το επόμενο σχετικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.6. Ο μέγιστος αριθμός ακμών σ' ένα γράφημα p κορυφών χωρίς τρίγωνα, είναι $\left[p^2/4\right]$, όπου [x] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού x.

Απόδειξη

Έστω q(G) το πλήθος ακμών του γραφήματος G. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

α) p=2n. Τότε το ζητούμενο γίνεται $q \leq n^2$.

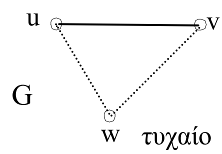
Κάνουμε επαγωγή ως προς n.

Για n=1 έχουμε δύο κορυφές με μέγιστο μία ακμή, δηλαδή το ζητούμενο ισχύει.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για n. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για n+1.

Έστω ένα γράφημα G με 2n+2 κορυφές. Έστω ακόμη δύο άμεσα συνδεδεμένες κορυφές u και v. (Αν δεν υπάρχουν τότε θα είναι q=0 και το ζητούμενο θα ισχύει τετριμμένα). Συμβολίζω με G΄ το γράφημα που προκύπτει με διαγραφή των u,v, δηλαδή G΄ =G-{u,v}. Το G΄ έχει 2n κορυφές και επομένως, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, θα είναι $q(G') \leq n^2$.

Από την υπόθεση δίνεται ότι το G δεν έχει τρίγωνα. Έτσι, αν θεωρήσουμε μία τυχαία κορυφή w του G΄, τότε αυτή μόνο με μία από τις κορυφές u και v μπορεί να συνδέεται. Πράγματι, αν συνδέονταν και με τις δύο τότε θα υπήρχε το τρίγωνο u, v, w, πράγμα άτοπο. Επειδή υπάρχουν 2n κορυφές στο G΄ υπάρχουν το πολύ 2n ακμές που συνδέουν κορυφές του D΄ με τις u και v. Υπάρχει επίσης η ακμή {u, v}. Άρα τελικά για το G θα έχουμε:



Σχήμα 5.22

$$q(G) \leq q(G')+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

που συμπληρώνει την απόδειξη.

β) p=2n+1. Τότε το ζητούμενο γίνεται

$$q \leq [(2n+1)^2/4]=[n^2+n+\tfrac{1}{4}]=n(n+1).$$

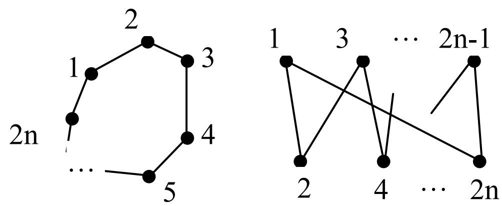
Για την απόδειξη ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό, όπως στο (α). Έτσι, καταλήγουμε στη σχέση:

$$q(G) \leq q(G')+(2n+1)+1=n(n+1)+2n+2=(n+1)(n+2),$$

που είναι το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση. Το φράγμα που ορίζεται στο προηγούμενο θεώρημα δεν μπορεί να βελτιωθεί. Πράγματι, τα διγραφήματα, είναι γραφήματα χωρίς τρίγωνα, διότι σε κάθε τριάδα κορυφών οι δύο πρέπει να ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο και άρα να μην είναι άμεσα συνδεδεμένες. Έτσι, αν p=2n άρτιος, θεωρούμε το πλήρες διγράφημα $K_{n,n}$ που έχει 2n κορυφές και $n \cdot n = n^2$ ακμές, όσες δηλαδή δίνει το φράγμα του θεωρήματος. Όμοια, αν p=2n+1 περιττός, τότε θεωρούμε το πλήρες $K_{n,n+1}$ που έχει 2n+1 κορυφές και $n \cdot (n+1)$ ακμές, που είναι και πάλι ίσες με το φράγμα του θεωρήματος.

Τα διγραφήματα είναι, όπως αναφέρθηκε, γραφήματα χωρίς τρίγωνα. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Για παράδειγμα, ένας κύκλος C_{2n+1} με $n \neq 1$ είναι γράφημα χωρίς τρίγωνα, δεν είναι όμως διγράφημα. Αντίθετα ο κύκλος C_{2n} είναι διγράφημα για κάθε n. Στο σχήμα 5.23 φαίνεται ο κύκλος C_{2n} και ο τρόπος μετατροπής του σε διγράφημα. Η παρατήρηση αυτή γενικεύεται με το εξής θεώρημα.



Σχήμα 5.23

Θεώρημα 5.7. Ένα γράφημα είναι ή μπορεί να γίνει ισοδύναμο με ένα διγράφημα αν και μόνον αν όλοι οι κύκλοι του έχουν άρτιο μήκος.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι το G είναι διγράφημα με ασύνδετα μεταξύ τους υποσύνολα κορυφών τα V_1 και V_2 και ας είναι C_s ένας κύκλος του G μήκους s. Αριθμούμε τις κορυφές του κύκλου αυτού από 1 μέχρι s. Αν η πρώτη κορυφή του C_s ανήκει στο V_1, τότε η δεύτερη θα ανήκει στο V_2, η τρίτη θα ανήκει πάλι στο V_1, και αυτό θα γίνεται μέχρι να επανέλθουμε στην πρώτη κορυφή και να κλείσει ο κύκλος. Αφού λοιπόν επανερχόμαστε στο V_1, μόνο όταν συμπληρώνουμε άρτιου πλήθους βήματα, άρα και όταν κλείσουμε τον κύκλο θα έχουμε συμπληρώσει άρτιου πλήθους βήματα. Άρα το μήκος του κύκλου είναι άρτιο.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε κύκλος του G έχει άρτιο μήκος και ότι το G είναι συνδετικό. Επιλέγουμε μία κορυφή, έστω την v_0 και βρίσκουμε όλες τις κορυφές που απέχουν από την v_0 άρτια απόσταση. Έστω V_1 το σύνολο αυτών των κορυφών. Οι υπόλοιπες κορυφές αποτελούν το σύνολο V_2. Ισχυριζόμαστε ότι το G είναι διγράφημα με υποσύνολα ασύνδετων μεταξύ τους κορυφών αυτά τα δύο σύνολα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι δύο κορυφές π.χ. u και v του V_1 συνδέονται άμεσα, τότε ο κύκλος $v_0\ldots uv\ldots v_0$, θα είχε περιττό μήκος αφού από την κατασκευή τους οι κορυφές u και v απέχουν άρτια απόσταση από την v_0. Στο ίδιο άτοπο καταλήγουμε και αν υποθέσουμε ότι δύο από τις κορυφές του V_2 συνδέονται άμεσα.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι αν το G δεν είναι συνδετικό, η παραπάνω διαδικασία γίνεται για κάθε παράγοντα[1] του G και στη συνέχεια θεωρούμε την ένωση των διγραφημάτων που προκύπτουν. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η ένωση διγραφημάτων είναι διγράφημα. ■

Αν σε ένα γράφημα έχουμε ονομάσει όχι μόνο τις κορυφές αλλά και τις ακμές, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή του και ένα άλλο πίνακα που ορίζεται ως εξής:

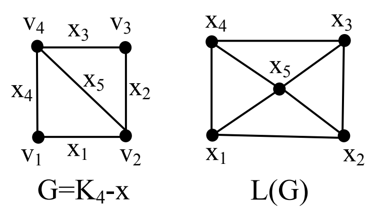
Ορισμός. Έστω G ένα σημασμένο γράφημα με κορυφές $V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ και ακμές $E(G)=\{x_1, x_2, ..., x_q\}$. Σχηματίζουμε έναν $p\times q$ πίνακα $B=(b_{ij})$, όπου:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \textit{αν οι κορυφή } v_i \textit{ βρίσκεται στην ακμή } x_j\\ 0, & \textit{σε άλλη περίπτωση}.\end{cases}$$

Ο πίνακας B λέγεται *πίνακας αντιστοιχιών.*

Για παράδειγμα στο γράφημα $G=K_4$-x αριθμούμε τις ακμές του, όπως φαίνεται αριστερά στο σχήμα 5.24. Τότε ο πίνακας αντιστοιχιών του G είναι, σύμφωνα με τον ορισμό, ο πίνακας

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}.$$



Σχήμα 5.24

Από την κατασκευή του ο πίνακας αντιστοιχιών B(G) έχει σε κάθε στήλη του ακριβώς δύο μονάδες που είναι σ' εκείνες τις γραμμές που

[1] Για τον ορισμό του παράγοντα βλ. σελ. 273

αντιστοιχούν στα άκρα της ακμής. Οι γραμμές του πίνακα B(G) έχουν τόσες μονάδες όσες ακμές έχουν την αντίστοιχη κορυφή ως άκρο. Συνοψίζοντας, έχουμε για κάθε πίνακα αντιστοιχιών

$$\mathbf{1}_p'B=2\cdot\mathbf{1}_q', \quad \text{και} \quad B\cdot\mathbf{1}_q=(\delta(v_1), \delta(v_2), \ldots, \delta(v_p))'$$

Η σχέση του πίνακα αντιστοιχιών με τον πίνακα συνδέσεων βρίσκεται με τη βοήθεια του γραμμογραφήματος.

Θεώρημα 5.8. Αν L(G) το γραμμογράφημα του G, τότε ο πίνακας συνδέσεων A(L(G)) του L(G) και ο πίνακας αντιστοιχιών B(G) του G, ικανοποιούν τη σχέση

$$A(L(G)) = B(G)'B(G) - 2\cdot I_q \tag{5.2}$$

Απόδειξη

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα συνδέσεων είναι ίσα με 0, ενώ τα διαγώνια στοιχεία του γινομένου B(G)΄B(G) είναι ίσα με 2.

Για τα μη-διαγώνια στοιχεία του A(L(G)) παρατηρούμε ότι $\alpha_{ij}=1$ αν η ακμή x_i συνδέεται με την x_j στο L(G). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κορυφή του G, έστω η v_s, η οποία είναι η τομή των δύο ακμών. Τότε όμως, στη γραμμή s του B(G) και στις στήλες i και j υπάρχει από μία μονάδα. Άρα το (i,j) στοιχείο του γινομένου B(G)΄B(G) θα είναι ίσο με 1. Αυτό ισχύει και αντίστροφα, δεδομένου ότι το γινόμενο δύο στηλών του B(G), που δίνει τα στοιχεία του γινομένου B(G)΄B(G), θα είναι είτε 0, είτε 1 . ■

Για το γράφημα G του σχήματος 5.24, το γραμμογράφημά του δίνεται στο ίδιο σχήμα. Έτσι έχουμε:

$$A(L(G))=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}, \quad B'B=\begin{pmatrix}2&1&0&1&1\\1&2&1&0&1\\0&1&2&1&1\\1&0&1&2&1\\1&1&1&1&2\end{pmatrix},$$

δηλαδή επαληθεύεται η σχέση (5.2).

Ασκήσεις

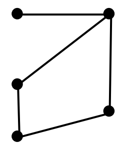
5.3.1. Για τις παρακάτω ακολουθίες αριθμών να βρεθεί γράφημα που να τις έχει ως βαθμούς των κορυφών του ή να δειχθεί ότι δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα

(α) 4, 4, 4, 3, 3 (β) 4, 4, 3, 3, 3

(γ) 4, 3, 2, 1 (δ) 5, 5, 4, 3, 2, 2, 1

5.3.2. Βρέστε τους πίνακες συνδέσεων των γραφημάτων G και H που δόθηκαν στην άσκηση 5.2.4 και εξετάστε αν είναι ισόμορφα. Αν ναι, βρέστε τον πίνακα μεταθέσεων P που μετασχηματίζει τον έναν στον άλλο.

5.3.3. Βρέστε τους πίνακες συνδέσεων και αντιστοιχιών του γραφήματος που δίνεται στο διπλανό σχήμα.



5.3.4. Έστω G ένα διγράφημα. Δείξτε ότι υπάρχουν (0,1)-πίνακες A_1 και A_2, έτσι ώστε ο πίνακας συνδέσεων του G να γράφεται με τη μορφή

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3.5. Ένα γράφημα δίνεται με τον διπλανό πίνακα στον οποίο η πρώτη γραμμή συμβολίζει τις κορυφές του, ενώ οι στήλες κάτω από κάθε κορυφή της πρώτης γραμμής, τις κορυφές που συνδέονται άμεσα με αυτήν. Να σχεδιαστεί το γράφημα και να βρεθεί ο πίνακας συνδέσεων.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	0	1	0	2	6
5	0	1	2	3	4	4	3	5	7
7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

5.4. Συνδετικά γραφήματα

Η ιδιότητα ενός γραφήματος να είναι συνδετικό ή όχι είναι πολύ σημαντική στις εφαρμογές των γραφημάτων. Επειδή η συνδετικότητα απαιτεί την ύπαρξη μονοπατιού, άρα έχει ενδιαφέρον η μελέτη των μονοπατιών των γραφημάτων. Τα δένδρα είναι ειδικά συνδετικά γραφήματα και είναι πολύ χρήσιμο να γνωρίζουμε τις ιδιότητές τους. Ενδιαφέρον επίσης είναι πόσο ανθεκτικό στη συνδετικότητα είναι ένα γράφημα. Δηλαδή, πόσα στοιχεία του πρέπει να διαγραφούν, ώστε να πάψει ένα γράφημα να είναι συνδετικό.

Μονοπάτια

Η ύπαρξη μονοπατιών στα γραφήματα ελέγχεται από μια σειρά θεωρημάτων που αποδεικνύονται παρακάτω.

Θεώρημα 5.9. Αν υπάρχει περίπατος που συνδέει τις κορυφές α και β ενός γραφήματος G τότε υπάρχει και μονοπάτι μεταξύ αυτών των κορυφών.

Απόδειξη

Ας θέσουμε n το πλήθος των κορυφών που επαναλαμβάνονται στον περίπατο που συνδέει τις κορυφές α και β. Θα κάνουμε επαγωγή στο n. Αν $n=0$, τότε ο περίπατος αυτός δεν έχει κορυφές που επαναλαμβάνονται και επομένως είναι μονοπάτι. Άρα η πρόταση ισχύει για $n=0$. Έστω ότι η πρόταση ισχύει για όλα τα n που είναι μικρότερα ή ίσα του k. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$.

Πράγματι, έστω $\alpha=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m=\beta$ ένας περίπατος του οποίου $k+1$ κορυφές επαναλαμβάνονται. Ας είναι u μία από αυτές. Αν η u εμφανίζεται για πρώτη φορά ως κορυφή v_i και για τελευταία φορά ως κορυφή v_j , τότε ο περίπατος μπορεί να γραφεί

$$\alpha=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{j-1}, u, v_{j+1}, \ldots, v_m=\beta$$

Περικόπτοντας το τμήμα του περιπάτου από την πρώτη μέχρι την τελευταία εμφάνιση της u ο αρχικός περίπατος ανάγεται στον περίπατο

$$\alpha=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_{j+1}, \ldots, v_m=\beta .$$

Στον τελευταίο περίπατο οι κορυφές που επαναλαμβάνονται είναι το πολύ k, και επομένως ισχύει σ' αυτόν η υπόθεση της επαγωγής. Άρα, υπάρχει μονοπάτι από το α στο β, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

Πόρισμα 5.2. Αν G συνδετικό γράφημα n κορυφών, τότε οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με μονοπάτι μήκους το πολύ $n-1$.

Απόδειξη

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με περίπατο. Τότε συνδέονται και με μονοπάτι, το οποίο θα διέρχεται το πολύ από όλες τις n κορυφές του γραφήματος. ■

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα πολύ βολικό τρόπο υπολογισμού του πλήθους των διαφορετικών περιπάτων που συνδέουν δύο κορυφές.

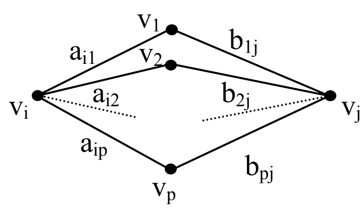
Θεώρημα 5.10. Έστω A ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G. Το (i,j) στοιχείο του πίνακα A^m δίνει το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους m που συνδέουν τις κορυφές v_i και v_j.

Απόδειξη

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Αν m=1 η πρόταση ισχύει λόγω του ορισμού του πίνακα συνδέσεων. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για n. Θα δείξουμε ότι ισχύει για n+1. Έστω $A=(a_{ij})$, $A^n=(b_{ij})$ και $A^{n+1}=(c_{ij})$, i, j=1,2,…,p. Λόγω της ταυτότητας $A \cdot A^n = A^{n+1}$, θα ισχύει

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+ a_{i2}b_{2j}+ a_{i3}b_{3j}+\ldots+ a_{ip}b_{pj} \tag{5.3}$$

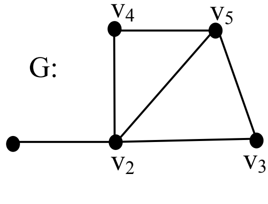
Θα υπολογίσουμε τώρα το πλήθος των περιπάτων μήκους n+1 που συνδέουν την κορυφή v_i με την v_j και θα δείξουμε ότι ισούται με c_{ij}.



Σχήμα 5.25

Διακρίνουμε p περιπτώσεις, ανάλογα με την κορυφή που είναι δεύτερη στον περίπατο μετά την v_i (βλ. σχήμα 5.25). Υπάρχουν a_{ik} τρόποι να πάμε από την κορυφή v_i στην v_k, όπου $a_{ik}=1$ αν οι v_i και v_k συνδέονται άμεσα και 0 σε άλλη περίπτωση. Από αυτήν, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχουν b_{kj} να πάμε με περίπατο μήκους n στην κορυφή v_j. Άρα, εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης και στη συνέχεια την προσθετική αρχή, βρίσκουμε ότι το πλήθος περιπάτων μήκους n+1 από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j δίνεται από το δεύτερο μέλος της σχέσης (5.3). Έτσι, το στοιχείο c_{ij} του πίνακα A^{n+1} ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα. ■

Παράδειγμα 5.7. Ο πίνακας συνδέσεων A του γραφήματος G που δίνεται δίπλα καθώς και οι δύο πρώτες δυνάμεις του είναι:



$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&1&1\\0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&4&1&1&2\\1&1&2&2&1\\1&1&2&2&1\\1&2&1&1&3\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&4&1&1&2\\4&4&6&6&6\\1&6&2&2&5\\1&6&2&2&5\\2&6&5&5&4\end{pmatrix}.$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A^2 ισούνται με τους βαθμούς των αντίστοιχων κορυφών. Πράγματι, π.χ. το στοιχείο α_{22} αυτού του πίνακα είναι 4, διότι υπάρχουν τέσσερις περίπατοι μήκους 2 από την κορυφή v_2 στον εαυτό της, οι:

$v_2v_1v_2$, $v_2v_3v_2$, $v_2v_4v_2$, $v_2v_5v_2$,

που «μετρούν» επίσης το πλήθος των ακμών με κορυφή την v_2.

Επαληθεύοντας το θεώρημα, διαπιστώνουμε ότι το στοιχείο α_{35} του πίνακα A^3 είναι 5, διότι τόσοι είναι οι περίπατοι μήκους 3 από την κορυφή v_3 στην κορυφή v_5. Πράγματι, οι περίπατοι αυτοί είναι

$v_3v_2v_3v_5$, $v_3v_2v_4v_5$, $v_3v_5v_2v_5$, $v_3v_5v_3v_5$, $v_3v_5v_4v_5$.

■

Συνδυάζοντας το θεώρημα 5.10 και το πόρισμα 5.2 αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα, που ορίζει μία πρακτική διαδικασία ελέγχου της συνδετικότητας.

Θεώρημα 5.11. Έστω A ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G που έχει n>2 κορυφές. Το G είναι συνδετικό αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του πίνακα $A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1}$, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

Αν το G είναι κατευθυνόμενο με n κορυφές, τότε η κορυφή v_j είναι προσιτή από την v_i, αν το (i,j) στοιχείο του πίνακα $I+A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1}$ είναι μη μηδενικό. Αν όλα τα στοιχεία του πίνακα αυτού είναι μη-μηδενικά τότε το γράφημα είναι ισχυρά συνδετικό. ■

Παράδειγμα 5.8. Για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ισχύει } \quad A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

άρα το γράφημα που έχει τον A ως πίνακα συνδέσεων δεν είναι συνδετικό (βλ. παράδειγμα 5.6). ■

Θεώρημα 5.12. Αν το γράφημα G είναι μη-συνδετικό τότε το $\overline{G}$ είναι συνδετικό.

Απόδειξη

Αφού το G είναι μη-συνδετικό τότε το σύνολο των κορυφών του V διαμερίζεται σε δύο ξένα σύνολα V_1 και V_2, τέτοια ώστε καμία από τις κορυφές του V_1 να μη συνδέεται με κορυφές του V_2 και αντίστροφα.

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο κορυφές u και v του V. Τότε, θα ισχύει μία από τις περιπτώσεις: (1) $u \in V_1$ και $v \in V_2$, (2) $u \in V_2$ και $v \in V_1$, (3) $u, v \in V_1$, (4) $u, v \in V_2$. Στις δύο πρώτες η ακμή {u, v} δεν ανήκει στο E(G) και άρα ανήκει στο $E(\overline{G})$. Στην (3) θεωρούμε μια τυχαία κορυφή w του V_2. με τον προηγούμενο συλλογισμό, οι ακμές $\{u, w\}, \{w, v\} \in E(\overline{G})$. Άρα, η διαδοχή των κορυφών u, w, v αποτελεί μονοπάτι στο $\overline{G}$. Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση (4). Επομένως, σε κάθε περίπτωση υπάρχει μονοπάτι που συνδέει δύο οποιεσδήποτε κορυφές στο $\overline{G}$ δηλαδή το $\overline{G}$ είναι συνδετικό.

■

Πόρισμα 5.3. Κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα είναι συνδετικό.

Δένδρα

Για τα δένδρα που έχουν πολύ σημαντικές εφαρμογές, θα περιοριστούμε στα επόμενα βασικά θεωρήματα.

Θεώρημα 5.13. Αν όλες οι κορυφές ενός γραφήματος G έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με 2, τότε υπάρχει κύκλος στο G.

Απόδειξη

Θεωρούμε έναν περίπατο ο οποίος να χρησιμοποιεί διαφορετική ακμή για έξοδο από την κάθε κορυφή από αυτήν της εισόδου, που είναι δυνατό λόγω της υπόθεσης. Αφού οι κορυφές είναι σε πεπερασμένο πλήθος θα περάσει ο περίπατος από μία τουλάχιστον κορυφή που είχε περάσει, κλείνοντας έτσι κύκλο. ■

Πόρισμα 5.4. Αν T είναι δένδρο με τουλάχιστον μία ακμή, τότε έχει μία τουλάχιστον κορυφή βαθμού 1.

Απόδειξη

Από την υπόθεση το T έχει τουλάχιστον δύο κορυφές. Λόγω του ότι κάθε δέντρο είναι συνδετικό θα ισχύει $\delta(v)\geq 1$, για κάθε κορυφή v. Από το προηγούμενο θεώρημα δεν είναι δυνατόν να ισχύει $\delta(v)\geq 2$, διότι τότε θα υπήρχε κύκλος και το T δεν θα ήταν δένδρο. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή v για την οποία $1\leq\delta(v)<2$, δηλαδή με $\delta(v)=1$. ■

Θεώρημα 5.14. Αν το G είναι συνδετικό γράφημα με $p\geq 2$ κορυφές και $q<p$ ακμές, τότε έχει κορυφή βαθμού 1.

Απόδειξη

Επειδή G είναι συνδετικό θα ισχύει $\delta(v)\geq 1$, για κάθε κορυφή v. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\delta(v)\geq 2$, για κάθε κορυφή v. Τότε, θα ίσχυε

$$\delta(v_1)+\delta(v_2)+\ldots+\delta(v_p)\geq 2p.$$

Το πρώτο μέλος της σχέσης αυτής ισούται με 2q (σχέση (5.1)), άρα προκύπτει ότι $2q\geq 2p$, που αντίκειται στην υπόθεση. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού 1. ■

Θεώρημα 5.15. Αν ένα γράφημα G(p,q) είναι δένδρο τότε ισχύει $p=q+1$. Και αντίστροφα, αν ένα συνδετικό γράφημα G(p,q) ικανοποιεί τη σχέση $p=q+1$, τότε είναι δένδρο.

Απόδειξη

Έστω G ένα δένδρο με q ακμές. Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι οι κορυφές του είναι q+1.

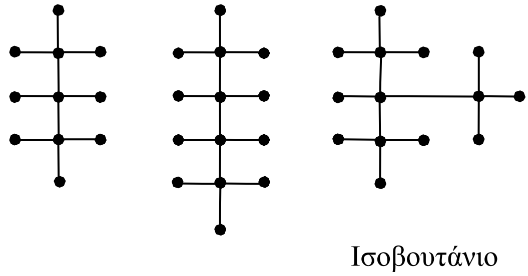
Αν q=0, τότε το G είναι δένδρο χωρίς ακμές και άρα δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία κορυφές, αφού τότε θα ήταν μη-συνδετικό, πράγμα άτοπο για δένδρο. Ας υποθέσουμε ότι $q \geq 1$ και η πρόταση ισχύει. Το πλήθος δηλαδή των κορυφών είναι q+1.

Έστω G δένδρο με q+1 ακμές. Τότε από το πόρισμα 5.4 υπάρχει κορυφή με βαθμό 1. Ας είναι v αυτή η κορυφή. Η διαγραφή της κορυφής v, ανάγει το γράφημα G στο G΄, που έχει ακριβώς μία κορυφή και ακριβώς μία ακμή λιγότερες από το G. Επομένως το G΄ θα έχει q ακμές και εξακολουθεί να είναι δένδρο. Άρα από την υπόθεση της επαγωγής θα έχει q+1 κορυφές. Κατά συνέπειαν, το G, που έχει μία κορυφή περισσότερο, θα έχει q+2 κορυφές, πράγμα που θέλαμε να αποδείξουμε.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε αν ένα συνδετικό γράφημα G(p,q) ικανοποιεί τη σχέση p=q+1. Αν q=0, τότε προκύπτει p=1 και το G είναι τετριμμένο δένδρο. Υποθέτουμε ότι για q ισχύει η πρόταση, δηλαδή το γράφημα είναι δένδρο όταν έχει q>0 ακμές και q+1 κορυφές. Θεωρούμε ένα γράφημα G με q+1 ακμές. Οι κορυφές του θα είναι τότε $q+2 \geq 2$, και επομένως θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 5.14. Υπάρχει, άρα, κορυφή με βαθμό 1. Ας είναι v αυτή η κορυφή. Η διαγραφή της κορυφής v, ανάγει το γράφημα G στο G΄, που έχει ακριβώς μία κορυφή και ακριβώς μία ακμή λιγότερες από το G. Επομένως το G΄ θα έχει q ακμές και q+1 ακμές. Επιπλέον, το G΄ είναι συνδετικό, αφού κάθε ζεύγος κορυφών του είναι συνδεδεμένες αφού ήταν συνδεδεμένες στο G και η διαγραφείσα ακμή δεν συμμετέχει σε κανένα μονοπάτι στο οποίο δεν συμμετέχει η διαγραφείσα κορυφή. Άρα για το G΄ ισχύει η υπόθεση της επαγωγής και επομένως θα είναι δένδρο. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και το G θα είναι δένδρο. Πράγματι αν δεν ήταν και επειδή το G΄ είναι δένδρο, θα έπρεπε να υπάρχει κύκλος που να περνά υποχρεωτικά από την κορυφή v. Όμως αυτό είναι άτοπο, αφού οι κορυφές που συμμετέχουν σε κύκλο έχουν βαθμό ≥ 2, ενώ η v έχει βαθμό 1.

■

Παράδειγμα 5.9. Συμβολίζοντας τους δεσμούς μιας χημικής ένωσης με ακμές και τα στοιχεία που συμμετέχουν με κορυφές, προκύπτει ένα γράφημα. Αν η ένωση είναι κορεσμένος υδρογονάνθρακας, το γράφημα είναι δένδρο, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.26.



Ισοβουτάνιο

Σχήμα 5.26

Ο Cayley σκέφτηκε ότι προκειμένου να καταμετρήσουμε όλους τους δυνατούς κορεσμένους υδρογονάνθρακες αρκεί να καταμετρήσουμε όλα τα δένδρα με κορυφές βαθμών 1 ή 4. Έτσι απέδειξε δύο σχετικά θεωρήματα, που τα δίνουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.16. Για $p \geq 2$ υπάρχουν p^{p-2} διαφορετικά σημασμένα δένδρα με p κορυφές. ■

Μάλιστα, αν $N(d_1, d_2,...,d_p)$ το πλήθος των σημασμένων δένδρων με p κορυφές, των οποίων η κορυφή i έχει βαθμό d_i+1, τότε ισχύει:

Θεώρημα 5.17. Για $p \geq 2$ και $d_i \geq 0$ ισχύει

$$N\left(d_1,d_2,...,d_p\right)=\begin{cases} 0 & \alpha\nu \sum_{i=1}^{p} d_i \neq p-2, \\ \dfrac{(p-2)!}{d_1!d_2!...d_p!} & \alpha\nu \sum_{i=1}^{p} d_i = p-2. \end{cases}$$

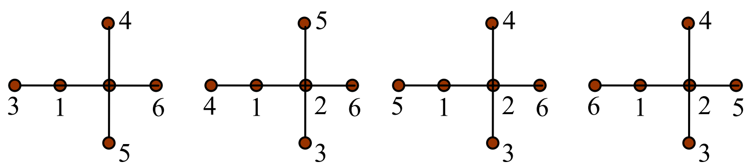
■

Παράδειγμα 5.10. Υπολογίστε το πλήθος των σημασμένων δένδρων με 6 κορυφές, με βαθμούς κατά σειρά 2, 4, 1, 1, 1, 1. Στη συνέχεια σχεδιάστε τα διαφορετικά δένδρα επαληθεύοντας έτσι το θεώρημα.

Λύση

Είναι $d_1=1$, $d_2=3$, $d_3=d_4=d_5=d_6=0$, οπότε $\sum_{i=1}^{6} d_i = 4 = p-2$. Άρα, θα είναι $N(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)= \dfrac{4!}{1!\cdot 3!\cdot 0!\cdot ...\cdot 0!} = 4$.

Τα δένδρα αυτά είναι τα



■

Σχετικό είναι και το επόμενο θεώρημα που αφορά το πλήθος των δένδρων ζεύξης ενός γραφήματος.

Θεώρημα 5.18. (Kirchoff). Έστω G συνδετικό γράφημα, A(G) ο πίνακας συνδέσεων του G, $\mathbf{\delta} = \left(\delta(v_1),\ \delta(v_2),\ \cdots,\ \delta(v_p)\right)'$ το διάνυσμα των βαθμών των κορυφών του G και M(G) ο πίνακας

$$M(G) = -A(G) + diag(\mathbf{\delta}(G)) = -A(G) + \begin{pmatrix} \delta(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta(v_p) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Τότε οι συμπαράγοντες του M(G) είναι όλοι ίσοι και η κοινή τιμή τους δίνει το πλήθος των δένδρων ζεύξης του G. ■

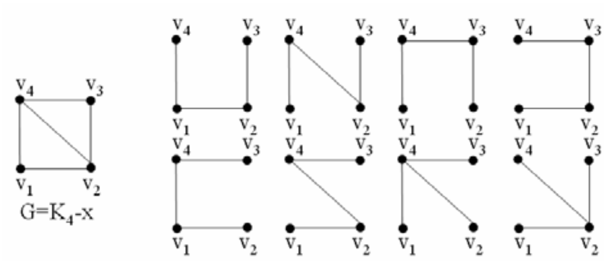
Παράδειγμα 5.11. Για το γράφημα G, αριστερά στο σχήμα 5.26 έχουμε:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{\delta = A \cdot 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(v_1) \\ \delta(v_2) \\ \delta(v_3) \\ \delta(v_4) \end{pmatrix},\quad \mathrm{M}(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Οι συμπαράγοντες του M(G) είναι όλοι ίσοι με 8. Για παράδειγμα,

$$(-1)^{1+1}\mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8,\ \text{και}\quad (-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Αλλά και τα δένδρα ζεύξης του G είναι 8 όπως φαίνεται στο σχήμα



Σχήμα 5.26

■

Πόρισμα 5.5. Ισχύει το θεώρημα 5.16 του Caylay, ότι δηλαδή το πλήθος σημασμένων δένδρων με p κορυφές είναι p^{p-2}.

Απόδειξη

Ένα δένδρο p κορυφών, μπορεί να θεωρηθεί ως δένδρο ζεύξης του πλήρους γραφήματος. Επομένως, για να βρούμε όλα τα δένδρα p κορυφών, αρκεί να βρούμε όλα τα δένδρα ζεύξης του πλήρους γραφήματος p κορυφών.

Όμως, εύκολα διαπιστώνουμε ότι $A(K_p)=I_p-J_p$, και $\boldsymbol{\delta}(K_p)=(p-1)\cdot\mathbf{1}_p$. Άρα, ο πίνακας $M(K_p)$ του θεωρήματος του Kirchoff θα είναι

$$\mathrm{M}(G)=\begin{pmatrix} p-1 & \text{-}1 & \cdots & \text{-}1 \\ \text{-}1 & p-1 & \cdots & \text{-}1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{-}1 & \text{-}1 & \cdots & p-1 \end{pmatrix}$$

Οι συμπαράγοντες του πίνακα αυτού που αντιστοιχούν σε διαγώνια στοιχεία είναι η (p-1)×(p-1) ορίζουσα της μορφής

$$(\text{-}1)^{i+i}\mathrm{M}_{ii}=\begin{vmatrix} p\text{-}1 & \text{-}1 & \cdots & \text{-}1 \\ \text{-}1 & p\text{-}1 & \cdots & \text{-}1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{-}1 & \text{-}1 & \cdots & p\text{-}1 \end{vmatrix}=\left[(p\text{-}1)-(\text{-}1)\right]^{p-2}\cdot\left[(p\text{-}1)+(p\text{-}2)(\text{-}1)\right]=p^{p-2}$$

Οι συμπαράγοντες του πίνακα M(G) που αντιστοιχούν σε μη-διαγώνια στοιχεία είναι η (p-1)×(p-1) ορίζουσα της μορφής

$$(\text{-}1)^{i+j}\mathrm{M}_{ij}=-\begin{vmatrix} \text{-}1 & \text{-}1 & \text{-}1 & \cdots & \text{-}1 \\ \text{-}1 & p\text{-}1 & \text{-}1 & \cdots & \text{-}1 \\ \text{-}1 & \text{-}1 & p\text{-}1 & \cdots & \text{-}1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{-}1 & \text{-}1 & \text{-}1 & \cdots & p\text{-}1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \text{-}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \text{-}1 & p & 0 & \cdots & 0 \\ \text{-}1 & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{-}1 & 0 & 0 & \cdots & p \end{vmatrix}=p^{p-2}$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση επαληθεύεται ότι ισχύει το θεώρημα του Kirchoff στο πρώτο σκέλος του και επομένως η κοινή τιμή που βρέθηκε ως συμπαράγοντας κάθε στοιχείου είναι το ζητούμενο πλήθος δένδρων ζεύξης.

■

Ας θεωρήσουμε ένα γράφημα στο οποίο έχουμε αντιστοιχίσει κάποιο βάρος σε κάθε μία από τις ακμές του. Το γράφημα μπορεί να είναι κατευθυνόμενο χωρίς βρόχους. Το βάρος παριστάνει απόσταση, χρόνο, μέγεθος, κέρδος, κόστος κλπ μεταξύ των κορυφών που συνδέει. Ένα τέτοιο γράφημα λέγεται *δίκτυο ή δικτύωμα*. Για παράδειγμα ένα «οδικό δίκτυο» περιγράφεται με ένα δίκτυο. Το ίδιο συμβαίνει και για ένα αεροπορικό ή τηλεφωνικό δίκτυο αλλά και με το δίκτυο των σωληνώσεων του οργανισμού ύδρευσης κλπ. Αυτό που συχνά μας ενδιαφέρει να βρούμε σ' ένα δίκτυο είναι εκείνο από τα μονοπάτια που συνδέουν δύο κορυφές που έχει το ελάχιστο κόστος ή το μέγιστο κέρδος. Ένα τέτοιο μονοπάτι αναφέρεται γενικά ως *ελάχιστο*. Ειδική περίπτωση του προβλήματος αυτού είναι να βρούμε ένα *ελάχιστο δένδρο ζεύξης*, ή *έναν ελάχιστο κύκλο ζεύξης*. Θα δώσουμε στη συνέχεια έναν αλγόριθμο που οφείλεται στον Kruskal και υπολογίζει το ελάχιστο ή σχεδόν ελάχιστο δένδρο ζεύξης σ' ένα δίκτυο. Με τον ελάχιστο κύκλο ζεύξης (Hamilton), θα ασχοληθούμε στην επόμενη παράγραφο.

Αλγόριθμος Kruskal

Έστω ένα δίκτυο G. Για να βρούμε ένα ελάχιστο δένδρο ζεύξης εργαζόμαστε ως εξής:

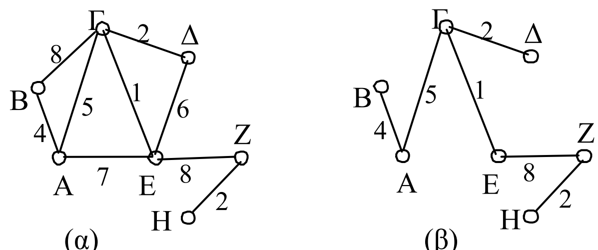
Βήμα 1. Διατάσσουμε τις ακμές του G σε αύξουσα σειρά ως προς το βάρος, ακολουθώντας τυχαία τοποθέτηση στη σειρά σε περίπτωση ίσων βαρών. Θέτουμε T=∅, όπου T οι ακμές του ζητούμενου δένδρου.

Βήμα 2. Προσθέτουμε την πρώτη ακμή στο σύνολο T.

Βήμα 3. Αν κάθε ακμή έχει εξεταστεί, σταματούμε και συμπεραίνουμε ότι το G είναι μη-συνδετικό. Αλλιώς εξετάζουμε την πρώτη μη εξετασθείσα ακμή στη διάταξη που αναφέρθηκε και την προσθέτουμε στο T αν και μόνον αν δεν δημιουργεί κύκλο με κάποιες από τις ακμές που έχουν ήδη προστεθεί στο T. Αν η ακμή προστεθεί στο T πηγαίνουμε στο βήμα 4, αλλιώς επαναλαμβάνουμε το βήμα 3.

Βήμα 4. Αν T έχει n-1 ακμές όπου n το πλήθος κορυφών του G, σταματούμε και συμπεραίνουμε ότι το T είναι το ζητούμενο δένδρο. Αλλιώς πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Παράδειγμα 5.12. Το γράφημα 5.27(α) παριστάνει το οδικό δίκτυο 7 οικισμών σ' ένα νησί. Οι αριθμοί στις ακμές παριστάνουν χιλιομετρικές α-



Σχήμα 5.27

ποστάσεις μεταξύ των αντίστοιχων οικισμών. Ζητείται να βρεθεί διαδρομή ελαχίστου μήκους που να συνδέει τους 7 οικισμούς.

Λύση

Εργαζόμαστε με τον αλγόριθμο Kruskal. Διατάσσουμε τις ακμές ως

E(G)={ΓΕ, ΓΔ, ΖΗ, ΑΒ, ΑΓ, ΕΔ, ΕΑ, ΕΖ, ΒΓ}

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία προσθέτουμε στο Τ τις πέντε πρώτες ακμές χωρίς πρόβλημα και το Τ γίνεται:

T={ΓΕ, ΓΔ, ΖΗ, ΑΒ, ΑΓ, ...}

Η επόμενη ακμή στο E(G) είναι η ΕΔ που δεν προστίθεται διότι δημιουργεί τρίγωνο με τις ΓΔ, ΓΕ. Πρόβλημα έχει και η επόμενη ακμή ΕΑ. Συνεχίζοντας, καταλήγουμε στο T={ΓΕ, ΓΔ, ΖΗ, ΑΒ, ΑΓ, ΕΖ} που είναι δένδρο. Το συνολικό ελάχιστο μήκος αυτού του δένδρου είναι 22.

■

Παράγοντες-Τομές-Γέφυρες

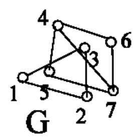
Έστω G=(V,E) ένα γράφημα.

Ένα υπογράφημα του G λέγεται (συνδετικός) *παράγοντας* (connected component) του G αν είναι μέγιστο συνδετικό υπογράφημα του G, δηλαδή το Η είναι παράγοντας του G, αν:

(α) είναι συνδετικό, και

(β) δεν περιέχεται σε κανένα άλλο, μεγαλύτερο, υπογράφημα του G.

π.χ. Το Η, με V(H)={1,2,3}, E(H)={12,13,23} είναι παράγοντας του G στο διπλανό σχήμα, ενώ το Κ, με V(K)={4,6,7}, E(K)={46, 47, 67} δεν είναι διότι το Κ περιέχεται στο L με V(L)={4,5,6,7}, E(L)={45, 46, 47, 57, 67}.

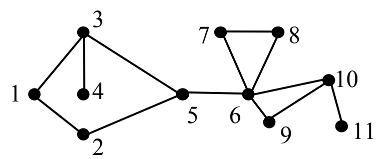


Αν A, B$\subseteq$V και για το σύνολο X$\subseteq$V$\cup$E ισχύει ότι κάθε μονοπάτι που συνδέει κορυφές του Α με κορυφές του Β περνάει οπωσδήποτε από μία κορυφή ή ακμή του Χ, τότε το Χ χωρίζει τα σύνολα κορυφών Α, Β. Γενικότερα, αν το Χ χωρίζει δύο κορυφές του G-X, τότε το Χ λέγεται *σύνολο τομής του G* ή λέμε ότι το σύνολο Χ χωρίζει το G.

Αν το σύνολο τομής Χ αποτελείται μόνο από μία κορυφή την v, τότε η v λέγεται *σημείο τομής* (cutvertex). Με άλλα λόγια, μία κορυφή είναι σημείο τομής αν η διαγραφή της από το γράφημα, που συμπαρασύρει τη διαγραφή όλων των ακμών που έχουν άκρο την v, το κάνει ασύνδετο (αν ήταν αρχικά συνδετικό) ή γενικότερα, αυξάνει τους παράγοντες του γραφήματος.

Αν το σύνολο τομής X αποτελείται μόνο από μία ακμή την x, τότε η x λέγεται *γέφυρα* (bridge). Με άλλα λόγια, μία ακμή είναι γέφυρα αν η διαγραφή της από το γράφημα το κάνει ασύνδετο (αν ήταν αρχικά συνδετικό) ή γενικότερα, αυξάνει τους παράγοντες του γραφήματος.

Στο σχήμα 5.28 οι κορυφές 3, 5, 6, 10, είναι σημεία τομής, οι ακμές {3,4}, {5,6}, {10,11} είναι γέφυρες, ενώ τα σύνολα κορυφών ή/και ακμών {{3,5}, {2,5}}, {{3,5}, 2}, {{6,10}, 9}, είναι σύνολα τομής.



Σχήμα 5.28

Αδιαχώριστο είναι ένα γράφημα όταν είναι συνδετικό και δεν έχει σημεία τομής.

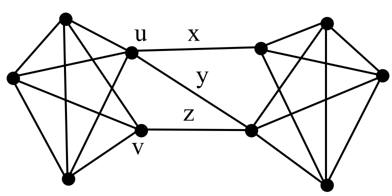
Τα γραφήματα G και L(G) στο σχήμα 5.24 είναι αδιαχώριστα.

Συνδετικός αριθμός k ή k(G) του G λέγεται ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που πρέπει να απομακρύνουμε, ώστε να προκύψει ένα μη συνδετικό γράφημα. Έτσι, για ένα μη συνδετικό γράφημα έχουμε k=0, ενώ αν υπάρχει σημείο τομής θα είναι k=1. Για κάθε αδιαχώριστο γράφημα είναι $k \geq 2$ και για το πλήρες K_p γράφημα έχουμε $k(K_p)=p-1$.

Ένα γράφημα λέγεται *n-συνδετικό* αν $k(G) \geq n$. Έτσι, το G είναι 1-συνδετικό αν και μόνο είναι συνδετικό και είναι 2-συνδετικό αν είναι αδιαχώριστο με 2 τουλάχιστον ακμές.

Γραμμο-συνδετικός αριθμός λ ή λ(G) του G λέγεται ο ελάχιστος αριθμός ακμών που πρέπει να απομακρύνουμε, ώστε να προκύψει μη συνδετικό γράφημα. Έχουμε $\lambda(K_1)=0$, λ (ενός μη συνδετικού γραφήματος) = 0 και λ(G)=1, αν υπάρχει μία γέφυρα.

Το γράφημα στο σχήμα 5.29 έχει συνδετικό αριθμό k=2, διότι δεν έχει σημείο τομής ενώ υπάρχουν δύο κορυφές οι u, v στο σχήμα που η απομάκρυνσή τους κάνει το γράφημα μη-συνδετικό. Ο γραμμοσυνδετικός



Σχήμα 5.29

αριθμός του γραφήματος είναι λ=3, διότι η απομάκρυνση των τριών ακμών x, y, z κάνει το γράφημα μη-συνδετικό, ενώ αυτό δεν συμβαίνει με απομάκρυνση λιγότερων ακμών.

Σχετικές με τις προηγούμενες έννοιες είναι οι παρακάτω προτάσεις.

Θεώρημα 5.19. Έστω v κορυφή ενός συνδετικού γραφήματος G. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) v είναι σημείο τομής.

(2) Υπάρχουν δύο κορυφές u και w διαφορετικές από την v, έτσι ώστε η v να ανήκει σε κάθε μονοπάτι από την u στην w.

(3) Υπάρχει μία διαίρεση των στοιχείων του V-{v} σε υποσύνολα U και W έτσι ώστε για κάθε ζευγάρι κορυφών $u \in U$ και $w \in W$, το v είναι σε κάθε μονοπάτι από την u στην w.

Απόδειξη

(1)⇒(3). Αφού v είναι σημείο τομής, το γράφημα G-v είναι μη συνδετικό, δηλαδή η απομάκρυνση της v χωρίζει το G σε δύο τουλάχιστον ασύνδετα μεταξύ τους υπογραφήματα. Συμβολίζουμε με U το σύνολο κορυφών του ενός από αυτά και με W τις υπόλοιπες εκτός της v κορυφές του G. Αν τώρα u τυχαία κορυφή του U και w τυχαία κορυφή του W, τότε είναι φανερό ότι η u δεν συνδέεται με την w στο γράφημα G-v, ενώ συνδέονταν στο γράφημα G. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μονοπάτι από την u στην w στο G περνά από την v, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

(3)⇒(2). Αρκεί να επιλεγεί η u στο U και η w στο W.

(2)⇒(1). Αφού η κορυφή v είναι σε κάθε μονοπάτι από την u στην w, άρα η απομάκρυνσή της χωρίζει τις κορυφές u και w. Αυτό όμως σημαίνει ότι το γράφημα γίνεται μη-συνδετικό. Άρα, η v είναι σημείο τομής.

■

Θεώρημα 5.20. Έστω x ακμή ενός συνδετικού γραφήματος G. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) x είναι γέφυρα στο G.

(2) x δεν ανήκει σε κανένα κύκλο στο G.

(3) Υπάρχουν κορυφές u και w που ανήκουν στο G, έτσι ώστε η ακμή x να ανήκει σε κάθε μονοπάτι από την u στην w.

(4) Υπάρχει μία διαίρεση του V σε υποσύνολα U και W, έτσι ώστε για κάθε ζευγάρι κορυφών $u \in U$ και $w \in W$, η ακμή x να ανήκει σε κάθε μονοπάτι από την u στην w.

Απόδειξη

(1)⇒(4). Αφού x είναι σημείο τομής, το γράφημα G-x είναι μη συνδετικό, δηλαδή η απομάκρυνση της x χωρίζει το G σε δύο τουλάχιστον ασύνδετα μεταξύ τους υπογραφήματα. Συμβολίζουμε με U το σύνολο κορυφών του ενός από αυτά και με W τις υπόλοιπες κορυφές του G. Αν τώρα u τυχαία κορυφή του U και w τυχαία κορυφή του W, τότε είναι φανερό ότι η u δεν συνδέεται με την w στο γράφημα G-x, ενώ συνδέονταν στο γράφημα G. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μονοπάτι από την u στην w στο G περνά από την x, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

(4)⇒(3). Αρκεί να επιλεγεί η u στο U και η w στο W.

(3)⇒(2). Από την υπόθεση έχουμε ότι η x ανήκει σε κάθε μονοπάτι από την u στην w. Αν α, β τα άκρα της x, τότε κάθε μονοπάτι από την u στην w γράφεται με τη μορφή $uu_1u_2\ldots u_s\alpha\beta w_1w_2\ldots w_rw$. Ας υποθέσουμε ότι η x ανήκει σε κύκλο. Τότε ο κύκλος θα έχει τη μορφή $\alpha\beta v_1v_2\ldots v_t\alpha$. Αν θεωρήσουμε τον περίπατο $uu_1u_2\ldots u_s\alpha v_1v_2\ldots v_t\beta w_1w_2\ldots w_rw$, τότε είναι φανερό ότι αυτός δεν περνά από την ακμή x. Αλλά τότε, ούτε και το μονοπάτι που σύμφωνα με το θεώρημα 5.9 περιέχεται στον περίπατο, θα περιέχει την x. Αυτό, όμως, είναι άτοπο αφού το μονοπάτι συνδέει τις κορυφές u, w. Άρα η x δεν μπορεί να ανήκει σε κύκλο.

(2)⇒(1). Ας είναι α και β τα άκρα της x. Αφού η x δεν ανήκει σε κύκλο και το G είναι συνδετικό, άρα οι κορυφές α και β συνδέονται μόνο μέσω της x. Πράγματι, αν υπήρχε και άλλο μονοπάτι τότε αυτό μαζί με την x θα αποτελούσαν κύκλο. Έτσι η απομάκρυνση της x χωρίζει τις κορυφές α και β. Αυτό όμως σημαίνει ότι το γράφημα γίνεται μη-συνδετικό. Άρα, η x είναι γέφυρα. ■

Θεώρημα 5.21. Κάθε συνδετικό γράφημα G έχει τουλάχιστον δύο κορυφές που δεν είναι σημεία τομής.

Απόδειξη

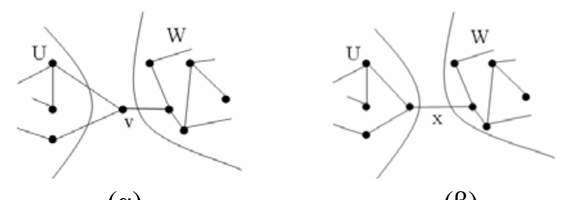
Έστω u, v δύο κορυφές του G με μέγιστη απόσταση. Έστω ότι η v είναι σημείο τομής. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 5.19 οι κορυφές του G εκτός της v, χωρίζονται σε δύο σύνολα U, W και κάθε μονοπάτι από κορυφή του U σε κορυφή του V, θα περνά από την v. Η κορυφή u θα ανήκει στο ένα από αυτά, έστω στο U. Θεωρούμε μια κορυφή w στο W και το μονοπάτι που συνδέει τις u, w, που όπως είπαμε περνά από την v. Το μήκος αυτού του μονοπατιού θα είναι d(u,v)+d(v,w). Άρα τα σημεία u, w απέχουν απόσταση μεγαλύτερη της μέγιστης, πράγμα άτοπο. Επομένως η v δεν είναι σημείο τομής. Όμοια, ούτε η u είναι σημείο τομής, και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

■

Θεώρημα 5.22. Ένα συνδετικό κυβικό γράφημα έχει σημείο τομής αν και μόνον αν έχει γέφυρα.

Απόδειξη

Έστω ότι η v είναι σημείο τομής. Τότε από το θεώρημα 5.19 ορίζονται τα σύνολα κορυφών U, W με τέτοιο τρόπο ώστε μετά την απομάκρυνση της v να μην υπάρχει σύνδεση μεταξύ κορυφών του U και του W (σχήμα 5.30α). Επειδή το γράφημα είναι κυβικό, υπάρχουν ακριβώς τρεις ακμές με άκρο την v. Αυτές δεν μπορεί να είναι όλες προς κορυφές μόνο του U ή μόνο του W, διότι τότε το γράφημα θα ήταν μη συνδετικό. Άρα, αναγκαστικά δύο από τις ακμές κατευθύνονται προς κορυφές του U και μία προς κορυφές του W, ή αντίστροφα. Η μοναδική ακμή που κατευθύνεται προς ένα από τα δύο σύνολα κορυφών είναι γέφυρα.



(α) (β)

Σχήμα 5.30

Αντίστροφα, έστω ότι η ακμή x είναι γέφυρα. Τότε από το θεώρημα 5.20 ορίζονται τα σύνολα κορυφών U, W με τέτοιο τρόπο ώστε μετά την απομάκρυνση της x να μην υπάρχει σύνδεση μεταξύ κορυφών του U και του W (σχήμα 5.30β). Επειδή η απομάκρυνση οποιουδήποτε από τα άκρα της x απομακρύνει και την x, άρα τα άκρα της x είναι σημεία τομής. (Αυτό ισχύει για κάθε γράφημα με γέφυρα, όχι μόνο για τα κυβικά).

■

Θεώρημα 5.23. (Whitney). Για κάθε γράφημα G, ισχύει:

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \tag{5.5}$$

Απόδειξη

Αν το G δεν έχει καθόλου ακμές, τότε k=λ=δ=0, και η σχέση ισχύει.

Ισχύει λ(G) ≤ δ(G). Πράγματι, αν απομακρύνουμε όλες τις δ(G) ακμές, που συνδέονται με μια κορυφή ελάχιστου βαθμού, απομονώνουμε την κορυφή αυτή και άρα προκύπτει μη συνδετικό γράφημα.

Ισχύει k(G) ≤ λ(G). Πράγματι, αν το G είναι μη συνδετικό k=λ=0, οπότε η σχέση ισχύει.

Αν είναι συνδετικό και έχει γέφυρα λ=1 τότε θα έχει και σημείο τομής (βλ. απόδειξη θεωρήματος 5.22) δηλαδή θα είναι και k=1. Άρα η πρόταση ισχύει αφού λόγω της συνδετικότητας είναι δ≥1.

Έστω λοιπόν το G συνδετικό και έχει λ≥2. Τότε αν απομακρύνουμε λ-1 από αυτές τις ακμές, προκύπτει ένα γράφημα με μία γέφυρα έστω την x=uv. Για κάθε μία από αυτές τις ακμές παίρνουμε μία από τις κορυφές τους που να είναι διαφορετική από τις v και u. Η απομάκρυνση των κορυφών αυτών απομακρύνει και τις λ-1 παραπάνω ακμές και πιθανόν περισσότερες. Αν το γράφημα που προκύπτει είναι μη συνδετικό, τότε k=λ-1<λ. Αν όχι, απομακρύνοντας επίσης το u ή το v προκύπτει ένα μη συνδετικό γράφημα, οπότε k=λ.

■

Για τα n-συνδετικά γραφήματα δίνουμε χωρίς απόδειξη το εξής:

Θεώρημα 5.24. (Dirac). Αν το G είναι n-συνδετικό, n≥2, τότε κάθε n-άδα κορυφών του ανήκει σε ένα κύκλο.

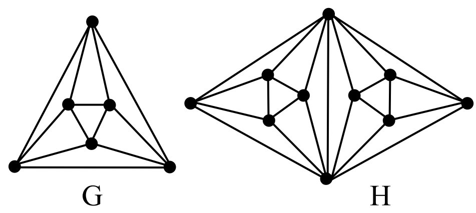
■

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αρκεί για παράδειγμα να θεωρήσουμε τότε το $G=C_n$, για n>2, που έχει κάθε n-άδα κορυφών του σε κύκλο. Το γράφημα όμως αυτό είναι 2-συνδετικό όχι n-συνδετικό.

Παράδειγμα 5.13. Υπολογίστε το συνδετικό και γραμμοσυνδετικό αριθμό των γραφημάτων του σχήματος 5.31.

Λύση

Το πρώτο γράφημα παριστάνει το οκτάεδρο και είναι κανονικό γράφημα τάξης 4. Άρα από το θεώρημα του Whitney θα είναι $k \leq \lambda \leq 4$. Εύκολα διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχουν 3 κορυφές που να χωρίζουν το G. Άρα είναι $k=\lambda=4$.



Σχήμα 5.31

Το δεύτερο γράφημα έχει $k=2$, αφού γίνεται μη-συνδετικό με την απομάκρυνση των άκρων της μεσαίας ακμής. Έχει όμως $\lambda=4$. Πράγματι, τα δύο τμήματα του γραφήματος, αριστερά και δεξιά, είναι οκτάεδρα και επομένως γίνονται μη συνδετικά με απομάκρυνση το λιγότερο 4 ακμών. Στο μέσον, όπου συνδέονται τα δύο τμήματα απαιτείται η απομάκρυνση τουλάχιστον 6 ακμών για να γίνει μη συνδετικό.

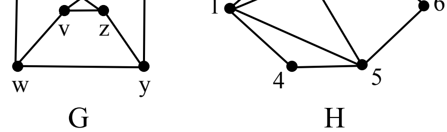
■

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα με πολλές εφαρμογές σε διάφορους τομείς οφείλεται στον Menger.

Θεώρημα 5.25 (Menger). Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που χωρίζουν δύο μη-άμεσα συνδεμένες κορυφές s και t σε ένα γράφημα, είναι ίσος με το μέγιστο αριθμό ανεξάρτητων μονοπατιών από την s στην t, δηλαδή μονοπατιών που είναι τέτοια ώστε να μη έχουν άλλες κοινές κορυφές εκτός από τα άκρα.

■

Παράδειγμα 5.14. Να επαληθευτεί το θεώρημα του Menger στα γραφήματα του σχήματος 5.32.



Σχήμα 5.32

Λύση

Στο γράφημα G οι κορυφές u και v είναι μη άμεσα συνδεδεμένες. Υπάρχουν τρία ανεξάρτητα μονοπάτια τα uxv, uzv και uwv που συνδέουν τις κορυφές u και v. Αλλά, όπως εύκολα διαπιστώνεται απαιτείται η απομάκρυνση τριών τουλάχιστον κορυφών, των x, z, w, για να χωριστούν οι u, v.

Όμοια, στο γράφημα H, οι κορυφές 1 και 6 είναι μη άμεσα συνδεδεμένες. Με την απομάκρυνση των κορυφών 3 και 5, οι κορυφές 1 και 6 χωρίζονται. Αλλά, όπως εύκολα διαπιστώνεται δεν υπάρχουν περισσότερα από δύο ανεξάρτητα μονοπάτια από την 1 στην 6. Δύο τέτοια είναι, για παράδειγμα, τα 1236, 156.

■

Μια παραλλαγή του θεωρήματος αυτού, που είναι και κριτήριο για το έλεγχο της n-συνδετικότητας είναι:

Θεώρημα 5.26 (Whitney). Ένα γράφημα είναι n-συνδετικό αν και μόνον αν, κάθε ζευγάρι κορυφών του συνδέεται με n μονοπάτια, που δεν έχουν άλλες κοινές κορυφές (εκτός από τα άκρα).

■

Άλλη παραλλαγή είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 5.27 (Ford-Furkelson). Για κάθε ζευγάρι κορυφών ενός γραφήματος ο μέγιστος αριθμός μονοπατιών με μη κοινές ακμές που τα συνδέει, είναι ίσος με τον ελάχιστο αριθμό ακμών που τα χωρίζει.

■

Μία εφαρμογή του θεωρήματος Menger είναι στους (0,1)-πίνακες. Αποδεικνύεται ισοδύναμο με το θεώρημα König. Πράγματι, σύμφωνα με το θεώρημα König, το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων μονάδων του πίνακα M ισούται με το ελάχιστο πλήθος γραμμών ή/και στηλών του που τον καλύπτουν. Θα το δείξουμε αυτό με τη βοήθεια του θεωρήματος Menger, στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 5.15. Δίνεται ο πίνακας $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

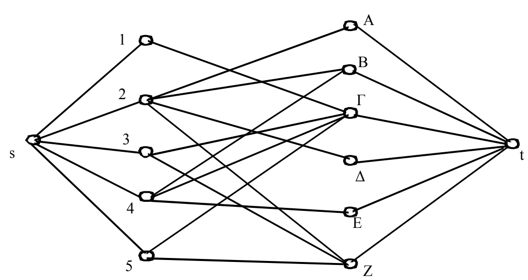
Θα δείξουμε ότι ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων μονάδων του M, δηλαδή μονάδων που δεν βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη, καθώς και ο ελάχιστος αριθμός γραμμών ή/και στηλών που καλύπτουν τις μονάδες του είναι 4.

Λύση

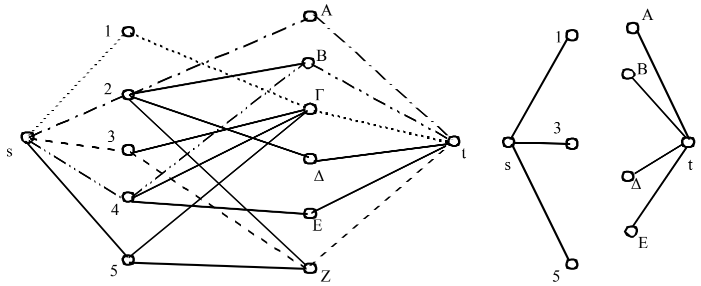
Θεωρούμε ότι ο πίνακας M είναι πίνακας αντιστοίχησης ενός σχεδιασμού (όχι κατανάγκην BIB). Τότε, ο σχεδιασμός αυτός θα έχει 5 σύμβολα, έστω τα 1, 2, 3, 4, 5 και 6 ομάδες, έστω τις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Συμβολίζουμε S={1, 2, 3, 4, 5} το σύνολο των συμβόλων και $\doteq$={Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ}, το σύνολο των ομάδων. Ο σχεδιασμός με πίνακα αντιστοίχησης M, θα είναι

Α={2}, Β={2,4}, Γ={1,3,4,5},
Δ={2}, Ε={4}, Ζ={2,3,5}.

Σχηματίζουμε τώρα ένα διγράφημα που να έχει ως σύνολα ανεξάρτητων κορυφών τα σύνολα συμβόλων S και ομάδων $\doteq$. Οι ακμές του διγραφήματος συνδέουν ένα σύμβολο i του S με μια ομάδα J του $\doteq$, αν $i \in J$ (σχήμα 5.33). Στη συνέχεια, θεωρούμε μία κορυφή s (αρχή) που τη συνδέουμε με τα σύμβολα του συνόλου S, και μία κορυφή t (τέλος) που τη



Σχήμα 5.33



Σχήμα 5.34

συνδέουμε με τις ομάδες του συνόλου $\doteq$.

Στο γράφημα αυτό ισχύει το θεώρημα Menger. Άρα, το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων μονοπατιών, θα ισούται με το ελάχιστο πλήθος κορυφών που χωρίζει την «αρχή» από το «τέλος». Στο σχήμα 5.34 αριστερά, διακρίνουμε 4 ανεξάρτητα μονοπάτια, τα s1Γt, s2At, s3Zt, s4Bt. Επίσης

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Σχήμα 5.35

υπάρχουν 4 κορυφές οι 2, 4, Γ, Ζ διαχωρίζουν τα s, t (σχήμα 5.34 δεξιά).

Τα μονοπάτια που βρέθηκαν αντιστοιχούν στις ανεξάρτητες μονάδες του πίνακα Μ. Πράγματι οι μονάδες στις θέσεις (1,Γ), (2,Α), (3,Ζ), (4,Β) του Μ, όπου αριθμήσαμε τις γραμμές του από το S και τις στήλες του από το $\doteq$, είναι το ελάχιστο πλήθος ανεξάρτητων μονάδων του Μ. Εξάλλου, οι κορυφές 2, 4, Γ, Ζ του γραφήματος αντιστοιχούν στις γραμμές 2^{η} και 4^{η} και στις στήλες 3^{η} και 6^{η} του Μ που καλύπτουν τις μονάδες του Μ (σχήμα 5.35).

■

Ασκήσεις

5.4.1. Για τα γραφήματα που ορίζονται από τους πίνακες συνδέσεων:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

να βρείτε το πλήθος περιπάτων μήκους 4 από την v_2 στη v_3 και να εξεταστεί με τη βοήθεια πινάκων αν είναι συνδετικά. Να σχεδιαστούν τα γραφήματα για να επαληθευτούν τα προηγούμενα.

5.4.2. Είναι δυνατόν να κατασκευαστούν δένδρα με κορυφές που να έχουν τους παρακάτω βαθμούς; Αν ναι κατασκευάστε το δένδρο, αν όχι εξηγείστε γιατί.

(α) $\delta(v_1)=1$ $\delta(v_2)=3$ $\delta(v_3)=1$ $\delta(v_4)=3$
$\delta(v_5)=3$ $\delta(v_6)=3$ $\delta(v_7)=1$ $\delta(v_8)=2$

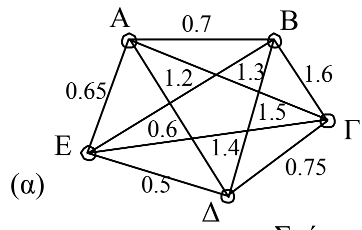
(β) $\delta(v_1)=1$ $\delta(v_2)=3$ $\delta(v_3)=1$ $\delta(v_4)=3$

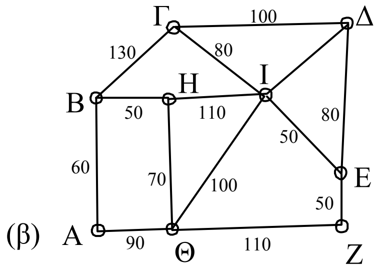
$\delta(v_5)=2$ $\delta(v_6)=3$ $\delta(v_7)=1$ $\delta(v_8)=2$

(γ) $\delta(v_1)=1$ $\delta(v_2)=3$ $\delta(v_3)=1$ $\delta(v_4)=3$

$\delta(v_5)=3$ $\delta(v_6)=1$ $\delta(v_7)=1$ $\delta(v_8)=1$

5.4.3. Το γράφημα 5.36(α) συμβολίζει το κόστος (σε εκατομ. δρχ.) παροχής τηλεφωνικών υπηρεσιών μεταξύ 5 πόλεων. Να βρεθεί ο φθηνότερος τρόπος αποστολής μηνύματος και στις πέντε πόλεις.





Σχήμα 5.36

5.4.4. Το γράφημα 5.36(β) παριστάνει το οδικό δίκτυο μιας πόλης που συνδέει μεταξύ τους τα σημεία Α, Β, ..., Ι, ενώ οι αριθμοί συμβολίζουν τα μήκη των τμημάτων. Στα σημεία αυτά πρόκειται να τοποθετηθούν πυροσβεστικοί κρουνοί. Κατά μήκος ποιων δρόμων πρέπει να τοποθετηθούν οι σωληνώσεις, ώστε το έργο να στοιχίσει το ελάχιστο δυνατόν;

5.4.5. Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών σε κυβικό γράφημα με γέφυρα είναι 10. Κατασκευάστε αυτό το γράφημα.

5.4.6. Αν το v είναι σημείο τομής για το G, δεν μπορεί να είναι σημείο τομής για το συμπλήρωμά του. (Υπόδ: Δείξτε πρώτα $\overline{G-\mathrm{v}}=\overline{G}-\mathrm{v}$)

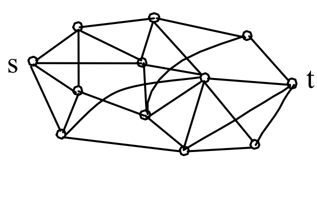
5.4.7. Δείξτε ότι δεν υπάρχει 3-συνδετικό γράφημα με 7 ακμές.

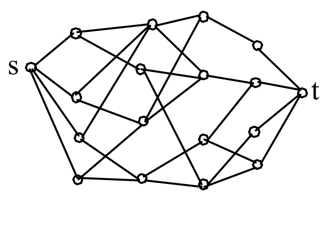
5.4.8. Έστω G, συνδετικό γράφημα, του οποίου κάθε μέγιστο αδιαχώριστο υπογράφημά του, είναι ρόδα. Δείξτε ότι ισχύει q=2p-2.

5.4.9. Αν ένα γράφημα έχει κλειστό περίπατο περιττού μήκους, τότε έχει και κύκλο περιττού μήκους.

5.4.10. Έστω G συνδετικό γράφημα με πίνακα συνδέσεων A. Τι μορφή έχει ο πίνακας A, αν: (α) Η κορυφή v_i, είναι σημείο τομής; (β) Η ακμή $\{v_i, v_j\}$ είναι γέφυρα;

5.4.11. Επαληθεύστε το θεώρημα του Menger για τα γραφήματα:





5.4.12. Επτά αγόρια γνωρίζονται με 10 κορίτσια ως εξής: Ο Αλέκος γνωρίζει τη Δήμητρα, τη Χριστίνα και την Αλίκη, ο Μπάμπης γνωρίζει τη Χριστίνα και την Κατερίνα, ο Χρήστος γνωρίζει τη Δήμητρα και τη Χριστίνα, ο Δήμος την Κατερίνα, την Ιωάννα και τη Φωτεινή, ο Βαγγέλης τη Δήμητρα και την Αλίκη, ο Νίκος την Κατερίνα και την Αλίκη και ο Κώστας γνωρίζει την Ελένη τη Μαρία τη Σόνια και τη Ρούλα.
(α) Σχεδιάστε ένα γράφημα όπου μια κορυφή s συνδέεται με όλα τα αγόρια, μια κορυφή t με όλα τα κορίτσια και τα αγόρια συνδέονται με τα κορίτσια που γνωρίζουν.
(β)Είναι δυνατό να σχηματιστούν 7 ζευγάρια έτσι ώστε το αγόρι να γνωρίζει το κορίτσι;
(γ) Υπάρχουν 6 παιδιά που αν φύγουν από την παρέα, όσοι μείνουν να είναι άγνωστοι μεταξύ τους;

5.5. Ειδικά Γραφήματα

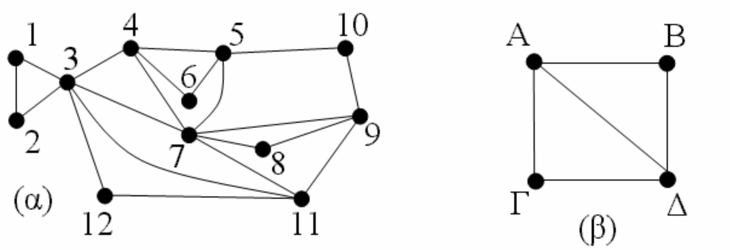
Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τα γραφήματα Euler, τους κύκλους Hamilton, τους αριθμούς Ramsey και με τα επίπεδα γραφήματα.

Γραφήματα Euler

Διαδρομή Euler σε ένα πολλαπλό γράφημα G, είναι κάθε διαδρομή που περνά απ' όλες τις ακμές του G ακριβώς μία φορά. Αν η αρχική κορυφή ταυτίζεται με την τελική, τότε η διαδρομή λέγεται *κλειστή διαδρομή Euler* και το γράφημα λέγεται *γράφημα Euler*. Είναι φανερό ότι ένα γράφημα Euler πρέπει να είναι συνδετικό. Ένα γράφημα Euler σχεδιάζεται με "μονοκονδυλιά".

Το γράφημα στο σχήμα 5.37(α) είναι γράφημα Euler, διότι υπάρχει κλειστή διαδρομή 1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 7, 5, 10, 9, 7, 8, 9, 11, 7, 3, 11, 12, 3, 1.

Το γράφημα στο σχήμα 5.37(β) δεν είναι γράφημα Euler, έχει όμως μία ανοικτή διαδρομή Euler την Α, Δ, Γ, Α, Β, Δ.



Σχήμα 5.37

Ένα βασικό θεώρημα, που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο ύπαρξης διαδρομής Euler σ’ ένα γράφημα, είναι το εξής.

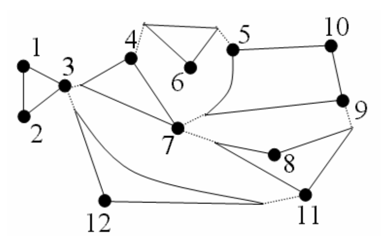
Θεώρημα 5.28 Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(1) Το G είναι γράφημα Euler.
(2) Κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.
(3) Το σύνολο των κορυφών του G μπορεί να χωριστεί σε κύκλους.

Απόδειξη

(1)⇒(2). Έστω T μια διαδρομή Euler στο G. Κάθε κορυφή που εμφανίζεται σε μία εσωτερική θέση της διαδρομής, συνδέεται με δύο ακμές, που είναι διαφορετικές. Αν είναι η πρώτη τότε θα είναι και τελευταία, οπότε συνδέεται και πάλι με δύο διαφορετικές ακμές. Άρα, αφού εξαντλούνται όλες οι ακμές, κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό.

(2)⇒(3). Αφού το G είναι συνδετικό είναι $\delta(v_i)\geq 1$, και επειδή είναι $\delta(v_i)$ άρτιος, θα είναι $\delta(v_i)\geq 2$. Τότε, από το θεώρημα 5.13, υπάρχει κύκλος στο G. Διαγράφοντας τις ακμές του κύκλου αυτού, όπως και τις κορυφές που απομένουν χωρίς ακμές, προκύπτει συνδετικό υπογράφημα του οποίου όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό και μάλιστα ικανοποιούν την $\delta(v_i)\geq 2$. Άρα, εφαρμόζεται πάλι το θεώρημα 5.13, δηλαδή υπάρχει και άλλος κύκλος. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(3)⇒(1). Έστω n το πλήθος κύκλων στους οποίους χωρίζεται το G. Αν n=1 τότε το G είναι γράφημα Euler. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n=k. Θα δείξουμε ότι ισχύει επίσης και για n=k+1. Τότε το G μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ένα γράφημα G΄ με n κύκλους και από έναν κύκλο C, που έχει τουλάχιστον μία κοινή κορυφή με το G΄. Ας είναι v μία από τις κοινές κορυφές. Από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει διαδρομή Euler στο G΄. Σχηματίζουμε τη διαδρομή που αποτελείται από την προηγούμενη μέχρι την κορυφή v, από τον κύκλο C, και από την υπόλοιπη διαδρομή από την v και μετά. Η διαδρομή αυτή θα είναι διαδρομή Euler στο G, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■



Ως παράδειγμα για την αποσαφήνηση του προηγουμένου θεωρήματος, παρατηρούμε ότι το γράφημα στο σχήμα

5.37(α), χωρίζεται σε έξι κύκλους , που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Για συνδετικά γραφήματα με κορυφές περιττού βαθμού, μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι ισχύει:

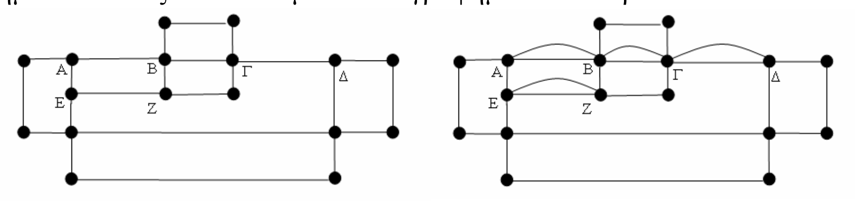
Θεώρημα 5.29 Αν το G έχει ακριβώς 2n κορυφές περιττού βαθμού, το σύνολο των ακμών του μπορεί να χωριστεί σε n ανοιχτές διαδρομές Euler.

■

Πόρισμα 5.6. Αν το G έχει ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού, (οι άλλες είναι άρτιου βαθμού), τότε υπάρχει μία ανοιχτή διαδρομή-Euler που ξεκινάει από τη μία και καταλήγει στην άλλη.

■

Ας θεωρήσουμε το γράφημα του σχήματος 5.38(α). Το γράφημα έχει τέσσερις κορυφές, τις Α, Ε, Ζ, Δ περιττού βαθμού και άρα δεν είναι γράφημα Euler. Ας υποθέσουμε ότι το γράφημα αυτό παριστάνει το δίκτυο



(α) (β)

Σχήμα 5.38

δρόμων στο οποίο πρέπει να κινηθεί ένας ταχυδρόμος για να διανείμει τις επιστολές μιας ημέρας. Το πρόβλημα τότε είναι να βρούμε μια κλειστή διαδρομή Euler προσθέτοντας κάποιες ακμές, έτσι ώστε το συνολικό μήκος της διαδρομής να είναι ελάχιστο. Μια λύση για το συγκεκριμένο γράφημα δίνεται στο σχήμα 5.38(β), όπου επειδή δεν είχαμε βάρη στις ακμές, αναζητήσαμε το ελάχιστο πλήθος ακμών που το μετατρέπουν σε Euler. Η αναζήτηση γίνεται με τον περιορισμό ότι οι ακμές που προστίθενται πρέπει να είναι από τις υπάρχουσες.

Το πρόβλημα εμφανίζεται σε πολλές περιπτώσεις στην πράξη, όπως στις περιπολίες αστυνομικών ή στρατιωτικών, στις βάρδιες ταχυδρόμων ή φυλάκων, στα δρομολόγια ταχυδρόμων, διανεμητών, απορριμματοφόρων κλπ. Αναφέρεται, δε, στη βιβλιογραφία ως το *πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου* - chinese postman problem.

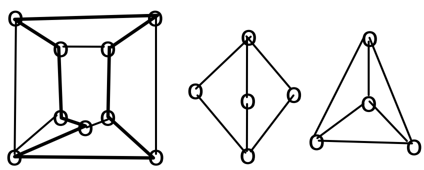
Ένα κατευθυνόμενο γράφημα μπορεί να είναι Euler όταν η διαδρομή καλύπτει όλες τις ακμές κατά την κατεύθυνση των βελών. Ισχύει το:

Θεώρημα 5.30 Ένα ισχυρά συνδετικό κατευθυνόμενο γράφημα (πιθανόν και με βρόχους) περιέχει μια κατευθυνόμενη διαδρομή Euler αν και μόνον αν για κάθε κορυφή ο έσω-βαθμός ισούται με τον έξω-βαθμό. ■

Γραφήματα Hamilton

Αν το γράφημα G περιέχει έναν κύκλο Z που περιέχει όλες τις κορυφές του G (αν δηλαδή ο Z είναι κύκλος ζεύξης), τότε το G λέγεται *γράφημα Hamilton* και ο Z λέγεται *κύκλος Hamilton*.

Για παράδειγμα, το πρώτο γράφημα στο διπλανό σχήμα έχει ένα κύκλο Hamilton, που σημειώνεται με έντονη γραμμή, το δεύτερο δεν έχει, ενώ το τρίτο έχει τρεις διαφορετικούς κύκλους.



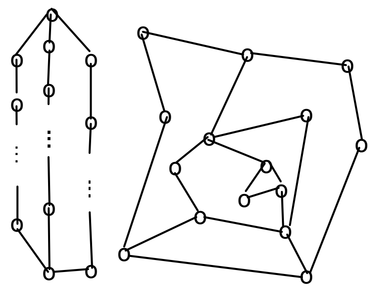
Αν και έχουν δοθεί διάφορες ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα γράφημα G να περιέχει έναν κύκλο Hamilton, δεν υπάρχει μέχρι τώρα μία συνθήκη που να οδηγεί σε πολυωνυμικό αλγόριθμο. Το πρόβλημα του περιοδεύοντος εμπορικού αντιπροσώπου (traveling salesman problem) είναι μία γενίκευση του παραπάνω προβλήματος. Το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί με ένα γράφημα, στο οποίο ζητείται να εξετάσουμε αν περιέχεται κύκλος Hamilton και, αν ναι, να ευρεθεί εκείνος που ελαχιστοποιεί κάποια αντικειμενική συνάρτηση των ακμών που μπορεί να αφορά χρόνο, μήκος, κόστος, κλπ. Το πρόβλημα αυτό είναι το διασημότερο στην Επιχειρησιακή Έρευνα και είναι ένα np-complete πρόβλημα.

Δίνουμε, στη συνέχεια, χωρίς απόδειξη δύο βασικά θεωρήματα.

Θεώρημα 5.31 Κάθε γράφημα Hamilton είναι 2-συνδετικό. Κάθε 2-συνδετικό μη-Hamilton γράφημα περιέχει ένα θ-γράφημα.

■

Με τον όρο *θ-γράφημα* εννοούμε ένα γράφημα όπως αυτό στο σχήμα 5.39(α), δηλαδή να αποτελείται από δύο μη-άμεσα συνδεδεμένες κορυφές βαθμού 3 και τουλάχιστον τρεις άλλες κορυφές βαθμού 2, που σχηματίζουν τρία ανεξάρτητα μονοπάτια μήκους τουλάχιστο 2). Το γράφημα 5.39(β) εύκολα διαπιστώνουμε ότι περιέχει θ-γράφημα (ως υπογράφημα).



(α) (β)

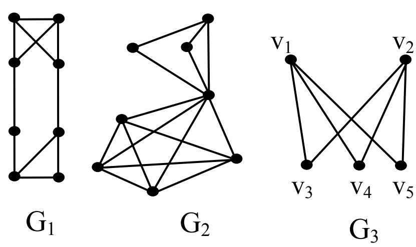
Σχήμα 5.39

Θεώρημα 5.32 (Pósa). Έστω το G έχει p≥3 κορυφές. Αν για κάθε n, μικρότερο του (p-1)/2, ο αριθμός των κορυφών βαθμού μικρότερου ή ίσου του n, είναι μικρότερος από n και αν για περιττό p ο αριθμός των κορυφών βαθμού (p-1)/2, δεν ξεπερνά τον (p-1)/2, τότε το G είναι γράφημα Hamilton.

Πόρισμα 5.7. (Θεώρημα Ore). Αν p≥3 και για κάθε ζευγάρι u και v μη-άμεσα συνδεδεμένων κορυφών ισχύει degu + degv ≥ p, τότε το G είναι Hamilton.

Πόρισμα 5.7. Αν για όλες τις κορυφές του G ισχύει degv ≥ p/2 με p≥3, τότε το G είναι Hamilton.

Παρατήρηση. Οι ικανές συνθήκες των προηγούμενων θεωρημάτων, δεν είναι και αναγκαίες. Το γράφημα G_1, για παράδειγμα, στο σχήμα 5.40, είναι γράφημα Hamilton, αλλά δεν ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Posa. Πράγματι έχει 8 κορυφές με βαθμό 3, ενώ προϋπόθεση του θεωρήματος είναι να έχει λιγότερες από τρεις κορυφές βαθμού 3. Οι συνθήκες του



Σχήμα 5.40

θεωρήματος είναι οι καλύτερες, με την έννοια ότι ασθενέστερες από αυτές δεν μπορούν να το ικανοποιήσουν. π.χ. στο G_2, το οποίο δεν είναι Hamilton η μόνη από τις προϋποθέσεις που δεν ικανοποιείται, είναι ότι έχει ακριβώς 3 κορυφές βαθμού 3, ενώ έπρεπε λιγότερες του 3. Στο γράφημα G_3 έχουμε 3 κορυφές βαθμού 2.

n-κύβοι

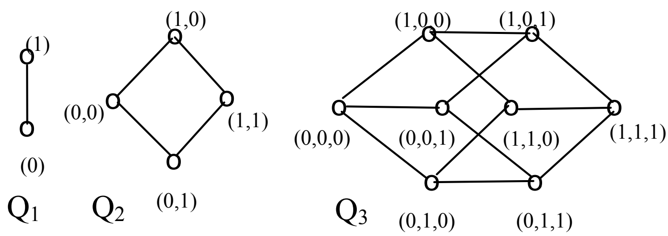
Ένα γράφημα που θα το συμβολίζουμε Q_n θα λέγεται *n-κύβος* αν οι κορυφές του μπορούν να παρασταθούν με μία διατεταγμένη n-άδα στοιχείων 0 ή 1, και οι ακμές του συνδέουν μόνο κορυφές των οποίων οι n-άδες που τις συμβολίζουν διαφέρουν σε ακριβώς μία θέση. Στην περίπτωση αυτή οι κορυφές λέγονται *γειτονικές*. Είναι φανερό ότι οι κορυφές του Q_n είναι σε πλήθος 2^n και μπορούμε να γράψουμε:

$V(Q_n) = \{\mathbf{v}=(v_{n-1}, v_{n-2}, ..., v_1, v_0) : v_i=0$ ή $1\}$ και

$E(Q_n) = \{\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}: v_i=u_i$, για όλα τα $i=0, 1, ..., n-1$, εκτός από

ένα ακριβώς δείκτη k για τον οποίο $v_k \neq u_k$ $\}$

Στο σχήμα 5.41 έχουμε τους n-κύβους για n=1, 2, 3. Παρατηρείστε, ότι για



Σχήμα 5.41

n=3 το γράφημα συμβολίζει μια πλάγια προβολή του κύβου που έχει κορυφές τα σημεία με συντεταγμένες x, y, z=0 ή 1. Αυτή η παρατήρηση δικαιολογεί την ονομασία.

Θεώρημα 5.33. Κάθε n-κύβος Q_n ($n \geq 2$) είναι γράφημα Hamilton.

Απόδειξη

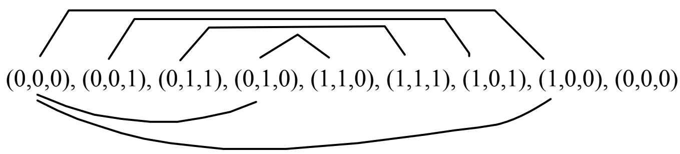
Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή.

Ο 2-κύβος είναι Hamilton, αφού η διαδρομή (0,0), (0,1), (1,1), (1,0), (0,0) έχει όλες τις διαδοχικές κορυφές γειτονικές, είναι κλειστή και περνά μία φορά από κάθε κορυφή (σχήμα 5.41). Άρα η πρόταση ισχύει για n=2.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για n, δηλαδή ότι υπάρχει κύκλος Hamilton $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2^n-1}$, όπου $v_k=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ είναι μια n-άδα από 0-κά και 1-δες. Συμβολίζουμε με $(0,v_k)$ την (n+1)-άδα $(0,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ και όμοια με $(1,v_k)$ την (n+1)-άδα $(1,x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Τότε, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η διαδρομή

$$(0,v_0), (0,v_1), (0,v_2), \ldots,(0, v_{2^n-1}), (1, v_{2^n-1}), \ldots,(1,v_2), (1,v_1), (1,v_0), (0,v_0),$$

είναι κύκλος Hamilton, που αποδεικνύει ότι η πρόταση ισχύει για n+1. Άρα η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό n με n≥2.



Σχήμα 5.42

Στο σχήμα 5.42 γίνεται υλοποίηση αυτής της διαδικασίας για την κατασκευή του κύκλου Hamilton για n=3, από τον κύκλο Hamilton για n=2.

■

Μία εφαρμογή των n-κύβων γίνεται στους κώδικες Gray.

Κώδικες Gray

Ένας μεταφραστής αναλογικού σε ψηφιακό σήμα προσεγγίζει συνήθως πραγματικούς αριθμούς με το ακέραιο μέρος τους, πολλαπλασιάζοντας προηγούμενα με κάποια δύναμη του 10. Οι μετασχηματισμένοι αριθμοί δίνονται είτε με τη συνηθισμένη δεκαδική μορφή είτε στις ηλεκτρονικές συσκευές με δυαδική μορφή. Στους μετασχηματισμούς αυτούς συμβαίνουν κάποιες φορές σφάλματα που οφείλονται στους μηχανικούς περιορισμούς των μηχανημάτων.

Για την κατανόηση δημιουργίας αυτών των σφαλμάτων, ας θεωρήσουμε έναν οδομετρητή που αποτελείται από μία σειρά δίσκους που φέρουν όλα τα ψηφία και αντιστοιχούν ανά ένας στις μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κλπ. των αριθμών. Αν αρχίσουμε να μετρούμε, οι δίσκοι περιστρέφονται έτσι ώστε οι μονάδες να αυξάνονται κάθε φορά κατά 1, ενώ οι δεκάδες, εκατοντάδες κλπ, αυξάνονται μόνο όταν χρειάζεται. Έτσι, αυξάνοντας από 1502 σε 1503 περιστρέφεται μόνο ο ένας δίσκος. Αν δεν περιστραφεί για κάποιο μηχανικό λόγο το λάθος που θα γίνει θα είναι 1 μονάδα. Αν, όμως, αυξάνουμε τον αριθμό 1599 σε 1600, τότε περιστρέφονται τρεις δίσκοι. Αν κάποιος από αυτούς δεν περιστραφεί ο αριθμός που θα προκύψει θα είναι από τον 1500 μέχρι τον 1699. Δηλαδή, το σφάλμα μπορεί να είναι πολύ σημαντικό.

Για να αποφευχθούν τέτοια σφάλματα, επινοήθηκε ένας τρόπος αύξησης των αριθμών έτσι ώστε κάθε αύξηση κατά μία μονάδα να αλλάζει ένα μόνο από τα σύμβολα του αριθμού. Με αυτό τον τρόπο τα σφάλματα θα είναι ομογενοποιημένα και ελάχιστα, μέχρι μία μονάδα κάθε φορά. Ο τρόπος μετασχηματισμού των αριθμών από τη φυσική σειρά στη σειρά που να ικανοποιεί την προηγούμενη απαίτηση, όταν χρησιμοποιείται η δεκαδική μορφή των αριθμών, λέγεται *κώδικας Gray*.

Οι κώδικες Gray έχουν πολύ μεγάλη σχέση με τους n-κύβους. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, ας καταγράψουμε τους 2^4=16 πρώτους ακεραίους αρχίζοντας από το 0, σε δυαδική μορφή:

$$\begin{gathered}0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111,\\ 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111. \quad (5.6)\end{gathered}$$

Κινούμενοι από τον πρώτο αριθμό προς τον τελευταίο οι αλλαγές στα ψηφία είναι κατά σειράν 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1. Ας θεωρήσουμε τώρα τις κορυφές του κύκλου Hamilton για τον 4-κύβο που προκύπτει από τον 3-κύβο (σχήμα 5.42).

$$\begin{gathered}0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100,\\ 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000. \quad (5.7)\end{gathered}$$

Πρόκειται πάλι για τους 16 πρώτους ακεραίους στους οποίους κάθε δύο διαδοχικοί διαφέρουν μόνο σε ένα ψηφίο. Η σειρά αυτή είναι ο κώδικας Gray των 16 πρώτων ακεραίων. Επειδή για την εύρεση του κώδικα Gray των 32 πρώτων ακεραίων, προσθέτουμε πρώτα ως αρχικό ψηφίο το 0 στους αριθμούς (5.7), και επειδή αυτή η προσθήκη δεν αλλάζει την αξία των αριθμών, άρα μπορούμε να πούμε ότι ο κώδικας Gray είναι ανεξάρτητος του n.

Εκείνο που απομένει είναι να βρεθεί ένας τρόπος μετάβασης από τους όρους του κώδικα Gray στους φυσικούς αριθμός και από τους φυσικούς στους όρους του κώδικα Gray.

Η παρακάτω διαδικασία δίνει τον φυσικό αριθμό M που βρίσκεται στη N-στή θέση στον κώδικα Gray.

Έστω $x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$ το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού N, όπου υποτέθηκε $N<2^n$). Για i=0, 1, …,n-1, θέτουμε $y_i=x_i+x_{i+1}$ (mod2), δηλαδή $y_i=0$, αν $x_i=x_{i+1}$ και $y_i=1$, σε άλλη περίπτωση (Θεωρούμε κατά συνθήκη $x_n=0$, αφού η ύπαρξη ενός μηδενικού στην αρχή του αριθμού, δεν αλλάζει την αξία του). Τότε ο M έχει δυαδικό ανάπτυγμα το $y_{n-1}y_{n-2}\ldots y_1y_0$.

Όμοια, η επόμενη διαδικασία δίνει τη θέση N στον κώδικα Gray στην οποία βρίσκεται ο φυσικός αριθμός M.

Έστω $y_{n-1}y_{n-2}\ldots y_1y_0$ το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού M, όπου υποτέθηκε $M<2^n$). Για i=0, 1, …,n-1, έστω x_i ο αριθμός των μονάδων στο σύνολο $\{y_i , ..., y_{n-1}\}$ που τον ανάγουμε mod2. Τότε ο N έχει δυαδικό ανάπτυγμα το $x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1x_0$.

Παράδειγμα 5.15. Να βρεθεί η θέση του 13 στον κώδικα Gray, όπως και ποιος αριθμός είναι στην $6^η$ θέση του κώδικα.

Λύση

Είναι $M=13=y_3y_2y_1y_0=(1101)_2$. Τότε,

x_3= πλήθος μονάδων στο $\{y_3\}=1$,

x_2= πλήθος μονάδων στο $\{y_2, y_3\}=2=0\text{mod}2$,

x_1= πλήθος μονάδων στο $\{ y_1, y_2, y_3\}=2=0\text{mod}2$,

x_0= πλήθος μονάδων στο $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}=3=1\text{mod}2$.

Άρα, ο M=13 εμφανίζεται στην $N=(1001)_2=9$ θέση του κώδικα Gray (ο $9^{ος}$ αριθμός στη διαδοχή αριθμών (5.7), όπου η αρίθμηση αρχίζει από το 0, είναι ο αριθμός 13).

Έχουμε $N=6=x_2x_1x_0=(110)_2$. Τότε,

$y_2=x_2+x_3=1+0=1$, (x_3 τίθεται ίσο με 0)

$y_1=x_1+x_2=1+1=2=0\text{mod}2$,

$y_0=x_0+x_1=0+1=1$.

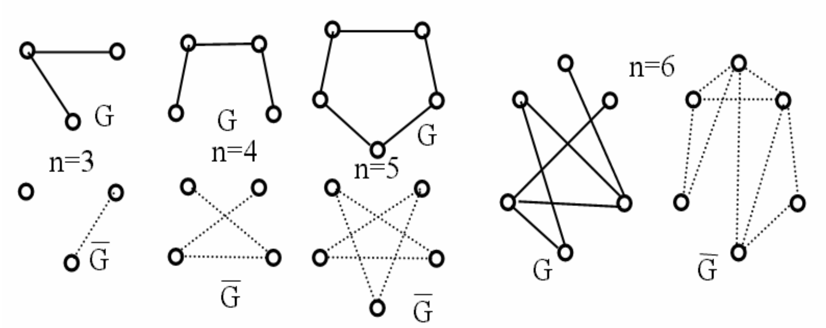
Άρα, στην N=6 θέση του κώδικα Gray είναι ο αριθμός $M=(0101)_2=5$ (στην $6^η$ θέση στη διαδοχή αριθμών (5.7), όπου η αρίθμηση αρχίζει από το 0, είναι ο αριθμός 5).

■

Αριθμοί Ramsey

Ας παρατηρήσουμε τα γραφήματα στο σχήμα 5.43. Είναι ζεύγη συμπληρωματικών γραφημάτων με 3, 4, 5 και 6 κορυφές. Τα τρία πρώτα ζεύγη έχουν την ιδιότητα ότι ούτε το G ούτε το $\overline{G}$ περιέχουν τρίγωνο.

Στο τελευταίο ζεύγος, για n=6, το G δεν έχει τρίγωνο, όμως το $\overline{G}$ περιέχει. Αυτό όπως θα δείξουμε δεν είναι τυχαίο, αλλά συμβαίνει σε όλα τα γραφήματα με 6 ή περισσότερες κορυφές. Με άλλα λόγια αν βάψουμε με δύο χρώματα τις ακμές του πλήρους γραφήματος K_6, τότε θα υπάρχει



Σχήμα 5.43

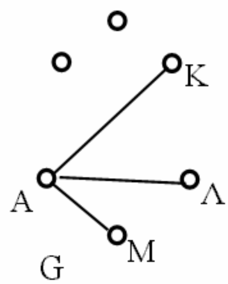
οπωσδήποτε τρίγωνο με ακμές ίδιου χρώματος. Σχετικό είναι και το παιχνίδι του Ramsey με το οποίο ασχοληθήκαμε στην παράγραφο 1.1.

Θεώρημα 5.34. Αν G είναι γράφημα με 6 κορυφές τότε είτε το G είτε το $\overline{G}$ περιέχει τρίγωνο.

Απόδειξη

Θεωρούμε μία από τις κορυφές, έστω την A. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Η κορυφή A έχει βαθμό ≥3. Τότε, υπάρχουν τρεις τουλάχιστον από τις υπόλοιπες κορυφές, έστω οι K, Λ, M, οι οποίες συνδέονται



άμεσα με την Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν κάποια από τις ακμές ΚΛ, ΚΜ, ΛΜ ανήκει στο G, τότε τα θεώρημα ισχύει, διότι το αντίστοιχο τρίγωνο ΑΚΛ, ΑΚΜ ή ΑΛΜ, ανήκει στο G. Αν καμία από τις ακμές ΚΛ, ΚΜ, ΛΜ δεν ανήκει στο G, τότε θα ανήκουν στο $\overline{G}$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΛΜ ανήκει στο $\overline{G}$ και το θεώρημα ισχύει.

(β) Η κορυφή Α έχει βαθμό ≤2. Τότε, στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ η κορυφή Α θα έχει βαθμό ≥3 και το πρόβλημα ανάγεται στο (α), οπότε το θεώρημα ισχύει και πάλι.

■

Εφαρμογή. Σε μια συντροφιά 6 ατόμων, που μιλούν διάφορες γλώσσες, υπάρχουν 3 άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα, είτε υπάρχουν 3 άτομα που δεν μπορούν να μιλήσουν μεταξύ τους ανά δύο.

Για την απόδειξη, αρκεί να θεωρήσουμε τα άτομα ως κορυφές ενός γραφήματος και την δυνατότητα συνομιλίας ως ακμή. Είναι φανερό ότι αντί της κοινής γλώσσας, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε άλλη σχέση μεταξύ των 6 ατόμων, όπως φιλία, συγγένεια, υπηκοότητα, κλπ.

Ερμηνεύοντας συνολοθεωρητικά τα προηγούμενα, και αναφέροντας ως *k-υποσύνολο* ενός συνόλου S κάθε υποσύνολο του S με k στοιχεία, το θεώρημα 5.34, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 5.35. Έστω σύνολο S με 6 στοιχεία. Υποδιαιρούμε το σύνολο των 2-υποσυνόλων του S σε δύο κλάσεις X και Y με οποιονδήποτε τρόπο. Συμβαίνει ένα από τα επόμενα:

(α) Υπάρχει 3-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση X.

(b) Υπάρχει 3-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση Y.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι τα 2-υποσύνολα του X, μπορεί να θεωρηθούν ως ακμές ενός γραφήματος G. Τότε, τα 2-υποσύνολα του Y, μπορεί να θεωρηθούν ως οι ακμές του $\overline{G}$. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα 5.34.

■

Ο Ramsey, το 1930, γενίκευσε την προηγούμενη ιδιότητα του αριθμού 6. Δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός. Έστω ένα σύνολο S με N στοιχεία και δύο φυσικοί αριθμοί p και q, με p, q≥2. Σχηματίζουμε όλα τα 2-υποσύνολα του S και τα κατανέμουμε με οποιονδήποτε τρόπο σε δύο σύνολα X και Y. Αν για οποιαδήποτε τέτοια κατανομή ισχύει ένα από τα παρακάτω,

(α) υπάρχει p-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση X,

(b) υπάρχει q-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ανήκουν στην κλάση Y,

τότε θα λέμε ότι ο αριθμός N έχει την *(p, q)-ιδιότητα του Ramsey*.

Από το θεώρημα 5.34 έχουμε ότι ο αριθμός 6 έχει την (3,3)-ιδιότητα του Ramsey, ενώ από τα γραφήματα του σχήματος 5.43 προκύπτει ότι οι 3, 4 και 5 δεν την έχουν.

Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.36. (Ramsey). Έστω p, q ≥ 2 φυσικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός N, που έχει την (p, q)-ιδιότητα του Ramsey. Ο αριθμός αυτός λέγεται *αριθμός Ramsey* των p, q και συμβολίζεται R(p,q).

■

Το θεώρημα του Ramsey μπορεί να ερμηνευτεί με τη γλώσσα των γραφημάτων ως εξής. Έστω p, q ≥ 2 δύο οποιοιδήποτε φυσικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει φυσικός N, τέτοιος ώστε αν σχηματίσουμε το πλήρες γράφημα K_N, και χρωματίσουμε με οποιονδήποτε τρόπο με δύο χρώματα τις ακμές του γραφήματος, τότε θα συμβαίνει είτε να έχουμε χρωματίσει ένα πλήρες K_p με το πρώτο χρώμα, είτε να έχουμε χρωματίσει ένα πλήρες K_q με το δεύτερο χρώμα.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι R(p,2)=p και R(2,q)=q

Για τις άλλες περιπτώσεις έχουν αποδειχθεί ελάχιστα. Ένα άνω φράγμα για τον αριθμό R(p, q) είναι το $\binom{p+q-2}{p-1}$.

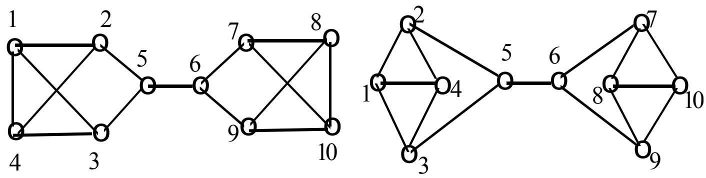
Οι μέχρι σήμερα γνωστοί αριθμοί Ramsey είναι οι

R(3,3)=6	Greenwood και Gleason (1955)
R(3,4)=R(4,3)=9	
R(3,5)=R(5,3)=14	
R(3,6)=R(6,3)=18	Kalbfleisch(1966), Kèry(1964)
R(3,7)=R(7,3)=23	Graver και Yackel (1968)
R(3,8)=R(8,3)=28 ή 29	Grinstead και Roberts (1982)
R(3,9)=R(9,3)=36	
R(4,4)=18	Greenwood και Gleason (1955)

Επιπεδότητα

Ένα γράφημα G λέγεται *επίπεδο* (planar), αν μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται. Αυτό δεν είναι πάντοτε εύκολο να διαπιστωθεί.

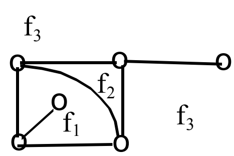
Για παράδειγμα το αριστερό γράφημα στο σχήμα 5.44, είναι κυβικό



Σχήμα 5.44

γράφημα 10 κορυφών. Αν το σχεδιάσουμε ισόμορφα όπως στο δεξιό γράφημα στο σχήμα 5.44, διαπιστώνουμε ότι είναι επίπεδο.

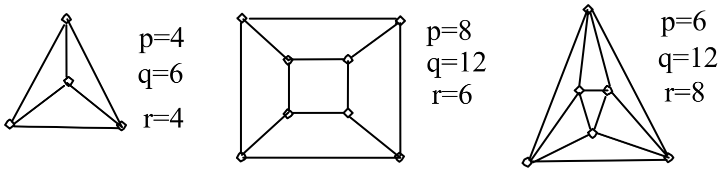
Τα χωρία του επιπέδου που οριοθετούνται από τις ακμές ενός επίπεδου γραφήματος, λέγονται επιφάνειες (faces). Ως μία επιφάνεια θεωρείται επίσης και η περιοχή του επιπέδου που είναι συμπληρωματική του φραγμένου χωρίου που περικλείεται από τις ακμές του επιπέδου γραφήματος. Η επιφάνεια αυτή λέγεται *εξωτερική*.



Σχήμα 5.45

Στο σχήμα 5.45 το γράφημα έχει 3 επιφάνειες, εκ των οποίων η f_3 είναι η εξωτερική. Το κυβικό γράφημα 10 κορυφών στο σχήμα 5.44 έχει 7 επιφάνειες.

Η επιπεδότητα αναφέρεται πρώτη φορά από τον Euler στην μελέτη των πολυέδρων. Με κάθε πολύεδρο είναι συνδεδεμένο ένα γράφημα το οποίο αποτελείται από τις κορυφές και τις ακμές του και ονομάζεται 1-σκελετός (του πολυέδρου). Π.χ. οι 1-σκελετοί του τετραέδρου, του κύβου και του οκταέδρου, φαίνονται στο σχήμα 5.46. Δίνονται επί πλέον το πλήθος κορυφών, ακμών και εδρών των γραφημάτων αυτών.



ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ ΚΥΒΟΣ ΟΚΤΑΕΔΡΟ

Σχήμα 5.46

Ο Euler παρατήρησε ότι το πλήθος των κορυφών μαζί με το πλήθος των εδρών ισούται πάντοτε με το πλήθος των ακμών αυξημένο κατά 2. Επειδή η αντιστοίχιση του πολυέδρου σε επίπεδο γράφημα κρατά αναλλοίωτα αυτά τα στοιχεία η προηγούμενη σχέση ισχύει για τα επίπεδα γραφήματα που είναι 1-σκελετοί πολυέδρων. Η σχέση όμως ισχύει γενικά για όλα τα επίπεδα γραφήματα.

Θεώρημα 5.37. (τύπος Euler). Αν G(p, q ; r) είναι επίπεδο γράφημα με p κορυφές, q ακμές και r επιφάνειες, τότε ισχύει:

$$p-q+r=2 \tag{5.8}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα. Έστω ότι έχουμε υπολογίσει την ποσότητα K=p-q+r.

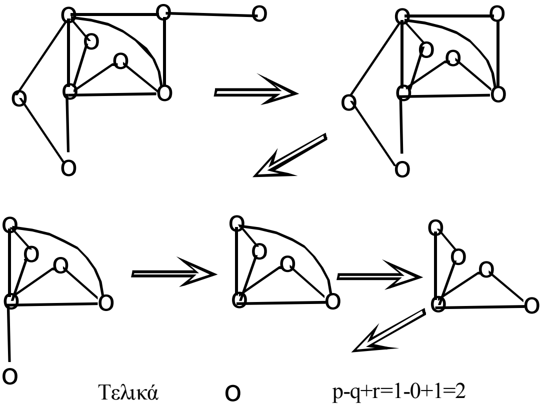
Μετασχηματίζουμε τώρα το γράφημα έτσι ώστε να ελαττωθούν οι κορυφές του ή οι ακμές του, αλλά το K να μείνει αναλλοίωτο. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι μετασχηματισμού.

(1) Διαγράφοντας κορυφές βαθμού 1. Τότε, ελαττώνεται το p και το q κατά 1, άρα K΄=(p-1)-(q-1)+r=K.

(2) Διαγράφοντας κορυφές βαθμού 2. Τότε ελαττώνεται το p κατά 1, το q κατά 2 και το r κατά 1, άρα K΄=(p-1)-(q-2)+(r+1)=K.

(3) Διαγράφοντας εξωτερικές ακμές (αν οι κορυφές έχουν βαθμό > 2). Τότε το p μένει ίδιο, το q ελαττώνεται κατά 1 και το r ελαττώνεται κατά 1, άρα K΄=p-(q-1)+(r-1)=K.

Μετά από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων μετασχηματισμών, φθάνουμε στο K_1 που έχει p=1, q=0, r=1, Άρα η ποσότητα K είναι πάντα ίση με 2.



Σχήμα 5.47

■

Για τα επίπεδα γραφήματα έχει αποδειχθεί το:

Θεώρημα 5.38. (Wagner, Fary, Stein). Κάθε επίπεδο γράφημα είναι ισόμορφο με ένα επίπεδο γράφημα στο οποίο όλες οι ακμές είναι ευθείες.

■

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια μια σειρά προτάσεις που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της επιπεδότητας.

Πρόταση 5.1. Αν G(p,q;r) είναι επίπεδο γράφημα και κάθε επιφάνειά του είναι n-κύκλος, τότε:

$$q=\frac{n(p-2)}{n-2} \tag{5.9}$$

Απόδειξη

Κάθε επιφάνεια αυτού του γραφήματος περικλείεται από n ακμές. Άρα οι r επιφάνειες «περικλείονται» συνολικά από nr ακμές. Όμως, κάθε ακμή την έχουμε μετρήσει δύο φορές, έτσι προκύπτει η σχέση nr=2q, ή ισοδύναμα r=2q/n. Ο τύπος του Euler (5.8), δίνει τώρα το ζητούμενο.

Ένα επίπεδο γράφημα είναι μέγιστο, όταν είναι τέτοιο ώστε η προσθήκη οποιασδήποτε επιπλέον ακμής να το καθιστά μη-επίπεδο. Με τον ορισμό αυτόν προκύπτει αμέσως η πρόταση.

Πρόταση 5.2. Αν G(p,q;r) είναι μέγιστο επίπεδο γράφημα τότε κάθε επιφάνειά του θα είναι τρίγωνο και θα ισχύει

$$q = 3p\text{-}6 \tag{5.10}$$

Πράγματι, αν κάποια επιφάνεια του μέγιστου επίπεδου γραφήματος δεν ήταν τρίγωνο θα μπορούσαμε να ενώσουμε δύο από τις κορυφές του και το γράφημα θα συνέχιζε να είναι επίπεδο, πράγμα που αντιβαίνει στον ορισμό. Θέτοντας λοιπόν n=3 στην (5.9), προκύπτει το ζητούμενο.

Πρόταση 5.3. Αν G είναι επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε επιφάνεια είναι 4-κύκλος είτε 5-κύκλος, τότε θα έχει υποχρεωτικά άρτιο πλήθος 5-κύκλων, έστω 2t, και θα ισχύει:

$$q = 2p\text{-}4\text{-}t \tag{5.11}$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι x επιφάνειες είναι 5-κύκλοι, r-x είναι 4-κύκλοι τότε με το σκεπτικό της πρότασης 5.1, ισχύει:

$$5x+4(r-x)=2q,$$

οπότε x πρέπει να είναι άρτιος, έστω x=2t, και τότε r=(q-t)/2. Ο τύπος Euler δίνει τώρα το ζητούμενο.

Άμεσο πόρισμα της προηγούμενης πρότασης, είναι η:

Πρόταση 5.4. Αν G είναι επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε επιφάνεια είναι 4-κύκλος, τότε θα ισχύει:

$$q = 2p\text{-}4 \tag{5.12}$$

Η πρόταση 5.2 αποδεικνύει αμέσως το επόμενο.

Πρόταση 5.5. Αν G είναι επίπεδο γράφημα με p≥3, τότε:

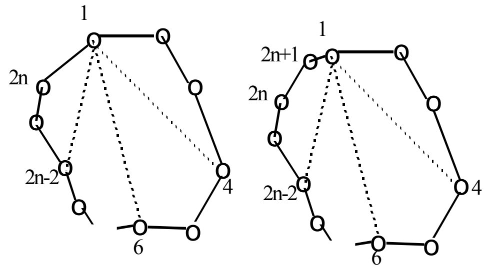
$$q \le 3p\text{-}6 \tag{5.13}$$

Πρόταση 5.6. Αν G είναι επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα, τότε:

$$q \leq 2p-4 \tag{5.14}$$

Απόδειξη

Αν το G δεν έχει τρίγωνα, τότε, με προσθήκη ενδεχομένως κάποιων ακμών που το διατηρούν επίπεδο, ανάγεται σε επίπεδο γράφημα με μόνο 4-κύκλους ή 5-κύκλους. Πράγματι, αν έχει έναν (2n)-κύκλο με n>2, τότε με τη διαδικασία που φαίνεται στο γράφημα 5.48, αναγόμαστε σε 4-κύκλους. Αν έχει έναν (2n+1)-κύκλο με n>2, τότε με τη διαδικασία που φαίνεται στο ίδιο γράφημα αναγόμαστε σε 4-κύκλους και έναν 5-κύκλου. Από την πρόταση 5.3 προκύπτει επομένως ότι $q \leq 2p-4-t$, όπου t φυσικός ή 0 που δίνει το πλήθος των 5-κύκλων. Κατά μείζονα λόγο, ισχύει επομένως και η ζητούμενη σχέση.



Σχήμα 5.48

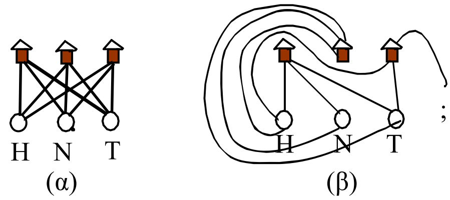
Πρόταση 5.7. Τα γραφήματα K_5 και $K_{3,3}$, δεν είναι επίπεδα.

Πράγματι, το K_5 έχει 10 ακμές ενώ λόγω της πρότασης 5.5, αν ήταν επίπεδο θα είχε το πολύ 9. Όμοια, το $K_{3,3}$ είναι γράφημα χωρίς τρίγωνα, αφού είναι διγράφημα, και έχει 9 ακμές. Αν ήταν επίπεδο, λόγω της πρότασης 5.6, θα είχε το πολύ 8 ακμές.

Εφαρμογή Ένα γνωστό πρόβλημα (σπαζοκεφαλιά) που απασχόλησε και απασχολεί πολλούς ανθρώπους είναι το εξής:

Έστω ότι τρία γειτονικά σπίτια πρόκειται να συνδεθούν με τρεις παροχές (π.χ. ηλεκτρικό φως, νερό, τηλέφωνο), από τρία σημεία που βρίσκονται ανά ένα απέναντι από κάθε σπίτι. Στο σχήμα 5.49(α) παριστάνεται με ένα γράφημα αυτή η σύνδεση. Είναι δυνατόν να βρεθούν συνδέσεις, τέτοιες ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους;

Στο (β) του σχήματος έχουμε μια αποτυχημένη προσπάθεια να βρεθεί μια σύνδεση που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις.

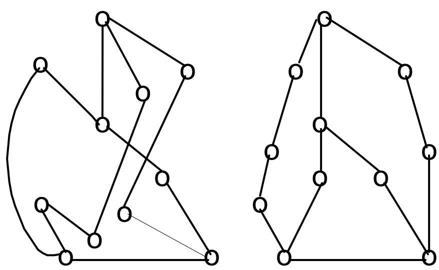


Σχήμα 5.49

Η απάντηση στο ερώτημα είναι αρνητική. Πράγματι, αν υπήρχε μια τέτοια σύνδεση, τότε το γράφημα που θα προέκυπτε με κορυφές τα τρία σπίτια και τις τρεις παροχές, θα ήταν επίπεδο. Αλλά το γράφημα αυτό είναι το $K_{3,3}$, που σύμφωνα με την πρόταση 5.7 δεν είναι επίπεδο.

Η πρόταση 5.7 είναι πολύ σημαντική για τον έλεγχο της επιπεδότητας. Σχετικό είναι το θεώρημα του Kuratowski, που το διατυπώνουμε παρακάτω χωρίς απόδειξη. Είναι απαραίτητο να δοθεί ένας ορισμός.

Ορισμός. Δύο γραφήματα λέγονται *ομόμορφα* (homeomorphic) όταν και τα δύο μπορούν να προκύψουν από το ίδιο γράφημα με υποδιαίρεση των ακμών του.



Σχήμα 5.50

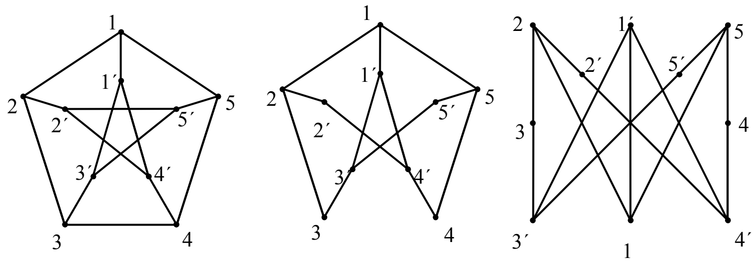
Έτσι για παράδειγμα οποιοιδήποτε δύο κύκλοι είναι ομόμορφοι. Όμοια τα δύο γραφήματα του σχήματος 5.50, που μεταξύ τους είναι ισόμορφα, είναι ομόμορφα του K_4

Θεώρημα 5.39. (Kuratowski). Ένα γράφημα είναι τότε και μόνο επίπεδο γράφημα, αν δεν έχει υπογράφημα ομόμορφο με το K_5 ή το $K_{3,3}$.

Εφαρμογή. Το γράφημα P του Petersen (σχήμα 5.51(α)) δεν είναι επίπεδο.

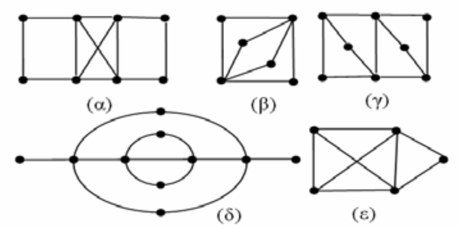
Κατ' αρχήν κανένα υπογράφημα του P δεν μπορεί να είναι ομόμορφο του K_5 αφού όλες οι κορυφές του P έχουν βαθμό 3. Υπάρχει όμως υπογράφημα ομόμορφο με το $K_{3,3}$.

Πράγματι, το γράφημα (β) στο σχήμα 5.51 πουείναι υπογράφημα του P (λείπουν δύο ακμές η 34 και η 2΄5΄), είναι ισόμορφο με το (γ) όπως διαπιστώνεται εύκολα. Το τελευταίο, όμως, είναι ομόμορφο του $K_{3,3}$.



Σχήμα 5.51

Ασκήσεις

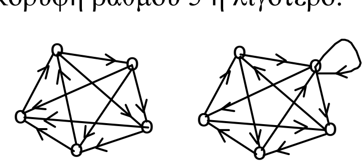


5.5.1. Ποια από τα γραφήματα του διπλανού σχήματος είναι Euler; Ποια έχουν διαδρομή Euler; Να βρεθεί σε κάθε περίπτωση.

5.5.2. Δείξτε ότι αν κάθε μέγιστο αδιαχώριστο υπογράφημα ενός συνδετικού γραφήματος G, είναι γράφημα Euler, τότε και το ίδιο το G είναι γράφημα Euler και αντίστροφα.

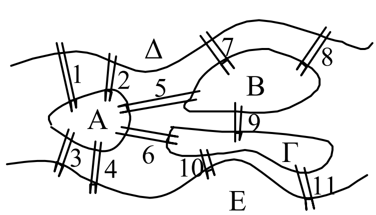
5.5.3. Έστω G επίπεδο συνδετικό γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές. Δείξτε ότι το G έχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού 5 ή λιγότερο.

5.5.4. Δείξτε ότι τα γραφήματα (α) και (β) είναι ισχυρά συνδετικά. Σε ποιο από αυτά υπάρχει κατευθυνόμενη διαδρομή Euler και ποια είναι αυτή;

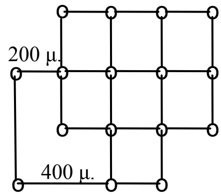


(α) (β)

5.5.5. Το σχήμα παριστάνει ένα ποτάμι με τρία νησιά Α, Β και Γ που συνδέονται με τις όχθες Δ και Ε με 11 γέφυρες. Εξετάστε αν υπάρχει τρόπος να ξεκινήσουμε από κάποιο σημείο και να επιστρέψουμε σ' αυτό περνώντας από όλες τις γέφυρες ακριβώς μία φορά.



5.5.6. Στο διπλανό γράφημα φαίνεται σχηματικά η περιοχή ευθύνης ενός αστυνομικού στην οποία οφείλει να κάνει την περιπολία του. Για ποιο λόγο δεν μπορεί ο αστυνομικός να βρεί μια διαδρομή Euler για να συντομεύσει την περιπολία του. Βρέστε μια ανοικτή διαδρομή Euler με την επανάληψη κάποιων ακμών έτσι ώστε να είναι ελάχιστου μήκους. Πόσο είναι αυτό;



5.5.7. Ποια από τα γραφήματα της άσκησης 5.5.1 είναι Hamilton; Βρέστε στην περίπτωση αυτή έναν κύκλο Hamilton.

5.5.8. Γνωρίζουμε ότι κάθε 2-συνδετικό μη-Hamilton γράφημα περιέχει ένα θ-γράφημα. Δώστε αντιπαράδειγμα που να αποδεικνύει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

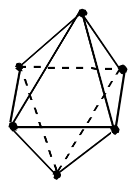
5.5.9. Δείξτε ότι αν ένα διγράφημα είναι Hamilton θα έχει άρτιου πλήθους κορυφές.

5.5.10. Δείξτε ότι το $K_{3,4}$ (γενικά το $K_{n,n+1}$) δεν είναι Hamilton, ενώ το $K_{3,3}$ είναι. Για το τελευταίο να βρεθούν όλοι οι κύκλοι ζεύξης.

5.5.11. Δείξτε ότι ο 5 δεν έχει την (3,4)-ιδιότητα Ramsey, και ο 6 δεν έχει την (4,4)-ιδιότητα Ramsey.

5.5.12. Δείξτε ότι αν ο αριθμός n έχει την (p,q)-ιδιότητα του Ramsey, τότε την έχει και οποιοσδήποτε m με m>n.

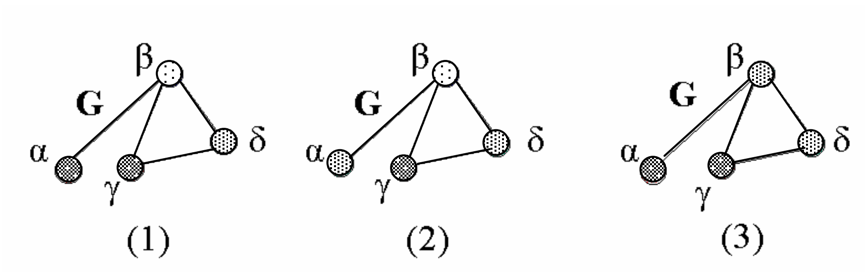
5.5.13. Σ' ένα συρμάτινο οκτάεδρο χρωματίζουμε με τυχαίο τρόπο τις ακμές του και τις διαγώνιές του, χρησιμοποιώντας δύο χρώματα. Να δειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε τρίγωνο με πλευρές ίδιου χρώματος.



5.5.14. Εννιά μαθηματικοί συναντώνται σ' ένα συνέδριο και ανακαλύπτουν ότι σε κάθε τρεις τουλάχιστον οι δύο μιλούν μια κοινή γλώσσα. Αν κάθε μαθηματικός μιλά το πολύ τρεις γλώσσες, να δείξετε ότι υπάρχουν τρεις τουλάχιστον που μιλάνε την ίδια γλώσσα.

5.6. Χρωματισμοί

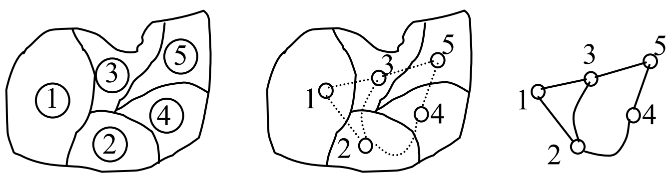
Χρωματισμός (coloring) του G είναι η αντιστοίχιση χρωμάτων στις κορυφές του G, ώστε συνδεδεμένες κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα. Αν χρησιμοποιηθούν το πολύ k χρώματα, τότε ο χρωματισμός λέγεται k-χρωματισμός. Ο ελάχιστος φυσικός αριθμός k για τον οποίο υπάρχει τουλάχιστον ένας k-χρωματισμός λέγεται *χρωματικός αριθμός* του G και συμβολίζεται Χ(G). Το σύνολο των κορυφών με το ίδιο χρώμα λέγεται χρωματική κλάση. Το γράφημα (1) του σχήματος 5.52 χρωματίστηκε με έναν 3-χρωματισμό. Το γράφημα (2) στο ίδιο σχήμα χρωματίστηκε με ένα διαφορετικό 3-χρωματισμό, ενώ ο χρωματισμός του (3) δεν είναι επιτρεπτός. Χρωματισμοί όπως αυτοί του (3) αναφέρονται ως *μη-γνήσιοι*. Θα δείξουμε στα επόμενα ότι το 3 είναι ο χρωματικός αριθμός αυτού του γραφήματος. Τα σύνολα κορυφών {α, γ}, {β}, {δ} αποτελούν τις τρεις χρωματικές κλάσεις του G. Χρησιμοποιώντας ένα τέταρτο χρώμα για την κορυφή α για παράδειγμα, παίρνουμε έναν 4-χρωματισμό, με χρωματικές κλάσεις {α}, {γ}, {β}, {δ}. Αν διαθέτουμε περισσότερα από 4 χρώματα, τότε επιλέγοντας πρώτα 3 είτε 4 από αυτά έχουμε πάλι επιτρεπτούς χρωματισμούς. Έτσι, γίνεται φανερό ότι αν υπάρχει k-



Σχήμα 5.52

χρωματισμός στο G, τότε υπάρχει και n-χρωματισμός για κάθε $n \geq k$.

Παράδειγμα 5.16. Ας θεωρήσουμε ένα χάρτη, σχήμα 5.53. Ένα από τα παλαιότερα προβλήματα που σχετίζεται με τους χάρτες είναι αυτό του χρωματισμού τους. Δηλαδή, με πόσα το λιγότερο χρώματα μπορούμε να χρωματίσουμε το χάρτη, έτσι ώστε να διακρίνονται οι διαφορετικές χώρες. Αυτό σημαίνει ότι χώρες με κοινά σύνορα πρέπει να χρωματιστούν με διαφορετικά χρώματα.



Σχήμα 5.53

Στο σχήμα 5.53 φαίνεται η διαδικασία σχηματισμού ενός γραφήματος από ένα χάρτη. Συγκεκριμένα, οι κορυφές αυτού του γραφήματος είναι οι χώρες του χάρτη, ενώ οι ακμές του συμβολίζουν την ιδιότητα οι χώρες να έχουν κοινά σύνορα. Από την κατασκευή του το γράφημα αυτό είναι επίπεδο και το πρόβλημα χρωματισμού του χάρτη, ισοδυναμεί με το πρόβλημα χρωματισμού του γραφήματος.

Εύκολα διαπιστώνεται ότι για το χρωματισμό του γραφήματος αυτού δεν αρκούν δύο χρώματα. Ένας επιτρεπτός χρωματισμός πετυχαίνεται με τρία χρώματα. Αν τα τρία χρώματα είναι τα Κ(όκκινο), Π(ράσινο) και Μ(πλε), τότε ένας 3-χρωματισμός είναι ο Κ,Π,Μ,Μ,Π. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι οι χώρες 3 και 4 δεν θεωρούνται ότι έχουν κοινά σύνορα παρόλο που υπάρχει κοινό ένα σημείο στα σύνορά τους.

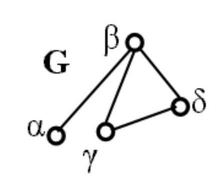
■

Χρωματικά πολυώνυμα

Ας συμβολίζουμε με P(G, x) το πλήθος των χρωματισμών του γραφήματος G με το πολύ x χρώματα, δηλαδή το πλήθος των διαφορετικών x-χρωματισμών του G. Θα δείξουμε ότι το P(G, x) εκφράζεται ως πολυώνυμο ως προς το οποίο ονομάζεται χρωματικό πολυώνυμο.

Για την εύρεση του P(G, x) θα θεωρήσουμε όλους τους χρωματισμούς του G, δηλαδή και τους γνήσιους και τους μη-γνήσιους, οι οποίοι για ένα γράφημα p κορυφών είναι σε πλήθος x^p. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την αρχή συμπερίληψης – εξαίρεσης, θα υπολογίσουμε το πλήθος των μη-γνήσιων χρωματισμών και με αφαίρεση θα προκύψει το ζητούμενο. Θα περιγράψουμε αυτή τη διαδικασία με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.17. Θα υπολογίσουμε το χρωματικό πολυώνυμο του γραφήματος G, του διπλανού σχήματος.



Λύση

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, αν χρησιμοποιήσουμε το πολύ x χρώματα, υπάρχουν $N=x^4$ χρωματισμοί, γνήσιοι και μη-γνήσιοι. Πράγματι, κάθε μία από τις 4 κορυφές μπορεί να πάρει x διαφορετικά χρώματα.

Συμβολίζουμε α_1 την ιδιότητα οι κορυφές α, β έχουν ίδιο χρώμα, α_2 την ιδιότητα οι κορυφές β, γ έχουν ίδιο χρώμα, α_3 την ιδιότητα οι κορυφές β, δ έχουν ίδιο χρώμα και α_4 την ιδιότητα οι κορυφές γ, δ έχουν ίδιο χρώμα.

Βρίσκουμε:

$N(\alpha_1)=x^3$, $N(\alpha_2)=x^3$, $N(\alpha_3)=x^3$, $N(\alpha_4)=x^3$,

όπου $N(\alpha_k)$ συμβολίζει το πλήθος των χρωματισμών που έχουν την ιδιότητα α_k. Πράγματι, π.χ. για τον υπολογισμό του $N(\alpha_1)$ παρατηρούμε ότι υπάρχουν x τρόποι οι κορυφές α και β να έχουν το ίδιο χρώμα. Οι άλλες δύο κορυφές δεν έχουν περιορισμό και άρα έχουν από x τρόπους να χρωματιστούν. Άρα, συνολικά προκύπτουν x^3 τρόποι.

Όμοια, βρίσκουμε:

$N(\alpha_1\alpha_2)=x^2$, $N(\alpha_1\alpha_3)=x^2$, $N(\alpha_1\alpha_4)=x^2$, $N(\alpha_2\alpha_3)=x^2$, $N(\alpha_2\alpha_4)=x^2$, $N(\alpha_3\alpha_4)=x^2$,

διότι, αν ισχύουν ταυτόχρονα οι ιδιότητες α_1 και α_2 τότε οι κορυφές α, β και γ θα έχουν το ίδιο χρώμα με x τρόπους και η κορυφή δ έχει άλλους x τρόπους.

Τέλος, βρίσκουμε:

$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=x$, $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)=x$, $N(\alpha_1\alpha_3\alpha_4)=x$, $N(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=x^2$, $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=x$.

Πράγματι $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)=x$, διότι οι ιδιότητες $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ταυτόχρονα σημαίνουν ότι όλες οι κορυφές έχουν το ίδιο χρώμα. Όμως, $N(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=x^2$, διότι οι ιδιότητες $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ ταυτόχρονα σημαίνουν ότι οι κορυφές β, γ, δ έχουν το ίδιο χρώμα αλλά η α μπορεί να έχει διαφορετικό.

Η Αρχή Συμπερίληψης – Εξαίρεσης, δίνει τώρα

$$\begin{aligned} P(G,x) &= N(\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ \alpha_n') = N - N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή } \alpha_3 \text{ ή } \alpha_4) = \\ &= N - \sum N(\alpha_i) + \sum N(\alpha_i\alpha_j) - \sum N(\alpha_i\alpha_j\alpha_j) + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - (3x + x^2) + x \end{aligned}$$

Άρα $P(G,x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

Αντικαθιστώντας το x με τις τιμές 1, έως 6 βρίσκουμε:

x	1	2	3	4	5	6
P(G,x)	0	0	12	72	240	600

Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι δεν έχουμε χρωματισμό με λιγότερα από 3 χρώματα, αφού το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο είναι αυτό που αντιστοιχεί στο x=3. Το 3 είναι στο γράφημα αυτό ο χρωματικός του αριθμός, που συμβολίζεται χ(G)=3.

Οι 12 διαφορετικοί χρωματισμοί με τρία χρώματα είναι οι:

1213, 1312, 1231, 1321, 2123, 2321, 2132, 2312, 3132, 3231, 3123, 3213, όπου τα τρία χρώματα τα συμβολίσαμε 1, 2 και 3.

■

Έχουν αποδειχθεί προτάσεις που υπολογίζουν το χρωματικό πολυώνυμο ενός γραφήματος από τα αντίστοιχα κάποιων υπογραφημάτων του. Δεν θα ασχοληθούμε, όμως, περισσότερο με αυτά.

Για τους χρωματικούς αριθμούς ειδικών γραφημάτων, εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ισχύουν τα επόμενα:

1.	$\chi(G) = n \leq p$,	2.	$\chi(K_p) = p$,
3.	$\chi(K_p\text{-}x) = p\text{-}1$,	4.	$\chi(\overline{K}_p) = 1$,
5.	$\chi(K_{m,n}) = 2$,	6.	$\chi(C_{2n}) = 2$
7.	$\chi(C_{2n+1}) = 3$, και	8.	$\chi(T) = 2$, για T δένδρο.

Ερμηνεύοντας τις ιδιότητες αυτές, παρατηρούμε:

- Τα ασυνδετικά γραφήματα έχουν χρωματικό αριθμό 1 (ιδιότητα 4). Και αντίστροφα, αν είναι $\chi(G)=1$, τότε το G δεν έχει ακμές.
- Από τις ιδιότητες 5, 6 και 8, έχουμε ότι τα δέντρα, οι κύκλοι άρτιου μήκους και τα διγραφήματα έχουν χρωματικό αριθμό ίσο με 2. Για το αντίστροφο, σύμφωνα με το θεώρημα Köning που αποδεικνύεται παρακάτω, τα γραφήματα με χρωματικό αριθμό 2, δεν έχουν κύκλους περιττού μήκους.
- Για $n \geq 3$ δεν έχουν αποδειχθεί γενικά κριτήρια.

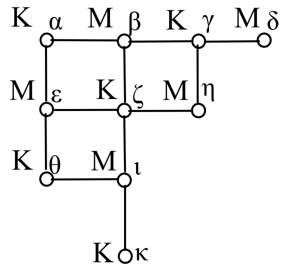
Θεώρημα 5.40. (Köning). Ένα γράφημα έχει έναν 2-χρωματισμό (δηλαδή $\chi(G)=2$), αν και μόνο αν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $\chi(G)=2$ και ότι το G έχει έναν κύκλο περιττού μήκους. Τότε, αφού ο κύκλος αυτός είναι υπογράφημα του G, θα πρέπει και αυτός να έχει 2-χρωματισμό, πράγμα άτοπο.

Έστω αντίστροφα ότι το γράφημα δεν έχει κύκλους περιττού μήκους. Χρωματίζουμε το γράφημα σύμφωνα με την εξής διαδικασία. Επιλέγουμε τυχαία μια κορυφή, έστω την x, και την χρωματίζουμε κόκκινη. Βρίσκουμε όλες τις γειτονικές κορυφές της x και τις χρωματίζουμε μπλε, τοποθετώντας ταυτόχρονα όλες αυτές τις κορυφές σε ένα σύνολο αναμονής U με τυχαία σειρά. Κατόπιν, παίρνουμε μία κορυφή u από το U, βρίσκουμε όλες τις γειτονικές κορυφές της που δεν έχουν ακόμη χρωματιστεί, τις χρωματίζουμε με το αντίθετο χρώμα, τις τοποθετούμε στο U, ενώ την u την διαγράφουμε από το U. Συνεχίζουμε τη διαδικασία έως ότου χρωματιστούν όλες οι κορυφές του γραφήματος.

Η αποσαφήνιση της προηγούμενης διαδικασία γίνεται με το γράφημα του σχήματος 5.54 που δεν έχει κύκλους περιττού μήκους. Χρωματίζουμε πρώτα την κορυφή α κόκκινη (συμβολίζουμε Κ στο γράφημα). Χρωματίζουμε τις β, ε μπλε (συμβολίζουμε Μ) και θέτουμε U={β,ε}. Η β έχει δύο γειτονικές τις γ και ζ που δεν έχουν ακόμη χρωματιστεί. Τις χρωματίζουμε κόκκινες και το U γίνεται U={ε, γ, ζ}. Η ε έχει μία γειτονική την θ που δεν έχουν ακόμη χρωματιστεί. Την χρωματίζουμε κόκκινη και το U γίνεται U={γ, ζ, θ}. Συνεχίζοντας χρωματίζουμε μπλε τις δ, η και ι και τελειώνουμε χρωματίζοντας κόκκινη την κ.



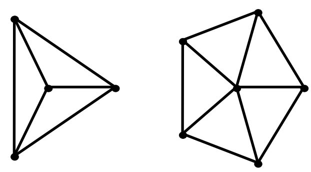
Σχήμα 5.54

Επειδή το γράφημα είναι συνδετικό, όλες οι κορυφές θα χρωματιστούν. Ισχυριζόμαστε ότι έχουμε πετύχει έναν 2-χρωματισμό. Αρκεί προς τούτο να δείξουμε ότι δεν υπάρχουν γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα.

Δείχνουμε πρώτα, ότι η απόστασή d(u,x) μιας κορυφής u που από την αρχική x, που τη χρωματίσαμε κόκκινη είναι άρτιος αριθμός, αν η u έχει χρωματιστεί κόκκινη και περιττός αν έχει χρωματιστεί μπλε. Πράγματι, καταρχήν υπάρχει διαδρομή από την x στη u, λόγω της συνδετικότητας. Με τη διαδικασία που προτείναμε η διαδρομή αυτή θα κινείται εναλλάξ από κόκκινη σε μπλε κορυφή και επομένως αν φθάσει σε κόκκινη κορυφή θα έχει άρτιο μήκος, ενώ αν φθάσει σε μπλε θα έχει περιττό μήκος. Αν η διαδρομή είναι μονοπάτι τότε το μήκος της ταυτίζεται με την απόσταση και το ζητούμενο έχει δειχθεί. Αν δεν είναι μονοπάτι τότε υπάρχει μία τουλάχιστον κορυφή που επαναλαμβάνεται. Ας είναι α μια κορυφή που μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεών της στη διαδρομή δεν υπάρχει άλλη κορυφή που να επαναλαμβάνεται. Τότε το τμήμα αυτό είναι κύκλος και λόγω της υπόθεσης έχει άρτιο μήκος. Διαγράφουμε τον κύκλο αυτόν από τη διαδρομή και συνεχίζουμε ανάλογα μέχρι να φθάσουμε, σε πεπερασμένου πλήθους βήματα, σε μονοπάτι.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι με τη διαδικασία χρωματισμού που περιγράψαμε, δύο άμεσα συνδεδεμένες κορυφές, έστω οι u,v, χρωματίζονται κόκκινες. Τότε, και οι δύο αποστάσεις d(u,x), d(v,x) είναι άρτιοι αριθμοί. Θεωρούμε τη διαδρομή που ξεκινά από τη x μέσω ενός μονοπατιού μήκους d(u,x) φθάνει στην u, συνεχίζει στη v (με μονοπάτι μήκους 1) και από κεί επιστρέφει στην x μέσω ενός μονοπατιού μήκους d(v,x). Η διαδρομή αυτή είναι κλειστή και έχει μήκος d(u,x)+d(u,x)+1 δηλαδή περιττό αριθμό. Τότε, διαγράφοντας με το σκεπτικό της προηγουμένης παραγράφου, ενδεχόμενους κύκλους άρτιου μήκους, καταλήγουμε σε κύκλο περιττού μήκους, πράγμα άτοπο. Στο ίδιο άτοπο καταλήγουμε και αν οι δύο κορυφές ήταν χρωματισμένες μπλε, οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη.

■



Σχήμα 5.55

Για τα επίπεδα γραφήματα έγινε μεγάλη προσπάθεια για την εύρεση του ελάχιστου αριθμού χρωμάτων που απαιτούνται για το χρωματισμό τους. Ήδη από το 1890, ο Heawood απέδειξε ότι σε κάθε επίπεδο γράφημα G, αρκούν 5 ή λιγότερα χρώματα για να το χρωματίσουμε, απέδειξε δηλαδή ότι $\chi(G) \leq 5$. Από την άλλη πλευρά είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τα επίπεδα γραφήματα του σχήματος 5.55, που είναι το πλήρες K_4 και η ρόδα W_6, έχουν χρωματικό αριθμό 4, ενώ δεν έχει κατασκευαστεί επίπεδο γράφημα με χρωματικό αριθμό 5. Έτσι για πολλά χρόνια οι ερευνητές προσπαθούσαν να λύσουν το *πρόβλημα των 4 χρωμάτων*. Να αποδείξουν δηλαδή ότι αρκούν 4 χρώματα για το χρωματισμό οποιουδήποτε επίπεδου γραφήματος. Το ερώτημα ήταν ισοδύναμο με την εικασία της τετραχρωμίας στην τυπογραφία.

Το 1976 δύο ερευνητές οι Appel και Haken έδωσαν την απάντηση στο πρόβλημα, με τη βοήθεια ενός αλγορίθμου που έκανε εξαντλητική αναζήτηση όλων των δυνατών γραφημάτων, που ήταν περισσότερα από 2000 είδη. Η αναζήτησε χρειάστηκε περισσότερες από 1200 ώρες και τα εξαγόμενα του προγράμματος ήταν σε εκατοντάδες σελίδες. Η απάντηση ήταν θετική, δηλαδή ότι αρκούν 4 χρώματα, όμως η επιστημονική κοινότητα δεν αποδέχτηκε πλήρως την απόδειξη. Έτσι, πολλοί ερευνητές επανελέγχουν την απόδειξη των Appel και Haken ή ερευνούν για μια απλούστερη απόδειξη. Η απόδειξη των Appel και Haken βασίστηκε στην ίδια μεθοδολογία που ακολούθησε και ο Heawood, γι' αυτό είναι σκόπιμο να δώσουμε την απόδειξη του προβλήματος των 5 χρωμάτων. .

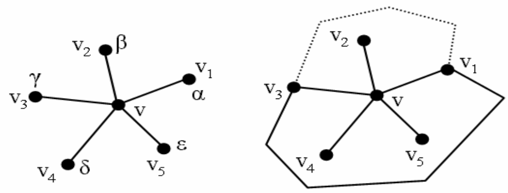
Θεώρημα 5.41. (Heawood). Για κάθε επίπεδο γράφημα ισχύει

$$\chi(G) \leq 5. \tag{5.15}$$

Απόδειξη

Για p≤5 η πρόταση ισχύει προφανώς. Έστω ότι ισχύει μέχρι το p, για p>5. Θα το αποδείξουμε για p+1. Το G, σύμφωνα με την άσκηση 5.5.3, περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή βαθμού 5 ή λιγότερο. Έστω v μία τέτοια κορυφή. Από την υπόθεση της επαγωγής αρκούν 5 χρώματα για το γράφημα G-v. Αν η κορυφή v έχει βαθμό μικρότερο του 5, τότε απλά χρωματίζουμε την v με χρώμα διαφορετικό από αυτά που έχουν οι κορυφές που είναι συνδεδεμένες με αυτήν. Έτσι, μένει να δείξουμε την πρόταση για την περίπτωση που η v έχει βαθμό 5 (σχήμα 5.56).

Συμβολίζουμε τις 5 κορυφές που συνδέονται με την v με v_1, v_2,…,v_5 ακολουθώντας τη θετική φορά και ας είναι α, β, γ, δ και ε τα 5 χρώματα με τα οποία έχουν χρωματιστεί. Στο G-v θεωρούμε το υπογράφημα H που περιέχει όλες τις κορυφές που έχουν τα χρώματα α και γ. Οι κορυφές v_1, v_3 έχουν δύο δυνατότητες. (1) Ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες του H. Τότε, στον παράγοντα που περιέχει την v_1 αντιμεταθέτουμε τα χρώματα α και γ χωρίς να καταστραφεί ο χρωματισμός. Είναι τώρα επιτρεπτό να δώσουμε στην v το χρώμα α αποκαθιστώντας στο G έναν 5-χρωματισμό. (2) Ανήκουν στον ίδιο παράγοντα. Τότε υπάρχει μονοπάτι από την v_1 στην v_3, (στο G-v), που όλες οι κορυφές του έχουν χρώμα α ή γ. Συμπληρώνοντας με το μονοπάτι v_1vv_3 σχηματίζεται κύκλος C, που θα περιέχει ή την v_2 ή την v_4 όχι όμως και τις δύο, διότι το G είναι επίπεδο (σχήμα 5.56 δεξιά). Θεωρούμε τώρα το υπογράφημα K του G-v, που περιέχει όλες τις κορυφές που έχουν τα χρώματα β και δ. Αφού ο C περιέχει μόνο μία από τις κορυφές v_2, v_4, οι κορυφές αυτές θα είναι σε διαφορετικούς παράγοντες του K, αλλιώς το μονοπάτι που θα συνέδεε τις δύο κορυφές θα έτεμνε τον κύκλο C, πράγμα άτοπο σε επίπεδο γράφημα. Στον παράγοντα που περιέχει μόνο την v_2 εναλλάσσουμε τα χρώματα β και



Σχήμα 5.56

δ, χωρίς να καταστραφεί ο χρωματισμός του G-v. Είναι τώρα επιτρεπτό να δώσουμε στην v το χρώμα β, αποκαθιστώντας και πάλι στο G έναν 5-χρωματισμό.

■

Αλγόριθμοι Χρωματισμού

Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι (όχι πολύ αποδοτικοί) που υπολογίζουν το χρωματικό αριθμό και χρωματίζουν το γράφημα. Αρκετοί απ' αυτούς στηρίζονται στην τεχνική branch and bound δηλαδή στην απαρίθμηση περιπτώσεων που ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Εμείς, θα ασχοληθούμε με δύο από αυτούς τους αλγορίθμους.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ με χρήση ανεξάρτητων συνόλων

Έστω G ένα γράφημα με p κορυφές. Δίνουμε τον ορισμό.

Ορισμός. *Ανεξάρτητο σύνολο κορυφών* σε ένα γράφημα G(p,q) λέγεται ένα υποσύνολο U των κορυφών του, όταν το φέρον υπογράφημα αυτών των κορυφών είναι πλήρως ασυνδετικό, δηλαδή όταν καμία από τις κορυφές του U δεν συνδέεται με άλλη κορυφή του G.

Ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών επιτρέπεται να έχει το ίδιο χρώμα και άρα μπορεί να αποτελεί μία χρωματική κλάση. Αν U_1, U_2,...,U_r, είναι ανεξάρτητα σύνολα κορυφών, τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος κανένα να μην είναι υποσύνολο του άλλου, και υπάρχουν s από αυτά που συνιστούν διαμέριση του V, τότε $\chi(G)=s$, με την προϋπόθεση το s να είναι το μικρότερο απ' όλα τα δυνατά.

Έτσι οδηγούμαστε στον επόμενο αλγόριθμο.

Πρώτη φάση: Εύρεση όλων των ανεξάρτητων συνόλων κορυφών με την ιδιότητα κανένα από αυτά να μην είναι υποσύνολο άλλου.

Δεύτερη φάση: Εύρεση όλων των δυνατών ενώσεων των ανεξαρτήτων συνόλων κορυφών που έχουν ένωση το V. Το s που δίνει το μικρότερο πλήθος τέτοιων συνόλων είναι ο χρωματικός αριθμός.

Παράδειγμα 5.18. Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος που δίνεται αριστερά του σχήματος 5.57.

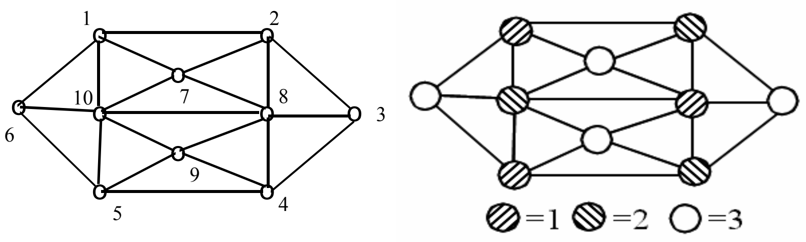
Λύση

Πρώτη φάση: Βρίσκουμε όλα τα ανεξάρτητα σύνολα που είναι κατά σειράν:

{1,3,5}, {1,3,9}, {1,4}, {1,5,8}, {2,4,6}, {2,4,10}, {2,5},

{2,6,9}, {3,5,7}, {3,6,7,9}, {3,10}, {4,6,7}, {6,8}

(Σημειώνουμε ότι το {1,3} είναι ανεξάρτητο σύνολο, είναι όμως υποσύνολο του {1,3,5} και έτσι δεν καταγράφεται).



Σχήμα 5.57

Δεύτερη φάση: Δεν υπάρχουν οποιαδήποτε δύο από τα σύνολα αυτά που να έχουν ένωση το V. Υπάρχουν όμως τρία με ένωση το V, τα:

$$\{1,5,8\}\cup\{2,4,10\}\cup\{3,6,7,9\}=V.$$

Άρα $\chi(G)=3$. Ένας χρωματισμός που δίνει τα χρώματα 1, 2 και 3 στα τρία ανεξάρτητα σύνολα που βρέθηκαν, δίνεται στο σχήμα 5.57 δεξιά.

■

Αλγόριθμος Χριστοφίδη

Ένας αλγόριθμος που οφείλεται στον ελληνικής καταγωγής ερευνητή N. Christofidis, είναι ο επόμενος.

Βήμα 1. Διατάσσουμε τις κορυφές σε φθίνουσα σειρά βαθμών, δηλ.

$x_1, x_2, ..., x_p$ αν $\delta(x_1) \geq \delta(x_2) \geq ... \geq \delta(x_p)$.

Βήμα 2. Αντιστοιχίζω το χρώμα 1 στην x_1.

Βήμα 3. Θεωρούμε την επόμενη κορυφή στη σειρά. Ελέγχουμε αν η κορυφή αυτή δε συνδέεται άμεσα με κάποια από τις κορυφές που έχει εξεταστεί προηγούμενα. Αν συμβαίνει αυτό δίνουμε στην κορυφή το χρώμα αυτό και μάλιστα το μικρότερο δυνατό. Αλλιώς της δίνουμε το επόμενο χρώμα, αυτό που δεν είχε δοθεί μέχρι τώρα.

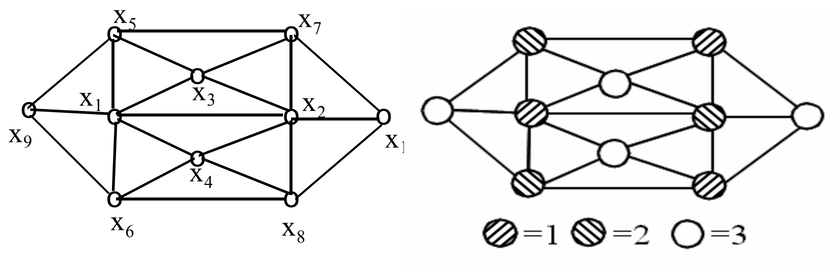
Παράδειγμα 5.19. Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος που δίνεται αριστερά του σχήματος 5.58 με τον αλγόριθμο Χριστοφίδη.

Λύση

Παρατηρείστε ότι το γράφημα είναι ίδιο με αυτό του σχήματος 5.57, μόνο που οι κορυφές του αριθμήθηκαν με φθίνουσα σειρά βαθμών. Στις περιπτώσεις των κορυφών με ίδιο βαθμό η σειρά επιλέγεται τυχαία.

Αντιστοιχίζουμε το χρώμα 1 στην x_1.

Θεωρούμε την x_2, που συνδέεται με την x_1. Άρα δεν μπορεί να έχει το χρώμα 1, και έτσι δίνουμε το χρώμα 2 στην x_2.



Σχήμα 5.58

Συνεχίζουμε με την τρίτη κορυφή x_3, που συνδέεται με τις x_1, x_2. Άρα δίνουμε το χρώμα 3 στην x_3.

Κατόπιν παίρνουμε την x_4, που συνδέεται με τις x_1, x_2, αλλά όχι με την x_3. Έτσι δίνουμε το χρώμα 3 στην x_4.

Η x_5 συνδέεται με την x_1, αλλά όχι με την x_2. Έτσι, δίνουμε το χρώμα 2 στην x_5.

Συνεχίζοντας δίνουμε στις 10 κορυφές κατά σειράν τα χρώματα:

1, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 3.

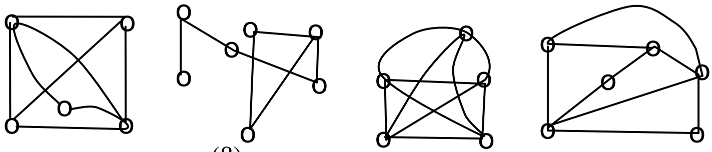
Επομένως $\chi(G)=3$. Ο χρωματισμός δίνεται δεξιά στο σχήμα 5.58.

■

Παρατηρούμε ότι οι δύο αλγόριθμοι έδωσαν τον ίδιο χρωματισμό. Αυτό δεν συμβαίνει πάντα. Ο αλγόριθμος Χριστοφίδη είναι πολύ πιο εύκολος, αλλά δεν είναι πάντα αξιόπιστος.

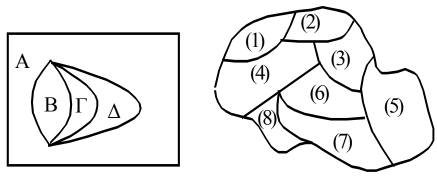
Ασκήσεις

5.6.1. Από τα επόμενα γραφήματα, ποια είναι επίπεδα;. Βρέστε το χρωματικό τους αριθμό.



(α) (β) (γ) (δ)

5.6.2. Σχεδιάστε το γράφημα που αντιστοιχεί σε καθένα από τους χάρτες: Ποιος ο χρωματικός αριθμός κάθε γραφήματος.



(α) (β)

Χρωματίστε στη συνέχεια τους χάρτες με τα λιγότερα δυνατά χρώματα.

5.6.3. Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος Petersen 5.51(α), με τους δύο αλγορίθμους που περιγράψαμε.

5.6.4. Δίνονται οι παρακάτω μαθητές και το μάθημα που πρόκειται να εξεταστούν:
Ιωάννου, Κων/νου, Χρήστου και Δήμου, (γλώσσα (Γ)),
Νικολάου, Δήμου, Σιδεράς και Ιωάννου, (μαθηματικά (Μ))
Λαδάς, Μανδαρίνος, (αγγλικά (Α)),
Λαδάς, Δήμου και Γεωργός, (φυσική (Φ)), και
Μανδαρίνος, Παπάς, Ιωάννου και Ιατρού, (ιστορία (Ι)).
Εξετάστε αν είναι δυνατόν να εξεταστούν τα μαθήματα αυτά τις μέρες Δευτέρα, Τετάρτη και Παρασκευή χωρίς να υπάρξει πρόβλημα με τους μαθητές που οφείλουν περισσότερα από ένα μαθήματα.

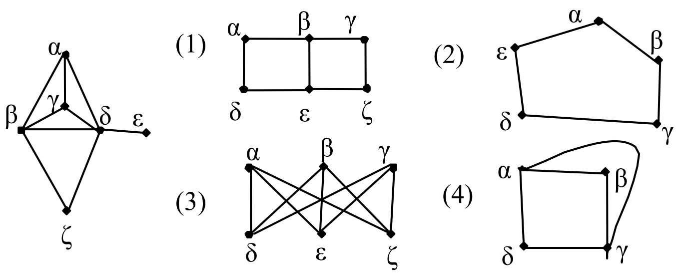
5.6.5. Μια εταιρεία έχει 12 θυγατρικές εταιρείες σε διάφορες χώρες της Ευρωπαϊκής ένωσης. Οι εταιρείες συνδέονται μεταξύ τους με υπεργολαβίες, σύμφωνα με τον πίνακα:

Εταιρεία	Συνδεδεμένες	Εταιρεία	Συνδεδεμένες
1	2, 5, 6, 8	7	2, 5, 8
2	1, 3, 7	8	1, 5, 7, 10, 11
3	2, 4, 9, 11, 12	9	3, 4, 6, 10
4	3, 6, 9	10	6, 8, 9, 11
5	1, 7, 8, 12	11	3, 6, 8, 10, 12

6	1, 4, 9, 10, 11, 12	12	3, 5, 6, 11

Θέλει να χρησιμοποιήσει λογιστές για τον έλεγχο των εταιρειών, με τρόπο ώστε ο ίδιος λογιστής να μην ελέγξει συνδεδεμένες εταιρείες. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός λογιστών που θα διενεργήσουν τον έλεγχο.

5.6.6. α) Ονομάζουμε κλικ (clique) μεγέθους n σ' ένα γράφημα ένα υποσύνολο n κορυφών του οι οποίες συνδέονται όλες μεταξύ τους ανά δύο. Π.χ. στο πρώτο από τα γραφήματα του σχήματος τα {α,β,γ}, {δ,ε}, {α,β,γ,δ} είναι κλικ μεγέθους αντίστοιχα 3, 2, 4. Το μέγεθος του μεγαλύτερου κλικ συμβολίζεται ω(G). Αποδείξτε ότι ο χρωματικός αριθμός χ(G) ενός γραφήματος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του ω(G). Βρέστε το ω(G) και το χ(G) στα 4 γραφήματα που δίνονται. Να δικαιολογήσετε σε κάθε περίπτωση τις απαντήσεις σας.



β) Ένα υποσύνολο n κορυφών σ' ένα γράφημα, που ανά δύο δεν συνδέονται μεταξύ τους λέγεται ανεξάρτητο σύνολο κορυφών μεγέθους n. Π.χ. στο πρώτο από τα γραφήματα που δόθηκαν τα {α,ζ}, {γ,ε,ζ} είναι ανεξάρτητα σύνολα μεγέθους αντίστοιχα 2, 3. Το μέγεθος του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου συμβολίζεται α(G). Βρέστε τα α(G) για τα τέσσερα γραφήματα που δόθηκαν, και επαληθεύσατε ότι ισχύει $\chi(G)\alpha(G)\geq p$, όπου p το πλήθος κορυφών του G. Να δικαιολογήσετε σε κάθε περίπτωση τις απαντήσεις σας.

5.6.7. Δίνεται ο διπλανός (0,1)-πίνακας B.

α) Εξετάζοντας τη μορφή του και ΜΟΝΟΝ αποδείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να είναι πίνακας αντιστοίχισης ενός BIB-σχεδιασμού ούτε πίνακας αντιστοιχιών ενός γραφήματος.

$$B=\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

β) Θεωρώντας ως κορυφές τις γραμμές του B (συμβολίστε τις γραμμές με τα γράμματα a, b, c, ..., g) και ως σύνδεση την ύπαρξη μιας τουλάχιστον κοινής μονάδας στην ίδια θέση, σχηματίστε ένα γράφημα.

γ) Βρέστε τον πίνακα αντιστοιχιών Α του γραφήματος αυτού και συγκρίνετέ τον με τον πίνακα ΒΒ΄.

δ) Βρέστε χωρίς να κάνετε πολλαπλασιασμό πινάκων το στοιχείο (2,4) του πίνακα A^3, εξηγώντας το λόγο.

ε) Αποδείξτε ότι το γράφημα είναι επίπεδο και εξηγείστε με δύο τρόπους (και με τύπο και από το σχήμα) ότι δεν είναι μέγιστο.

στ) Βρέστε το χρωματικό του αριθμό και χρωματίστε το γράφημα.

5.6.8. α) Δίνεται ότι ο πίνακας Α δίπλα είναι ο πίνακας συνδέσεων ενός γραφήματος G. Εξετάστε αν το γράφημα είναι συνδετικό αναδιατάσσοντας κατάλληλα τις στήλες και τις γραμμές του Α.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

β) Σχεδιάστε το γράφημα και συμπληρώστε το G με τον ελάχιστο αριθμό ακμών, ώστε (i) να γίνει γράφημα Euler, (ii) να έχει μία ανοικτή διαδρομή Euler.

γ) Δείξτε ότι η συμπλήρωση που κάνατε στο (β,i) μπορεί να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε το γράφημα Euler που προκύπτει να είναι επίπεδο. Επαληθεύσατε ότι ισχύει ο τύπος του Euler και βρέστε το χρωματικό αριθμό του γραφήματος.