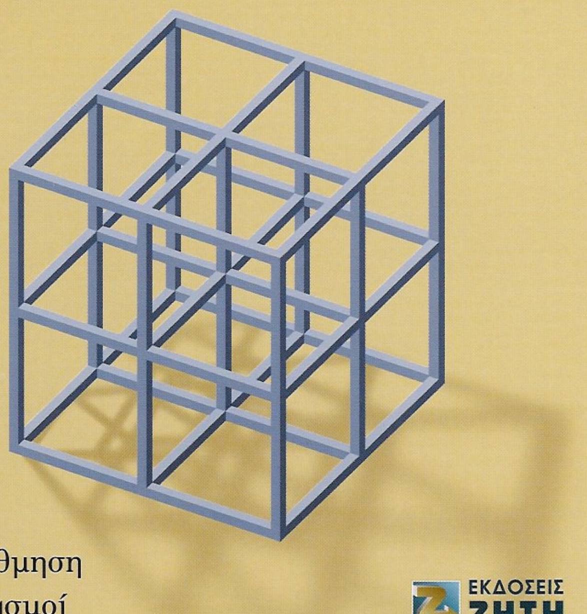
ΧΡΟΝΗΣ Θ. ΜΩΥΣΙΑΔΗΣ
Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ.

# ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ

## Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα



- Απαρίθμηση
- Σχεδιασμοί
- Γραφήματα

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ
# 1

# ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

## 1.1. Εισαγωγικά Προβλήματα

Ο όρος *συνδυαστική* (*combinatorics*) περιλαμβάνει ένα μεγάλο πλήθος μαθηματικών εννοιών οι οποίες αφορούν πεπερασμένα, δηλαδή διακριτά, σύνολα αριθμών. Σημαντικό μέρος των στόχων της συνδυαστικής αποτελεί η απαρίθμηση του πλήθους των περιπτώσεων με τις οποίες μπορούν να συνδυαστούν κάποια αντικείμενα. Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου και ως εκ τούτου έχει κανείς την εντύπωση ότι δεν υπάρχει πρόβλημα. Αρκεί να αποκατασταθεί, όπως μαθαίνουμε ήδη από τη βασική εκπαίδευση, μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του συνόλου και ενός τμήματος $T_n=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ του συνόλου των φυσικών αριθμών.

Εύκολα, όμως, διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω διαδικασία είναι εφικτή για λίγες μόνο περιπτώσεις και για σχετικά μικρά μεγέθη συνόλων. Πολλοί πεπερασμένοι αριθμοί είναι τόσο μεγάλοι, ώστε είναι αδύνατο να καταμετρηθούν, τουλάχιστον με τα ανθρώπινα μέτρα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα σύνολο έχει $2^{40}$ στοιχεία και θέλουμε να τα μετρήσουμε.

Διαθέτουμε ένα αυτόματο μετρητή και έχουμε τη δυνατότητα να μετρούμε τρεις αριθμούς το δευτερόλεπτο. Θα χρειαζόμαστε, τότε, $2^{40}/3$ δευτερόλεπτα που ισοδυναμούν με κάτι περισσότερο από 116 αιώνες.

Η Συνδυαστική προσπαθεί να ομαδοποιήσει ομοειδείς καταστάσεις και να αναπτύξει μεθόδους απαρίθμησης χωρίς μέτρηση. Θα περιγράψουμε στα επόμενα μερικά προβλήματα που είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με συνδυαστικές μεθόδους, ώστε να αναδειχθεί η αναγκαιότητα που έδωσε σ' αυτό τον κλάδο των Μαθηματικών τη θέση που έχει σήμερα.

**Πρόβλημα 1**: Πολλοί θεωρούν εξαιρετικά δυσοίωνη την 13η του μηνός, αν συμβεί να είναι Τρίτη. Πόσες μέρες υπάρχουν κατά μέγιστον σε ένα έτος, που να είναι «Τρίτη και 13»;

Είναι φανερό ότι το ημερολόγιο δεν μπορεί να μας δώσει άμεσα την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα. Πράγματι, θα έπρεπε να έχουμε μια συλλογή με όλων των «ειδών» τα ημερολόγια και μετά να καταμετρήσουμε πόσες φορές εμφανίζεται «Τρίτη και 13» σε κάθε ένα από αυτά.

Σε σχέση με το ζητούμενο ερώτημα, διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 14 «είδη» έτους. Πράγματι υπάρχουν δύο δυνατότητες ως προς το να είναι το έτος δίσεκτο ή όχι και υπάρχουν 7 δυνατότητες σε σχέση με το τι μέρα είναι η 13η Ιανουαρίου (δηλαδή αν είναι Κυριακή, Δευτέρα κλπ). Έτσι αντιστοιχίζοντας αριθμούς στις ημέρες ως εξής:

Κυριακή=1, Δευτέρα=2, Τρίτη=3, ..., Σάββατο=7,

βρίσκουμε για κάθε είδος έτος τους αριθμούς που έχουν αντιστοιχιστεί στην 13η κάθε μήνα. Στο παράρτημα, δίνουμε αναλυτικά την απάντηση στο ερώτημα, που είναι 3.

Μια παραλλαγή του προβλήματος αυτού είχε τεθεί στο περιοδικό American Mathematical Monthly το Νοέμβριο του 1962.

Σχετικό με αυτό είναι και το πρόβλημα: «ποια η πιθανότητα η $13^{\eta}$ κάποιου μήνα που διαλέγεται τυχαία να είναι Τρίτη»; Για την απάντηση χρησιμοποιήσαμε το στατιστικό πακέτο S-Plus και βρήκαμε τις σχετικές συχνότητες των ημερών που είναι $13^{\eta}$ κάποιου μήνα για 1000 χρόνια (από το 1501 μέχρι το 2500), που είναι οι παρακάτω:

| Κυριακή | Δευτέρα | Τρίτη | Τετάρτη | Πέμπτη | Παρασκευή | Σάββατο |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1431 | 0.1427 | 0.1427 | 0.1431 | 0.1425 | 0.1432 | 0.1427 |

Όπως αναμένονταν όλες οι μέρες έχουν περίπου ίδια πιθανότητα ίση με 1/7.

■

**Πρόβλημα 2:** Ένα σύνολο ξύλινων κύβων βάφονται με δύο χρώματα (μπλε και κόκκινο). Πόσα διαφορετικά είδη υπάρχουν;

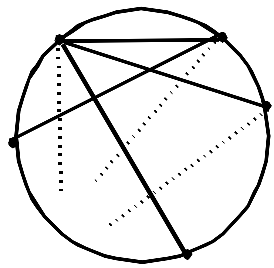
Το πρόβλημα όπως δίνεται έχει ασάφεια. Πράγματι, πότε δύο τέτοιοι κύβοι είναι ίδιοι; Πότε είναι διαφορετικοί; Πρέπει πρώτον να αποφασίσουμε έναν τρόπο τυποποίησης των περιπτώσεων του προβλήματος, ώστε να ασχοληθούμε με την εύρεση του πλήθους των πραγματικά διακεκριμένων περιπτώσεων.

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι: «Δύο κύβοι είναι διαφορετικοί αν δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν σε ένα επίπεδο τραπέζι με τρόπο ώστε οι αντίστοιχες (ομόλογες) έδρες να έχουν ίδια χρώματα.

Με την προϋπόθεση αυτή, βρίσκουμε (βλέπε παράρτημα) ότι υπάρχουν 10 είδη τέτοιων κύβων.

Το πρόβλημα μπορεί να γίνει πιο πολύπλοκο αν τα χρώματα γίνουν περισσότερα (τρία, τέσσερα, κλπ) ή αν το σχήμα είναι διαφορετικό (τετράεδρο, οκτάεδρο, κλπ).

■



**Πρόβλημα 3:** Δίνονται n σημεία σε έναν κύκλο. Συνδέουμε ανά δύο τα σημεία αυτά. Ποιο είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία κατά μέγιστον υποδιαιρείται ο κύκλος;

Για τη λύση του προβλήματος αυτού πρέπει να παρατηρήσουμε ότι προσθήκη μιας χορδής που δεν τέμνει άλλη, προσθέτει ένα χωρίο επιπλέον στα όσα υπάρχουν μέχρι τότε. Αν τέμνει k χορδές τότε θα προσθέσει k+1 χωρία. Τελικά μπορούμε να βρούμε (βλέπε παράρτημα) ότι:

$$\alpha_n \leq 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

όπου $\alpha_n$ παριστάνει το πλήθος των χωρίων που σχηματίζονται με n σημεία.

Το πρόβλημα είχε τεθεί στο διαγωνισμό «Αρχιμήδης» της Μαθηματικής Εταιρείας. Εύκολα διαπιστώνει κανείς, ότι πιο φορμαλιστική επίλυση του προβλήματος αυτού, είναι εξαιρετικά χρονοβόρα. ■

**Πρόβλημα 4:** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να “χαλάσουμε” ένα 100-ρικο σε ψιλά των 5, 10, 20 ή και 50 δραχμών;

Ένας τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα αυτό, είναι να καταγράψουμε όλες τις περιπτώσεις. Για να αποφύγουμε λάθη, σχηματίζουμε ένα δενδροδιάγραμμα, όπως αυτό που δίνεται στο παράρτημα. Η μέθοδος αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί για μεγάλες τιμές των παραμέτρων, π.χ. αν αντί 100-ρικο είχαμε 1000-ρικο.

Αν συμβολίσουμε με $x_1$, $x_2$, $x_3$ και $x_4$ αντίστοιχα τα πλήθη κερμάτων των 5, 10, 20 και 50 δραχμών, στα οποία χαλάσαμε το 100-ρικο, τότε θα ικανοποιείται η διοφαντική εξίσωση:

$$5 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 + 50 \cdot x_4 = 100 \qquad (1.1)$$

Θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, ότι ένας τρόπος λύσης τέτοιων διοφαντικών εξισώσεων, είναι με τον υπολογισμό του συντελεστή της δύναμης $x^{100}$ στο πολυώνυμο που προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό:

$$(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{100})(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{100})(1+x^{20}+x^{40}+\ldots+x^{100})(1+x^{50}+x^{100})$$

Μπορούμε όμως να βρούμε το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας κάποια γλώσσα προγραμματισμού. Για παράδειγμα δίνεται στο παράρτημα ένα πρόγραμμα σε γλώσσα Pascal. Η απάντηση είναι 49. Ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα με την ονομασία diofant.exe δίνει το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=n$, για δοσμένα n, k<10 και $a_1,a_2,\ldots a_k$, καθώς και τις ίδιες τις λύσεις.

Το πρόγραμμα είναι διαθέσιμο στη διεύθυνση users.auth.gr/cmoi. ■

**Πρόβλημα 5:** Αν είναι γνωστό ότι κανείς άνθρωπος δεν έχει περισσότερες από 300 000 τρίχες στο κεφάλι του και ότι η Θεσσαλονίκη έχει περισσότερους από 700 000 κατοίκους, υπάρχουν άραγε 2 άτομα με ακριβώς ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι τους. Μήπως υπάρχουν τουλάχιστον 3 άτομα;

Χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη αρχή του περιστερώνα εξασφαλίζουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 3 κάτοικοι της Θεσσαλονίκης με ίδιο αριθμό τριχών στο κεφάλι τους. Πράγματι έχουμε 301000 φωλιές (όσες οι διαφορετικές κατηγορίες ανθρώπων ως προς τον αριθμό τριχών), ενώ έχουμε περισσότερα από $2 \cdot 301\,000+1$ «περιστέρια» (δηλαδή κατοίκους της Θεσσαλονίκης). ■

**Πρόβλημα 6:** Δίνονται 5 γράμματα που θα αποσταλούν σε 5 διαφορετικούς παραλήπτες και 5 φάκελοι με τις διευθύνσεις των παραληπτών. Αν γίνει τυχαία τοποθέτηση, σε πόσες περιπτώσεις κανένα γράμμα δεν τοποθετείται στο σωστό φάκελο;

Αριθμούμε τους φακέλους με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και τους βάζουμε σε αύξουσα σειρά. Αριθμούμε και τα γράμματα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5. Κάθε τοποθέτηση των γραμμάτων μέσα στους φακέλους ισοδυναμεί τότε με μία μετάθεση των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5. Υπάρχουν επομένως 5!=120 δυνατές τοποθετήσεις. Από αυτές μας ενδιαφέρουν εκείνες που δεν αφήνουν κανένα από τους αριθμούς στην αρχική του θέση. Το πλήθος αυτών των μεταθέσεων (που λέγονται διαταράξεις) ισούται, όπως αποδεικνύεται σε επόμενη παράγραφο, με:

$$5!\cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=5!\cdot\left(\frac{60-20+5-1}{5!}\right)=44\,.$$

■

**Πρόβλημα 7: Οι αξιωματικοί του Euler.** 36 αξιωματικοί που ανήκουν σε έξι χώρες και σε έξι βαθμούς (ώστε σε κάθε συνδυασμό να έχουμε ακριβώς από έναν αξιωματικό) πρόκειται να τοποθετηθούν σε τιμητική παράταξη σε 6-δες. Είναι δυνατό να τοποθετηθούν με τρόπο ώστε σε κάθε γραμμή, και σε κάθε στήλη να μην υπάρχουν αξιωματικοί από την ίδια χώρα ή από τον ίδιο βαθμό;

Το πρόβλημα φέρεται ότι ετέθη το 1782 από τον Euler. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, η απάντηση σε ανάλογο ερώτημα με 9, ή με 16 ή με 25 αξιωματικούς είναι θετική και η κατασκευή της οφείλεται στην ύπαρξη ορθογωνίων μεταξύ τους λατινικών τετραγώνων. Πίστευε ότι η απάντηση είναι “ΟΧΙ”. Αποδείχθηκε το 1900 από τον Tarry. Ο Euler είχε διατυπώσει την εικασία ότι στο γενικότερο πρόβλημα για $n^2$ αξιωματικούς η απάντηση είναι αρνητική όταν $n \equiv 2 \bmod 4$. Το 1900 αποδείχθηκε από τον Tarry η μη ύπαρξη τέτοιας τοποθέτησης για τους 36 αξιωματικούς.

Το 1960 οι Bose, Shrikhande και Parker έδειξαν ότι η εικασία του Euler ισχύει μόνο για τις τιμές n=2 και n=6.

■

**Πρόβλημα 8:** Πέντε τύποι ελαστικών (1, 2, 3, 4, 5) πρόκειται να ελεγχθούν ως προς την αντοχή τους. Τοποθετούνται σε 5 αυτοκίνητα (Α, Β, Γ, Δ, Ε) στις 4 θέσεις ΕΑ (εμπρός αριστερά), ΕΔ (εμπρός δεξιά), ΠΑ (πίσω αριστερά), ΠΔ (πίσω δεξιά) με διαφορετικούς τρόπους και κάποιοι οδηγοί αναλαμβάνουν να τα οδηγήσουν και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα. Ανάλογα με την τοποθέτηση τα αποτελέσματα είναι περισσότερο ή λιγότερο ικανοποιητικά. Πως μπορούμε να τοποθετήσουμε τα ελαστικά στα αυτοκίνητα, ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι τα αποτελέσματα θα είναι όσο περισσότερο γίνεται ικανοποιητικά;

Αποδεικνύεται στη Στατιστική, ότι η βέλτιστη τοποθέτηση γίνεται σύμφωνα με ένα ισορροπημένο σχεδιασμό, που τοποθετεί κάθε τύπο ελαστικού στο ίδιο πλήθος αυτοκινήτων, καθώς επίσης και κάθε ζεύγος ελαστικών στο ίδιο πλήθος αυτοκινήτων. Μια τέτοια τοποθέτηση για το πρόβλημά μας, είναι η επόμενη:

| | Α | Β | Γ | Δ | Ε |
|---|---|---|---|---|---|
| ΕΑ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ΕΔ | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| ΠΑ | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| ΠΔ | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |

Η δομή αυτή λέγεται (5, 5, 4, 4, 3) – BIB σχεδιασμός. Όπως παρατηρούμε κάθε τύπος ελαστικού τοποθετείται σε 4 αυτοκίνητα, ενώ κάθε ζεύγος ελαστικών τοποθετείται σε 3 αυτοκίνητα. Στη συγκεκριμένη τοποθέτηση παρατηρούμε ότι κάθε τύπος ελαστικού τοποθετείται από ακριβώς μία φορά σε κάθε θέση (ΕΑ, ΕΔ, ΠΑ, ΠΔ), κάτι που είναι σημαντικό για το πρόβλημά μας. ■

**Πρόβλημα 9: Το πρόβλημα του Kirkman.** 15 μαθήτριες κάνουν περίπατο κάθε μέρα σε τριάδες. Είναι δυνατό να οργανωθεί ο περίπατος με τρόπο ώστε κάθε μέρα να έχει κάθε μαθήτρια διαφορετική παρέα;

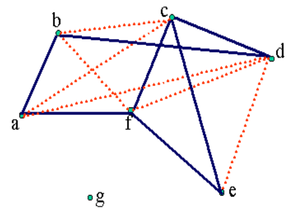
Καταρχήν, το πρόβλημα δεν έχει λόγο να μη λύνεται. Πράγματι, αφού κάθε μαθήτρια κάνει παρέα με 2 άλλες κάθε μέρα, χρειάζεται 7 μέρες να κάνει παρέα και με τις 14 συμμαθήτριές της. Στις 7 μέρες της εβδομάδας θα σχηματιστούν $7 \cdot 5 = 35$ τριάδες, που περιέχουν συνολικά $35 \cdot 3 = 105$ ζεύγη κοριτσιών. Αλλά, και όλα τα δυνατά ζεύγη κοριτσιών είναι $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$.

Το πρόβλημα τέθηκε το 1847 από τον επίσκοπο Kirkman και λύθηκε από τον ίδιο. Στο παράρτημα δίνεται ένας τρόπος κατασκευής της λύσης, που είναι φανερό ότι είναι ένας (15, 35, 7, 3, 1) – BIB σχεδιασμός. Επειδή επιπλέον οι 35 τριάδες χωρίζονται σε 7 ομάδες (μέρες) όπου κάθε στοιχείο από τα 1 έως 15 (μαθήτριες) εμφανίζονται από ακριβώς μία φορά, ο BIB σχεδιασμός λέγεται επιλύσιμος. Το 1967 οι Ray-Chaudhuri και Wilson έδειξαν ότι υπάρχουν λύσεις για αριθμό κοριτσιών n=3mod6.

■

**Πρόβλημα 10: Το παιχνίδι του Ramsey.** Δύο παίκτες έχουν διαφορετικού χρώματος μολύβια (έστω κόκκινο και μπλε) και ένα φύλλο χαρτί με σημειωμένα n σημεία. Οι παίκτες ενώνουν διαδοχικά δύο σημεία με μία γραμμή του χρώματος που διάλεξαν. Ο πρώτος που συμπληρώνει τρίγωνο κερδίζει. Για ποια n, συμβαίνει να κερδίζει πάντοτε κάποιος παίκτης; Ποιο είναι το ελάχιστο n ώστε να συμβαίνει αυτό;

Συμβολίζοντας το ένα χρώμα με συνεχή γραμμή και το άλλο με στικτή και παίρνοντας το n ίσο με 7, υλοποιήσαμε στο διπλανό σχήμα μία εκτέλεση του παιχνιδιού του Ramsey.



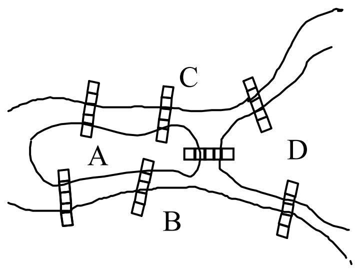

Πράγματι, στη συγκεκριμένη εκτέλεση οι παίκτες A και B έπαιξαν διαδοχικά:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A: | ab | af | cf | bd | cd | ce | fe |
| B: | bf | bc | ac | ad | fd | de | |

όπου xy συμβολίζει το ευθύγραμμο τμήμα που σχηματίζει ο αντίστοιχος παίκτης στην κίνησή του.

Το παιχνίδι στηρίζεται σε μια θεωρία, που ανάγεται στο 1930, οπότε ο οικονομολόγος F.P. Ramsey απέδειξε ένα λήμμα για μια εργασία του στη Μαθηματική λογική. Το λήμμα αυτό αποδείχτηκε πολύ σημαντικό, διότι έδωσε τη δυνατότητα σε διαφορετικά πεδία των Μαθηματικών, όπως συνδυαστική, λογική, τοπολογία και θεωρία πιθανοτήτων να αλληλεπιδράσουν προς όφελος της επιστήμης. Πολλά θεωρήματα σπουδαίων μαθηματικών (Hilbert, Schur, van der Waerden κλπ) που αποδείχτηκαν πριν το 1930, θεωρούνται σήμερα ως μέρος της θεωρίας Ramsey. Θα αναπτύξουμε τα βασικά σημεία της θεωρίας του Ramsey στη θεωρία γραφημάτων, που δίνει και τον απλούστερο τρόπο προσέγγισής της. ■

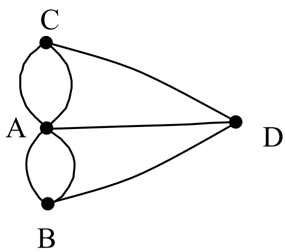
**Πρόβλημα 11: Οι γέφυρες του Königsberg.** Το 1735 επτά γέφυρες συνέδεαν τις δύο νησίδες που σχηματίζει το ποτάμι της πόλης Königsberg (Kalliningrand στη σημερινή Ρωσία στα σύνορα με τη Λιθουανία).




Ο Euler που βρέθηκε εκεί, αναρωτήθηκε αν υπάρχει τρόπος να κάνει κάποιος βόλτα, ξεκινώντας από ένα σημείο και επιστρέφοντας σ' αυτό περνώντας από κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά;

Ο Euler απέδειξε ότι δεν υπάρχει τέτοιος τρόπος. Για την απόδειξη, που δίνεται λεπτομερειακά στο παράρτημα, χρησιμοποίησε μόνο τις σχέσεις μεταξύ γεφυρών και τμημάτων ξηράς, γι' αυτό και θεωρείται ως το γενέθλιο πρόβλημα της θεωρίας Γραφημάτων (Graph Theory).

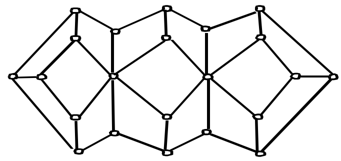
Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg, μπορεί να παρασταθεί και ως πρόβλημα της θεωρίας γραφημάτων. Πράγματι, παριστάνοντας τις στεριές A, B, C, D με σημεία και τις γέφυρες με γραμμές που συνδέουν τα σημεία, παίρνουμε το διπλανό σχήμα. Έτσι, τα σημεία A και C συνδέονται με δύο γραμμές στο σχήμα, επειδή υπάρχουν δύο διαφορετικές γέφυρες που συνδέουν τις στεριές A και C. Μία βόλτα όπως αυτή που σκέφθηκε ο Euler ισοδυναμεί τώρα με το σχηματισμό του σχήματος με μονοκονδυλιά, χωρίς δηλαδή να περάσει το μολύβι δύο φορές από την ίδια γραμμή. Με τη μορφή αυτή το πρόβλημα γίνεται ειδική περίπτωση του γνωστού ως «προβλήματος του Κινέζου ταχυδρόμου». Η απάντηση, όπως εξηγείται στο παράρτημα, είναι και πάλι αρνητική.




Γραφήματα που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται γραφήματα Euler και μελετώνται σε ξεχωριστή παράγραφο.

■

**Πρόβλημα 12:** Το γράφημα δίπλα παριστάνει τις μεταξύ 22 πόλεων άμεσες δυνατές συνδέσεις μέσω αεροπορικών γραμμών. Εξετάστε αν είναι δυνατόν να περάσει κανείς από όλες τις πόλεις χωρίς όμως να χρειαστεί να περάσει δεύτερη φορά από την ίδια πόλη.



Το πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση του γνωστού ως «προβλήματος του περιοδεύοντος αντιπροσώπου», το οποίο στη γενικότητά του είναι άλυτο. Μάλιστα, ακόμη και αλγοριθμικές λύσεις δεν οδηγούν με βεβαιότητα στη λύση, διότι έχει αποδειχθεί ότι είναι «NP-complete» πρόβλημα, δηλαδή πρόβλημα στο οποίο δεν υπάρχει πολυώνυμο ως προς το μέγεθός του, που να φράσσει το χρόνο αναζήτησης του αλγορίθμου για την εύρεση λύσης.

Για το δοσμένο πρόβλημα, όμως, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι δεν υπάρχει τρόπος να συμβεί το ζητούμενο. Για την απάντηση (βλέπε παράρτημα) χρησιμοποιήθηκε κατάλληλος χρωματισμός των κορυφών του γραφήματος.

■

Τα προβλήματα που αναφέρθηκαν είναι ένα μικρό δείγμα του εύρους των θεμάτων με τα οποία ασχολείται η Συνδυαστική. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε πολλά ακόμη προβλήματα, που στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρούνται αντιπροσωπευτικά κάποιας θεματικής ενότητας σχετικής με τη Συνδυαστική.

Εκείνο που πρέπει να γίνει από την αρχή κατανοητό, είναι ότι στα προβλήματα που περιγράφουμε φροντίζουμε, όπου αυτό είναι δυνατό, να δίνουμε τέτοιες λύσεις, που να μπορούν να εφαρμοστούν και σε προβλήματα μεγαλύτερης τάξης μεγέθους. Για παράδειγμα αν έχουμε τα τρία γράμματα α, β, γ είναι πάρα πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν 6 διαφορετικές τοποθετήσεις σε σειρά (μεταθέσεις), οι αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα. Εμείς όμως ενδιαφερόμαστε να βρούμε κάποιο τύπο που να εφαρμόζεται για οποιοδήποτε πλήθος γραμμάτων. Για το παράδειγμα που αναφέρθηκε, αποδεικνύεται εύκολα, ότι γενικά για n σύμβολα υπάρχουν n! διαφορετικές μεταθέσεις. Έτσι, για τα τρία γράμματα θα είναι 3!=6.

## 1.2. Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

Μία από τις βασικότερες τεχνικές στην επιστήμη, συνίσταται στην κατάτμηση των δύσκολων προβλημάτων σε επιμέρους απλούστερα και του ορισμού μιας διαδικασίας για την εξαγωγή της γενικής λύσης από τις μερικές*. Στη Συνδυαστική αυτή η τεχνική εκφράζεται με τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης. Ας δούμε, όμως, πρώτα κάποια παραδείγματα:

**Παράδειγμα 1.1.** Ρίχνουμε διαδοχικά δύο ζάρια και καταγράφουμε τις ενδείξεις τους με τη σειρά που εμφανίστηκαν. Πόσα διαφορετικά ζεύγη ενδείξεων είναι δυνατό να εμφανιστούν (α) αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός και (β) αν είναι γνωστό ότι τα δύο ζάρια έχουν διαφορετική ένδειξη;

α) Αν με **κλ** συμβολίσουμε το ζεύγος ενδείξεων στην περίπτωση κατά την οποία το πρώτο ζάρι έφερε **κ** και το δεύτερο έφερε **λ**, τότε οι δυνατές περιπτώσεις καταγράφονται στον πίνακα 1.1α. Η πρώτη στήλη περιέχει τις περιπτώσεις στις οποίες το πρώτο ζάρι έφερε 1, η δεύτερη στήλη αυτές που το πρώτο ζάρι έφερε 2 και τελικά η τελευταία αυτές που το πρώτο ζάρι έφερε 6. Η τελευταία γραμμή του πίνακα απαριθμεί το πλήθος των διαφορετικών περιπτώσεων της αντίστοιχης στήλης, ενώ το τελευταίο αποτέλεσμα δεξιά μας δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

**Πίνακας 1.1α** Ρίψη δύο ζαριών

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 | |
| 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 | |
| 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 | |
| 14 | 24 | 34 | 44 | 54 | 64 | |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | |
| 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 66 | |
| **6** | **6** | **6** | **6** | **6** | **6** | **6·6=36** |

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των αντικειμένων που θέλουμε να απαριθμήσουμε, ταξινομήθηκε, ως προς δύο χαρακτηριστικά, σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση ταξινομήθηκαν οι περιπτώσεις σε σχέση με το τι έφερε το πρώτο ζάρι, ενώ στη δεύτερη φάση ταξινομήθηκαν οι περιπτώσεις σε σχέση

* Ο Καρτέσιος (1596-1650), που ήταν φιλόσοφος εκτός από μαθηματικός, έδωσε τέσσερις αρχές για το αιτιατό. (1) Μην αποδέχεσαι τίποτε ως αληθές, αν δεν είναι αυταπόδεικτο, (2) να υποδιαιρείς πολύπλοκα προβλήματα σε απλούστερα, (3) λύνε τα προβλήματα προχωρώντας από τα απλά προς τα σύνθετα και (4) στο τέλος να ελέγχεις πάντα το αποτέλεσμα.

με το τι έφερε το δεύτερο ζάρι και με δεδομένο ότι είναι γνωστό το τι έφερε το πρώτο ζάρι. Στην πρώτη φάση έχουμε 6 διαφορετικές περιπτώσεις. Στη δεύτερη φάση έχουμε και πάλι 6 διαφορετικές περιπτώσεις ανεξάρτητα από την ένδειξη του ζαριού στην πρώτη φάση.

Αυτό συμβαίνει επειδή ισχύει η ιδιότητα: «Το δεύτερο ζάρι έχει σταθερό πλήθος διαφορετικών δυνατοτήτων, ανεξάρτητα από το τι ένδειξη εμφανίστηκε στο πρώτο ζάρι». Μια τέτοια ιδιότητα είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ισχύει σε ανεξάρτητες καταστάσεις, όπως είναι στην περίπτωσή μας οι ενδείξεις του ενός ζαριού σε σχέση με αυτές του δεύτερου ζαριού. Λόγω της ιδιότητας αυτής μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο με χρήση του πολλαπλασιασμού όπως φαίνεται στην τελευταία γραμμή του πίνακα 1.1α.

β) Αν τα ζάρια έχουν διαφορετικές ενδείξεις, τότε οι δυνατές ζαριές θα δίνονται στον πίνακα 1.1β

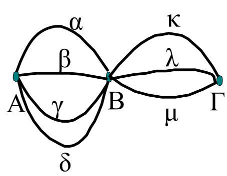
**Πίνακας 1.1β** Ρίψη δύο ζαριών (διαφορ. ενδείξεις)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 | |
| 13 | 23 | 32 | 42 | 52 | 62 | |
| 14 | 24 | 34 | 43 | 53 | 63 | |
| 15 | 25 | 35 | 45 | 54 | 64 | |
| 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | 65 | |
| **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **$6\cdot 5=30$** |

Παρατηρούμε, ότι αν και οι ενδείξεις στην περίπτωση αυτή δεν είναι ανεξάρτητες, αφού αν το πρώτο ζάρι φέρει κάποιον αριθμό το δεύτερο δεν μπορεί να φέρει τον ίδιο, εντούτοις, η προηγούμενη ιδιότητα συνεχίζει να ισχύει. Δηλαδή, ανεξάρτητα από την ένδειξη του πρώτου ζαριού, το δεύτερο έχει 5 δυνατότητες. Λόγω της ιδιότητας αυτής μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο με χρήση του πολλαπλασιασμού, όπως φαίνεται στην τελευταία γραμμή του πίνακα 1.1β.

■

**Παράδειγμα 1.2.** Τέσσερις δρόμοι (α, β, γ, δ) οδηγούν από την πόλη Α στην πόλη Β και τρεις (κ, λ, μ) από την πόλη Β σε μια τρίτη πόλη την Γ. Με πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί κάποιος να πάει από την πόλη Α στην πόλη Γ μέσω της πόλης Β;



Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι υπάρχουν 12 διαφορετικές διαδρομές, οι εξής:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\underbrace{(\alpha,\kappa),\ (\alpha,\lambda),\ (\alpha,\mu),}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$ | $\underbrace{(\beta,\kappa),\ (\beta,\lambda),\ (\beta,\mu),}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$ | $\underbrace{(\gamma,\kappa),\ (\gamma,\lambda),\ (\gamma,\mu),}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$ | $\underbrace{(\delta,\kappa),\ (\delta,\lambda),\ (\delta,\mu)}_{\text{3 ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ}}$ |

Παρατηρούμε ότι και στο παράδειγμα αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο φάσεις. Στην πρώτη απαριθμούμε το πλήθος των διαδρομών που συνδέουν την πόλη Α με την πόλη Β. Στη δεύτερη φάση απαριθμούμε το πλήθος των διαδρομών από την πόλη Β στην πόλη Γ, έχοντας δεδομένη μια διαδρομή της πρώτης φάσης. Οι δύο αυτές φάσεις είναι ανεξάρτητες, αφού με όποιον τρόπο και να πάει κανείς από την πόλη Α στην πόλη Β, υπάρχει πάντα το ίδιο πλήθος διαδρομών από την πόλη Β για την πόλη Γ. Αυτό εξηγεί γιατί η χρησιμοποίηση του γινομένου 4·3=12 δίνει το ζητούμενο πλήθος διαδρομών. ■

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης.

Έστω, ότι ζητούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία ενός πεπερασμένου συνόλου. Έστω ακόμη ότι για τον καθορισμό ή το σχηματισμό του τυχαίου στοιχείου του συνόλου ακολουθούμε m διαδοχικές φάσεις, τέτοιες ώστε, στην πρώτη φάση υπάρχουν $n_1$ δυνατές περιπτώσεις, στη δεύτερη φάση και ανεξάρτητα από αυτό που συνέβη στην πρώτη φάση υπάρχουν $n_2$ δυνατές περιπτώσεις, στην τρίτη φάση και ανεξάρτητα από αυτό που συνέβη στις δύο πρώτες φάσεις υπάρχουν $n_3$ δυνατές περιπτώσεις και συνεχίζοντας ανάλογα στην τελευταία φάση και ανεξάρτητα από αυτό που συνέβη στις προηγούμενες φάσεις υπάρχουν $n_m$ δυνατές περιπτώσεις. Τότε το ζητούμενο πλήθος n των στοιχείων του συνόλου, δίνεται από το γινόμενο των $n_1$, $n_2$, …, $n_m$. Ώστε:

**Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης ή Πολλαπλασιαστική Αρχή.**

Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που ο καθορισμός τους ή ο σχηματισμός τους μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται σε m διαδοχικές φάσεις, τέτοιες ώστε, σε οποιαδήποτε φάση το πλήθος των δυνατοτήτων που απαριθμούνται να είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από το τι συνέβη στις προηγούμενες φάσεις, ισούται με:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m ,$$

όπου $n_k$ , $(k = 1,2,...,m)$, η απαρίθμηση των δυνατοτήτων στην k φάση.

Στα προηγούμενα παραδείγματα η Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης μπορούσε να εφαρμοστεί, αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής της για τις δύο φάσεις που ορίστηκαν.

**Παράδειγμα 1.3.** Με πόσους τρόπους από ένα σύνολο 7 ατόμων, μπορούμε να σχηματίσουμε 3-μελή επιτροπή της οποίας ένα μέλος να είναι πρόεδρος;

Θεωρούμε, ότι ο σχηματισμός της επιτροπής, γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη σχηματίζεται η τριμελής επιτροπή, ενώ στη δεύτερη επιλέγεται ο πρόεδρός της. Εύκολα διαπιστώνεται ότι υπάρχουν 35 διαφορετικές τριμελείς επιτροπές. Μάλιστα, συμβολίζοντας τα άτομα με τα γράμματα α, β, γ, δ, ε, ζ, η, οι επιτροπές αυτές θα είναι οι:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| αβγ | αβζ | αγε | αδε | αεζ | βγδ | βγη | βδη | βζη | γδη | γζη | δζη |
| αβδ | αβη | αγζ | αδζ | αεη | βγε | βδε | βεζ | γδε | γεζ | δεζ | εζη |
| αβε | αγδ | αγη | αδη | αζη | βγζ | βδζ | βεη | γδζ | γεη | δεη | |

Στη δεύτερη φάση και ανεξάρτητα από το ποια επιτροπή σχηματίστηκε στην πρώτη, έχουμε τρεις δυνατότητες να ορίσουμε τον πρόεδρο. Άρα σύμφωνα με τη Θεμελιώδη Αρχή Απαρίθμησης (ΘΑΑ) υπάρχουν 35·5=105 τρόποι να σχηματιστεί η ζητούμενη επιτροπή. Συμβολικά, γράφουμε:

| 3-μελής επιτροπή | Πρόεδρος | ΘΑΑ |
|---|---|---|
| 35 | 3 | 35·3=105 |

■

**Παράδειγμα 1.4.** Οι πινακίδες των ιδιωτικών αυτοκινήτων στην Ελλάδα σχηματίζονται από τρία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου που έχουν αντίστοιχά τους στο Λατινικό και από 4 αριθμητικά ψηφία που σχηματίζουν τετραψήφιο αριθμό. Πόσα το πολύ ιδιωτικά αυτοκίνητα μπορούν να κυκλοφορούν στην Ελλάδα; Πόσα το πολύ από αυτά θα έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσα το πολύ θα έχουν όλα τα σύμβολα διαφορετικά; Πόσα το πολύ αρχίζουν από Μ ή Ν;

Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε πινακίδα μπορεί να θεωρηθεί ότι σχηματίζεται σε 7 φάσεις. Πράγματι στις τρεις πρώτες που σχηματίζονται τα γράμματα, επιλέγονται τρία γράμματα από το σύνολο {Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ, Χ}. Στις επόμενες τέσσερις φάσεις επιλέγονται τέσσερα ψηφία από τα $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, με την απαίτηση το πρώτο από αυτά να μην είναι 0.

Στο πρώτο ερώτημα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης, διότι όλες οι φάσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Στο δεύτερο ερώτημα οι τέσσερις πρώτες φάσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην πέμπτη φάση για τον καθορισμό του 2ου ψηφίου, έχουμε 9 δυνατότητες ανεξάρτητα από το ψηφίο που επιλέχθηκε στην 4η φάση, αφού πρέπει το ψηφίο αυτό να είναι διαφορετικό από το προηγούμενο. Όμοια στην έκτη φάση έχουμε 8 δυνατότητες αφού το ψηφίο πρέπει να είναι διαφορετικό από τα δύο προηγούμενα. Συνεχίζοντας ανάλογα, συμπεραίνουμε ότι και στο δεύτερο ερώτημα, αλλά και στα επόμενα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης. Έτσι καταλήγουμε στο σχήμα:

| 1ο γράμμα | 2ο γράμμα | 3ο γράμμα | 1ο ψηφίο | 2ο ψηφίο | 3ο ψηφίο | 4ο ψηφίο | ΘΑΑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 14 | 14 | 9 | 10 | 10 | 10 | 24 696 000 |
| 14 | 14 | 14 | 9 | 9 | 8 | 7 | 12 446 784 |
| 14 | 13 | 12 | 9 | 9 | 8 | 7 | 9 906 624 |
| 2 | 14 | 14 | 9 | 10 | 10 | 10 | 3 528 000 |

που δίνει τα ζητούμενα πλήθη πινακίδων για τα τέσσερα ερωτήματα.

Παρατηρήστε ότι αν στις πινακίδες χρησιμοποιούνταν δύο μόνον γράμματα το μέγιστο πλήθος πινακίδων θα ήταν 1 764 000, που σημαίνει ότι δεν θα έφθαναν για να καλύψουν όλα τα ιδιωτικά αυτοκίνητα.

■

**Παράδειγμα 1.5.** Πόσοι περιττοί τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 3, 6, 7 και 8, όταν (α) μπορούν να έχουν και όμοια ψηφία, (β) έχουν όλα τα ψηφία διαφορετικά.

α) Θεωρούμε ότι ο σχηματισμός του τριψηφίου αριθμού γίνεται σε τρεις φάσεις. Στην 1η διαλέγουμε το πρώτο ψηφίο του, στη 2η το δεύτερο και στην 3η το τρίτο. Οι τρεις φάσεις είναι ανεξάρτητες, αφού το ψηφίο που διαλέγουμε σε κάθε φάση δεν δίνει κανέναν περιορισμό για τα ψηφία που θα διαλέξουμε στις επόμενες. Συμβολικά γράφουμε:

| **1ο ψηφίο** | **2ο ψηφίο** | **3ο ψηφίο** | **ΘΑΑ** |
|---|---|---|---|
| **5** | **5** | **3** | **5·5·3=75** |
| Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 1η θέση | Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στη 2η θέση | Διότι μόνο τα 3 από τα ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 3η θέση | |

δηλαδή υπάρχουν 75 αριθμοί.

β) Αν θεωρήσουμε τις ίδιες φάσεις όπως στο (α), τότε στην γ΄ φάση δεν ικανοποιείται η προϋπόθεση εφαρμογής της θεμελιώδους αρχής απαρίθμησης. Πράγματι, το αποτέλεσμα στην 3η φάση θα είναι 3, αν δεν έχει επιλεγεί περιττός αριθμός στις δύο πρώτες φάσεις, θα είναι 2, αν το ένα από τα δύο πρώτα ψηφία είναι περιττό και θα είναι 1, αν τα δύο πρώτα ψηφία είναι περιττοί.

Το πρόβλημα λύνεται, αν θεωρήσουμε ως πρώτη φάση το σχηματισμό του τρίτου ψηφίου και ως 2η και 3η το σχηματισμό των άλλων ψηφίων. Τώρα η Θεμελιώδης Αρχή μπορεί να εφαρμοστεί και δίνει 36 αριθμούς.

| **3ο ψηφίο** | **1ο ψηφίο** | **2ο ψηφίο** | **ΘΑΑ** |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 3 | 3·4·3=36 |
| Διότι 3 από τα ψηφία είναι περιττοί | Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ψηφίο που επιλέξαμε στην προηγούμενη φάση | Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα ψηφία που επιλέξαμε στις προηγούμενες φάσεις | |

Ένας δεύτερος τρόπος για να δοθεί απάντηση στο ερώτημα αυτό, προϋποθέτει τη διάσπαση του προβλήματος σε απλούστερα προβλήματα, για τα οποία να μπορεί να εφαρμοστεί η θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης. Έτσι, εξετάζοντας κατά σειρά το 1ο, 2ο και 3ο ψηφίο, διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

i. άρτιος – άρτιος – περιττός
ii. άρτιος – περιττός – περιττός
iii. περιττός – άρτιος – περιττός
iv. περιττός – περιττός – περιττός

Η θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις, δίνει:

| | 1ο ψηφίο | $2^o$ ψηφίο | 3ο ψηφίο | ΘΑΑ |
|---|---|---|---|---|
| i. | 2 | 1 | 3 | 6 |
| ii. | 2 | 3 | 2 | 12 |
| iii. | 3 | 2 | 2 | 12 |
| iv. | 3 | 2 | 1 | 6 |
| | | | **Σύνολο** | **36** |

Προσθέτοντας βρίσκουμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

■

Στο δεύτερο τρόπο του προηγουμένου παραδείγματος, για την εύρεση του τελικού αποτελέσματος χρειάστηκε να προσθέσουμε τα επιμέρους αποτελέσματα. Αυτό είναι σωστό όταν οι κατηγορίες στις οποίες υποδιαιρέσαμε το σύνολο που μας ενδιαφέρει, δεν έχουν μεταξύ τους κοινά στοιχεία. Τότε, ισχύει μια αρχή της απαρίθμησης, που λέγεται Προσθετική Αρχή.

**Προσθετική Αρχή Απαρίθμησης.**

Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που έχει διαμεριστεί σε m ξένες μεταξύ τους κατηγορίες, ισούται με :

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m \,,$$

όπου $n_k$ , $(k = 1, 2, \ ..., m)$ , το πλήθος στοιχείων στην k κατηγορία.

**Παράδειγμα 1.6.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να συγκροτήσουμε τριμελή επιτροπή από 10 καθηγητές και 15 φοιτητές, όταν θέλουμε η επιτροπή να έχει τουλάχιστον ένα καθηγητή και τουλάχιστον ένα φοιτητή;

Είναι φανερό ότι οι απαιτήσεις του προβλήματος ικανοποιούνται όταν η επιτροπή περιέχει είτε (α) έναν καθηγητή και δύο φοιτητές είτε (β) δύο καθηγητές και έναν φοιτητή. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρούμε την επιτροπή να σχηματίζεται σε δύο φάσεις ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στην πρώτη επιλέγουμε τους καθηγητές και στη δεύτερη τους φοιτητές. Η θεμελιώδης αρχή δίνει για την περίπτωση (α) 10·105=1050 τρόπους, και για την περίπτωση (β) 45·15=675 τρόπους. Η προσθετική αρχή δίνει το τελικό αποτέλεσμα, ότι η επιτροπή σχηματίζεται με 1725 (=1050+675) τρόπους.

■

**Ασκήσεις**

**1.2.1.** Πόσα χρήματα στοιχίζει ένα σύστημα στο ΠΡΟΠΟ με μία τριπλή και τρεις διπλές παραλλαγές (και οι υπόλοιποι αγώνες στάνταρ);

**1.2.2.** Ένας καταστηματάρχης ετοίμων ενδυμάτων πρόκειται να ανανεώσει τα πουκάμισα που διαθέτει. Πόσα πρέπει να παραγγείλει αρχικά, όταν υπάρχουν 5 είδη σε τρία διαφορετικά χρώματα και 4 διαφορετικά μεγέθη και θέλει να έχει δύο από κάθε συνδυασμό;

**1.2.3.** Πόσα μονοπάτια μήκους 3 υπάρχουν σε ένα μοναδιαίο κύβο, που να συνδέουν μια κορυφή του με αυτήν που βρίσκεται διαγωνίως απέναντι;

**1.2.4.** Η αίθουσα ενός κινηματογράφου έχει 6 πόρτες. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μπει από μια πόρτα και να βγει από άλλη;

**1.2.5.** Πόσοι ακέραιοι μεγαλύτεροι από 53000 έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά και κανένα από τα ψηφία τους δεν είναι 8 ή 9;

**1.2.6.** Μία επιτροπή πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο μέλη. Η επιτροπή μπορεί να περιέχει το πολύ έναν υδραυλικό, το πολύ έναν πιανίστα, το πολύ έναν νταλικέρη, το πολύ έναν καθηγητή, το πολύ έναν πυροσβέστη και το πολύ δύο γιατρούς. Έστω ότι δύο επιτροπές με το ίδιο πλήθος επαγγελματιών από κάθε επάγγελμα είναι ισοδύναμες. Πόσες διαφορετικές επιτροπές (μη- ισοδύναμες), μπορούν να οριστούν;

**1.2.7.** Αν υπολογιστεί το 52! πόσα διαδοχικά μηδενικά θα εμφανιστούν στο τέλος του αποτελέσματος;

**1.2.8.** Μία βιβλιοθήκη έχει 50 000 βιβλία που πρόκειται να μηχανογραφηθούν. Ο βιβλιοθηκάριος σκέφθηκε να δώσει σε κάθε βιβλίο έναν κωδικό που να αποτελείται από 2 γράμματα και τρία ψηφία. Υπάρχουν αρκετοί κωδικοί ώστε να κωδικοποιηθούν όλα τα βιβλία με διαφορετικούς κωδικούς;

**1.2.9.** Ένας πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με 0 ή 1 λέγεται (0,1)-πίνακας. Πόσοι (0,1)-πίνακες διάστασης $m \times n$ υπάρχουν;

**1.2.10.** Παίρνουμε τυχαία τρία από τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες είναι οι διαφορετικές τριάδες στις οποίες δεν εμφανίζονται διαδοχικά γράμματα;

**1.2.11.** Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι από 1 000 000, περιέχουν το ψηφίο 2;

**1.2.12.** Για την παράσταση των ακεραίων αριθμών οι υπολογιστές χρησιμοποιούν δυαδικές συμβολοσειρές (ακολουθίες με στοιχεία 0 ή 1) μήκους p. Η τελευταία θέση στη συμβολοσειρά χρησιμοποιείται για το πρόσημο ενώ οι προηγούμενες p−1 θέσεις περιέχουν το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού. Το πρόσημο του αριθμού 0 είναι + ή −. Βρέστε (α) ποιο είναι το μέγιστο πλήθος διαφορετικών ακεραίων που μπορούν να παρασταθούν με τον τρόπο αυτό για δοσμένο p, (β) ποιος είναι ο μέγιστος ακέραιος που παριστάνεται με τον τρόπο αυτό.

## 1.3. Μεταθέσεις – Διατάξεις - Συνδυασμοί

Ας ξαναδούμε κάποια σημεία από τα παραδείγματα της παραγράφου 1.2. Στην πρώτη φάση του Παραδ. 1.3 χρειάστηκε να βρούμε το πλήθος των τριμελών επιτροπών που σχηματίζονται από 7 άτομα. Αυτό το κάναμε με καταγραφή των 35 περιπτώσεων. Τι θα κάναμε, όμως, αν π.χ. είχαμε να υπολογίσουμε το πλήθος των 15-μελών επιτροπών από 650 άτομα; Στο Παράδ. 1.6 βρήκαμε ότι υπάρχουν 105 τρόποι να πάρουμε 2 φοιτητές από τους 15 και 45 τρόποι να πάρουμε δύο καθηγητές από τους 10. Θα μπορούσαμε να βρούμε αυτά τα αποτελέσματα με καταγραφή των περιπτώσεων. Τι θα συμβεί, όμως, αν οι καθηγητές είναι 100 και οι φοιτητές 1500;

Ερωτήματα όπως τα προηγούμενα μας υποχρεώνουν να αναζητήσουμε τρόπους οργάνωσης των διαφόρων περιπτώσεων, έτσι ώστε να γίνει ευκολότερος και ακριβέστερος ο υπολογισμός του πλήθους συνόλων που εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα απαρίθμησης. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τέτοιους τύπους υπολογισμού.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n αντικείμενα ή καταστάσεις που διακρίνονται μεταξύ τους από το χρώμα, το μέγεθος ή εν γένει κάποια χαρακτηριστική τους ιδιότητα. Έστω ακόμη ότι διαλέγουμε k από τα αντικείμενα απ' αυτά κάτω από κάποιες προϋποθέσεις και τα τοποθετούμε δίπλα-δίπλα σε σειρά. Η ομάδα των k αντικειμένων θα λέγεται *συνδυασμός*, όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των αντικειμένων και *διάταξη* όταν μας ενδιαφέρει. Αν σε μια διάταξη εξαντλούνται όλα τα n αντικείμενα, τότε λέμε ότι έχουμε *μετάθεση*. Αν επιτρέπεται στα k αντικείμενα που επιλέξαμε να υπάρχουν και όμοια, αν δηλ. επιτρέπεται η επανάληψη των αντικειμένων, τότε θα μιλάμε για *επαναληπτικούς συνδυασμούς*, *επαναληπτικές διατάξεις* και για *μεταθέσεις με επανάληψη*, αντίστοιχα.

Για τις ανάγκες των προβλημάτων απαρίθμησης, και όχι μόνο, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών, διατάξεων, μεταθέσεων κλπ., που σχηματίζονται για δοσμένες τιμές των n και k.

Μία χρήσιμη αποδεικτική μέθοδος στη Συνδυαστική είναι η μέθοδος της *διπλής απαρίθμησης*. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή,

> Αν ένα σύνολο απαριθμηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους, τα δύο αποτελέσματα οφείλουν να είναι ίσα.

Η μέθοδος προκύπτει από την προφανή ιδιότητα που ισχύει σε πίνακες διπλής εισόδου, στους οποίους προκειμένου να βρούμε το άθροισμα όλων των στοιχείων βρίσκουμε πρώτα τα αθροίσματα γραμμών και τα προσθέτουμε και στη συνέχεια τα αθροίσματα στηλών και τα προσθέτουμε επίσης. Η ισότητα των δύο τελικών αθροισμάτων υπολογίζει και ταυτόχρονα ελέγχει το ζητούμενο άθροισμα.

Για την απλοποίηση των τύπων που υπολογίζουν τις μεταθέσεις, συνδυασμούς διατάξεις κλπ., χρησιμοποιούμε το σύμβολο n! (διαβάζουμε n παραγοντικό), που ορίζεται ως το γινόμενο των n πρώτων φυσικών αριθμών ή με 1 όταν n=0, δηλ.

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n,\ \ n\geq 1 \quad \text{και} \quad 0!=1 \tag{1.2}$$

### *1.3.1 Μεταθέσεις*

Ας υποθέσουμε, ότι έχουμε n αντικείμενα, τα οποία πρόκειται να τοποθετηθούν σε μια σειρά. Όποια και αν είναι τα αντικείμενα, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να τα αντιστοιχίσουμε στα πρώτα n γράμματα (αν το n είναι σχετικά μικρό), ή στους πρώτους n φυσικούς αριθμούς. Έτσι, οι διάφορες τοποθετήσεις των n αντικειμένων σε σειρά, μπορούν να παρασταθούν με τις τοποθετήσεις των n γραμμάτων ή αριθμών σε σειρά. Δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

> Μεταθέσεις n διαφορετικών αντικειμένων ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία σειρά επάνω σε μία ευθεία γραμμή. Το πλήθος των μεταθέσεων συμβολίζεται με $M_n$.

Είναι φανερό ότι για ένα (n=1) αντικείμενο έχουμε μία μόνο μετάθεση ($M_1$=1). Για δύο αντικείμενα, που τα συμβολίζουμε α, β, έχουμε δύο μεταθέσεις τις:

α β  και  β α ,

που σημαίνει ότι $M_2$=2.

Για να υπολογίσουμε τις μεταθέσεις 3 αντικειμένων, των α, β και γ, θεωρούμε τις μεταθέσεις των δύο (α β και β α) και τις συμπληρώνουμε με το τρίτο αντικείμενο γ. Το γ μπορεί να τοποθετηθεί είτε πριν, είτε ανάμεσα, είτε και μετά τα άλλα, σχηματίζοντας τις έξι μεταθέσεις:

γ α β,  α γ β,  α β γ ,

γ β α,  β γ α,  β α γ ,

που σημαίνει ότι $M_3$=6.

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό και χρησιμοποιώντας τη μαθηματική επαγωγή, μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα στο συμπέρασμα, ότι για n αντικείμενα ισχύει:

$$M_n=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n=n!,\quad n\geq 1 \tag{1.3}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε ευκολότερα με τη χρήση της Θεμελιώδους Αρχής Απαρίθμησης. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ότι ο καθορισμός μιας μετάθεσης των n αντικειμένων γίνεται σε n διαδοχικές φάσεις. Στην 1η καθορίζουμε ποιο από τα αντικείμενα θα μπει πρώτο στη σειρά, στη 2η ποιο θα μπει δεύτερο, κ.ο.κ. στην n-στή καθορίζουμε ποιο από τα αντικείμενα θα μπει τελευταίο στη σειρά. Οι φάσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες, ικανοποιούν, όμως, τις προϋποθέσεις εφαρμογής της ΘΑΑ.

Έτσι, εύκολα διαπιστώνουμε κατ' αρχήν ότι το πρώτο αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί με n τρόπους, αφού κάθε αντικείμενο μπορεί να μπει στην πρώτη θέση. Το δεύτερο στη σειρά δεν είναι ανεξάρτητο από αυτό που τοποθετήθηκε πρώτο, αφού πρέπει να διαφέρει από αυτό. Όμως, όποιο και αν είχε τοποθετηθεί στην πρώτη θέση, στη δεύτερη θα υπάρχουν n–1 δυνατότητες (κάποιο από τα υπόλοιπα). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, έχουμε συμβολικά:

| 1η θέση | 2η θέση | 3η θέση | … | (n-1)-στή θέση | n-στή θέση | ΘΑΑ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n | n–1 | n–2 | … | 2 | 1 | 1·2·3·… ·n |

που μας δίνει πάλι το αποτέλεσμα (1.3)

Σε διάφορες περιπτώσεις, είναι χρήσιμο εκτός από τον υπολογισμό του πλήθους των διαφορετικών μεταθέσεων, να μπορούμε επίσης να τις καταγράψουμε. Διάφοροι τρόποι καταγραφής μπορούν να προταθούν. Ένας από αυτούς είναι ο τρόπος που χρησιμοποιήθηκε προηγούμενα για την απόδειξη του τύπου (1.3). Δηλαδή, από κάθε μετάθεση των n αντικειμένων, που υποτίθεται ότι έχουν ήδη καταγραφεί, να σχηματιστούν n+1 μεταθέσεις των n+1 αντικειμένων, με παρεμβολή του (n+1)-στού αντικειμένου στις n+1 θέσεις που δημιουργούνται. Η κατασκευή ενός αλγορίθμου που καταγράφει με τον τρόπο αυτό τις μεταθέσεις, αφήνεται ως άσκηση για τους αναγνώστες.

Ένας ενδιαφέρων τρόπος είναι η καταγραφή των μεταθέσεων με αύξουσα αλφαριθμητική σειρά. Για παράδειγμα, οι μεταθέσεις 3 αντικειμένων με αύξουσα αλφαριθμητική σειρά είναι Α Β Γ, Α Γ Β, Β Α Γ, Β Γ Α, Γ Α Β, Γ Β Α. Ο αλγόριθμος που μας δίνει αυτή την καταγραφή, δίνεται αναλυτικά στην παράγραφο 1.6. Ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα, το metath.exe, που μας δίνει με αύξουσα αλφαριθμητική σειρά τις μεταθέσεις των n αντικειμένων 1, 2, ..., n, ή των A, B, C, …., (n το πλήθος γράμματα), κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις παρατηρήσεις της παραγράφου 1.6 και είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://users.auth.gr/cmoi.

**Παράδειγμα 1.7.** Δύο άνδρες (α, β) και τρεις γυναίκες (γ, δ, ε) είναι υποψήφιοι για μια θέση σε μία εταιρεία. Μία επιτροπή για να κάνει την τελική επιλογή, κάλεσε τους υποψηφίους για συνέντευξη. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να δοθούν αυτές οι συνεντεύξεις; Σε πόσους από τους τρόπους αυτούς ο πρώτος και ο τελευταίος είναι γυναίκα;

Για το πρώτο ερώτημα είναι φανερό ότι κάθε τρόπος που θα δοθούν οι συνεντεύξεις είναι μία μετάθεση των πέντε γραμμάτων α, β, γ, δ και ε. Άρα υπάρχουν $M_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ τρόποι.

Για το δεύτερο ερώτημα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η σειρά των συνεντεύξεων καθορίζεται σε πέντε φάσεις, όπου ως 1η και 2η φάση θεωρούμε την επιλογή του πρώτου και του τελευταίου από τους υποψηφίους ενώ ως 3η,4η και 5η φάση θα είναι η επιλογή των ενδιάμεσων υποψηφίων. Η θεμελιώδης αρχή, τότε, δίνει:

| 1ος υποψήφιος | 5ος υποψήφιος | 2ος υποψήφιος | 3ος υποψήφιος | 4ος υποψήφιος | ΘΑΑ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 36 |

δηλαδή 36 τρόποι.

■

**Παράδειγμα 1.8.** Ένας περιοδεύων πωλητής πρόκειται να επισκεφθεί n πόλεις για δειγματισμό. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε σειρά επίσκεψης των πόλεων είναι εφικτή με διαφορετικό βέβαια κόστος. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να γίνει η επίσκεψη των n πόλεων όταν ο πωλητής μένει σε μία από αυτές; Ποιο το ελάχιστο κόστος της επίσκεψης, όταν είναι γνωστό το κόστος $c_{ij}$ μεταξύ των πόλεων i και j;

Ας υποθέσουμε ότι οι πόλεις αριθμούνται από 1 έως n και ότι ο πωλητής μένει στην πόλη 1. Τότε, αφού ο πωλητής πρέπει να επιστρέψει στην έδρα του, θα υπάρχουν $(n-1)!$ τρόποι να γίνει η επίσκεψη. Κατασκευάζοντας επομένως έναν αλγόριθμο που υπολογίζει το κόστος για όλες τις μεταθέσεις των $n-1$ πόλεων, θα μπορούσαμε να βρούμε εύκολα τη ζητούμενη βέλτιστη διαδρομή.

Αν το n είναι σχετικά μικρό, τότε η προηγούμενη διαδικασία είναι πράγματι ικανοποιητική. Για μεγάλα n, όμως, τα πράγματα δεν είναι πολύ καλά. Για να δούμε το μέγεθος του προβλήματος, θεωρούμε ότι ο υπολογισμός του κόστους ολόκληρης της διαδρομής είναι για τον υπολογιστή μία πράξη. Τότε, η συνολική διαδικασία θα είναι για τον υπολογιστή $(n-1)!$ πράξεις. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις τιμές του $(n-1)!$ για διάφορες τιμές του n.

| n | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(n-1)!$ | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | 362800 | $1.55\cdot 10^{25}$ |

Η τιμή 25! που δίνεται στον πίνακα αυτό είναι τεράστιος αριθμός. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι ένας ισχυρός υπολογιστής μπορεί να ολοκληρώσει ένα δισεκατομμύριο πράξεις το δευτερόλεπτο, για να κάνει 25! πράξεις θα χρειαστεί σχεδόν μισό δισεκατομμύριο χρόνια.

■

Η παραπάνω παρατήρηση δικαιολογεί το χαρακτηρισμό του προβλήματος του περιοδεύοντος αντιπροσώπου ως NP-complete προβλήματος, δηλαδή ως προβλήματος για το οποίο δεν μπορεί να βρεθεί αλγόριθμος που να λύνει το γενικό πρόβλημα σε πραγματικό χρόνο.

Από την άλλη πλευρά από το τελευταίο παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις που απαιτείται ο υπολογισμός μεγάλων τιμών του n!. Έτσι, προσπάθησαν πολλοί να δώσουν προσεγγιστικούς τύπους υπολογισμού για την ποσότητα αυτή, με πιο γνωστό τον τύπο του Stirling.

**Τύπος Stirling**: Ισχύει κατά προσέγγιση

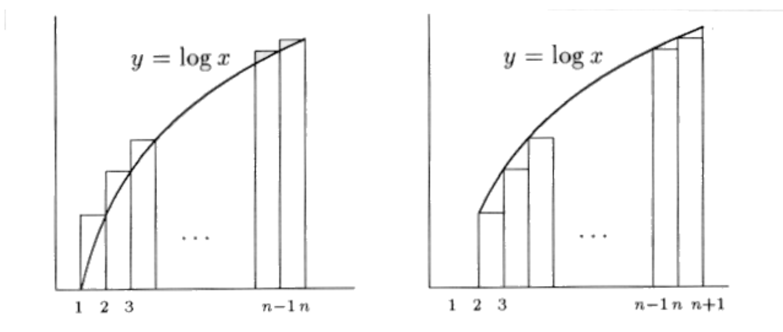
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1.4}$$

Η απόδειξη του τύπου (1.4) παραλείπεται. Αντί αυτού αποδεικνύουμε μια σχετική ανισότητα.

**Θεώρημα 1.1.** Ισχύει:
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \frac{1}{4}(n+1)e^2\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1.5}$$

Απόδειξη

Παρατηρούμε καταρχήν ότι $\ln(n!) = \sum_{i=2}^{n} \ln i$. Προσεγγίζουμε στη συνέχεια το άθροισμα των λογαρίθμων που εμφανίστηκε, με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $y = \ln x$, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.1), απ' όπου προκύπτει:




Σχήμα 1.1

$$\int_1^n \ln x\,dx \le \sum_{i=2}^{n} \ln i \le \int_2^{n+1} \ln x\,dx,$$

που ισοδυναμεί με την ανισότητα

$$n\ln n - n + 1 \le \ln(n!) \le (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2. \tag{1.6}$$

Η αριστερή ανισότητα στην (1.6) προκύπτει με λογαρίθμιση της αριστερής ανισότητας της (1.5). Για τη δεξιά ανισότητα, παρατηρούμε πρώτα ότι ισχύει διαδοχικά:

$$\ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad n\ln(n+1) < n\ln n + 1 \quad \Rightarrow$$

$$(n+1)\ln(n+1) < \ln(n+1) + n\ln n + 1,$$

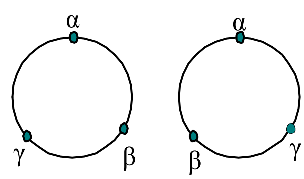
που όταν το αντικαταστήσουμε στο τελευταίο μέλος της ανισότητας (1.6) βρίσκουμε το ζητούμενο.

■

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε και πάλι n αντικείμενα, τα οποία πρόκειται να τοποθετηθούν σε ένα κύκλο με μία ορισμένη φορά. Ορίζουμε:

> Κυκλικές μεταθέσεις n αντικειμένων ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι, με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα n αντικείμενα το ένα μετά το άλλο σε ένα κύκλο με ορισμένη φορά. Το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων συμβολίζεται με $K_n$.

Οι κυκλικές μεταθέσεις 3 αντικειμένων είναι $K_3=2$ και φαίνονται στο σχήμα. Η πρώτη από αυτές ταυτίζεται με οποιανδήποτε από τις μεταθέσεις α β γ, β γ α και γ α β. Η δεύτερη ταυτίζεται με τις α γ β, γ β α και β α γ.




Γενικά, διαπιστώνεται εύκολα ότι κάθε κυκλική μετάθεση των n αντικειμένων ταυτίζεται με n απλές μεταθέσεις. Έτσι, για να υπολογίσουμε τις κυκλικές μεταθέσεις, αρκεί να διαιρέσουμε το πλήθος των απλών μεταθέσεων με n. Άρα ισχύει:

$$K_n = \frac{M_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)! \tag{1.7}$$

**Παράδειγμα 1.9.** Με πόσους τρόπους 4 αγόρια και 4 κορίτσια μπορούν να καθίσουν εναλλάξ σε κυκλικό τραπέζι οκτώ θέσεων;

Λύση

Κάθε τοποθέτηση των οκτώ παιδιών στο τραπέζι μπορεί να θεωρηθεί ότι πραγματοποιείται σε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους φάσεις. Στην πρώτη κάθονται τα κορίτσια σε τέσσερις θέσεις που έχουν κενό κάθισμα ανάμεσά τους και στη δεύτερη κάθονται τα αγόρια στις θέσεις που απομένουν.

Για τα κορίτσια έχουμε 3! δυνατές τοποθετήσεις, όσες δηλαδή οι κυκλικές μεταθέσεις των τεσσάρων κοριτσιών. Για τα αγόρια, όμως, έχουμε 4! δυνατές τοποθετήσεις. Έτσι η Θεμελιώδης Αρχή δίνει $3!\cdot 4!=144$ τρόπους.

■

Στα προηγούμενα παραδείγματα τα n αντικείμενα ήταν όλα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο. Υπάρχουν, όμως, περιπτώσεις όπου κάποια από τα αντικείμενα είναι όμοια. Για την καλύτερη κατανόηση της περίπτωσης αυτής, ας δούμε πρώτα το επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.10.** Πόσες λέξεις, έστω και χωρίς νόημα, σχηματίζονται με τις διάφορες αναδιατάξεις των γραμμάτων της λέξης ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ;

Λύση

Η δοθείσα λέξη έχει 9 γράμματα. Αν ήταν όλα διαφορετικά μεταξύ τους, οι αναδιατάξεις των 9 γραμμάτων θα ήταν όσες οι μεταθέσεις των 9 γραμμάτων δηλαδή $9!=362880$. Όμως, εδώ έχουμε ίδια γράμματα. Συγκεκριμένα έχουμε τέσσερα Τ, δύο Α, ένα Υ, ένα Ο και ένα Η. Έτσι, αν σε κάποια μετάθεση μένουν όλα τα γράμματα στη θέση τους εκτός από κάποια Τ, που αντιμετατίθενται μεταξύ τους, τότε δεν θα διαφέρει από την αρχική.

Για να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων, σκεφτόμαστε το επόμενο τέχνασμα. Αντικαθιστούμε τα Τ με τα σύμβολα $Τ_1$, $Τ_2$, $Τ_3$ και $Τ_4$ και τα Α με τα $Α_1$ , $Α_2$. Τότε, αντί της λέξης ΤΤΤΤΑΑΥΟΗ, θα έχουμε τη λέξη:

$$Τ_1 , Τ_2 , Τ_3 , Τ_4 , Α_1 , Α_2 , Υ , Ο , Η. \tag{1.8}$$

Θεωρούμε όλες τις μεταθέσεις των γραμμάτων (1.8) που αφήνουν τα άλλα γράμματα εκτός από τα $T_k$ στη θέση τους. Υπάρχουν 4!=24 τέτοιες μεταθέσεις και είναι φανερό ότι όλες αντιστοιχούν στην ίδια λέξη ΤΤΤΤΑΑΥΟΗ. Όμοια θεωρούμε τις 2!=2 μεταθέσεις των γραμμάτων (1.8), που εναλλάσσουν το $A_1$ με το $A_2$ και αφήνουν τα άλλα γράμματα στη θέση τους. Εφαρμόζοντας την ΘΑΑ βρίσκουμε ότι έχουμε τελικά 4!·2!=48 μεταθέσεις, που όλες αντιστοιχούν στην ίδια λέξη ΤΤΤΤΑΑΥΟΗ. Αυτό συμβαίνει και για οποιαδήποτε άλλη αναδιάταξη των γραμμάτων της λέξεως ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ. Έτσι, καταλήγουμε ότι πρέπει να διαιρέσουμε το 9! (πλήθος μεταθέσεων των γραμμάτων (1.8)) με το 48 για να βρούμε το ζητούμενο. Έχουμε λοιπόν:

Ζητούμενες αναδιατάξεις = 9!/48=7560.

■

Γενικεύοντας το προηγούμενο ας υποθέσουμε ότι έχουμε και πάλι n αντικείμενα, τα οποία, όμως, δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους και πρόκειται να τοποθετηθούν σε μία γραμμή. Ορίζουμε:

**Επαναληπτικές μεταθέσεις n** αντικειμένων από τα οποία $k_1$ είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα άλλα, $k_2$ είναι επίσης ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα άλλα, κ.ο.κ. $k_\lambda$ είναι επίσης ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα άλλα, ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι, με τους οποίους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε σειρά. Το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων συμβολίζεται: $M_n^{k_1,k_2,\ldots,k_\lambda}$ όπου ισχύει $k_1+k_2+\ldots+k_\lambda=n$ .

Για τον υπολογισμό των επαναληπτικών μεταθέσεων, εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα 1.10. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο πλήθος επαναληπτικών μεταθέσεων είναι x και έστω

$$\underbrace{\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_1}_{k_1\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\alpha},\underbrace{\alpha_2,\alpha_2,\ldots,\alpha_2}_{k_2\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\alpha},\ldots,\underbrace{\alpha_\lambda,\alpha_\lambda,\ldots,\alpha_\lambda}_{k_\lambda\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\alpha}$$

μία από αυτές. Αν αριθμήσουμε τα $k_1$ αντικείμενα που είναι ίσα με $\alpha_1$ με τους αριθμούς 1 έως $k_1$ και θεωρήσουμε τα αντικείμενα αυτά να μετατίθενται μεταξύ τους, θα προκύψουν $k_1!$ απλές μεταθέσεις. Όμοια, μεταθέτοντας τα $k_2$ αντικείμενα που είναι ίσα με $\alpha_2$ θα προκύψουν $k_2!$ απλές μεταθέσεις. Συνεχίζοντας ανάλογα και χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη αρχή βρίσκουμε ότι από τις x επαναληπτικές μεταθέσεις προκύπτουν $x\cdot k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots k_\lambda!$ απλές μεταθέσεις, που ταυτίζονται με τις n! μεταθέσεις των n αντικειμένων.

Αποδείχθηκε επομένως ότι:

$$M_n^{k_1,k_2,\ldots,k_\lambda} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_\lambda!}, \quad \text{με} \quad k_1+k_2+\ldots+k_\lambda = n \tag{1.9}$$

■

**Παράδειγμα 1.11.** Διαθέτουμε 5 αντίτυπα ενός βιβλίου Α, 3 αντίτυπα άλλου βιβλίου Β και 4 αντίτυπα ενός τρίτου βιβλίου Γ. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα βιβλία αυτά να τοποθετηθούν με τυχαίο τρόπο σε ένα ράφι μιας βιβλιοθήκης;

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.9) προκύπτει αμέσως ότι:

$$M_{12}^{5,3,4} = \frac{12!}{5!\cdot 3!\cdot 4!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{5!\cdot 3!\cdot 4!} = 27720.$$

■

**Σημείωση**. Ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα, το permut.exe, μας δίνει τις επαναληπτικές μεταθέσεις n αντικειμένων από τα οποία $b_1$ είναι ίσα με 1, $b_2$ είναι ίσα με 2, και τελικά $b_k$ είναι ίσα με k, όπου $b_1+b_2+\ldots+b_k=n$. Το πρόγραμμα είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://users.auth.gr/cmoi.

### *1.3.2 Διατάξεις*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n αντικείμενα, από τα οποία πρόκειται να επιλέξουμε τα k, (k≤n) και να τα τοποθετήσουμε σε μια γραμμή με τη σειρά που τα επιλέξαμε. Δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

> **Διατάξεις** n αντικειμένων ανά k, (k≤n), ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τα k από τα n αντικείμενα και να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία γραμμή, διατηρώντας τη σειρά επιλογής τους. Το πλήθος των διατάξεων των n ανά k συμβολίζεται με $\Delta_n^k$.

Για τον υπολογισμό του πλήθους των διατάξεων, εφαρμόζουμε και πάλι την θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης. Θεωρούμε ότι η τυχαία διάταξη σχηματίζεται σε k φάσεις ανάλογες με αυτές, που ορίσαμε στον υπολογισμό των μεταθέσεων. Έχουμε:

| 1η θέση | 2η θέση | 3η θέση | … | (k–1)-στή θέση | k-στή θέση | ΘΑΑ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ν | n–1 | n–2 | … | n– (k–2) | n– (k–1) | n· (n–1)· …·(n–k+1) |

που μας δίνει για τις διατάξεις τον επόμενο τύπο:

$$\Delta_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.10}$$

Παρατηρήστε ότι, αν στη σχέση (1.10) θέσουμε k=n, προκύπτει ότι $\Delta_n^n = n! = M_n$, κάτι που είναι σωστό, δεδομένου ότι οι διατάξεις των n αντικειμένων ανά n είναι όσες οι μεταθέσεις των n αντικειμένων.

**Παράδειγμα 1.12.** Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία σχηματίζονται με τα ψηφία {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;

Λύση

Είναι φανερό ότι το ζητούμενο προκύπτει με την επιλογή 4 από τα 7 ψηφία, που όμως να είναι τέτοια ώστε το 0 να μην είναι πρώτο ψηφίο. Έτσι αρκεί από τις διατάξεις των 7 ανά 4 (που είναι όλοι οι αριθμοί με 4 ψηφία από τα δοθέντα 7), να αφαιρέσουμε τις διατάξεις των 6 ανά 3 (που είναι εκείνοι από τους προηγούμενους με πρώτο ψηφίο το 0 και επομένως με 3 ψηφία από τα υπόλοιπα 5). Άρα, θα είναι:

$$\Delta_7^4 - \Delta_6^3 = \frac{7!}{(7-4)!} - \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6\cdot 6!}{3!} = 6! = 720\,.$$

Για το δεύτερο ερώτημα ακολουθώντας τον προηγούμενο συλλογισμό, βρίσκουμε ότι οι άρτιοι που λήγουν σε 2 είναι $\Delta_6^3 - \Delta_5^2$, ενώ αυτοί που λήγουν σε 0 είναι $\Delta_6^3$. Άρα το ζητούμενο είναι:

$$3(\Delta_6^3 - \Delta_5^2) + \Delta_6^3 = 4\frac{6!}{(6-3)!} - 3\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{(4\cdot 6-3)5!}{3!} = 420\,.$$

Μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη αρχή, αφού προηγουμένως χωρίσουμε σε δύο κατηγορίες τους αριθμούς, αυτούς που έχουν 1ο ψηφίο άρτιο και αυτούς που έχουν 1ο ψηφίο περιττό. Ως α΄ φάση την επιλογή του 1ου ψηφίου, ως β΄ φάση την επιλογή του τέταρτου και ως γ΄ και δ΄ φάσεις την επιλογή των ενδιάμεσων. Έχουμε:

3·3·5·4+3·4·5·4=420.

Παρατηρήστε ότι το τελευταίο ψηφίο έχει 3 δυνατότητες αν το πρώτο ψηφίο είναι άρτιο, ενώ έχει 4 δυνατότητες αν το πρώτο ψηφίο είναι περιττό.

■

Αν επιτρέπεται επανάληψη των αντικειμένων, που επιλέγουμε, έχουμε τον ορισμό:

**Επαναληπτικές διατάξεις n** αντικειμένων ανά k, ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k από τα n αντικείμενα, όπου να επιτρέπεται επανάληψη των αντικειμένων και να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία γραμμή διατηρώντας τη σειρά επιλογής τους. Το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων των n ανά k συμβολίζεται με $A_n^k$ .

Για τον υπολογισμό του πλήθους των επαναληπτικών διατάξεων, εφαρμόζουμε και πάλι την θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης. Όμως στην περίπτωση αυτή οι δυνατές περιπτώσεις είναι σε κάθε φάση n και έτσι έχουμε τον τύπο:

$$A_n^k = n^k \qquad (1.11)$$

**Παράδειγμα 1.13.** Πόσοι είναι οι αριθμοί του παραδείγματος 1.12 αν δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την επανάληψη των ψηφίων;

Λύση

Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα αντικαθιστώντας, όμως, τις διατάξεις με επαναληπτικές διατάξεις, βρίσκουμε:

$$A_7^4 - A_6^3 = 7^4 - 7^3 = 7^3 \cdot 6 = 2058 .$$

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί που λήγουν σε οποιονδήποτε από τους άρτιους 0, 2, 4, 6, είναι σε πλήθος $\Delta_7^3 - \Delta_7^2$, οπότε το ζητούμενο είναι:

$$4(A_7^3 - A_7^2) = 4(7^3 - 7^2) = 1176 .$$

Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη αρχή και θεωρώντας ως φάσεις την επιλογή των τεσσάρων ψηφίων, βρίσκουμε εύκολα για τα δύο ερωτήματα:

(α) 6·7·7·7=2058, (β) 6·7·7·4=1176.

■

**Παράδειγμα 1.14.** Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία.

Λύση

Ας δούμε πρώτα την ειδική περίπτωση για n=3. Τότε αν το σύνολο είναι Ω={α, β, γ}, τα υποσύνολά του είναι τα:

$\varnothing$, {α}, {β}, {γ}, {α, β}, {α, γ}, {β, γ}, {α, β, γ},

που είναι σε πλήθος 8.

Ας θεωρήσουμε κάποιο από αυτά, π.χ. το {α, β}. Παρατηρούμε ότι στο υποσύνολο αυτό ανήκουν το πρώτο και το δεύτερο από τα στοιχεία α, β, γ, ενώ δεν ανήκει το τρίτο. Έτσι χρησιμοποιώντας τα σύμβολα "$\in$" και "$\notin$" από τη θεωρία συνόλων μπορούμε να συμβολίσουμε το υποσύνολο {α, β} ως την διατεταγμένη τριάδα ($\in$, $\in$, $\notin$). Όμοια το υποσύνολο {β} συμβολίζεται με την τριάδα ($\notin$, $\in$, $\notin$). Από την άλλη πλευρά αν έχουμε μία οποιοδήποτε διατεταγμένη τριάδα με τα δύο σύμβολα "$\in$", "$\notin$" μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σ' αυτήν ένα υποσύνολο του Ω, λαμβάνοντας στο υποσύνολο μόνο εκείνα από τα στοιχεία α, β, γ του Ω που αντιστοιχούν σε "$\in$".

Είναι φανερό, ότι η παραπάνω διαδικασία, αποκαθιστά μία 1-1 αντιστοίχηση της κλάσης των υποσυνόλων του Ω, με την κλάση των διατεταγμένων τριάδων των δύο συμβόλων "$\in$", "$\notin$". Άρα για τον υπολογισμό του πλήθους των υποσυνόλων αρκεί να υπολογιστεί το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων δύο συμβόλων. Εύκολα όμως διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν $A_2^3 = 2^3 = 8$ τέτοιες τριάδες (διατάξεις με επανάληψη δύο συμβόλων ανά 3)

Γενικεύοντας τον παραπάνω συλλογισμό, βρίσκουμε ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων, θα ισούται με το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των δύο συμβόλων $\in$, $\notin$ ανά n, δηλαδή ότι υπάρχουν $A_2^n = 2^n$ υποσύνολα του Ω={$\omega_1$, $\omega_2$, …, $\omega_n$}.

**Σημείωση**. Η παραπάνω διαδικασία δίνει και ένα τρόπο «αρίθμησης» των υποσυνόλων ενός συνόλου. Πράγματι, θεωρώντας το δυαδικό αριθμό που προκύπτει από την διατεταγμένη n-άδα, αν αντιστοιχίσουμε το 1 στο σύμβολο "$\in$" και το 0 στο σύμβολο "$\notin$", τότε τα $2^n$ υποσύνολα αριθμούνται με τους αριθμούς 0, 1, …, $2^n-1$. Για παράδειγμα στο υποσύνολο {α, β} αντιστοιχεί όπως είδαμε η διατεταγμένη τριάδα ($\in\in\notin$) ή ισοδύναμα η τριάδα 110, που ισούται ως δυαδικός αριθμός με τον αριθμό 6. Άρα το υποσύνολο {α, β} είναι το έκτο υποσύνολο στη σειρά, δηλαδή χρησιμοποιώντας υποδείκτες μπορούμε να γράψουμε $A_6$={α, β}. Με το συμβολισμό αυτό τα 8 υποσύνολα του Ω={α,β,γ} είναι:

$A_0=\varnothing$, $A_1$={γ}, $A_2$={β}, $A_3$={β,γ},

$A_4$={α}, $A_5$={α,γ}, $A_6$={α,β}, $A_7$={α,β,γ}.

■

*1.3.3. Συνδυασμοί*

Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε πάλι k από n αντικείμενα, χωρίς όμως, να μας ενδιαφέρει η σειρά. Δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

**Συνδυασμοί** n αντικειμένων ανά k, (k≤n), ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k από τα n αντικείμενα και να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία γραμμή χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους. Το πλήθος των συνδυασμών των n ανά k συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ ή $C_n^k$ ή και C(n,k).

Για τον υπολογισμό του πλήθους των συνδυασμών αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε ένα συνδυασμό των n αντικειμένων ανά k και θεωρήσουμε τις μεταθέσεις των k στοιχείων του συνδυασμού, θα προκύψουν k! διατάξεις των n αντικειμένων ανά k. Επομένως θα ισχύει $\binom{n}{k}\cdot k! = \Delta_n^k$, ή ισοδύναμα:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n \tag{1.12}$$

ή ακόμη

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot k}, \; 1 \le k \le n \quad \text{και} \quad \binom{n}{0} = 1 \tag{1.13}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει άμεσα η ιδιότητα:

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \tag{1.14}$$

η οποία μαζί με την (1.13) βοηθά στους υπολογισμούς. Η τελευταία σχέση είναι προφανής αν σκεφθούμε ότι όταν «επιλέγουμε (να πάρουμε) k αντικείμενα από τα n», ταυτόχρονα «επιλέγουμε (να μην πάρουμε) τα υπόλοιπα n–k αντικείμενα από τα n».

Θα αποδείξουμε τον τύπο των συνδυασμών και με ένα δεύτερο τρόπο χρησιμοποιώντας τη διπλή απαρίθμηση στο επόμενο πρόβλημα.

**Προεδρευόμενη επιτροπή.** Έστω ότι έχουμε n άτομα και ότι θέλουμε να σχηματίσουμε επιτροπή με k από τα άτομα αυτά, ένα από τα οποία θα είναι πρόεδρος.

Μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο μεθόδους:

<u>Α΄ Μέθοδος</u>: Να διαλέξουμε πρώτα την επιτροπή και στη συνέχεια να διαλέξουμε τον πρόεδρό της.

<u>Β΄ Μέθοδος</u>: Να διαλέξουμε πρώτα τον πρόεδρο της επιτροπής και στη συνέχεια να τον πλαισιώσουμε με την υπόλοιπη επιτροπή.

Εφαρμόζουμε και στις δύο μεθόδους τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης, που σχηματικά φαίνεται στο επόμενο:

| Μέθοδος | 1η φάση | 2η φάση | ΘΑΑ |
|---|---|---|---|
| Α | $\binom{n}{k}$ | k | $\binom{n}{k}\cdot k$ |
| Β | n | $\binom{n-1}{k-1}$ | $n\cdot\binom{n-1}{k-1}$ |

Πράγματι, στην Α΄ μέθοδο η επιλογή της επιτροπής είναι ένας συνδυασμός των n ατόμων ανά k και τότε υπάρχουν k τρόποι για την επιλογή του προέδρου. Στη Β΄ μέθοδο μετά την επιλογή κάποιου ως προέδρου, μένουν n–1 άτομα από τα οποία διαλέγουμε k–1 άτομα.

Από την ισότητα των δύο αποτελεσμάτων έχουμε διαδοχικά:

$$\binom{n}{k}\cdot k = n\cdot\binom{n-1}{k-1}, \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}, \Rightarrow$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2}, \Rightarrow \ldots \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1}.$$

■

**Παράδειγμα 1.15.** Πενταμελές σύνολο εγχόρδων εκλέγεται από σύνολο μουσικών που αποτελείται από τέσσερις κοντραμπασίστες και 30 βιολονίστες. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί το σύνολο, αν πρέπει να περιέχει: α) 2 κοντραμπάσα και 3 βιολιά; β) τουλάχιστον 2 κοντραμπάσα;

Λύση

α) Το σύνολο μπορεί να σχηματιστεί σε δύο ανεξάρτητες φάσεις. Στην πρώτη επιλέγονται τα κοντραμπάσα και στη δεύτερη τα βιολιά. Τα δύο κοντραμπάσα μπορούν να επιλεγούν με $\binom{4}{2}$ τρόπους από τα 4 διαθέσιμα. Όμοια, τα 3 βιολιά επιλέγονται με $\binom{30}{3}$ τρόπους από τα 30 διαθέσιμα βιολιά. Εφαρμόζοντας την Θεμελιώδη Αρχή το σύνολο επιλέγεται με

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{30}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 24360 \text{ τρόπους.}$$

β) Το σύνολο θα αποτελείται είτε από 2 κοντραμπάσα και 3 βιολιά είτε από 3 κοντραμπάσα και 2 βιολιά είτε από 4 κοντραμπάσα και 1 βιολί. Εργαζόμενοι σε κάθε περίπτωση όπως στο (α) και εφαρμόζοντας την προσθετική αρχή απαρίθμησης, βρίσκουμε 26130 τρόπους, διότι:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{30}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{30}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{30}{1} = 24360 + 1740 + 30 = 26130\,.$$

■

**Παράδειγμα 1.16.** Με πόσους τρόπους 12 φοιτητές χωρίζονται σε τέσσερις ομάδες των τριών φοιτητών;

Λύση

Η πρώτη ομάδα τριών φοιτητών μπορεί να επιλεγεί με $\binom{12}{3}$ τρόπους, η δεύτερη με $\binom{9}{3}$, η τρίτη με $\binom{6}{3}$ και η τέταρτη με ένα τρόπο. Εφαρμόζοντας επομένως τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα επί μέρους αυτά αποτελέσματα. Επειδή όμως δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα επιλεγεί η ομάδα πρέπει να διαιρέσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα με 4!. Άρα υπάρχουν

$$\left[\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 1\right]\Big/4! = \frac{12!}{3!\cdot 9!}\cdot\frac{9!}{3!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}:4! = \frac{12!}{(3!)^4\cdot 4!} = 15400 \text{ τρόποι.}$$

Μπορούμε να εργαστούμε και με διαφορετικό τρόπο. Παίρνουμε στην τύχη έναν φοιτητή ο οποίος διαλέγει τους άλλους δύο της ομάδας του με $\binom{11}{2}$ τρόπους. Από τους υπόλοιπους 9 παίρνουμε τυχαία πάλι έναν φοιτητή που διαλέγει τους άλλους δύο της ομάδας του με $\binom{8}{2}$ τρόπους κλπ. Έτσι έχουμε:

$$\binom{11}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 1 = \frac{11!}{2!\cdot 9!}\cdot\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 15400 \text{ τρόπους.}$$

Ένας τρίτος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να εργαστούμε είναι ο εξής: Έστω $(\alpha,\beta,\gamma)$, $(\delta,\varepsilon,\zeta)$, $(\eta,\theta,\iota)$, $(\kappa,\lambda,\mu)$ είναι ένας από τους x διαφορετικούς τρόπους ταξινόμησης των 12 φοιτητών σε τριάδες. Μεταθέτοντας τις τριάδες μεταξύ τους παίρνουμε την ίδια ταξινόμηση αλλά 4! διαφορετικές μεταθέσεις των 12 φοιτητών. Μεταθέτοντας τα άτομα σε κάθε τριάδα παίρνουμε πάλι την ίδια ταξινόμηση αλλά 3! διαφορετικές μεταθέσεις. Έτσι από τον συγκεκριμένο τρόπο παίρνουμε 4!·3!·3!·3!·3! διαφορετικές μεταθέσεις των 12 φοιτητών. Άρα θα ισχύει x·4!·3!·3!·3!·3!=12!, απ' όπου προκύπτει $x = \dfrac{12!}{4!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!} = 15400$.

■

Αν επιτρέπεται και επανάληψη των αντικειμένων που επιλέγουμε έχουμε τον ορισμό:

> **Επαναληπτικοί συνδυασμοί** n αντικειμένων ανά k, ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k από τα n αντικείμενα, όπου να επιτρέπεται επανάληψη των αντικειμένων και να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία γραμμή χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους. Το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των n ανά k συμβολίζεται με $\mathcal{E}_n^k$ .

Θα αποδείξουμε ότι το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των n αντικειμένων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k} \tag{1.15}$$

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε καταρχήν ότι, επειδή δεν έχει σημασία η σειρά των στοιχείων σε ένα επαναληπτικό συνδυασμό, μπορούμε να θεωρούμε ότι τα στοιχεία του είναι διαταγμένα με μια εκ των προτέρων καθορισμένη διάταξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας ως τέτοια διάταξη μπορούμε να παίρνουμε τη φυσική αύξουσα σειρά των αριθμών ή των γραμμάτων που παριστάνουν τα αντικείμενα.

Τότε αν η φυσική σειρά των αντικειμένων είναι α, β, γ,..., ο τυχαίος επαναληπτικός συνδυασμός θα καθορίζεται πλήρως αν δοθεί το πλήθος των στοιχείων του που είναι ίσα με α, αυτών που είναι ίσα με β, κ.ο.κ. Μάλιστα αν θεωρήσουμε ότι έχουμε n κελιά, που το πρώτο συμβολίζει το α, το δεύτερο το β κλπ, τότε για τον καθορισμό του επαναληπτικού συνδυασμού αρκεί να γνωρίζουμε το πλήθος των στοιχείων σε κάθε κελί. Θα χρησιμοποιήσουμε n–1 κάθετες γραμμές ( | ) για το σχηματισμό των n κελιών και k αστεράκια ( * ) που θα συμβολίζουν τα k στοιχεία του συνδυασμού. Π.χ. για n=4 και k=5, θεωρούμε τους επαναληπτικούς συνδυασμούς

α β β γ γ          β β β γ δ          α β γ δ δ

Χρησιμοποιώντας 3 (=n–1) κάθετες γραμμές, χωρίζουμε τους συνδυασμούς με τρόπο ώστε όμοια γράμματα να περιέχονται στο ίδιο χώρισμα, δηλαδή:

α | β β | γ γ |          | β β β | γ | δ          α | β | γ | δ δ

Αντικαθιστώντας τα γράμματα με 5 (=k) αστεράκια έχουμε ισοδύναμα:

* | * * | * * |          | * * * | * | *          * | * | * | * *

Είναι φανερό ότι ο παραπάνω συμβολισμός αποκαθιστά μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των επαναληπτικών συνδυασμών των n αντικειμένων ανά k και του συνόλου των τοποθετήσεων των n–1 κάθετων γραμμών και των k αστερίσκων. Επειδή το τελευταίο ισοδυναμεί με το σύνολο των συνδυασμών των $n+k-1$ (κάθετες γραμμές και αστεράκια μαζί) αντικειμένων ανά $k$ είτε ανά $n-1$, αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Β΄ τρόπος

Αντιστοιχούμε καταρχήν τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, ..., n, στα n αντικείμενα. Ας υποθέσουμε ότι $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ είναι ένας από τους επαναληπτικούς συνδυασμούς των n ανά k, όπου οι αριθμοί $\alpha_i$ έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά. Τότε είναι φανερό ότι θα ισχύει:

$$1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k \leq n. \tag{1.16}$$

Θεωρούμε τώρα τους φυσικούς αριθμούς $\beta_i$, $i=1,2,\ldots,k$, που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\beta_1 = \alpha_1 + 0,\ \ \beta_2 = \alpha_2 + 1, ... , \beta_k = \alpha_k + k-1.$$

Είναι φανερό ότι $\beta_i < \beta_{i+1}$, για όλα τα $i=1,2,\ldots,k-1$ και ότι τα $\alpha_i$ υπολογίζονται με μοναδικό τρόπο από τα $\beta_i$ . Εξάλλου, οι διαδοχικές ανισότητες (1.16) παίρνουν τώρα τη μορφή:

$$1 \leq \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_k \leq n+k-1. \tag{1.17}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι οι k αριθμοί $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ αποτελούν έναν συνδυασμό των $(n+k-1)$ αντικειμένων ανά k. Δηλαδή, αποκαταστάθηκε μία ένα-προς-ένα αντιστοιχία ανάμεσα στους επαναληπτικούς συνδυασμούς των n ανά k, και τους (απλούς) συνδυασμούς των $n+k-1$ ανά k. Άρα, το ζητούμενο δίνεται από την (1.15)

■

**Παράδειγμα 1.17.** Να βρεθεί πόσα κουαρτέτα μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας όποια και όσα θέλουμε από τα όργανα βιολί, τσέλο και φλάουτο. Να καταγραφούν όλα τα δυνατά κουαρτέτα.

Λύση

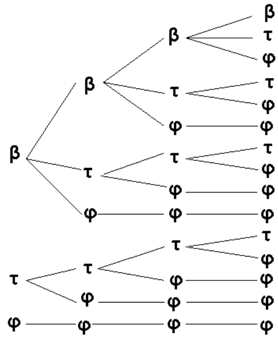
Το κουαρτέτο χαρακτηρίζεται μόνο από το ποια όργανα το αποτελούν και όχι από τη σειρά με την οποία θα τα διαλέξουμε· άρα το πλήθος των διαφορετικών κουαρτέτων, που μπορούμε να σχηματίσουμε, είναι ίσο με το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των τριών οργάνων ανά 4, δηλ.

$$\mathcal{E}_3^4 = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} =$$

$$= \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15.$$

Χρησιμοποιώντας δενδροδιάγραμμα, μπορούμε να καταγράψουμε τα 15 αυτά κουαρτέτα (Σχήμα 1.2).

■



| | | | |
|---|---|---|---|
| β | β | β | β |
| β | β | β | τ |
| β | β | β | φ |
| β | β | τ | τ |
| β | β | τ | φ |
| β | β | φ | φ |
| β | τ | τ | τ |
| β | τ | τ | φ |
| β | τ | φ | φ |
| β | φ | φ | φ |
| τ | τ | τ | τ |
| τ | τ | τ | φ |
| τ | τ | φ | φ |
| τ | φ | φ | φ |
| φ | φ | φ | φ |

Σχήμα 1.2

Μία άμεση συνέπεια της διαδικασίας που ακολουθήσαμε για την εύρεση του πλήθους των επαναληπτικών συνδυασμών, είναι η εξής:

**Θεώρημα. 1.2** Το πλήθος των μη-αρνητικών ακεραίων λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \tag{1.18}$$

ισούται με $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα n αντικείμενα 1, 2, 3, …, n και παίρνουμε έναν επαναληπτικό συνδυασμό τους ανά k. Στο συνδυασμό αυτό θα υπάρχει $x_1$ ($x_1 \geq 0$) φορές το 1, $x_2$ ($x_2 \geq 0$) φορές το 2, και … τελικά θα υπάρχει $x_n$ ($x_n \geq 0$) φορές το n. Είναι φανερό ότι, επειδή το σύνολο των στοιχείων του συνδυασμού είναι k, το άθροισμα των αριθμών $x_k$ θα ικανοποιεί τη σχέση (1.18). Άρα το πλήθος των ζητούμενων μη-αρνητικών λύσεων της (1.18) θα ισούται με το πλήθος $\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ των επαναληπτικών συνδυασμών των n αντικειμένων ανά k. ■

**Πόρισμα. 1.1.** Το πλήθος των θετικών ακεραίων λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης (1.18), ισούται με $\binom{k-1}{n-1}$.

Απόδειξη

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι θέλουμε τις λύσεις για τις οποίες $x_k \geq 1$, για κάθε k. Έτσι θέτοντας $y_k = x_k - 1$, θα είναι $y_k \geq 0$, για κάθε k και η σχέση (1.18) ανάγεται στη σχέση

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k - n \ . \tag{1.19}$$

Τώρα, όμως, ζητούμε τις μη-αρνητικές λύσεις και από το θεώρημα βρίσκουμε $\binom{n+(k-n)-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}$, που είναι το ζητούμενο πλήθος θετικών λύσεων της (1.18). ■

**Ασκήσεις**

**1.3.1.** Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, αν δεν υπάρχει περιορισμός στην επανάληψη των ψηφίων, πόσοι αν κανένα ψηφίο δεν μπορεί να επαναλαμβάνεται πάνω από δυο φορές και πόσοι αν δεν επιτρέπονται επαναλήψεις;

**1.3.2.** Πόσους πενταψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,3,5,6,7,8; Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;

**1.3.3.** Παίρνουμε τυχαία τρία από τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες είναι οι διαφορετικές τριάδες στις οποίες δεν εμφανίζονται διαδοχικά γράμματα;

**1.3.4.** Πόσες διαφορετικές λέξεις έστω και χωρίς νόημα μπορούμε να σχηματίσουμε με τα γράμματα της λέξης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Σε πόσες από αυτές τα Μ δεν βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις;

**1.3.5.** Πόσες από τις λέξεις που σχηματίζονται με τα γράμματα της λέξης ΕΙΝΑΙ, έχουν τα δύο "Ι" διαχωρισμένα; Γενικεύσατε για την περίπτωση μιας λέξης με ένα γράμμα που επαναλαμβάνεται k ακριβώς φορές και n άλλα διαφορετικά μεταξύ τους γράμματα.

**1.3.6.** Πιτσαρία διαφημίζει ότι προσφέρει περισσότερα από 500 είδη. Η πίτσα μπορεί να περιέχει ή όχι οσαδήποτε από τα είδη «ζαμπόν, μπέικον, σαλάμι, αντσούγιες, παστουρμά, μανιτάρια, πιπεριές, σάλτσα, ελιές». α) Είναι σωστή η διαφήμιση; β) Πόσες πίτσες έχουν ακριβώς τρία είδη; γ) Πόσες πίτσες έχουν το πολύ τρία είδη;

**1.3.7.** Πόσα κομμάτια έχει το παιχνίδι του ντόμινο όταν είναι γνωστό ότι κάθε κομμάτι έχει δυο νούμερα από τα Λευκό 1,2,3,...n; Πόσα έχει το κανονικό ντόμινο για το οποίο n=6;

**1.3.8.** Κατά πόσους τρόπους 7 άντρες μπορούν να επιλεγούν από 12, έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι απ' αυτούς να μην είναι ποτέ μαζί; Να γίνει γενίκευση (n αντί του 12 και k αντί του 7).

**1.3.9.** Σ' ένα γλέντι καθένας από τους καλεσμένους τσούγκρισε το ποτήρι του με όλους τους άλλους και ακούσθηκαν r=36 κρότοι. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι; Βρέστε ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί το r, ώστε να υπάρχει λύση και ποια είναι τότε η λύση.

**1.3.10.** Δίνονται n ευθείες που τέμνονται ανά δύο σε διαφορετικά σημεία. Πόσα τρίγωνα σχηματίζονται με κορυφές τα σημεία τομής;

**1.3.11.** Να υπολογισθεί το πλήθος των τρόπων που n ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν σε (α) ευθύγραμμο ή (β) σε κυκλικό τραπέζι, έτσι ώστε σε k συγκεκριμένα ανδρόγυνα οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

**1.3.12.** Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε σειρά έξι άτομα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ, έτσι ώστε: α) ο Β να μην προηγείται του Ζ, β) ο Β να είναι ακριβώς μπροστά από τον Ζ, γ) ο Ζ να είναι ακριβώς μπροστά από τον Β, δ) ο Β και ο Ζ να είναι μαζί;

**1.3.13.** Κατά πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε ένα ράφι 3 βιβλία Γαλλικά, 5 Ελληνικά και 6 Γερμανικά αν α) είναι διαφορετικών συγγραφέων β) τα βιβλία κάθε γλώσσας είναι του ίδιου συγγραφέα;

**1.3.14.** Πόσες είναι οι 9-ψήφιες δυαδικές ψηφιολέξεις (με ψηφία 0 και 1), που έχουν 4 μηδενικά και 5 μονάδες; Πόσες από αυτές αρχίζουν από 1 και τελειώνουν σε 0;

**1.3.15.** Πόσα διαφορετικά κολιέ, αποτελούμενα από χάντρες περασμένες σε κλειστές αλυσίδες, μπορούν να κατασκευαστούν από 7 χάντρες (α) επτά διαφορετικών μεγεθών, (β) δύο μεγεθών εκ των οποίων μία μεγάλη και έξι μικρές (γ) δύο μεγεθών εκ των οποίων δύο μεγάλες και πέντε μικρές; Με τον όρο κλειστή αλυσίδα εννοούμε μια αλυσίδα στην οποία δεν διακρίνεται κάποια αρχή ή τέλος.

**1.3.16.** Πόσες διαφορετικές απεικονίσεις από ένα σύνολο $X=\{x_1, x_2,\dots, x_k\}$ εντός ενός συνόλου $Y=\{y_1, y_2,\dots, y_n\}$ , με $n>k$, υπάρχουν, όταν δεν επιτρέπεται διαφορετικά πρότυπα να έχουν ίσες εικόνες; Πόσες αν δεν υπάρχει περιορισμός;

**1.3.17.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε πέντε χαρτιά από μία τράπουλα σε έναν παίκτη (α) όταν τα μοιράζουμε ένα-ένα ή (β) όταν η σειρά τους δεν μας ενδιαφέρει;

**1.3.18.** Ένα υποσύνολο k στοιχείων κάποιου συνόλου S, λέγεται k-υποσύνολο. Πόσα k-υποσύνολα του S υπάρχουν, αν το S έχει n στοιχεία. Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα αυτό και τη διπλή απαρίθμηση δείξτε τη σχέση: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$.

**1.3.19.** Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία του παραδείγματος 1.14, αντιστοιχίστε αριθμούς στα υποσύνολα του S={α,β,γ,δ,ε} ώστε να τα αριθμήσετε. Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο υποσύνολο {α,β,δ}. Όμοια, ποιο υποσύνολο του T={1,2,3,4,5,6,7,8}, είναι 50-ό στη σειρά αυτή.

**1.3.20.** Κατασκευάστε πρόγραμμα που να καταγράφει όλα τα υποσύνολα ενός πεπερασμένου συνόλου με τη διαδικασία του παραδείγματος 1.14.

**1.3.21.** Αριθμείστε τα υποσύνολα του {1,2,3} με λεξικογραφική διάταξη. Γενικεύστε για πεπερασμένο σύνολο n στοιχείων και κατασκευάστε πρόγραμμα που να καταγράφει λεξικογραφικά τα υποσύνολα.

## 1.4. Διωνυμικοί συντελεστές

Ο συμβολισμός $\binom{n}{k}$ που δίνει το πλήθος των συνδυασμών των n αντικειμένων ανά k έχει και μια αυτόνομη πορεία στα μαθηματικά. Αυτό ενδεχομένως οφείλεται στο ότι εμφανίζεται, όπως θα δείξουμε παρακάτω, ως συντελεστής στο ανάπτυγμα του Νεύτωνα, απ' όπου προέκυψε και η ονομασία *διωνυμικός συντελεστής*. Εμφανίζεται όμως και σε πολλές άλλες περιπτώσεις, κάποιες από τις οποίες θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους. Θα αποδείξουμε επίσης χρήσιμες ιδιότητες των συντελεστών αυτών που βοηθούν στους υπολογισμούς.

**Θεώρημα 1.3.** *Τριγωνική αναγωγική ιδιότητα*), ή *ταυτότητα του Pascal.* Για κάθε n, k∈ℕ με k≤n ισχύει:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}. \tag{1.20}$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας στο δεύτερο μέλος της σχέσης έχουμε διαδοχικά:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}+\frac{(n-k)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\ldots=\binom{n+1}{k+1}.$$

Θα δείξουμε τη σχέση και με τη μέθοδο της διπλής απαρίθμησης. Θεωρούμε ένα σύνολο n+1 στοιχείων το $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$ και επιλέγουμε k+1 από αυτά. Το πλήθος αυτών των επιλογών δίνεται από το αριστερό μέλος της σχέσης (1.20).

Υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες:

(1) το $\omega_{n+1}$ επιλέγεται και (2) το $\omega_{n+1}$ δεν επιλέγεται.

Στην περίπτωση (1) τα υπόλοιπα στοιχεία που επιλέγουμε είναι k και επιλέγονται από τα πρώτα n στοιχεία του Ω με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Στην περίπτωση (2) και τα k+1 στοιχεία επιλέγονται από τα πρώτα n στοιχεία του Ω με $\binom{n}{k+1}$. Η προσθετική αρχή απαρίθμησης ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

**Θεώρημα 1.4.** *Διώνυμο Νεύτωνα****.** Ισχύει η σχέση:

$$\left(\alpha+\beta\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}\ . \qquad (1.21)$$

Απόδειξη

Μία αλγεβρική απόδειξη μπορεί να δοθεί επαγωγικά. Πράγματι, η σχέση ισχύει για n=1, αφού $\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\alpha^k\beta^{1-k}=\binom{1}{0}\beta+\binom{1}{1}\alpha=\alpha+\beta$, όπου χρησιμοποιήθηκε η προφανής ιδιότητα $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1, \forall n\in\mathbb{N}$. Με την υπόθεση ότι η σχέση ισχύει για n, έχουμε:

* O Sir Isaak Newton απέδειξε τη σχέση αυτή γύρω στα 1666

$$(\alpha+\beta)^{n+1}=(\alpha+\beta)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{k+1}\beta^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n+1-k}.$$

Θέτοντας στο πρώτο άθροισμα k+1=j και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ταυτότητα (1.20), έχουμε διαδοχικά:

$$(\alpha+\beta)^{n+1}=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\alpha^j\beta^{n+1-j}+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\alpha^j\beta^{n+1-j}=$$

$$=\binom{n}{0}\alpha^0\beta^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\left\{\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right\}\alpha^j\beta^{n+1-j}+\binom{n}{n}\alpha^{n+1}\beta^0=$$

$$=\binom{n+1}{0}\alpha^0\beta^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}\alpha^j\beta^{n+1-j}+\binom{n+1}{n+1}\alpha^{n+1}\beta^0=$$

$$=\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\alpha^j\beta^{n+1-j},$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Θα δώσουμε και μια δεύτερη απόδειξη με τη μέθοδο της διπλής απαρίθμησης.

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^n=\underbrace{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\beta)}_{n\ \text{όροι}}.$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο στο β΄ μέλος, είναι φανερό ότι κάθε όρος θα αποτελείται από n παράγοντες από τους οποίους κάποιοι, έστω k το πλήθος θα είναι ίσοι με α και οι υπόλοιποι, δηλαδή οι n–k θα είναι ίσοι με β. Έτσι κάθε όρος θα είναι της μορφής $\alpha^k\beta^{n-k}$, με k που κυμαίνεται από 0 έως n. Ο σχηματισμός αυτού του όρου μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται ως εξής: Διαλέγουμε πρώτα k από τους n το πλήθος παράγοντες (α+β) του β΄ μέλους. Στη συνέχεια παίρνουμε ένα α από κάθε όρο που διαλέξαμε και ένα β από κάθε όρο που δεν διαλέξαμε. Επειδή τους k παράγοντες (για σταθερό k) μπορούμε να τους διαλέξουμε με $\binom{n}{k}$ τρόπους και επειδή όλοι αυτοί οι τρόποι δίνουν όμοιους όρους, άρα ο αριθμός αυτός θα είναι ο συντελεστής του $\alpha^k\beta^{n-k}$. Αθροίζοντας τώρα για k από 0 έως n δείχνουμε το ζητούμενο.

■

**Σημείωση.** Μία από τις πολλές εφαρμογές της σχέσης (1.21) είναι στη θεωρία πιθανοτήτων, όπου επαληθεύεται ότι οι διωνυμικές πιθανότητες αθροίζουν στη μονάδα, όπως θα έπρεπε. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι σε ένα πείραμα έχουμε επιτυχία με πιθανότητα θ και αποτυχία με πιθανότητα 1–θ και ότι εκτελούμε n ανεξάρτητες φορές το πείραμα αυτό. Τότε η πιθανότητα να έχουμε ακριβώς k επιτυχίες, (0≤k≤n), είναι $p_k = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$.

Ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k} = \left(\theta+(1-\theta)\right)^n = 1.$$

*1.4.1. Ταυτότητες με διωνυμικούς συντελεστές*

Θέτοντας στην (1.21) α=x, β=1, η σχέση γράφεται:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n. \tag{1.22}$$

Με τη μορφή αυτή το διώνυμο του Νεύτωνα δίνει ένα πλήθος γνωστών ταυτοτήτων.

(α) Θέτοντας x=1 έχουμε:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n \quad \text{ή} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n. \tag{1.23}$$

(Μια άλλη απόδειξη της (1.23) δίνεται στην άσκηση 1.3.18).

(β) Θέτοντας x=–1 έχουμε:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0. \tag{1.24α}$$

που λόγω της (1.23), γράφεται επίσης με τη μορφή:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots = 2^{n-1}. \tag{1.24β}$$

(γ) Παραγωγίζοντας πρώτα (μία ή και περισσότερες φορές) την (1.22) και θέτοντας x=1, έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n} = n2^{n-1}. \tag{1.25}$$

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}+\binom{r+1}{r}\binom{n}{r+1}+\ldots+\binom{n}{r}\binom{n}{n} = \binom{n}{r}2^{n-r}. \tag{1.26}$$

Στην τελευταία αφού παραγωγίσαμε r φορές, διαιρέσαμε στη συνέχεια με τη σταθερή τιμή r! . Παρατηρήστε ότι με την παραγώγιση χάνονται κάποιοι σταθεροί όροι και έτσι η άθροιση στην (1.25) αρχίζει από το k=1, ενώ στην (1.26) αρχίζει από k=r.

(δ) Ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}. \tag{1.27}$$

Για την απόδειξη αρκεί να θεωρήσουμε την ταυτότητα

$$\left(1+x\right)^{n}\cdot\left(1+x\right)^{m}\equiv\left(1+x\right)^{n+m},$$

να αναπτύξουμε τα διώνυμα και να εξισώσουμε τους συντελεστές του $x^r$ στα δύο μέλη της ταυτότητας. Ενδιαφέρον, όμως, παρουσιάζει και η επόμενη «συνδυαστική» απόδειξη.

Θεωρούμε ότι πρόκειται να επιλέξουμε επιτροπή r ατόμων από ένα σύνολο n ανδρών και m γυναικών. Είναι φανερό ότι υπάρχουν $\binom{n+m}{r}$ τρόποι να επιλεγεί η επιτροπή. Η επιτροπή θα περιέχει k άνδρες και r–k γυναίκες, όπου k ακέραιος αριθμός από 0 μέχρι r. Για συγκεκριμένο k υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι να επιλεγούν οι k άνδρες από τους n άνδρες και $\binom{m}{r-k}$ τρόποι να επιλεγούν οι r–k γυναίκες από τις m γυναίκες. Εφαρμόζοντας για κάθε k την θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης και αθροίζοντας για όλα τα k παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση.

Θέτοντας m=n=r στη σχέση (1.27), παίρνουμε την:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}=\binom{2n}{n}. \tag{1.28}$$

**Σημείωση.** Με τη σχέση (1.27) αποδεικνύουμε, στη θεωρία πιθανοτήτων, ότι οι υπεργεωμετρικές πιθανότητες αθροίζουν στη μονάδα, όπως θα έπρεπε. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι από ένα κουτί που περιέχει n λευκά και m μαύρα σφαιρίδια, όμοια κατά τα άλλα, εξάγουμε τυχαία χωρίς επανάθεση r σφαιρίδια. Τότε η πιθανότητα να έχουμε βγάλει k λευκά και r-k μαύρα σφαιρίδια, (0≤k≤r), ισούται με $p_k=\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}\Big/\binom{n+m}{r}$.

Ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \left\{ \sum \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} \right\} \Big/ \binom{n+m}{r} = 1 .$$

*1.4.2. Ιδιότητες των επαναληπτικών συνδυασμών*

Οι επαναληπτικοί συνδυασμοί $\mathcal{E}_n^k$ των n ανά k δίνονται, όπως είδαμε, από τον τύπο $\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$. Θα δείξουμε το επόμενο:

**Θεώρημα 1.5.** Ισχύουν:

α. $\mathcal{E}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{E}_n^{k+1} + \mathcal{E}_{n+1}^k$, (τριγωνική αναγωγική ιδιότητα) (1.29)

β. $\sum_{k=0}^{r} \mathcal{E}_n^k \cdot \mathcal{E}_m^{r-k} = \mathcal{E}_{n+m}^r$ (1.30)

Απόδειξη

α. Η αλγεβρική απόδειξη είναι άμεση. Πράγματι, η σχέση γράφεται:

$$\binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k}$$

που ισχύει λόγω της τριγωνικής ταυτότητας του Pascal.

Η συνδυαστική απόδειξη γίνεται όπως και η απόδειξη της αντίστοιχης σχέσης (1.20). Θεωρούμε, δηλαδή, ένα σύνολο n+1 στοιχείων το $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$ και επιλέγουμε k+1 από αυτά με επανάληψη και χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους. Το πλήθος αυτών των επιλογών ισούται εξορισμού με τον αριθμό $\mathcal{E}_{n+1}^{k+1}$.

Υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες:

(1) το $\omega_{n+1}$ επιλέγεται και (2) το $\omega_{n+1}$ δεν επιλέγεται.

Στην περίπτωση (1) τα υπόλοιπα στοιχεία που επιλέγουμε είναι k και επιλέγονται από όλα τα n+1 στοιχεία του Ω, (διότι έχουμε δυνατότητα επανάληψης), με $\mathcal{E}_{n+1}^k$ τρόπους. Στην περίπτωση (2) και τα k+1 στοιχεία επιλέγονται από τα πρώτα n στοιχεία του Ω με $\mathcal{E}_n^{k+1}$ τρόπους. Λόγω της προσθετικής αρχής απαρίθμησης, το ζητούμενο πλήθος ισούται με $\mathcal{E}_n^{k+1} + \mathcal{E}_{n+1}^k$ και επομένως αποδείχθηκε η σχέση.

β. Η αλγεβρική απόδειξη της (1.30) είναι αρκετά πολύπλοκη, διότι αντικαθιστώντας τα σύμβολα, γράφεται με τη μορφή:

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k-1}{k}\cdot\binom{m+r-k-1}{r-k}=\binom{n+m+r-1}{r},$$

που δεν είναι εύκολο να αποδειχθεί. Για το λόγο αυτό, θα αποδείξουμε τη σχέση μόνο «συνδυαστικά», χρησιμοποιώντας γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις. Πράγματι, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots x_{n+m}=r, \tag{1.31}$$

η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 θα έχει $\mathcal{E}_{n+m}^{r}$ μη-αρνητικές λύσεις.

Είναι προφανές ότι κάθε λύση της (1.31) θα προέρχεται από το συνδυασμό των λύσεων των διοφαντικών εξισώσεων

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=k \quad \text{και} \quad x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots x_{n+m}=r-k, \tag{1.32}$$

που έχουν, αντίστοιχα, $\mathcal{E}_{n}^{k}$ και $\mathcal{E}_{m}^{r-k}$ μη-αρνητικές λύσεις. Επειδή, προφανώς, οι λύσεις των εξισώσεων (1.32) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, μπορούμε για κάθε k να εφαρμόσουμε τη θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης. Αθροίζοντας τα επιμέρους γινόμενα για όλα τα k από k=0 έως k=n, παίρνουμε, τελικά, τη ζητούμενη σχέση. ■

**Ορισμός.** Ο πραγματικός αριθμός που ορίζεται από τη σχέση

$$\binom{t}{k}=\frac{t\cdot(t-1)\cdot(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-k+1)}{k!},\ k\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R}, \tag{1.33}$$

λέγεται *γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής*.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν ο t είναι φυσικός αριθμός, τότε ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ισούται με τον διωνυμικό συντελεστή που ορίστηκε προηγούμενα, πράγμα που δικαιολογεί την ονομασία του. Δύο παραδείγματα υπολογισμού του γενικευμένου συντελεστή είναι τα εξής:

**Παράδειγμα 1.18.** Δείξτε ότι ισχύουν:

α. $\displaystyle\binom{n-\frac{1}{2}}{k}=\frac{\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}}{2^{2k}\binom{n}{k}}, n\geq k$, β. $\displaystyle\binom{-n}{k}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}=(-1)^k\,\mathcal{E}_{n}^{k}$.

Λύση

α. Έχουμε διαδοχικά:

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} =$$

$$= \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot(2n-2k+1)}{2^k\cdot k!} =$$

$$= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2k+2)(2n-2k+1)}{2^k\cdot k!\cdot(2n)(2n-2)\ldots(2n-2k+2)} =$$

$$= \frac{\binom{2n}{2k}(2k)!}{2^k\cdot k!\cdot 2^k\cdot\binom{n}{k}k!} = \frac{\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}}{2^{2k}\cdot\binom{n}{k}}.$$

β. Όμοια έχουμε:

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)\cdot(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k\cdot(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot\ldots\cdot n}{k!} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}. \qquad \blacksquare$$

Αν βρούμε το ανάπτυγμα Taylor στην περιοχή του μηδενός για τη συνάρτηση $(1+x)^t$, όπου $t\in\mathbb{R}$, διαπιστώνουμε ότι οι συντελεστές των δυνάμεων του x στο ανάπτυγμα είναι γενικευμένοι διωνυμικοί συντελεστές. Μάλιστα ισχύει:

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{t}{k}x^k, \tag{1.34}$$

που είναι γνωστή ως *διωνυμικό θεώρημα*.

Για παράδειγμα

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-1)^k x^k = \ldots = \frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{128}+\ldots$$

Όμοια, χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 1.18β, βρίσκουμε:

$$\left(1-x\right)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{E}_n^k\, x^k\,,\ |x|<1\,. \quad (1.35)$$

Η ταυτότητα (1.35) λέγεται και τύπος του αρνητικού διωνύμου.

Παρατηρήστε τις ομοιότητες και διαφορές που έχει η σχέση αυτή με την (1.22). Οι συντελεστές είναι $\mathcal{E}_n^k$ (επαναληπτικοί συνδυασμοί) αντί $C_n^k$ (απλοί συνδυασμοί) και το πλήθος όρων άπειρο αντί πεπερασμένο.

**Σημείωση.** Ο τύπος του αρνητικού διωνύμου είναι πολύ χρήσιμος όταν εργαζόμαστε με την αρνητική διωνυμική κατανομή στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι η πιθανότητα $p_k$, να χρειαστούν k αποτυχίες μέχρι να έχουμε τη n-στή επιτυχία σε ανεξάρτητες εκτελέσεις ενός πειράματος είναι: $p_k = \binom{n+k-1}{k}\theta^n(1-\theta)^k$, $k=0,1,2,\ldots$. Ισχύει:

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k = \theta^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(1-\theta)^k = \theta^n\cdot\left(1-(1-\theta)\right)^{-n} = 1\,.$$

## Ασκήσεις

**1.4.1.** Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα, υπολογίστε το συντελεστή της δύναμης $x^3$ στα αναπτύγματα των:

α. $\sqrt{1+x}$, β. $(1+3x)^{2/3}$, γ. $(1-x)^{-3}$, δ. $(1+2x)^{-1/3}$.

**1.4.2.** Όμοια, υπολογίστε το σταθερό όρο στις εκφράσεις:

α. $(1-x)^{-6}x^{-4}$, β. $(1+x)^{-1/2}x^{-5}$ γ. $(x^{-1}+1+x+x^2+x^3+x^4)^3$.

**1.4.3.** Να δείξετε ότι για $1\le k\le n$, ισχύει:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\ldots+\binom{k-1}{k-1}.$$

**1.4.4.** Δείξτε $\binom{n}{r}\cdot\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{r-k}$.

**1.4.5.** Δείξτε ότι ισχύει προσεγγιστικά $\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Βρέστε στη συνέχεια την πιθανότητα p, ένα κανονικό ζάρι να φέρει σε 100 ρίψεις 50 φορές γράμματα.

**1.4.6.** Δείξτε ότι $(-1)^n \binom{-1/2}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

**1.4.7.** Να δειχθεί ότι: $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2} = \binom{2n}{n}^2$.

**1.4.8.** Αν $p_k = \binom{n+k}{n}^{-1} \cdot \binom{n+m-1-k}{n-1}, k = 0,1,...,m$ , τότε $\sum_{k=0}^{m} p_k = 1$.

**1.4.9.** Δείξτε το γενικευμένο τύπο του Νεύτωνα

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k\right)^n = \sum_{\substack{0 \le r_1 < r_2 < ... < r_k \le n \\ r_1 + r_2 + ... + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!} \cdot \alpha_1^{r_1} \cdot \alpha_2^{r_2} \cdot ... \cdot \alpha_k^{r_k}$$

και στη συνέχεια δείξτε ότι $\sum_{\substack{0 \le r_1 < r_2 < ... < r_k \le n \\ r_1 + r_2 + ... + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!} = k^n$.

**1.4.10.** Δείξτε ότι ισχύει η σχέση:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k+1} a^{2k+1} b^{n-2k-1} = \frac{1}{2}\left\{\left(b+a\right)^n - \left(b-a\right)^n\right\} \text{ , όπου } m = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

## 1.5. Άλλες Αρχές Απαρίθμησης

### *1.5.1. Η αρχή της Συμπερίληψης Εξαίρεσης*

Έστω ότι έχουμε ένα πληθυσμό και n ιδιότητες που χαρακτηρίζουν ή όχι τα άτομα του πληθυσμού. Αν είναι γνωστό το πλήθος των ατόμων που έχουν ταυτόχρονα οποιεσδήποτε ιδιότητες, ένα σύνηθες πρόβλημα είναι να βρούμε το πλήθος των ατόμων που έχουν τουλάχιστον μία από τις ιδιότητες ή το πλήθος αυτών που δεν έχουν καμία από τις ιδιότητες. Ο πληθυσμός μπορεί να είναι ένα σύνολο ανθρώπων, ζώων, αντικειμένων, καταστάσεων, κλπ, ενώ οι ιδιότητες πρέπει να είναι καλά ορισμένες ώστε να είναι βέβαιο ότι ένα άτομο του πληθυσμού είτε έχει είτε δεν έχει κάποια από τις ιδιότητες.

Συμβολίζουμε με τα πεζά ελληνικά γράμματα, με υποδείκτες ή χωρίς, τις ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν και με N το συνολικό πλήθος των ατόμων (που δεν είναι ανάγκη να είναι γνωστό). Συμβολίζουμε επίσης με:

N(α) το πλήθος των ατόμων που έχουν την ιδιότητα α,

N(α΄) το πλήθος των ατόμων που δεν έχουν την ιδιότητα α, N(αβ) το πλήθος των ατόμων που έχουν και τις δύο ιδιότητες α και β,

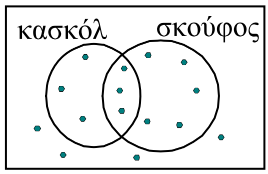
N(α ή β) το πλήθος των ατόμων που έχουν είτε την ιδιότητα α είτε την ιδιότητα β είτε και τις δύο ιδιότητες α και β.

N($\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\beta_1'\beta_2'\beta_3'...$) το πλήθος των ατόμων που έχουν τις ιδιότητες $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ κλπ και δεν έχουν τις ιδιότητες $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ κλπ.

N($\alpha_1$ ή $\alpha_2$ ή … ή $\alpha_n$) το πλήθος των ατόμων που έχουν μία τουλάχιστον από τις ιδιότητες $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στους παραπάνω συμβολισμούς ενδιαφερόμαστε μόνο για το τι συμβαίνει με τις ιδιότητες που αναφέρονται. Έτσι, στο πλήθος N(α) λαμβάνουμε υπόψη μας τα άτομα του πληθυσμού που έχουν την ιδιότητα α, αδιαφορώντας αν έχουν ή δεν έχουν και κάποιες άλλες ιδιότητες. Όμοια, στο συμβολισμό N(α β΄) λαμβάνουμε υπόψη μας μόνο εκείνα τα άτομα που έχουν την ιδιότητα α και δεν έχουν την ιδιότητα β, χωρίς να ασχοληθούμε αν έχουν ή όχι την ιδιότητα γ ή τη δ, κλπ.

**Παράδειγμα 1.19**. Από 15 παιδιά που παίζουν στην αυλή ενός σχολείου τα 6 έχουν κασκόλ, τα 8 έχουν σκούφο, ενώ τα 3 έχουν και σκούφο και κασκόλ. Πόσα είναι τα παιδιά που δεν έχουν ούτε κασκόλ ούτε σκούφο;




Σχήμα 1.3

Λύση

Συμβολίζοντας με α την ιδιότητα ένα παιδί να έχει κασκόλ και με β την ιδιότητα να έχει σκούφο, έχουμε:

N=15, N(α)=6, N(β)=8, N(α β)=3. Το ζητούμενο N(α΄β΄) υπολογίζεται από το σχήμα 1.3, ότι είναι ίσο με 4.

■

Γενικεύοντας το παράδειγμα αποδεικνύουμε το επόμενο.

**Θεώρημα 1.6.** Αν α και β είναι δύο ιδιότητες και είναι γνωστές οι ποσότητες N(α), N(β) και N(α β), τότε θα ισχύει:

N(α ή β)=N(α)+N(β)–N(α β). (1.36)

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε τα άτομα που έχουν την ιδιότητα α με αυτά που έχουν την ιδιότητα β, τότε τα άτομα που έχουν και τις δύο ιδιότητες, τα έχουμε συμπεριλάβει δύο φορές. Έτσι, πρέπει να αφαιρέσουμε από το άθροισμα N(α)+N(β) το πλήθος αυτών που έχουν και τις δύο ιδιότητες, δηλαδή το N(α β), για να προκύψει το ζητούμενο. ■

Γενικεύοντας για n ιδιότητες έχουμε το επόμενο, που είναι γνωστό ως **Αρχή συμπερίληψης – εξαίρεσης** (ΑΣΕ) (inclusion – exclusion principle).

**Θεώρημα 1.7.** Το πλήθος των ατόμων που έχουν μία τουλάχιστον από τις n ιδιότητες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \ldots \text{ή } \alpha_n) &= \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i\alpha_j) + \ldots + \\ &+ (-1)^{s+1} \sum N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_s}) + \ldots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n) \end{aligned} \tag{1.37}$$

όπου η άθροιση στα αθροίσματα εκτείνεται σε όλους τους συνδυασμούς των δεικτών που εμφανίζονται.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε κάποιο άτομο, έστω το x, από αυτά που μας ενδιαφέρουν, από αυτά δηλαδή που ικανοποιούν μία τουλάχιστον από τις ιδιότητες. Θα δείξουμε ότι η συνεισφορά του ατόμου αυτού στο δεύτερο μέλος της (1.37) ισούται με 1, όπως εξάλλου και στο πρώτο μέλος. Τα άτομα που δεν έχουν καμία από τις ιδιότητες δεν συνεισφέρουν σε κανένα από τα μέλη της σχέσης (1.37) .

Ας υποθέσουμε ότι το x ικανοποιεί τις k, ($1 \le k \le n$), από τις n ιδιότητες, ενώ τις υπόλοιπες δεν τις ικανοποιεί. Τότε το x προσφέρει k μονάδες στο άθροισμα $\sum N(\alpha_i)$, $\binom{k}{2}$ μονάδες στο άθροισμα $\sum N(\alpha_i\alpha_j)$, $\binom{k}{3}$ μονάδες στο άθροισμα $\sum N(\alpha_i\alpha_j\alpha_k)$ και συνεχίζοντας ανάλογα προσφέρει $1=\binom{k}{k}$ μονάδες στο άθροισμα $\sum N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k})$. Στα αθροίσματα του δευτέρου μέλους που αφορούν περισσότερες από k ιδιότητες το x δεν προσφέρει τίποτε. Συνοψίζοντας τα ανωτέρω και λαμβάνοντας υπόψη μας και τα πρόσημα, η συνολική συνεισφορά του x στο δεύτερο μέλος είναι

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} \text{ μονάδες.}$$

Όμως, λόγω του διωνύμου του Νεύτωνα (με α = –β = 1), (βλ. σχέση (1.24β) ), το τελευταίο άθροισμα ισούται με 1. ■

Μια άλλη απόδειξη της σχέσης (1.37) μπορεί να δοθεί ως εξής. Έστω $A_k$ το σύνολο των ατόμων που έχουν την ιδιότητα $\alpha_k$ και $|A_k|$ συμβολίζει τον πληθικό αριθμό του συνόλου $A_k$, τότε ισχύει $|A_k|=N(\alpha_k)$, $|A_k \cap A_\ell|=N(\alpha_k \alpha_\ell)$, κλπ., και η (1.37) γράφεται:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n+1} S_{n+1} \tag{1.38}$$

όπου:

$$S_k = \sum_{1 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k \le n} \left|A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \ldots \cap A_{t_k}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Η τελευταία αποδεικνύεται εύκολα με μαθηματική επαγωγή, χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $\left|A_1 \cup A_2\right| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

**Πόρισμα 1.2.** Το πλήθος των ατόμων που δεν έχουν καμία από τις n ιδιότητες $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1' \, \alpha_2' \ldots \alpha_n') = N - \sum N(\alpha_i) + \sum N(\alpha_i \alpha_j) - \ldots + \\ +(-1)^s \sum N(\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} .. \alpha_{i_s}) + \ldots + (-1)^n N(\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_n) \end{aligned} \tag{1.39}$$

όπου η άθροιση στα αθροίσματα εκτείνεται σε όλους τους συνδυασμούς των δεικτών που εμφανίζονται.

Απόδειξη

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ένα άτομο είτε δεν ικανοποιεί καμία από τις ιδιότητες, είτε ικανοποιεί τουλάχιστον μία από αυτές, δηλαδή ισχύει

$$N(\alpha_1' \, \alpha_2' \ldots \alpha_n') + N(\alpha_1 \; ή \; \alpha_2 \; ή \ldots ή \; \alpha_n) = \text{N}. \tag{1.40}$$

Το ζητούμενο προκύπτει τώρα αμέσως από τη σχέση (1.37) με αντικατάσταση. ■

**Σημείωση 1.** Η ονομασία αρχή συμπερίληψης-εξαίρεσης, δικαιολογείται ως εξής. Για τον υπολογισμό του πλήθους των ατόμων που έχουν τουλάχιστον μία από τις ιδιότητες α, β, γ, … προσθέτουμε καταρχήν τις ποσότητες N(α), N(β), … Τότε, όμως, εκείνα τα άτομα που έχουν δύο από τις ιδιότητες, τα συμπεριλάβαμε δύο φορές και για να μην κάνουμε λάθος πρέπει να τα εξαιρέσουμε αφαιρώντας από το προηγούμενο άθροισμα τις ποσότητες N(αβ), N(βγ), N(γα), … Τώρα, όμως εκείνα τα άτομα που έχουν τρεις από τις ιδιότητες, έστω τις α, β, γ, τα συμπεριλάβαμε αρχικά τρεις φορές (με τα N(α), N(β), N(γ)), και τα εξαιρέσαμε στη συνέχεια άλλες τρεις φορές (με τα N(αβ), N(βγ), N(γα)). Έτσι πρέπει να τα συμπεριλάβουμε εκ νέου προσθέτοντας τις ποσότητες N(αβγ), N(αβδ), ….

**Σημείωση 2.** Η σχέση (1.39) δεν υπάρχει λόγος να απομνημονευτεί. Πράγματι, αν όπου εμφανίζεται άρνηση ιδιότητας α΄ θέσουμε 1-α, και κάνουμε συμβολικές πράξεις θεωρώντας ότι N(α+β)=N(α)+N(β), N(-α)=-N(α), N(1)=N παίρνουμε τη σχέση (1.39). Για παράδειγμα:

$$N(\alpha'\beta'\gamma')=N((1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma))=N(1-\alpha-\beta-\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma)=$$
$$=N-N(\alpha)-N(\beta)-N(\gamma)+N(\alpha\beta)+N(\alpha\gamma)+N(\beta\gamma)-N(\alpha\beta\gamma).$$

Χρησιμοποιώντας και την (1.40), έχουμε

$$N(\alpha \text{ ή } \beta \text{ ή } \gamma)=N - N(\alpha'\beta'\gamma')=$$
$$=N-N(\alpha)-N(\beta)-N(\gamma)+N(\alpha\beta)+N(\alpha\gamma)+N(\beta\gamma)-N(\alpha\beta\gamma).$$

που είναι η (1.37) για n=3. Ο κανόνας αυτός ισχύει και σε άλλες περιπτώσεις. Έτσι

$$N(\alpha'\beta\,\gamma')= N((1-\alpha)\,\beta\,(1-\gamma))=N(\beta-\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\beta\gamma)=$$
$$= N(\beta)-N(\alpha\beta)-N(\beta\gamma)+N(\alpha\beta\gamma).$$

**Παράδειγμα 1.20.** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους τοποθετούνται σε σειρά τα γράμματα Α, Γ, Υ, Ε, Σ, Ω, ώστε οι λέξεις ΕΓΩ και ΣΥ να μην εμφανίζονται πουθενά;

Λύση

Θέτουμε $\alpha_1$ : την ιδιότητα να εμφανίζεται το ΕΓΩ και $\alpha_2$ : την ιδιότητα να εμφανίζεται το ΣΥ.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν συνολικά 6! μεταθέσεις των 6 γραμμάτων, από τις οποίες 4! περιέχουν το ΕΓΩ (θεωρούμε το ΕΓΩ ως ένα αντικείμενο), 5! περιέχουν το ΣΥ και 3! περιέχουν ταυτόχρονα το ΕΓΩ και το ΣΥ. Εφαρμόζοντας την ΑΣΕ, έχουμε:

$$N(\alpha_1'\,\alpha_2') = N-(N(\alpha_1)+N(\alpha_2))+N(\alpha_1\alpha_2) = 6!-(5!+4!)+(3!)=582\ .$$

■

**Παράδειγμα 1.21.** (Κόσκινο του Ερατοσθένη). Πόσοι από τους φυσικούς αριθμούς που είναι μικρότεροι του 70 δεν διαιρούνται ούτε με το 2, ούτε με το 3 ούτε με το 11;

Λύση

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ~~2~~ | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | 9 | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | 15 | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| 21 | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | 25 | ~~26~~ | 27 | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | 33 | ~~34~~ | 35 | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | 39 | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | 45 | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | 49 | ~~50~~ |
| 51 | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | 55 | ~~56~~ | 57 | ~~58~~ | 59 | ~~60~~ |
| 61 | ~~62~~ | 63 | ~~64~~ | 65 | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | 69 | ~~70~~ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ~~2~~ | ~~3~~ | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | 25 | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | 35 | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | 49 | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | 55 | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | 59 | ~~60~~ |
| 61 | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | 65 | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | ~~69~~ | ~~70~~ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ~~2~~ | ~~3~~ | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| ~~11~~ | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | 25 | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | 35 | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | 49 | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | 59 | ~~60~~ |
| 61 | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | 65 | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | ~~69~~ | ~~70~~ |

Σχήμα 1.4

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 5 | | 7 | | | |
| | | 13 | | | | 17 | | 19 | |
| | | 23 | | 25 | | | | 29 | |
| 31 | | | | 35 | | 37 | | | |
| 41 | | 43 | | | | 47 | | 49 | |
| | | 53 | | | | | | 59 | |
| 61 | | | | 65 | | 67 | | | |

Σχήμα 1.5

Μία λύση αυτού του προβλήματος βρίσκεται ως εξής. Καταγράφουμε καταρχήν τους αριθμούς που δόθηκαν σε ένα πίνακα (άνω αριστερά στο σχήμα 1.4). Διαγράφουμε στη συνέχεια όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με 2. Μετά διαγράφουμε αυτούς που διαιρούνται με 3 και δεν είχαν διαγραφεί στο προηγούμενο βήμα. Τέλος, διαγράφουμε αυτούς που διαιρούνται με 11 και δεν είχαν διαγραφεί στα προηγούμενα βήματα. Απαριθμώντας τους αριθμούς που απέμειναν (κάτω δεξιά τετράγωνο στο σχήμα 1.4), βρίσκουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 21.

Η διαδικασία που περιγράψαμε ήταν γνωστή από την αρχαιότητα ως «κόσκινο του Ερατοσθένη». Λεγόταν δε «κόσκινο» για τον εξής λόγο. Για την καταγραφή των αριθμών χρησιμοποιούσαν ένα πινακίδιο που το επάλειφαν με κερί και αντί να διαγράφουν τους αριθμούς που δεν ικανοποιούσαν την απαίτηση τους αφαιρούσαν από το πινακίδιο ξύνοντας την αντίστοιχη θέση. Έτσι αυτό που έμενε τελικά έμοιαζε με κόσκινο (σχήμα 1.5). Η διαδικασία που περιγράψαμε είναι αλγοριθμική, με την έννοια ότι γίνεται σε διαδοχικά βήματα που προσεγγίζουν την απάντηση, και σε κάθε ξεκινούμε από το αποτέλεσμα του προηγουμένου βήματος. Το κόσκινο του Ερατοσθένη πρέπει να είναι η πρώτη εφαρμογή μιας αλγοριθμικής διαδικασίας.

Ένας δεύτερος τρόπος να λύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα, είναι με την αρχή συμπερίληψης – εξαίρεσης.

Ας συμβολίσουμε με α την ιδιότητα ο αριθμός διαιρείται με 2, με β την ιδιότητα να διαιρείται με 3 και με γ την ιδιότητα να διαιρείται με 11. Τότε το ζητούμενο είναι το N($\alpha'\beta'\gamma'$), το οποίο σύμφωνα με την ΑΣΕ, ισούται με:

$$\begin{aligned} N(\alpha'\beta'\gamma') &= N - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) + \\ &+ N(\alpha\beta) + N(\alpha\gamma) + N(\beta\gamma) - N(\alpha\beta\gamma) = \\ &= 70 - 35 - 23 - 6 + 11 + 3 + 2 - 1 = \mathbf{21}. \end{aligned}$$

Να σημειωθεί εδώ ότι για τον υπολογισμό του N(α) μετρήσαμε πόσοι από τους N=70 αριθμούς διαιρούνται με το 2, χωρίς να μας ενδιαφέρει αν διαιρούνται ή όχι με το 3 ή το 11. Όμοια, για τον υπολογισμό του N(βγ), μετρήσαμε πόσοι από τους αριθμούς διαιρούνται με 3 και με 11, ή ισοδύναμα, πόσοι διαιρούνται με 33, αδιαφορώντας αν διαιρούνται ή όχι με το 2.

■

*1.5.2. Διαταράξεις*

Έτσι λέγονται οι αναδιατάξεις ενός αρχικού συνόλου που δεν αφήνουν κανένα στοιχείο στην αρχική του θέση.

Αν συμβολίσουμε $D_n$ το πλήθος των διαταράξεων συνόλου n στοιχείων, τότε ισχύει:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \tag{1.41}$$

Για την απόδειξη, υποθέτουμε ότι ($\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_n$) είναι μια από τις N=n! μεταθέσεις των αριθμών (1,2,...,n). Συμβολίζουμε με $\alpha_i$, i=1,2,...n, την ιδιότητα ότι στη μετάθεση αυτή το $\mu_i$ είναι ίσο με i. Τότε N($\alpha_1$) ισούται με το πλήθος των μεταθέσεων που αφήνουν το 1 στην πρώτη θέση. Άρα τα υπόλοιπα μπορούν να τοποθετηθούν με (n-1)! τρόπους, ώστε N($\alpha_1$)= (n-1)! Σκεπτόμενοι ανάλογα, βρίσκουμε N($\alpha_1$ $\alpha_2$)= (n-2)! κλπ.

Εφαρμόζοντας την Αρχή Συμπερίληψης Εξαίρεσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D_n &= N(\alpha_1' \, \alpha_2' \ldots \alpha_n') = N - \sum N(\alpha_i) + \sum N(\alpha_i \, \alpha_j) - \ldots = \\ &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots \end{aligned}$$

που δίνει αμέσως το ζητούμενο.

Άλλος τρόπος (με διπλή απαρίθμηση).

Ας θεωρήσουμε μια διατάραξη της μετάθεσης (1, 2, ..., n)

| 1 | 2 | ... | k | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|
| k | | | ; | | |

Το πρώτο στοιχείο της διατάραξης που αντιστοιχεί στο 1, προφανώς είναι διαφορετικό του 1 και έστω ότι είναι το k (k=2, 3,…, n). Τότε αυτό που αντιστοιχεί στο k της αρχικής μετάθεσης έχει δύο δυνατότητες· είναι είτε το 1 (με $D_{n-2}$ τρόπους) είτε διάφορο του 1 (με $D_{n-1}$ τρόπους). Επειδή το k έχει n-1 δυνατότητες, ισχύει τελικά, η αναδρομική σχέση:

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})\ .$$

Λύνοντας την αναδρομική σχέση παίρνουμε πάλι την (1.41). Για τη λύση μπορείτε να εργαστείτε με τη βοήθεια των γεννητριών (βλ. παρ. 2.4).

Οι τιμές του $D_n$ για μικρές τιμές του n, δίνονται στον πίνακα:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_n$ | 0 | 1 | 2 | 9 | 44 | 265 | 1854 | 14833 |

### *1.5.3. Η αρχή του Περιστερώνα ή του Dirichlet*

Μία μάλλον προφανής, αλλά αρκετά χρήσιμη και με πολλές εφαρμογές, αρχή απαρίθμησης είναι η εξής:

Αρχή Περιστερώνα **(Pigeonhole principle) ή αρχή του Dirichlet**
Αν έχουμε n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον n+1 περιστέρια (δηλαδή τουλάχιστον ένα περιστέρι περισσότερο από τις φωλιές), τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με 2 ή περισσότερα περιστέρια. **Γενίκευση**. Αν οι φωλιές είναι n και τα περιστέρια τουλάχιστον $k\cdot n+1$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με k+1ή περισσότερα περιστέρια.

**Παράδειγμα 1.22.** Επιλέγουμε τυχαία, χωρίς επανάληψη, n+1 αριθμούς από το σύνολο Ω={1, 2, 3, ..., 2n}. Δείξτε ότι μεταξύ των αριθμών που διαλέξαμε υπάρχουν πάντοτε τουλάχιστον δύο τέτοιοι, ώστε ο ένας από αυτούς:

α) να είναι μεγαλύτερος του άλλου κατά n,
β) να είναι διαδοχικός του άλλου
γ) να έχει με τον άλλο άθροισμα 2n+1,
δ) να διαιρεί τον άλλο.

Λύση

α) Θεωρούμε τα ζεύγη αριθμών

(1, n+1), (2, n+2), (3, n+3), ..., (n, 2n) ως "φωλιές",

ενώ τους αριθμούς που επιλέξαμε ως «περιστέρια». Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα θα υπάρχει φωλιά με τουλάχιστον δύο περιστέρια. Αυτό σημαίνει ότι από κάποιο ζεύγος αριθμών έχουμε επιλέξει και τους δύο. Από αυτούς ο ένας είναι μεγαλύτερος του άλλου κατά n, όπως είναι το ζητούμενο.

β) Όμοια με το (α) παίρνοντας ως φωλιές τα ζεύγη:

(1, 2), (3, 4), (5, 6), ..., (2n-1, 2n) .

γ) Όμοια με το (α) παίρνοντας ως φωλιές τα ζεύγη:

(1, 2n), (2, 2n-1), (3, 2n-2), ..., (n, n+1).

δ) Επειδή οι περιττοί αριθμοί του συνόλου Ω είναι n και εμείς επιλέγουμε n+1 αριθμούς, άρα μεταξύ των επιλεγμένων υπάρχουν και άρτιοι αριθμοί. Εκφράζουμε τους άρτιους επιλεγμένους αριθμούς ως γινόμενο περιττού αριθμού επί κάποια δύναμη του 2, δηλ. με τη μορφή $2^{\lambda}\mu$, όπου $\lambda>0$ και μ περιττός. Θεωρούμε ότι ο θετικός αριθμός που έχει την προηγούμενη μορφή, αντιστοιχεί στον περιττό μ, ενώ κάθε περιττός αντιστοιχεί στον εαυτό του. Έτσι οι n+1 αριθμοί που επιλέξαμε (που είναι τα «περιστέρια»), αντιστοιχίζονται στους n υπάρχοντες περιττούς (που είναι οι «φωλιές»). Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, θα υπάρχει φωλιά με τουλάχιστον δύο περιστέρια. Θα υπάρχει δηλαδή περιττός στον οποίο αντιστοιχίζονται δύο αριθμοί. Οι δύο αυτοί αριθμοί θα είναι, σύμφωνα με τα προηγούμενα, της μορφής $2^{\kappa}\mu$ και $2^{\lambda}\mu$, όπου ο μ είναι ο ίδιος και οι κ, λ θετικοί ή 0. Κάποιος από τους δύο είναι ο μικρότερος, έστω $\kappa<\lambda$ (δεν μπορεί να είναι ίσοι), οπότε ισχύει τότε $2^{\kappa}$ διαιρεί τον $2^{\lambda}$, ή ισοδύναμα $2^{\kappa}\mu$ διαιρεί τον $2^{\lambda}\mu$, όπως ζητούσαμε να δείξουμε.

■

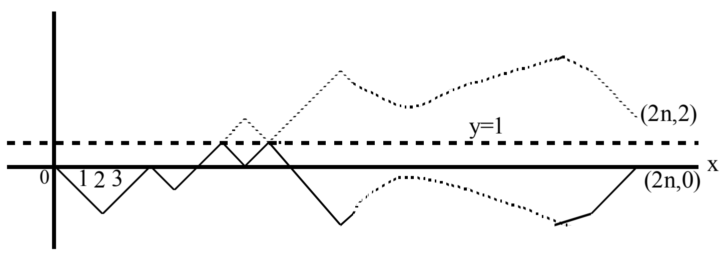
### *1.5.4. Αρχή Αντανάκλασης*

Θα περιγράψουμε την αρχή αυτή με ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.23.** Στο ταμείο ενός θεάτρου υπάρχει μια ουρά 2n ατόμων. Τα μισά άτομα έχουν μόνο χιλιάρικα ενώ τα άλλα μισά έχουν και από ένα 500-ρικο. Τα εισιτήρια κάνουν 2500 και 3500 δρχ. και στην αρχή ο ταμίας δεν έχει καθόλου ρέστα. Είναι φανερό ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των ατόμων αυτών στην ουρά. Σε πόσους από τους τρόπους αυτούς υπάρχουν πάντα 500-ρικα στο ταμείο του θεάτρου ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα;

Λύση

Τοποθετούμε τα 2n άτομα της ουράς στα σημεία 1,2,...,2n της πραγματικής ευθείας και αντιστοιχούμε την τιμή -1 αν το άτομο έχει 500-ρικο και +1 αν δεν έχει. Προσθέτοντας από αριστερά προς τα δεξιά και ξεκινώντας από το σημείο 0, παίρνουμε μια τεθλασμένη γραμμή όπως η συνεχής γραμμή του σχήματος 1.6. Διάφορες τοποθετήσεις των ατόμων στην ουρά αντιστοιχούν σε διάφορες τεθλασμένες γραμμές, που θα αναφέρονται ως «τροχιές». Είναι φανερό ότι κάθε τροχιά αρχίζει από το σημείο Ο(0,0) και τελειώνει στο σημείο Τ(2n, 0). Επίσης, κάθε τροχιά αποτελείται από 2n τμήματα, τα μισά από τα οποία είναι ανοδικά (Α) και τα μισά καθοδικά (Κ). Επομένως κάθε τροχιά μπορεί να θεωρηθεί ως τοποθέτηση n γραμμάτων Α




Σχήμα 1.6

και n γραμμάτων Κ σε σειρά. Έτσι οι δυνατές τροχιές είναι σε πλήθος $\binom{2n}{n}$.

Από την κατασκευή των τροχιών παρατηρούμε ότι για να υπάρξει πρόβλημα στο ταμείο πρέπει η τεταγμένη της τροχιάς σε κάποιο σημείο να είναι ίση με 1. Το ζητούμενο θα βρεθεί αν από όλες τις τροχιές αφαιρέσουμε τις «προβληματικές» τροχιές. Για να υπολογίσουμε το πλήθος αυτών των τροχιών εφαρμόζουμε ένα τέχνασμα που λέγεται *αρχή της αντανάκλασης*.

Ας υποθέσουμε ότι η τροχιά είναι «προβληματική» και ας είναι k το πρώτο σημείο για το οποίο η τεταγμένη είναι ίση με 1. Σχηματίζω μία νέα τροχιά η οποία να ταυτίζεται με την αρχική μέχρι το σημείο k και να είναι η συμμετρική της αρχικής ως προς την ευθεία y=1 από το σημείο k και μετά. Η τροχιά αυτή λόγω της κατασκευής της θα φθάσει στο σημείο Τ΄(2n, 2). Ώστε σε κάθε περίπτωση που υπάρχει πρόβλημα στο ταμείο υπάρχει τροχιά που συνδέει τα σημεία Α και Τ΄. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι ισχύει και το αντίστροφο. Όμως, για να συνδέει μια τροχιά τα σημεία Α και Τ΄, θα πρέπει από τα 2n τμήματα που αποτελείται τα n+1 να είναι ανοδικά και τα υπόλοιπα n-1 τμήματα καθοδικά. Αλλά υπάρχουν $\binom{2n}{n+1}$ τέτοιες τροχιές.

Άρα οι μη-προβληματικές τροχιές θα είναι σε πλήθος

$$N_A = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Μάλιστα, αν διαιρέσουμε με το πλήθος των δυνατών τροχιών, βρίσκουμε ότι η πιθανότητα να μην υπάρξει πρόβλημα είναι 1/(n+1).

■

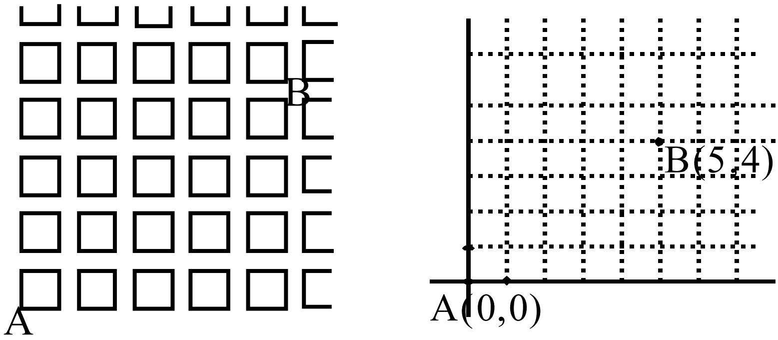
*1.5.5. Κίνηση σε δικτυωτά*

Οι διωνυμικοί συντελεστές και η αρχή συμπερίληψης εξαίρεσης μπορούν να δώσουν απαντήσεις σχετικές με την κίνηση σε δικτυωτό. Με τον όρο αυτό εννοούμε το σύνολο των σημείων που ορίζονται από τις τομές των ευθειών δύο παράλληλων δεσμών ευθειών, συνήθως ορθογωνίων μεταξύ τους. Θα περιγράψουμε την εφαρμογή με το επόμενο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 1.24.** Ένας διαβάτης κινείται σε ένα δίκτυο οικοδομικών τετραγώνων, Σχήμα 1.7 (αριστερά), από το σημείο Α στο σημείο Β. Αν του επιτρέπεται να κινείται μόνο προς τα Ανατολικά ή προς τα Βόρεια, να βρεθεί πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορεί να ακολουθήσει;

Λύση

Συμβολίζουμε το δίκτυο των οικοδομικών τετραγώνων με το δικτυωτό του Σχήματος 1.7 (δεξιά) και ονομάζουμε βήμα μια επιτρεπτή μετακίνηση σε μια πλευρά τετραγώνου. Συμβολίζουμε επίσης με Μ(x,y) ένα σημείο που βρίσκεται x βήματα ανατολικά και y βήματα βόρεια, από το αρχικό σημείο Α(0,0).




Σχήμα 1.7

Έστω f(x,y) το ζητούμενο πλήθος των διαφορετικών δρόμων από το A(0,0) στο M(x,y). Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$f(x, y) = f(x-1, y) + f(x, y-1),$$

διότι το τελευταίο βήμα στο M(x,y) μπορεί να είναι είτε από το M(x–1, y), είτε από το M(x, y–1).

Η συνάρτηση f(x,y) βρίσκεται χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση. Μια συνδυαστική λύση, με χρήση διπλής απαρίθμησης, είναι η εξής:

Για να βρεθεί ο διαβάτης από το σημείο A(0,0) στο σημείο M(x,y) χρειάζεται να κάνει x+y διαδοχικά βήματα, κάποια προς τα ανατολικά (A) και κάποια προς τα βόρεια (B). Έτσι, κάθε διαδρομή μπορεί να θεωρηθεί ως μία διαδοχή από

x το πλήθος A και y το πλήθος B.

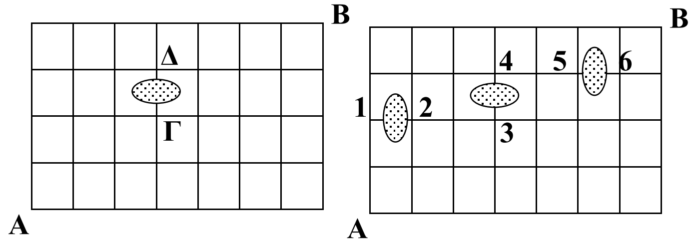
Άρα το πλήθος των διαφορετικών δρόμων θα ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων x+y γραμμάτων, από τα οποία τα x είναι A και τα y είναι B. Το πλήθος όμως αυτό ισούται με

$$M_{x+y}^{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!\cdot y!} = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}, \text{ δηλαδή } f(x,y) = \binom{x+y}{x}.$$

■

Χρησιμοποιώντας και την αρχή συμπερίληψης - εξαίρεσης λύνονται περισσότερο πολύπλοκα προβλήματα αυτής της μορφής.

**Παράδειγμα 1.25.** Στα σχήματα 1.8 η κίνηση στην πλευρά κάθε τετραγώνου είναι ένα επιτρεπτό βήμα και η κατεύθυνση της κίνησης είναι προς τα Ανατολικά ή προς τα Βόρεια. Υπάρχουν όμως βήματα μη εφικτά, όπως μεταξύ των σημείων Γ, Δ στο πρώτο σχήμα, ή μεταξύ των σημείων 1,2 ή 3,4 ή 5,6 στο δεύτερο. Με πόσους τρόπους πάμε από το Α στο Β;




Σχήμα 1.8

Λύση

Για το πρώτο σχήμα αρκεί από όλες τις διαδρομές που συνδέουν τα Α, Β, να αφαιρέσουμε όλες τις προβληματικές διαδρομές, δηλαδή αυτές που περιέχουν το βήμα “ΓΔ”. Αυτές οι τελευταίες αποτελούνται από τους συνδυασμούς των διαδρομών από το Α στο Γ, και αυτών από το Δ στο Β (πολλαπλασιαστική αρχή). Η απάντηση είναι $\binom{11}{7}-\binom{5}{3}\binom{5}{4}=280$ .

Για το δεύτερο σχήμα θέτουμε α την ιδιότητα “μια διαδρομή” περιέχει το βήμα 12”, και αντίστοιχα β και γ για τις διαδρομές που περιέχουν τα 34 ή 56. Το ζητούμενο ισοδυναμεί με το πλήθος Ν( $\alpha'\beta'\gamma'$ ) των διαδρομών που δεν έχουν καμία από τις ιδιότητες α, β και γ. Έχουμε

$$N(\alpha'\beta'\gamma') = N - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) + N(\alpha\beta) + N(\alpha\gamma) + N(\beta\gamma) - N(\alpha\beta\gamma) =$$
$$=\binom{11}{4}-\binom{2}{2}\binom{8}{2}-\binom{5}{2}\binom{5}{1}-\binom{8}{3}\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{5}{1}+$$
$$+\binom{2}{2}\binom{5}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{1}-\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{1}=\mathbf{173}\,.$$

■

## Ασκήσεις

**1.5.1.** Να αποδείξετε η συνάρτηση φ(n) του Euler, που υπολογίζει το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι του n και πρώτοι προς τον n, δίνεται από τη σχέση $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$, όπου $n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_r^{\pi_r}$ το ανάπτυγμα του n σε πρώτους παράγοντες.

**1.5.2.** Η Μαίρη πρόκειται να πάει διακοπές όπου θα παραμείνει και τις 90 μέρες του φετινού καλοκαιριού. Επειδή είναι εξαιρετικά οργανωτική, έχει αποφασίσει να ακολουθήσει αυστηρά το παρακάτω πρόγραμμα. Κάθε δύο μέρες θα πηγαίνει για μπάνιο, κάθε τρεις θα πλένει και θα καθαρίζει και κάθε πέντε θα διαβάζει. Την πρώτη μέρα των διακοπών έκανε και τα τρία και κουράστηκε πολύ. Πόσες από τις 90 μέρες θα είναι ευχάριστες (δηλ. θα έχει μόνο να πάει για μπάνιο); Πόσες θα είναι βαρετές (δηλ. δεν θα έχει να κάνει τίποτα);

**1.5.3.** Από τους μουσικούς μιας ορχήστρας οι 12 παίζουν έγχορδο όργανο, 7 παίζουν πνευστό και 10 παίζουν κρουστό. Γνωρίζουμε επίσης ότι τρεις παίζουν και έγχορδο και πνευστό, τέσσερις παίζουν και πνευστό και κρουστό όργανο, 2 παίζουν έγχορδο και κρουστό ενώ υπάρχει ένας που παίζει και τα τρία είδη οργάνων. Πόσοι είναι οι μουσικοί;

**1.5.4.** Καθηγητής δίνει την πρώτη μέρα 5 ασκήσεις (από μία) σε 5 μαθητές του. Με πόσους τρόπους θα δώσει τη δεύτερη μέρα τις ίδιες ασκήσεις στους ίδιους μαθητές ώστε κανείς να μην έχει την ίδια που είχε πριν;

**1.5.5.** Τα χαρτιά 1, 2, 3, 4, 5 είναι μπαστούνια και τα 6, 7, 8, 9 10 είναι κούπες. Ανακατεύουμε καλά και "ξεφυλλίζουμε" (δηλαδή τα ανοίγουμε ένα-ένα στο τραπέζι) αριθμώντας τα χαρτιά. Με πόσους τρόπους δεν συμβαίνει καμία συνάντηση (δηλαδή το k-στό χαρτί να είναι το k) όταν επιπλέον θέλουμε κατά το ξεφύλλισμα να περάσουν πρώτα: (α) όλα τα μπαστούνια, (β) όλες οι κούπες;

**1.5.6.** Πόσες από τις μεταθέσεις των αριθμών 1,2, ..., 11: (α) αφήνουν κάθε άρτιο στη φυσική του θέση και κανένα περιττό στη θέση του, (β) αφήνουν όλους τους άρτιους σε άρτιες θέσεις, τους περιττούς σε περιττές θέσεις, αλλά κανέναν στη φυσική του θέση, (γ) ακριβώς τέσσερις αριθμούς στη θέση τους;

**1.5.7.** Πενήντα θεατές ενός θεάτρου πηγαίνουν μετά το τέλος της παράστασης στο βεστιάριο του θεάτρου, για να πάρουν το παλτό τους που είχαν αφήσει εκεί. Αν τα παλτό δοθούν με τυχαίο τρόπο στους κατόχους, με πόσους διαφορετικούς τρόπους (α) κανείς δεν παίρνει το δικό του παλτό; (β) με πόσους τρόπους ένας μόνο από τους 50 παίρνει το παλτό του; (γ) ποια η πιθανότητα για κάθε περίπτωση;

**1.5.8.** Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε κάθε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν δύο τουλάχιστον παιδιά με το ίδιο ύψος. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα, που είναι του ίδιου φύλου και έχουν το ίδιο ύψος.

**1.5.9.** Να δείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός που γράφεται μόνο με τα ψηφία 0 και 1, ο οποίος να διαιρείται με το 7.

**1.5.10.** Να λυθεί το πρόβλημα του παραδείγματος 1.23, όταν n άτομα στην ουρά έχουν 500-ρικο, k άτομα έχουν μόνο 1000-ρικα και ο ταμίας έχει στην αρχή m 500-ρικα.

**1.5.11.** Στο πρόβλημα του παραδείγματος 1.23, πόσοι είναι οι τρόποι που ο ταμίας, μετά την εξυπηρέτηση του 1ου ατόμου στην ουρά και πριν την εξυπηρέτηση του τελευταίου, έχει στο ταμείο του τουλάχιστον ένα 500-ρικο;

**1.5.12.** Στο ίδιο πρόβλημα πόσοι είναι οι τρόποι που ο ταμίας μένει χωρίς 500-ρικο: (α) ακριβώς μία φορά και μάλιστα κατά την εξυπηρέτηση του (2k)-στού ατόμου στην ουρά ($1\leq k\leq n-1$), (β) ακριβώς μία φορά κατά την εξυπηρέτηση των ατόμων εκτός του πρώτου και του τελευταίου;

**1.5.13.** Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων συνδέουμε το σημείο (x,y), με x και y ακεραίους, είτε με το σημείο (x+1, y+1) είτε με το (x+1, y−1). Σχηματίζεται έτσι μια τροχιά. Να βρεθεί το πλήθος των τροχιών από το σημείο (α, β) στο (γ, δ), όπου $0\leq\alpha<\gamma$ , $\beta>0$, $\gamma>0$ και $(\gamma+\delta-\alpha-\beta)/2=k\in\mathbb{N}$:

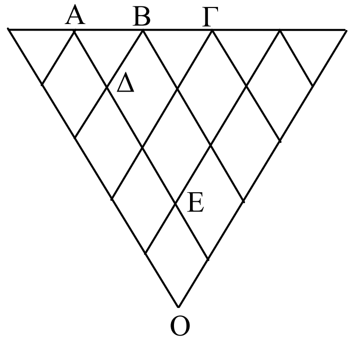
(i) που έχουν y=0 σε κάποιο σημείο τους.

(ii) που έχουν σε κάθε σημείο τους $y>0$,

(iii) που έχουν σε κάθε σημείο τους $y\geq 0$.

**1.5.14.** Για το πρώτο σχήμα του παραδείγματος 1.25. να δοθεί γενική λύση θεωρώντας τα σημεία να έχουν συντεταγμένες Α(0, 0), Β(x, y), Γ(κ, λ), Δ(κ, λ+1), όπου $0\leq\kappa\leq x$, $0\leq\lambda\leq y-1$.

**1.5.15.** Το διπλανό σχήμα παριστάνει ένα λαβύρινθο στον οποίο υποχρεώνεται να μπει ένα ποντικάκι από την είσοδο Ο. Οι γραμμές παριστάνουν τους διαδρόμους ενώ στις τομές τους υπάρχουν βαλβίδες που αναγκάζουν το ποντίκι να κινείται μόνο προς τα πάνω (είτε δεξιά είτε αριστερά) επιλέγοντας τυχαία την κατεύθυνση. Αν κάποια βαλβίδα είναι κλειστή επιστρέφει στην προηγούμενη.




i) Με πόσους τρόπους το ποντίκι βγαίνει από το Β;

ii) Με πόσους τρόπους βγαίνει το ποντίκι από το Β, όταν η βαλβίδα στο Ε είναι κλειστή;

iii) Με πόσους τρόπους βγαίνει το ποντίκι από το Β, όταν η βαλβίδες στα Δ και Ε είναι κλειστές;

## 1.6. Ένας αλγόριθμος καταγραφής μεταθέσεων

Σε πολλές περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα όταν θέλουμε να καταγράψουμε όλες τις δυνατές διαδρομές στο πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή ή όταν ενδιαφερόμαστε για τη βελτιστοποίηση μιας διακριτής συνάρτησης για τις διάφορες αντιμεταθέσεις των μεταβλητών της, μας χρειάζεται μια διαδικασία καταγραφής όλων των μεταθέσεων n αντικειμένων.

Ένας φυσικός τρόπος καταγραφής είναι με τη λεξικογραφική διάταξη. Για την περιγραφή αυτής της διάταξης ας θεωρήσουμε ότι $\pi=\pi_1\pi_2\pi_3...\pi_n$ και $\rho=\rho_1\rho_2\rho_3...\rho_n$ είναι δύο μεταθέσεις των n πρώτων φυσικών αριθμών ή των n πρώτων γραμμάτων του αλφαβήτου. Έστω, ακόμη, ότι είναι k ($k\geq 1$) ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο ισχύει $\pi_1=\rho_1$, $\pi_2=\rho_2$,..., $\pi_{k-1}=\rho_{k-1}$ ενώ $\pi_k<\rho_k$. Τότε θα λέμε ότι η μετάθεση π *προηγείται* της ρ στην λεξικογραφική διάταξη. Η ύπαρξη του k εξασφαλίζεται από το θεώρημα ύπαρξης ελάχιστου στοιχείου σε οποιοδήποτε σύνολο φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα

Α Β Γ, Α Γ Β, Β Α Γ, Β Γ Α, Γ Α Β, Γ Β Α, ή

1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1

είναι η καταγραφή με λεξικογραφική διάταξη των μεταθέσεων τριών αντικειμένων αν τα συμβολίσουμε με τα γράμματα Α, Β, Γ ή με τους αριθμούς 1, 2, 3 αντίστοιχα.

Είναι φανερό ότι για τιμές του n μεγαλύτερες του 4 η παραπάνω διαδικασία έχει νόημα μόνο αν πραγματοποιηθεί με κάποιο πρόγραμμα. Επίσης είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ακόμη και μεγάλοι υπολογιστές είναι αδύνατο να ολοκληρώσουν σε πραγματικό χρόνο την καταγραφή όλων των μεταθέσεων για τιμές του n μεγαλύτερες του 15, αφού $15!\approx 1.3\cdot 10^{12}$. Ακόμη, για τιμές του n μεγαλύτερες του 12, ο χώρος που απαιτείται για την αποθήκευση όλων των μεταθέσεων είναι τεράστιος (αν χρησιμοποιήσουμε 1 byte για κάθε σύμβολο απαιτείται περισσότερο από 5 GB για την αποθήκευση του 12!). Στα επόμενα περιγράφουμε έναν αλγόριθμο για την καταγραφή με λεξικογραφική διάταξη των μεταθέσεων n αντικειμένων.

*Αλγόριθμος καταγραφής των μεταθέσεων των 1, 2, ...n.*

**Βήμα 1**. Θέσατε $\pi=1\ 2\ 3\ ...\ n$ και καταγράψτε την π.

**Βήμα 2**. Αν $\pi=\pi_1\pi_2\pi_3...\pi_n$ και ισχύει $\pi_i > \pi_{i+1}$ για όλα τα i, σταματήστε (διότι η λίστα έχει ολοκληρωθεί).

**Βήμα 3**. Βρέστε το μεγαλύτερο i για το οποίο $\pi_i < \pi_{i+1}$.

**Βήμα 4**. Βρέστε το μικρότερο $\pi_j$ για το οποίο $i < j$ και $\pi_i < \pi_j$.

**Βήμα 5**. Εναλλάξτε αμοιβαία τα $\pi_i$ και $\pi_j$.

Βή**μα 6**. Διατάξτε σε αύξουσα φυσική σειρά τα σύμβολα που ακολουθούν το $\pi_j$, συμβολίστε με π την μετάθεση που προκύπτει, καταγράψτε την π και πηγαίνετε στο Βήμα 2.

Για να διευκρινιστούν ορισμένες λεπτομέρειες σχετικές με τον παραπάνω αλγόριθμο, παρατηρήστε ότι αν ο δείκτης στο βήμα 3 είναι $i=n-1$, τότε απλώς εναλλάσσουμε τα δύο τελευταία σύμβολα. Π.χ. αν n=6 και π=135624, τότε η επόμενη μετάθεση είναι η =135642. Αν ο δείκτης στο Βήμα 3 είναι μικρότερος του n-1, όπως για παράδειγμα στην π=142653, τότε μετά την εναλλαγή των συμβόλων 2 και 3 που ικανοποιούν τη συνθήκη του βήματος 4, προκύπτει 143652 στην οποία πρέπει να διατάξουμε τα σύμβολα μετά το 3, δηλαδή τα 6, 5, 2 σε αύξουσα σειρά. Έτσι η επόμενη μετάθεση είναι τελικά η π=143256.

Διαπιστώνεται, δηλαδή, ότι μας χρειάζεται και ένας αλγόριθμος διάταξης συμβόλων. Ένας από τους απλούστερους αλγορίθμους διάταξης, που έχει το πλεονέκτημα του εύκολου προγραμματισμού, είναι ο αλγόριθμος «bubble sort». Σύμφωνα με αυτόν, συγκρίνουμε γειτονικά στοιχεία και αν δεν είναι στη σωστή σειρά τα εναλλάσσουμε. Απαιτεί μια διαδικασία σε n-1 φάσεις, αν είναι n το πλήθος στοιχείων προς διάταξη. Στην πρώτη φάση κάνουμε n-1 συγκρίσεις, στη δεύτερη n-2 συγκρίσεις κ.ο.κ. ώστε να απαιτούνται συνολικά (n-1)n/2 συγκρίσεις. Ένα παράδειγμα αυτής της διαδικασίας δίνεται στον πίνακα 1.2, όπου διατάσσονται σε αύξουσα σειρά τα σύμβολα 3,4,1,5,2. Στην πρώτη φάση με 4 διαδοχικές συγκρίσεις πετυχαίνουμε να τοποθετήσουμε το μεγαλύτερο στοιχείο στην $5^{η}$ δηλαδή στη n-στή θέση. Στη δεύτερη φάση αρκεί να περιοριστούμε στα πρώτα $n-1=4$ στοιχεία, ενώ στην $n-1$ φάση όλα τα στοιχεία έχουν διαταχθεί.

Πίνακας 1.2. Διάταξη σε αύξουσα σειρά των 3, 4, 1, 5, 2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^{η}$ φάση | **3** | **4** | 1 | 5 | 2 |
| | 3 | **1** | **4** | 5 | 2 |
| | 3 | 1 | **4** | **5** | 2 |
| | 3 | 1 | 4 | **2** | **5** |
| $2^{η}$ φάση | **1** | **3** | 4 | 2 | 5 |
| | 1 | **3** | **4** | 2 | 5 |
| | 1 | 3 | **2** | **4** | 5 |
| $3^{η}$ φάση | **1** | **3** | 2 | 4 | 5 |
| | 1 | **2** | **3** | 4 | 5 |
| $4^{η}$ φάση | **1** | **2** | 3 | 4 | 5 |

Ο αλγόριθμος "bubble sort" για διάταξη των στοιχείων $x_1, x_2, \ldots, x_n$ , μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

**Βήμα 1**. Θέσατε m=n-1

**Βήμα 2**. Για i=1, 2, …, m: αν ισχύει $x_i > x_{i+1}$, εναλλάξτε τα $x_i > x_{i+1}$.

**Βήμα 3**. Ελαττώσατε το m κατά 1. Αν το m είναι τώρα 0, σταματήστε, αλλιώς πηγαίνετε στο Βήμα 2.

Ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα, με το όνομα metath.exe, που μας δίνει με αύξουσα λεξικογραφική διάταξη τις μεταθέσεις των n αντικειμένων 1, 2, ..., n, ή των A, B, C, …. (n το πλήθος γράμματα), κατασκευάστηκε σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράψαμε και είναι διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://users.auth.gr/cmoi. Η κατασκευή προγράμματος για διάταξη με τον αλγόριθμο bubble sort, αφήνεται ως άσκηση στους αναγνώστες.

**Ασκήσεις προς λύση**

**1.1.** Πέντε κάρτες είναι αριθμημένες με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5. Πόσοι διαφορετικοί τριψήφιους σχηματίζονται με την τοποθέτηση τριών από αυτές τις κάρτες σε σειρά;

**1.2.** Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικοί δρόμοι που συνδέουν τις πόλεις Α και Β, δύο που συνδέουν τη Β με την Γ και τρεις που συνδέουν την Γ με τη Δ. Υπάρχουν επίσης δύο δρόμοι που συνδέουν τη Β με την Δ παρακάμπτοντας την Γ. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους ξεκινώντας κάποιος από την Α πηγαίνει στην Δ και επιστρέφει στην Α;

**1.3.** α) Σε μία εξακύλινδρη μηχανή οι άρτια αριθμημένοι κύλινδροι είναι αριστερά ενώ περιττά αριθμημένοι κύλινδροι είναι δεξιά. Μία καλή διάταξη ανάφλεξης των έξι κυλίνδρων, προϋποθέτει ότι οι κύλινδροι αριστερά και δεξιά της μηχανής πρέπει να εναλλάσσονται. Πόσες καλές διατάξεις υπάρχουν που να ξεκινούν από αριστερό κύλινδρο; β) Επαναλάβατε για την περίπτωση 2n-κύλινδρης μηχανής.

**1.4.** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε σειρά τα γράμματα α, α, α, α, α, β, β, β, γ, γ, δ;

**1.5.** Ένα κατάστημα υποδημάτων έχει 20 είδη ανδρικών υποδημάτων και 25 είδη γυναικείων. Κάθε είδος ανδρικών υποδημάτων είναι διαθέσιμο σε 10 μεγέθη και 3 χρώματα. Κάθε είδος γυναικείων υποδημάτων είναι διαθέσιμο σε 12 μεγέθη και 6 χρώματα. Πόσα διαφορετικά ζευγάρια υποδημάτων πρέπει να υπάρχουν κατελάχιστον στην αποθήκη του καταστήματος;

**1.6.** Πόσες λέξεις έστω και χωρίς νόημα σχηματίζονται με τα γράμματα της λέξης ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗΣ;

**1.7.** Πόσοι τριψήφιοι άρτιοι έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;

**1.8.** Το τηλεφωνικό κέντρο ενός πανεπιστημίου χρησιμοποιεί ένα τετραψήφιο νούμερο για κάθε παροχή. Πόσα τηλέφωνα μπορεί να εξυπηρετήσει αν (α) το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι 1, (β) το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι 1 και τα δύο τελευταία δεν μπορούν σχηματίζουν 99;

**1.9.** Επτά φυλακισμένοι σε ισόβια παίρνουν το μεσημεριανό τους σε ένα μακρύ πάγκο της τραπεζαρίας. Θέλοντας να κάνουν κάτι ενδιαφέρον, αποφάσισαν να κάθονται στον πάγκο κάθε μέρα με διαφορετική σειρά, ξεκινώντας την 1η Ιανουαρίου του 2001. Ποια ημερομηνία θα έχουν εξαντλήσει όλες τις δυνατές τοποθετήσεις;

**1.10.** Με πόσους τρόπους 10 άτομα μπορούν να καθίσουν σε κυκλικό τραπέζι αν δύο από τα άτομα αυτά θέλουν να κάθονται πάντα μαζί;

**1.11.** Εκφράστε με παραγοντικά τις εκφράσεις

α. $7\cdot8\cdot9$, β. $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$, γ. $n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)$

**1.12.** Δείξτε τις ισότητες

α. $(2n)!/n! = 2^n(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1))$,

β. $2\cdot6\cdot10\cdot\ldots(4n-6)\cdot(4n-2)=n(n+1)\ldots(2n-1)(2n)$.

**1.13.** Υποθέσατε ότι μία μέρα χαρακτηρίζεται ως ηλιόλουστη, συννεφιασμένη ή βροχερή. Μετά από πόσα χρόνια θα είμαστε βέβαιοι ότι ο καιρός μιας εβδομάδας θα έχει επαναληφθεί;

**1.14.** Πόσες πεντα-γράμματες λέξεις σχηματίζονται με τα γράμματα α, α, α, α, α, β, β, β, γ, γ, δ, δ, δ, ε, ε, ζ, η, η, η, η;

**1.15.** Έχουμε 15 επιστολές αλλά μόνο 11 γραμματόσημα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τις επιστολές που θα ταχυδρομήσουμε;

**1.16.** Σημειώνουμε n σημεία σε ένα κύκλο. Πόσες χορδές υπάρχουν με άκρα δύο από τα σημεία αυτά; Πόσες διαγώνιες έχει το n-γωνο που σχηματίζεται;

**1.17.** Σε ένα σουβλατζίδικο ένα σάντουιτς γίνεται είτε με ψωμί είτε με πίτα, περιέχει σουβλάκι, γύρο, μπιφτέκι ή κοτόπουλο, μπορεί να έχει πατάτες ή όχι, μπορεί να έχει κρεμμύδι ή όχι, μπορεί να έχει μουστάρδα ή όχι, κέτσαπ ή όχι και ένα είδος από 5 σαλάτες ή όχι. Πόσα διαφορετικά είδη σάντουιτς κατασκευάζονται;

**1.18.** Με πόσους τρόπους 3 παιδιά μπορούν να μοιραστούν 12 ανισομεγέθη μήλα, έτσι ώστε (α) κάθε παιδί να πάρει από 4, (β) το μεγαλύτερο να πάρει 6 και τα άλλα δύο από 3;

**1.19.** Ένας υπολογιστής έχει να επεξεργαστεί n προγράμματα. Κάθε πρόγραμμα ενεργοποιεί κατά την εκτέλεσή του διαφορετικά τμήματα του Η/Υ, όπως επεξεργαστές δίσκους, θέσεις μνήμης, κλπ. Έτσι, η εκτέλεση του προγράμματος j μετά το πρόγραμμα i χαρακτηρίζεται από το κόστος $c_{ij}$ της αλλαγής των ενεργοποιημένων τμημάτων. Με αυτή την έννοια έχει νόημα η αναζήτηση της σειράς εκτέλεσης των προγραμμάτων που έχει ελάχιστο κόστος. Εύκολα αποδεικνύεται, όπως στο παράδειγμα 1.8 ότι το πλήθος ελέγχων για την εύρεση του ελάχιστου κόστους είναι n! (όχι (n-1)! ). Πόσα χρόνια απαιτούνται ώστε ένας υπολογιστής που έχει δυνατότητα 1 δισεκατομμυρίου πράξεων το δευτερόλεπτο, να λύσει αυτό το πρόβλημα για n=25;

**1.20.** α) Ο διπλανός πίνακας δείχνει το κόστος μετάβασης από την πόλη i στην πόλη j για το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή. Ποια η βέλτιστη διαδρομή για ένα πωλητή που μένει στην πόλη 1; β) Ο ίδιος πίνακας δείχνει το κόστος μετάβασης από το πρόγραμμα i στο πρόγραμμα j για το πρόβλημα 1.19. Ποια η βέλτιστη σειρά εκτέλεσης των προγραμμάτων;

$$(c_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 1 & 8 & 11 \\ 16 & - & 3 & 6 \\ 4 & 9 & - & 11 \\ 8 & 3 & 2 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

**1.21.** Έστω Α ένα σύνολο με 8 στοιχεία. Πόσα είναι τα γνήσια υποσύνολα του Α που περιέχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία;

**1.22.** Πόσες λέξεις των 8 γραμμάτων μπορούμε να σχηματίσουμε με τα 24 γράμματα του αλφαβήτου αν θέλουμε να έχουν από 3 μέχρι 5 φωνήεντα;

**1.23.** Μία επιχείρηση απασχολεί 20 γυναίκες και 35 άνδρες. Από αυτούς οι 2 γυναίκες και οι 10 άνδρες είναι διοικητικοί υπάλληλοι. Πρόκειται να επιλεγεί μία επιτροπή από 3 άνδρες και 3 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή, αν η επιτροπή πρέπει να περιέχει (α) τουλάχιστον ένα διοικητικό υπάλληλο από κάθε φύλο, β) τουλάχιστον ένα διοικητικό υπάλληλο;

**1.24.** Μια παράταξη πήρε 10 ψήφους από τρεις κάλπες. Οι ψήφοι θεωρούνται αδιάκριτοι μεταξύ τους δεδομένου ότι τα ψηφοδέλτια του ίδιου κόμματος είναι ομοιόμορφα - ομοιόχρωμα κ.λ.π.

α) Δείξτε ότι οι δυνατοί τρόποι τοποθέτησης των 10 ψήφων στις τρεις κάλπες είναι όσες οι μη αρνητικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης $x_1+x_2+x_3=10$ και στη συνέχεια βρέστε το πλήθος τους.

β) Πόσοι από τους τρόπους αυτούς έχουν τουλάχιστον μία ψήφο σε κάθε κάλπη;

γ) Πόσοι από τους τρόπους αυτούς έχουν ακριβώς μια κάλπη άδεια;

**1.25.** Στο ανάπτυγμα $(2x-3y)^{15}$ βρέστε το πλήθος όλων των όρων, τον όρο που περιέχει το $x^3$ και τον όρο που περιέχει το $y^5$.

**1.26.** Ποιος ο μεγαλύτερος συντελεστής στα αναπτύγματα των διωνύμων $(1+x)^{100}$, $\left(\frac{1}{x}+2x\right)^{10}$.

**1.27.** Ποιος ο συντελεστής του $x^{10}$ στο ανάπτυγμα του $(1+x)^{15}$;

**1.28.** Βρέστε το n για το οποίο ισχύει:

α. $\Delta_n^5 = 30\Delta_n^3$, β. $4\binom{n+2}{5} = 3\binom{n+2}{6}$

**1.29.** Έστω ότι n στρατηγοί τοποθετούν απόρρητα σχέδια σ' ένα χρηματοκιβώτιο. Για την αποφυγή διαρροής των σχεδίων το χρηματοκιβώτιο κλειδώνεται με $\alpha_n$ κλειδαριές, και καθένας από τους στρατηγούς εφοδιάζεται με $\beta_n$ κλειδιά, με τέτοιο ώστε το χρηματοκιβώτιο να ανοίγει μόνον όταν η πλειοψηφία των στρατηγών είναι παρούσα. Υπολογίστε τον ελάχιστο $\alpha_n$ και το $\beta_n$. Να γίνει εφαρμογή για n=5. (Υπόδ. Δείξτε πρώτα ότι αν k=[n/2], όπου [x] σημαίνει το ακέραιο μέρος του x, και θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε ομάδα k στρατηγών, τότε πρέπει κατελάχιστον να υπάρχει μία κλειδαριά απαγορευμένη γι αυτούς, της οποίας δηλ. κανείς από την ομάδα δεν έχει το κλειδί. Μάλιστα οι απαγορευμένες κλειδαριές είναι αναγκαστικά διαφορετικές για κάθε ομάδα k στρατηγών.)

**1.30.** Τυπώνουμε ένα 5-ψήφιο αριθμό σε μία κάρτα. Συμπεριλαμβάνουμε και αριθμούς που αρχίζουν με 0, όπως π.χ. 00356. Οι αριθμοί 0,1,8 φαίνονται ίδιοι αν αναστρέψουμε την κάρτα. Έτσι οι αριθμοί 81001 και 10018 χρειάζονται μία μόνο κάρτα. Οι αριθμοί 6 και 9 εναλλάσσονται με την αναστροφή της κάρτας. Δηλαδή οι αριθμοί 16809 και 60891 μπορούν να τυπωθούν στην ίδια κάρτα. Πόσες κάρτες χρειάζονται για να τυπώσουμε όλους τους 5-ψήφιους, χρησιμοποιώντας σε όσες περιπτώσεις γίνεται, την ίδια κάρτα;

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

## 2.1. Το τρίγωνο του Pascal και οι αριθμοί Fibonacci

Η συνδυαστική και η θεωρία πιθανοτήτων οφείλουν πολλά στους Pascal και Fermat, που υπήρξαν από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς (και όχι μόνο) του 17ου αιώνα. Αιτία για την έναρξη μιας εποικοδομητικής αλληλογραφίας μεταξύ των δύο αυτών προσωπικοτήτων το 1654, ήταν κάποια προβλήματα που τέθηκαν σ' αυτούς από τον Chevalier de Méré, έναν «επαγγελματία» παίκτη. Ένα από αυτά είναι γνωστό ως «διαίρεση του στοιχήματος» και συνίσταται στο εξής: Πως πρέπει να μοιραστεί ένα στοίχημα σε ένα παιχνίδι που διακόπηκε πριν κανείς από τους παίκτες να συμπληρώσει τις παρτίδες που απαιτούνται; Με τις σημερινές γνώσεις, η απάντηση είναι ότι το στοίχημα πρέπει να μοιραστεί ανάλογα με την πιθανότητα που έχουν οι δύο παίκτες να κερδίσουν το παιχνίδι από το σημείο όπου σταμάτησαν.

Η λύση στην οποία κατέληξαν και η οποία περιγράφεται στο επόμενο πρόβλημα, έδωσε αφορμή για την κατασκευή ενός αριθμητικού τριγώνου, γνωστού ως τριγώνου του Pascal.

**Πρόβλημα 2.1. (της διαίρεσης του στοιχήματος)** Σε ένα παιχνίδι τάβλι που τελειώνει σε 7 παρτίδες, και έχουν στοιχηματίσει α δρχ., αναγκάζονται να σταματήσουν όταν το σκορ είναι 4-5, δηλαδή όταν ο Α θέλει 3 παρτίδες ακόμη για να κερδίσει το παιχνίδι και ο Β θέλει 2 παρτίδες ακόμη. Πως πρέπει να μοιράσουμε το ποσό α στους δύο παίκτες;

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι αφήναμε το παιχνίδι να συνεχιστεί, τότε είναι βέβαιο ότι το πολύ σε 4 παρτίδες κάποιος από τους δύο παίκτες θα είχε κερδίσει το παιχνίδι. Πράγματι, στις 4 παρτίδες είτε ο Α θα κέρδιζε παίρνοντας 3 ή 4 απ' αυτές (ενώ ο Β θα έχανε), είτε ο Β θα κέρδιζε παίρνοντας 2, 3 ή 4 απ' αυτές (ενώ ο Α θα έχανε). Θεωρώντας ότι οι δύο παίκτες είναι ισοδύναμοι και συμβολίζοντας με Α μια παρτίδα που κερδίζεται από τον Α και με Β αν κερδίζεται από τον Β, οι $2^4$=16 δυνατές περιπτώσεις κατά την εκτέλεση του παιχνιδιού δίνονται σχηματικά στον πίνακα 2.1

Πίνακας 2.1. Δυνατές περιπτώσεις για το πρόβλημα 2.1

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Α | Β | Α | Α | Α | Β | Β | Β | Α | Β | Β | Β | Β |
| Α | Α | Α | Β | Α | Α | Β | Β | Α | Α | Β | Β | Α | Β | Β | Β |
| Α | Α | Β | Α | Α | Β | Α | Β | Α | Β | Α | Β | Β | Α | Β | Β |
| Α | Β | Α | Α | Α | Β | Β | Α | Β | Α | Α | Β | Β | Β | Α | Β |

κερδίζει ο Α κερδίζει ο Β

Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι ο Β θα είχε 11 περιπτώσεις να κερδίσει το παιχνίδι έναντι 5 περιπτώσεων του Α και επομένως θα πρέπει να μοιράσουν το ποσό σε μέρη ανάλογα των 5:11. Άρα ο Α θα πάρει 5α/16 και ο Β θα πάρει 11α/16. ■

Γενικεύοντας, μπορούμε να δείξουμε ότι αν ο Α θέλει ακόμη m παρτίδες και ο Β ακόμη n, τότε το παιχνίδι τελειώνει οπωσδήποτε σε m+n-1 παρτίδες και πρέπει να μοιράσουν το ποσό ανάλογα με τους αριθμούς:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k} : \sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k} \tag{2.1}$$

Μελετώντας προσεκτικά τον πίνακα 2.1, ο Pascal παρατήρησε ότι στην τελική απάντηση υπεισέρχονται οι διωνυμικοί συντελεστές, κάτι που φαίνεται και από τη γενική σχέση (2.1). Έτσι χρησιμοποιώντας την τριγωνική ταυτότητα (1.20), που είναι στην πραγματικότητα ένας αναδρομικός τύπος, κατασκεύασε το λεγόμενο τρίγωνο του Pascal, το πρώτο τμήμα του οποίου δίνεται στο σχήμα 2.1. Η κατασκευή του τριγώνου γίνεται ως εξής:

Ξεκινούμε τοποθετώντας μία 1-δα στο μέσον της 1ης γραμμής. Στη δεύτερη γραμμή θέτουμε από μία 1-δα δεξιά και αριστερά της προηγούμενης. Στις επόμενες γραμμές τοποθετούμε από μία μονάδα στα άκρα και υπολογίζουμε τους υπόλοιπους αριθμούς προσθέτοντας τους δύο αριθμούς της προηγούμενης γραμμής που βρίσκονται αριστερά και δεξιά του. Έτσι, για παράδειγμα, ο αριθμός 15 της 7ης γραμμής προκύπτει από το άθροισμα των

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Σχήμα 2.1

αριθμών 5 και 10 της 6ης γραμμής.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι αριθμοί του τριγώνου που σχηματίζεται είναι διωνυμικοί συντελεστές. Μάλιστα, αριθμώντας τις γραμμές ξεκινώντας από το 0 και τις θέσεις σε κάθε γραμμή ξεκινώντας πάλι από το 0, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός στην n γραμμή (n≥1) και στην k θέση της γραμμής αυτής (0≤k≤n) είναι ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$.

Για να βρούμε από το τρίγωνο του Pascal πως θα μοιράσουμε το ποσό α του στοιχήματος, όταν ο Α χρειάζεται ακόμη m παρτίδες και ο Β θέλει n παρτίδες πηγαίνουμε στην m+n γραμμή του τριγώνου και αθροίζουμε τους πρώτους n αριθμούς και τους τελευταίους m. Το ποσό μερίζεται σε μέρη ανάλογα των δύο αθροισμάτων. Για τα δεδομένα του προβλήματος 2.1, πηγαίνουμε στην 5η γραμμή και προσθέτουμε τους δύο πρώτους αριθμούς (1+4=5) και τους τρεις τελευταίους (6+4+1=11) και μερίζουμε το ποσό σε μέρη ανάλογα των 5 και 11.

*2.1.1. Ιδιότητες του τριγώνου Pascal.*

Στις οριζόντιες γραμμές είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος $(1+x)^n$. Π.χ. στην 5η γραμμή: $(1+x)^5=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$.

Στην 1η διαγώνιο είναι οι φυσικοί αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ….

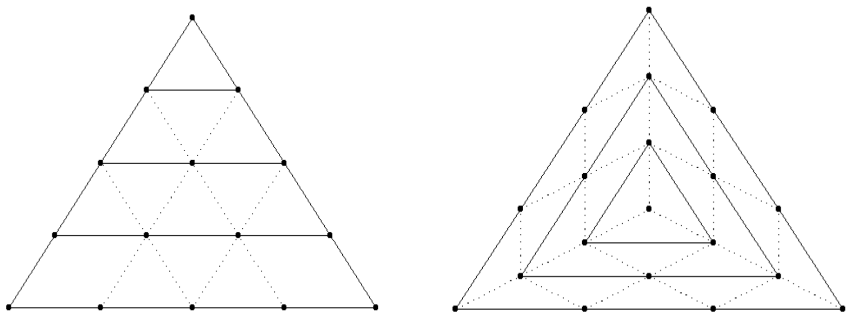
Στη 2η διαγώνιο είναι οι τρίγωνοι αριθμοί: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ....

Στην 3η διαγώνιο είναι οι τετράεδροι αριθμοί: 1, 4, 10, 20, 35, 56, …

Αθροίζοντας τους αριθμούς που βρίσκονται σε ημιδιαγώνιο (που συνδέει κάθε αριθμό με αυτόν που βρίσκεται δεξιά από τον διαγώνιό του) βρίσκουμε τους αριθμούς Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Οι τρίγωνοι αριθμοί, όπως και άλλοι «πολύγωνοι» αριθμοί ήταν γνωστοί στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, οι οποίοι προσπάθησαν να τους παραστήσουν με γεωμετρικό τρόπο. Στο Σχήμα 2.2α δίνουμε μία παράσταση των τρίγωνων αριθμών. Κάθε τρίγωνος αριθμός προκύπτει ως το πλήθος των κορυφών που περικλείονται μέσα σε ένα τρίγωνο που έχει κορυφή την κορυφή του σχήματος.

Οι τετράεδροι αριθμοί (ή πυραμιδοειδείς με τρίγωνη βάση) παριστάνονται στο χώρο από τετράεδρα με αυξανόμενη πλευρά. Μία διδιάστατη παράστασή τους είναι αυτή του σχήματος 2.2β. Κάθε τετράεδρος αριθμός προκύπτει ως το πλήθος των κορυφών που περικλείονται μέσα σε ένα τρίγωνο που έχει κέντρο το κέντρο του σχήματος. Το όλο σχήμα μπορεί να θεωρηθεί ως κατακόρυφη προβολή τετραέδρων αυξανόμενης πλευράς στη βάση της, οπότε το κέντρο των τριγώνων θα είναι η προβολή της κοινής κορυφής των τετραέδρων.



(α) (β)

Σχήμα 2.2

### *2.1.2. Αριθμοί Fibonacci*

Ο Ιταλός μαθηματικός Fibonacci, που έζησε στην Pisa της Ιταλίας γύρω στα 1200 μ.Χ., έθεσε το επόμενο πρόβλημα.

**Πρόβλημα 2.2.** (*Fibonacci*). Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πληθυσμό κουνελιών κάθε ενήλικο ζευγάρι γεννά κάθε μήνα από ένα ζευγάρι κουνέλια. Τα νεογέννητα ενηλικιώνονται το δεύτερο μήνα οπότε και γεννούν το πρώτο ζευγάρι τους. Υποθέτουμε ακόμη ότι τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ. Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα υπάρχουν στην αρχή του n-στού μήνα, όταν αρχικά είχαμε ένα ενήλικο ζευγάρι;

Λύση

Συμβολίζουμε με $F_n$ το πλήθος των ζευγαριών στην αρχή του n-στού μήνα. Ας θεωρήσουμε ότι n≥2. Τότε, τα ζευγάρια που θα υπάρχουν στην αρχή του n-στού μήνα θα είναι προφανώς τόσα όσα ήταν στην αρχή του n–1-στού μήνα επαυξημένα με αυτά που γεννήθηκαν στην αρχή του n-στού μήνα. Όμως αυτά που γεννήθηκαν στην αρχή του n-στού μήνα είναι όσα και τα ενήλικα ζευγάρια τη στιγμή αυτή, τα οποία ταυτίζονται με όσα ήταν ζωντανά στην αρχή του n–2-στού μήνα (τα ενήλικα παρέμειναν ενήλικα, ενώ τα νεογέννητα ενηλικιώθηκαν). Άρα για n≥3, θα ισχύει η σχέση $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Στην αρχή του πρώτου μήνα υπήρχε μόνο το αρχικό ζευγάρι, δηλαδή $F_1=1$. Θέτοντας $F_0=1$ η σχέση μπορεί να γραφεί:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,,\ n \ge 2\,,\quad F_0 = F_1 = 1 \tag{2.2}$$

Με τη σχέση αυτή μπορεί κανείς να βρει αναδρομικά οποιονδήποτε από τους αριθμούς $F_n$, για δοσμένο n. Οι αριθμοί που ικανοποιούν την αναδρομική σχέση (2.2), λέγονται *αριθμοί Fibonacci*. Με την εύρεση του $F_n$ ως συνάρτησης του n θα ασχοληθούμε σε επόμενη παράγραφο. Προς το παρόν μπορούμε να καταγράψουμε τους αριθμούς αυτούς, για μικρές τιμές του n.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |

■

### *2.1.3. Τοποθετήσεις δύο συμβόλων υπό περιορισμούς*

Σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στα αντικείμενα που αποτελούν τις καταστάσεις που ζητούμε να απαριθμήσουμε δύο μόνο σύμβολα, για παράδειγμα τα {+, −} ή τα {0, 1} ή τα {Α, Κ}, κλπ. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα διατυπώνεται στο επόμενο.

**Πρόβλημα 2.3.** Να βρεθεί το πλήθος $Q_{n,k}$ των τοποθετήσεων n συμβόλων από τα {+, −}, εκ των οποίων τα k να είναι −, χωρίς ούτε δύο από αυτά να είναι διαδοχικά. Στη συνέχεια, να βρεθεί το πλήθος $Q_n$ των τοποθετήσεων n συμβόλων από τα {+, −} χωρίς ούτε δύο από τα − να είναι διαδοχικά. (Το − μπορεί να θεωρηθεί ως το σύμβολο που διαχωρίζει τις ροές των +).

Λύση

Για να μην υπάρχουν ούτε δύο διαδοχικά "−" και επειδή υπάρχουν συνολικά k "−", θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον k-1 "+" (διαφορετικά δεν θα ικανοποιείται η συνθήκη). Επομένως θα έχουμε $n \geq k+(k-1)$ ή ισοδύναμα $k \leq (n+1)/2$. Εξάλλου, αφού τα "−" είναι k σε πλήθος, άρα τα "+" θα είναι n−k. Τοποθετούμε σε μία γραμμή τα "+". Τότε τα "−" μπορούν να τοποθετηθούν σε οποιεσδήποτε από τις n−k+1 θέσεις που δημιουργούνται ανάμεσα και γύρω από τα "+". Αυτό φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1η | | 2η | | 3η | | ... | | n-kστή |
| Θέσεις των "+" | | + | | + | | + | | ... | | + |
| Επιτρεπτές θέσεις για τα "−" | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | ... | n-k | | n-k+1 |

Τα k "−" μπορούν να τοποθετηθούν στις n−k+1 επιτρεπτές θέσεις με τόσους τρόπους, όσοι οι συνδυασμοί των n−k+1 ανά k. Άρα, ισχύει:

$$Q_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}, \text{ όπου } k=1, 2, \ldots, [(n+1)/2] \tag{2.3}$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει και για k=0, αφού στην περίπτωση αυτή υπάρχουν n σύμβολα "+", που τοποθετούνται με μοναδικό τρόπο ($Q_{n,0}=1$, $\forall n$) , ενώ το δεύτερο μέλος της (2.3) δίνει επίσης 1, για k=0.

Προσθέτοντας τα $Q_{n,k}$ για όλες τις επιτρεπτές τιμές του k, παίρνουμε προφανώς το $Q_n$. Έτσι θα έχουμε:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} Q_{n,k} = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \binom{n-k+1}{k}.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Pascal και διακρίνοντας δύο περιπτώσεις για n άρτιο ή περιττό, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}, \ n \geq 3, \tag{2.4}$$

ενώ παρατηρούμε ότι ισχύει $Q_0=1$ και $Q_1=2$. (για το $Q_1$ έχουμε ένα σύμβολο, άρα δύο τοποθετήσεις + ή –). Θέτοντας $F_0=1$ και $F_n=Q_{n-1}$, n=1,2,… η αναδρομική σχέση (2.4) ταυτίζεται με την αναδρομική σχέση (2.2) που ορίζει τους αριθμούς Fibonacci. Άρα το πλήθος $Q_n$ ισούται με τον αριθμό Fibonacci $F_{n+1}$.

Ένας δεύτερος τρόπος εύρεσης της αναδρομικής σχέσης (2.4) είναι ο εξής. Οι $Q_n$ τοποθετήσεις των n συμβόλων +, – διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: (1) αυτές που τελειώνουν σε + και (2) αυτές που τελειώνουν σε –. Οι τοποθετήσεις της πρώτης κατηγορίας μπορούν να σχηματιστούν από τις τοποθετήσεις $Q_{n-1}$ των n-1 συμβόλων με την προσθήκη στο τέλος ενός +. Για τις τοποθετήσεις της δεύτερης κατηγορίας, παρατηρούμε ότι πρέπει το προτελευταίο σύμβολο να είναι υποχρεωτικά + (αφού δεν υπάρχουν διαδοχικά –). Έτσι οι τοποθετήσεις αυτές μπορούν να σχηματιστούν από τις τοποθετήσεις $Q_{n-2}$ των n-2 συμβόλων με την προσθήκη στο τέλος των συμβόλων + –. Επομένως, ισχύει το ζητούμενο. ■

Με τα προηγούμενα έχουμε αποδείξει την πρόταση.

**Θεώρημα 2.1.** α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, n συμβόλων από τα {+, –}, εκ των οποίων τα k, (k=0, 1, 2, …, [(n+1)/2]), είναι – και τα υπόλοιπα n-k είναι +, έτσι ώστε ούτε δύο από τα – να είναι διαδοχικά, ισούται με $\binom{n-k+1}{k}$.

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, n συμβόλων από τα {+, –}, έτσι ώστε ούτε δύο από τα – να είναι διαδοχικά, ισούται με $F_{n+1}$, δηλαδή με τον αριθμό Fibonacci τάξης n+1. ■

Μια εφαρμογή του θεωρήματος αυτού δίνεται στο:

**Πόρισμα 2.1.** α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς*, (k=0, 1, …, [(n+1)/2]), έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, ισούται με $\binom{n-k+1}{k}$.

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία οσονδήποτε από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, ισούται με $F_{n+1}$.

Απόδειξη

Θεωρούμε n κάρτες αριθμημένες με τους αριθμούς 1 έως n, τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά. Έστω τώρα ότι έχουμε μία από τις επιθυμητές τοποθετήσεις k αριθμών από τους n, δηλαδή έτσι ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί. Για κάθε αριθμό από αυτούς, βρίσκουμε την αντίστοιχη κάρτα, την απομακρύνουμε και στη θέση της σημειώνουμε ένα –. Έτσι σημειώνονται συνολικά k σύμβολα –, τα οποία δεν είναι σε διαδοχικές θέσεις. Αφαιρούμε, στη συνέχεια, και τις άλλες κάρτες σημειώνοντας ένα + στη θέση τους. Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται η διαδικασία που περιγράψαμε για n=6, k=2 και για επιλογή των μη-διαδοχικών 2 και 5.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| + | – | + | + | – | + |

Αυτό που έχουμε πετύχει με το τέχνασμα αυτό, είναι να μετατρέψουμε την τοποθέτηση των k αριθμών από τους n χωρίς να υπάρχουν διαδοχικοί, σε τοποθέτηση n συμβόλων από τα {+ , –}, εκ των οποίων k είναι –, χωρίς ούτε δύο – να είναι διαδοχικά. Είναι φανερό ότι το τέχνασμα εφαρμόζεται και αντίστροφα, αποκαθιστώντας μία αμφιμονότιμη αντιστοίχηση μεταξύ των δύο προβλημάτων τοποθέτησης.

Τα συμπεράσματα, τώρα, είναι άμεσα από το Θεώρημα 2.1.

■

* Μία άλλη διατύπωση είναι: «Το πλήθος των συνδυασμών k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, είναι ...»

**Πόρισμα 2.2.** α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε κύκλο, k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς**, (k=0, 1, 2, …, [n/2]), έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, όπου το 1 και n θεωρούνται διαδοχικά, ισούται με $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$.

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε κύκλο οσονδήποτε από τους $n\geq 2$ πρώτους φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, όπου το 1 και n θεωρούνται διαδοχικά, ισούται με $F_n+F_{n-2}$.

Απόδειξη

α) Εφαρμόζοντας το ίδιο τέχνασμα, όπως στο προηγούμενο πόρισμα, το πρόβλημα γίνεται ισοδύναμο με την τοποθέτηση n συμβόλων από τα {+, –} σε κύκλο, εκ των οποίων τα k είναι –, χωρίς ούτε δύο από τα – να είναι διαδοχικά.

Μία διαφορά με το πόρισμα 2.1, είναι ότι η τοποθέτηση k συμβόλων – σε κύκλο, σχηματίζει άλλες k θέσεις στις οποίες πρέπει να υπάρχουν από ένα τουλάχιστον +. Έτσι πρέπει $n-k\geq k$ δηλαδή $k \leq [n/2]$.

Για την εύρεση του ζητούμενου πλήθους, παρατηρούμε ότι κάθε τοποθέτηση σε κύκλο των συμβόλων {+, –}, με χωρίς ούτε δύο – διαδοχικά, είναι τοποθέτηση με τις ίδιες προϋποθέσεις σε ευθεία, όπου όμως το πρώτο και τελευταίο δεν επιτρέπεται να είναι και τα δύο –. Όμως, κάθε επιτρεπτή τοποθέτηση θα είναι μιας από τις επόμενες δύο κατηγορίες.

(1) Η τοποθέτηση αρχίζει με –. Τότε, το δεύτερο, όπως και το τελευταίο σύμβολο θα είναι +, και επομένως μένει να δούμε με πόσους τρόπους τα υπόλοιπα n-3 σύμβολα, εκ των οποίων k–1 είναι –, τοποθετούνται ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά –. Και αυτό γίνεται (Θεωρ. 2.1α) με

$$\binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1}=\binom{n-k-1}{k-1}=\frac{k}{n-k}\binom{n-k}{k} \text{ τρόπους.}$$

(2) Η τοποθέτηση αρχίζει με +. Τότε, αρκεί να δούμε με πόσους τρόπους τα υπόλοιπα n-1 σύμβολα, εκ των οποίων k είναι –, τοποθετούνται ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικά –. Και αυτό γίνεται με

** Μία άλλη διατύπωση είναι: «Το πλήθος των συνδυασμών k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, όταν 1 και n θεωρούνται διαδοχικοί, είναι ...»

$\binom{(n-1)-k+1}{k}=\binom{n-k}{k}$ τρόπους.

Αθροίζοντας τα δύο αποτελέσματα βρίσκουμε

$$\frac{k}{n-k}\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k}=\left(\frac{k}{n-k}+1\right)\binom{n-k}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \text{ τρόπους,}$$

που είναι το ζητούμενο.

β) Χωρίζουμε πάλι σε δύο κατηγορίες.

(1) Η τοποθέτηση αρχίζει με –. Τότε, το δεύτερο, όπως και το τελευταίο σύμβολο θα είναι +, και επομένως είναι ωσάν να είχαμε $n-3$ σύμβολα. Το πλήθος αυτών των τοποθετήσεων (Θεωρ. 2.1β) ισούται με $F_{n-2}$ .

(2) Η τοποθέτηση αρχίζει με +. Τότε, είναι ωσάν να είχαμε $n-1$ σύμβολα. Το πλήθος αυτών των τοποθετήσεων (Θεωρ. 2.1β) ισούται με $F_n$ .

Άρα, το συμπέρασμα έπεται. ■

Ας συμβολίσουμε $g_n=F_n+F_{n-2}$, $n\geq 2$. Τότε ισχύει

$$g_n= F_n +F_{n-2}= F_{n-1} +F_{n-2}+ F_{n-3} +F_{n-4}= g_{n-1} +g_{n-2},\ n\geq 2. \qquad (2.5)$$

Οι τιμές του $g_n$ για τις τιμές $n=2$ και 3, είναι $g_2=F_2+F_0=3$ και $g_3=F_3+F_1=4$. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε κατάλληλα τις τιμές του $g_n$ για τις τιμές $n=0$ και 1, ώστε η αναδρομική σχέση (2.5) να ισχύει για $n\geq 0$. Θα πρέπει $g_2= g_1 +g_0$ και $g_3= g_2 +g_1$ ή $3= g_1 +g_0$ και $4= 3 +g1$, δηλαδή $g_0=2$ και $g_1=1$.

Οι αριθμοί $g_n$, $n=0,1,2,\ldots$ για τους οποίους ισχύει

$$g_n= g_{n-1} +g_{n-2},\ n\geq 2,\ \ g_0=2\ ,\ \ g_1=1. \qquad (2.6)$$

λέγονται αριθμοί **Loucas.**

Ώστε, το πλήθος των τοποθετήσεων σε κύκλο οσωνδήποτε αριθμών από το 1 έως το n (όπου 1 και n θεωρούνται διαδοχικοί), χωρίς να υπάρχουν καθόλου διαδοχικοί, δίνεται από τον αριθμό Loucas τάξης n.

Οι αριθμοί Loucas για μικρές τιμές του n είναι

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_n$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 |

**Ασκήσεις**

**2.1.1.** Πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το τρίγωνο του Pascal για την εύρεση του αθροίσματος: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$;

**2.1.2.** Παρατηρήστε ότι το 4 μπορεί να γραφεί με 5 τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, δηλ. 4=1+1+1+1=2+1+1=1+2+1=1+1+2=2+2. Δείξτε ότι ο φυσικός αριθμός n γράφεται με $F_n$ τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, όπου $F_n$ οι αριθμοί Fibonacci.

**2.1.3.** Υπάρχουν n καθίσματα τοποθετημένα σε μία σειρά. Βρέστε το πλήθος των τρόπων να διαλέξουμε οσαδήποτε από τα καθίσματα (έστω και κανένα) με τρόπο ώστε να μην έχουμε διαλέξει διαδοχικά καθίσματα.

**2.1.4.** Υπάρχουν $n \geq 2$ καθίσματα τοποθετημένα σε κυκλικό τραπέζι. Βρέστε το πλήθος των τρόπων να διαλέξουμε οσαδήποτε από τα καθίσματα (έστω και κανένα) με τρόπο ώστε να μην έχουμε διαλέξει διαδοχικά καθίσματα (εδώ το 1 και το n είναι διαδοχικά).

**2.1.5.** Να λυθεί η άσκηση 1.2.10 με το πόρισμα 2.1 .

**2.1.6.** Να αποδειχθεί η σχέση (2.4) με τη βοήθεια της (2.3).

**2.1.7.** Με πόσους τρόπους 10 άντρες και 6 γυναίκες μπορούν να μπουν σε γραμμή έτσι ώστε ούτε δύο γυναίκες να είναι σε γειτονική θέση;

**2.1.8.** Με πόσους τρόπους 10 άντρες και 6 γυναίκες μπορούν να καθίσουν σε 20 καθίσματα τοποθετημένα σε σειρά, έτσι ώστε ούτε δύο γυναίκες να κάθονται σε γειτονικό κάθισμα;

**2.1.9.** Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης MISSISSIPPI δεν έχουν σε γειτονικές θέσεις τα I;

**2.1.10.** Στη μία πλευρά ενός δρόμου υπάρχουν 10 θέσεις για στάθμευση αυτοκινήτων. Υποτίθεται ότι δεν υπάρχουν μόνιμα σταθμευμένα αυτοκίνητα και ότι ένα αυτοκίνητο που σταθμεύει εκεί διαλέγει τυχαία τη θέση. Ποια είναι τότε η πιθανότητα να μην υπάρχουν ούτε δύο διαδοχικές θέσεις άδειες;

## 2.2. Διοφαντικές εξισώσεις και Διαμερίσεις

### *2.2.1. Διοφαντικές εξισώσεις υπό περιορισμούς*

Στο θεώρημα 1.2 και στο πόρισμα 1.1 αναζητήσαμε το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ για δύο ειδικές περιπτώσεις (μη-αρνητικές και θετικές λύσεις).

Θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή το πλήθος των ακεραίων λύσεων αυτής της εξίσωσης, κάτω από διάφορους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιούν τα $x_i$, i=1,2,…,n. Ισχύει το επόμενο:

**Θεώρημα 2.2.** Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r \text{, με } x_1 > \alpha_1,\ x_2 > \alpha_2, \ldots,\ x_n > \alpha_n \tag{2.7}$$

ισούται με $\binom{r - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n - 1}{n-1}$.

Απόδειξη

Θέτοντας $y_i = x_i - \alpha_i$, για i=1,2,…,n, διαπιστώνουμε εύκολα ότι το πλήθος των λύσεων της (2.7), ταυτίζεται με το πλήθος των θετικών λύσεων της εξίσωσης:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = r - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n .$$

Το ζητούμενο τώρα είναι προφανές. ■

**Παράδειγμα 2.1.** Βρέστε το πλήθος (α) των ακεραίων θετικών λύσεων και (β) το πλήθος των μη-αρνητικών λύσεων της x +y+z+w=20, όταν x>6 και y>4.

Λύση

(α) Η δοθείσα εξίσωση είναι της μορφής (2.7), με r=20, n=4 και $\alpha_1$=6, $\alpha_2$=4, $\alpha_3$= $\alpha_4$=0. Άρα το ζητούμενο πλήθος λύσεων ισούται με

$$\binom{20-6-4-0-0-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84 .$$

(β) Η μόνη διαφορά είναι ότι $\alpha_3 = \alpha_4 = -1$, διότι τα z, w μπορούν να πάρουν και την τιμή 0. Το ζητούμενο πλήθος λύσεων ισούται με

$$\binom{20-6-4-(-1)-(-1)-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165 .$$ ■

Αν για τα $x_i$ έχουμε και άνω φράγματα αν δηλαδή η διοφαντική εξίσωση έχει τη μορφή

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = r \text{, με } \alpha_1 < x_1 \le \beta_1,\ \alpha_2 < x_2 \le \beta_2, ...,\ \alpha_n < x_n \le \beta_n ,$$

τότε για την εύρεση του πλήθους των λύσεών της χρησιμοποιούμε την αρχή συμπερίληψης – εξαίρεσης.

Πράγματι, με το θεώρημα 2.2 υπολογίζουμε όλες τις λύσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες $x_1 > \alpha_1,\ x_2 > \alpha_2, ...,\ x_n > \alpha_n$. Στη συνέχεια θέτουμε $q_i$, i=1,2,…,n την ιδιότητα μιας από τις προηγούμενες λύσεις να ικανοποιεί τη συνθήκη $x_i > \beta_i$ , και υπολογίζουμε το πλήθος των λύσεων που δεν έχουν καμία από τις ιδιότητες $q_i$ .

Το παρακάτω παράδειγμα διασαφηνίζει τη μέθοδο.

**Παράδειγμα 2.2.** Βρέστε το πλήθος ακεραίων λύσεων της $x+y+z+w=20$, όταν $1 \le x \le 6$, $0 \le y < 4$, $3 \le z < 9$ και $3 < w < 11$.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τις λύσεις της $x+y+z+w=20$, όταν $x>0$, $y>-1$, $z>2$ και $w>3$, που είναι σε πλήθος $\binom{20-0-(-1)-2-3-1}{4-1} = \binom{15}{3} = 455$.

Θέτουμε $\alpha_1$ την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει $x>6$,

$\alpha_2$ την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει $y>3$,

$\alpha_3$ την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει $z>8$ και

$\alpha_4$ την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει $w>10$.

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$N(\alpha_1) = \binom{20-6-(-1)-2-3-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84 ,$$

$$N(\alpha_2) = \binom{20-0-3-2-3-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165 ,$$

$$\mathrm{N}(\alpha_3)=\binom{20-0-(-1)-8-3-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84,$$

$$\mathrm{N}(\alpha_4)=\binom{20-0-(-1)-2-10-1}{4-1}=\binom{8}{3}=56,$$

$$\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_2)=\binom{20-6-3-2-3-1}{4-1}=\binom{5}{3}=10.$$

Όμοια $\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_3)=1$, $\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_4)=0$, $\mathrm{N}(\alpha_2\alpha_3)=10$, $\mathrm{N}(\alpha_2\alpha_4)=1$, $\mathrm{N}(\alpha_3\alpha_4)=0$ και $\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)=\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_3\alpha_4)=\mathrm{N}(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\mathrm{N}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=0$.

Το ζητούμενο είναι πλήθος των λύσεων (από τις 455) που δεν έχουν καμία από τις ιδιότητες $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$. Άρα:

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4')=455-(84+165+84+56)+$$
$$+(10+1+0+10+1+0)-(0+0+0+0)+0=144. \quad \blacksquare$$

Αν όλα τα $x_i$ επιτρέπεται να παίρνουν τιμές στο ίδιο διάστημα τότε η προηγούμενη μέθοδος απλοποιείται και αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει το:

**Θεώρημα 2.3.** Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=r, \text{ με } 1\le x_i\le\alpha,\ i=1,2,\ldots,n, \tag{2.8}$$

δίνεται από τη σχέση:

$$\binom{r-1}{n-1}-\binom{n}{1}\binom{r-\alpha-1}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{r-2\alpha-1}{n-1}-\binom{n}{3}\binom{r-3\alpha-1}{n-1}+\ldots. \tag{2.9}$$

όπου η άθροιση συνεχίζεται μέχρι να εμφανιστούν μηδενικοί όροι.

**Σημείωση.** Αν το κοινό διάστημα των μεταβλητών είναι διαφορετικό π.χ. $\beta\le x_i\le\alpha$, τότε θεωρούμε τις μεταβλητές $y_i=x_i-\beta+1$, για τις οποίες ισχύει $1\le y_i\le\alpha-\beta+1$, ενώ η εξίσωση γίνεται $y_1+y_2+\ldots+y_n=r-n\beta+n$. Το θεώρημα 2.3 μπορεί τώρα να εφαρμοστεί.

**Παράδειγμα 2.3.** Ποια η πιθανότητα ρίχνοντας 4 ζάρια να φέρουμε άθροισμα 18;

Λύση

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $p=N(A)/N$, όπου $N=6^4$ και $N(A)$ το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3+x_4=18$, όταν $1\le x_i\le 6$, $i=1,2,3,4$.

Από τη σχέση (2.9) βρίσκουμε

$$N(A)=\binom{17}{3}-4\binom{11}{3}+\binom{4}{2}\binom{5}{3}-0=80$$

Άρα p=80/1296=0.062. ■

*2.2.2. Διαμερίσεις ενός ακεραίου*

Ας θεωρήσουμε τις παρακάτω εκφράσεις του αριθμού 6 ως άθροισμα ακεραίων, που τις ονομάζουμε διαμερίσεις του 6. Θεωρούμε ότι η σειρά των προσθετέων δεν ενδιαφέρει (γι' αυτό και τοποθετούμε τους ακεραίους κάθε διαμέρισης σε φθίνουσα σειρά).

| | | |
|---|---|---|
| 1+1+1+1+1+1 | 4+1+1 | 5+1 |
| 2+1+1+1+1 | 3+2+1 | 4+2 |
| 3+1+1+1 | 2+2+2 | 3+3 |
| 2+2+1+1 | | 6 |

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 11 διαφορετικές διαμερίσεις του 6. Έτσι, αν συμβολίσουμε με p(n) το πλήθος των διαφορετικών διαμερίσεων του αριθμού n, από τα προηγούμενα προκύπτει ότι p(6)=11. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή p(n) για κάθε φυσικό n.

Θέτουμε:

$p_k(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n με προσθετέους όχι μεγαλύτερους του k, και

$q_k(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n με k ή λιγότερους προσθετέους)

και παρατηρούμε ότι:

$q_1(6)=1$, $q_2(6)=4$, $q_3(6)=7$, $q_4(6)=9$, $q_5(6)=10$, $q_6(6)=11=p(6)$

$p_1(6)=1$, $p_2(6)=4$, $p_3(6)=7$, $p_4(6)=9$, $p_5(6)=10$, $p_6(6)=11=p(6)$

δηλαδή ότι $p_k(6)=q_k(6)$ για όλα τα k.

Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

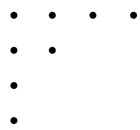
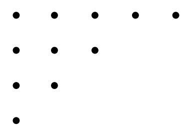
**Θεώρημα 2.4**. Ισχύει:

$$p_k(n)=q_k(n),\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N} \text{ και } 1\le k\le n.$$

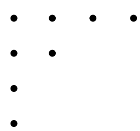
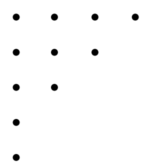
Μάλιστα $p_1(n)=q_1(n)=1$ και $p_n(n)=q_n(n)=p(n)$, για όλα τα n.

Απόδειξη

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τα διαγράμματα Ferrer. Έτσι ονομάζουμε ορθογώνιους σχηματισμούς, που αποτελούνται από σειρές τελειών, όπου το πλήθος τελειών κάθε γραμμής ισούται με κάποιον προσθετέο του αθροίσματος και το πλήθος των σειρών με το πλήθος των προσθετέων. Για παράδειγμα τα διαγράμματα Ferrer των αθροισμάτων 8=4+2+1+1 και 11=5+3+2+1, είναι τα ακόλουθα:

 και 

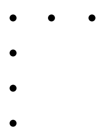
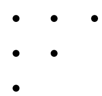
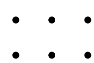
Σε κάθε διάγραμμα Ferrer αντιστοιχούμε το ανάστροφό του, το οποίο σχηματίζεται με περιστροφή του διαγράμματος γύρω από την κύρια διαγώνιο κατά $90^{o}$, η οποία κάνει τις σειρές στήλες και τις στήλες σειρές. Τα ανάστροφα των παραπάνω διαγραμμάτων είναι τα:

 και 

που παριστάνουν τα αθροίσματα 8=4+2+1+1 και 11=4+3+2+1+1.

Παρατηρούμε ότι το ανάστροφο διάγραμμα ενός διαγράμματος Ferrer έχει πλήθος γραμμών (δηλαδή προσθετέων) όσο είναι το μεγαλύτερο μήκος γραμμής (δηλαδή ο μεγαλύτερος προσθετέος) του αρχικού αθροίσματος. Δηλαδή, ότι σε κάθε άθροισμα με μεγαλύτερο προσθετέο το k αντιστοιχούμε μέσω των γραφημάτων Ferrer ένα άθροισμα με πλήθος προσθετέων ίσο με k. Η αντιστοίχηση αυτή είναι αμφιμονότιμη πράγμα που αποδεικνύει το θεώρημα.

Για διασαφήνιση της πρότασης αυτής σχηματίσαμε τα διαγράμματα Ferrer των διαμερίσεων του 6 με μεγαλύτερο προσθετέο το 3. Υπάρχουν $p_3(6)-p_2(6)=3$ τέτοια αθροίσματα, τα 3+1+1+1, 3+2+1, και 3+3 με αντίστοιχα διαγράμματα, τα:

 ,  και 

Τα ανάστροφά τους είναι τα

$$\begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array}\ ,\quad \begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}\quad \text{και}\quad \begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

που αντιστοιχούν στα αθροίσματα 4+1+1, 3+2+1 και 2+2+2, που είναι οι $q_3(6)-q_2(6)=3$ διαμερίσεις του 6 με 3 προσθετέους.

■

**Θεώρημα 2.5.** Ισχύουν οι σχέσεις:

$$p_k(n)= p_{k-1}(n) + p_k(n-k), \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N} \text{ και } 1<k<n. \tag{2.10}$$

$$p_n(n)=1+ p_{n-1}(n) \quad \text{και} \tag{2.11}$$

$$p_k(n)=p_n(n), \text{ για όλα τα } k\geq n. \tag{2.12}$$

Απόδειξη

Για την (2.10) κάνουμε διπλή απαρίθμηση θεωρώντας τις διαμερίσεις με προσθετέους όχι μεγαλύτερους του k, ότι είναι δύο τύπων.

(α) Αυτοί που έχουν το k ως προσθετέο,

(β) Αυτοί που δεν έχουν το k ως προσθετέο,

Οι τύπου (β) έχουν το k-1 ως μεγαλύτερο προσθετέο άρα ισούνται με $p_{k-1}(n)$. Οι τύπου (α) έχουν όλοι το k ως προσθετέο (τουλάχιστον μία φορά), άρα μπορούμε να αφαιρέσουμε από όλους το k και πάλι θα είναι όχι μεγαλύτεροι από τον k, όμως το άθροισμά τους θα είναι n-k, ισούνται δηλαδή με $p_k(n-k)$.

Για την (2.11), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει 1 μόνο διαμέριση με προσθετέο τον ίδιο τον n. Τέλος, η (2.12) είναι προφανής. ■

*2.2.3. Διαμερίσεις ακεραίων και πολυώνυμα*

*Διαμερίσεις με διακεκριμένους προσθετέους*

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο των πολυωνύμων:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)=$$

$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+5x^8+6x^9+7x^{10}+\cdots+x^{28} \tag{2.13}$$

Συμβολίζουμε τους δύο όρους του πρώτου διωνύμου $\left(1+x\right)$ ως $x^k$, k=0 ή 1, τους δύο όρους του δευτέρου διωνύμου $\left(1+x^2\right)$ ως $x^{2k}$, k=0 ή 1, και τελικά τους δύο όρους του τελευταίου διωνύμου $\left(1+x^7\right)$ ως $x^{7k}$, k=0 ή 1. Τότε, ο γενικός όρος του πολυωνύμου που σχηματίζεται από το γινόμενο 7 όρων, καθένας από τους οποίους ανήκει στα 7 διώνυμα, μπορεί να γραφεί ως:

$$x^{k_1}\cdot x^{2k_2}\cdot x^{3k_3}\cdot x^{4k_4}\cdot x^{5k_5}\cdot x^{6k_6}\cdot x^{7k_7}=x^{k_1+2k_2+3k_3+4k_4+5k_5+6k_6+7k_7} \qquad (2.14)$$

με $k_1, k_2,\ldots,k_7$=0 ή 1.

Επειδή ο εκθέτης στον όρο (2.14) θα είναι 7, σε όσους όρους ικανοποιούν τη σχέση

$$k_1+2k_2+3k_3+4k_4+5k_5+6k_6+7k_7=7\text{, με } k_1,\ k_2,\ldots,k_7\text{=0 ή 1,} \qquad (2.15)$$

άρα ο συντελεστής του όρου αυτού στο ανάπτυγμα, θα ταυτίζεται με το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης (2.15).

Εύκολα διαπιστώνουμε τώρα ότι κάθε λύση της (2.15) είναι μία διαμέριση του αριθμού 7 με διακεκριμένους προσθετέους. Πράγματι, αν η λύση έχει $k_\lambda$=1, τότε το λ είναι προσθετέος στη συγκεκριμένη διαμέριση, ενώ αν $k_\lambda$=0, δεν είναι. Επομένως, ο συντελεστής του όρου $x^7$ στο πολυώνυμο (2.13) δίνει το πλήθος των διαμερίσεων του 7 με διακεκριμένους προσθετέους.

Γενικεύοντας, αποδείξαμε την πρόταση.

**Πρόταση 2.1.** Το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$$k_1+2k_2+3k_3+\ldots+nk_n=n\text{, με } k_1,\ k_2,\ldots,k_n\text{=0 ή 1,}$$

ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n με διακεκριμένους προσθετέους, και ταυτίζεται με το συντελεστή της δύναμης $x^n$ στο ανάπτυγμα της παράστασης $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)$. ■

Παρατηρούμε, τώρα, ότι το ίδιο πολυώνυμο (2.13), δίνει το πλήθος των διαμερίσεων και όλων των αριθμών των μικρότερων του 7. Πράγματι, αν θέλαμε τις διαμερίσεις, π.χ. του 5, θα έπρεπε σύμφωνα με την πρόταση, να βρούμε το συντελεστή του $x^5$ στο πολυώνυμο

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\,.$$

Όμως, το πολυώνυμο αυτό ταυτίζεται με το (2.13), τουλάχιστον μέχρι τη δύναμη $x^5$, αφού οι επιπλέον παράγοντες $(1+x^6)(1+x^7)$ που έχει η παράσταση (2.13), επηρεάζουν μόνο τις μεγαλύτερες δυνάμεις. Έτσι ισχύει και το εξής:

**Πόρισμα 2.3.** Το πλήθος των διαμερίσεων των αριθμών 1 έως n με διακεκριμένους προσθετέους, δίνεται με τους συντελεστές των δυνάμεων $x^1$, $x^2$, …, $x^n$, αντίστοιχα, στο ανάπτυγμα της παράστασης

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)\,. \qquad \blacksquare$$

**Παράδειγμα 2.4.** Ο συντελεστής 5 του $x^7$ στην (2.13) παριστάνει το πλήθος των διαφορετικών διαμερίσεων του 7 με διακεκριμένους προσθετέους, που είναι οι: 7=7, 7=6+1, 7=5+2, 7=4+3, 7=4+2+1.

Αλλά και η εξίσωση:

$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 + 6k_6 + 7k_7 = 7$, με $k_1,\ k_2,...,k_7$=0 ή 1,

έχει 5 λύσεις τις

(0,0,0,0,0,0,1), (1,0,0,0,0,1,0), (0,1,0,0,1,0,0), (0,0,1,1,0,0,0), (1,1,0,1,0,0,0).

Όμοια, ο συντελεστής 3 του $x^5$ στην (2.13) παριστάνει το πλήθος των διαφορετικών διαμερίσεων του 5 με διακεκριμένους προσθετέους, που είναι οι: 5=5, 5=4+1, 5=3+2.

Αλλά και η εξίσωση:

$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 = 5$, με $k_1,\ k_2,...,k_5$=0 ή 1,

έχει 3 λύσεις τις (0,0,0,0,1), (1,0,0,1,0), (0,1,1,0,0).

$\blacksquare$

*Διαμερίσεις με μη-διακεκριμένους προσθετέους*

Ας θεωρήσουμε το γινόμενο των πολυωνύμων:

$$(1+x+\cdots+x^7)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7) =$$
$$= 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+\cdots+x^{41} \qquad (2.16)$$

Εργαζόμενοι όπως προηγούμενα, παρατηρούμε ότι το πρώτο πολυώνυμο στο γινόμενο (2.16) έχει όρους δυνάμεις του x, το δεύτερο έχει όρους δυνάμεις του $x^2$ κ.ο.κ. Επομένως το k-στό (k=1,2,…,7) πολυώνυμο γράφεται $\left(x^{k\cdot 0} + x^{k\cdot 1} + x^{k\cdot 2} + \ldots + x^{k\cdot \lambda}\right)$, όπου το λ είναι τέτοιο ώστε λk≤7. Άρα ο γενικός όρος του πολυωνύμου που σχηματίζεται από το γινόμενο 7 όρων, καθένας από τους οποίους ανήκει στα 7 πολυώνυμα-παράγοντες, μπορεί να γραφεί ως:

$$x^{1\cdot\lambda_1}\cdot x^{2\cdot\lambda_2}\cdot x^{3\cdot\lambda_3}\cdot x^{4\cdot\lambda_4}\cdot x^{5\cdot\lambda_5}\cdot x^{6\cdot\lambda_6}\cdot x^{7\cdot\lambda_7}=x^{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+5\lambda_5+6\lambda_6+7\lambda_7} \qquad (2.17)$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_7$ τέτοιους ώστε $0\le\lambda_i\le[7/i]$.

Έτσι ο συντελεστής του $x^7$ στο ανάπτυγμα (2.16) θα ισούται με το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4+5\lambda_5+6\lambda_6+7\lambda_7=7\text{, με } 0\le\lambda_i\le[7/i], \qquad (2.18)$$

που ταυτίζεται με το πλήθος των διαμερίσεων του 7, με οποιουσδήποτε προσθετέους, ακόμη και ίσους, που δεν μας ενδιαφέρει, όμως, η σειρά τους. Έτσι αποδείχτηκε η πρόταση.

**Πρόταση 2.2.** Το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n\text{, με } 0\le\lambda_i\le[n/i],$$

ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του n με μη-διακεκριμένους προσθετέους, και ταυτίζεται με το συντελεστή της δύναμης $x^n$ στο ανάπτυγμα της παράστασης

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2[n/2]})(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3[n/3]})\cdots(1+x^n).$$

■

Εργαζόμενοι όπως και στην προηγούμενη πρόταση, διαπιστώνουμε ότι αν έχουμε βρει το ανάπτυγμα της παράστασης (2.16), τότε όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων του x μέχρι και την $x^7$, δίνουν τα πλήθη των διαμερίσεων των αριθμών 1, 2, έως και 7 με μη-διακεκριμένους προσθετέους. Έτσι ισχύει και το εξής:

**Πόρισμα 2.4.** Το πλήθος των διαμερίσεων των αριθμών 1 έως n με μη-διακεκριμένους προσθετέους, δίνεται με τους συντελεστές των δυνάμεων $x^1, x^2, \ldots, x^n$, αντίστοιχα, στο ανάπτυγμα της παράστασης

$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2[n/2]})(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3[n/3]})\cdots(1+x^n).$$ ■

**Παράδειγμα 2.5.** Ο συντελεστής του $x^5$ στην (2.16) είναι 7, διότι υπάρχουν 7 διαφορετικές διαμερίσεις του 5 με οποιουσδήποτε προσθετέους, οι: 5=5, 5=4+1, 5=3+2, 5=3+1+1, 5=2+2+1, 5=2+1+1+1, 5=1+1+1+1+1. Αλλά και η εξίσωση

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 5\lambda_5 = 5 \text{, με } 0 \le \lambda_i \le [5/i],$$

έχει 7 διαφορετικές μη-αρνητικές λύσεις, τις:

(0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0, 0),
(1, 2, 0, 0, 0), (3, 1, 0, 0, 0), (5, 0, 0, 0, 0).

Όμοια, ο συντελεστής του $x^6$ στην (2.16) είναι 11, διότι όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, υπάρχουν 11 διαφορετικές διαμερίσεις του 6 με οποιουσδήποτε προσθετέους. Εύκολα, υπολογίζονται και οι 11 λύσεις της αντίστοιχης διοφαντικής εξίσωσης

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 5\lambda_5 + 6\lambda_6 = 6 \text{, με } 0 \le \lambda_i \le [6/i]$$ ■

Μπορούμε εύκολα να γενικεύσουμε την τελευταία πρόταση ως εξής:

**Πρόταση 2.3.** Το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$$\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = n \text{, με } \lambda_i \ge 0,$$

όπου $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ..., $\alpha_n$ διακεκριμένοι θετικοί ακέραιοι, ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του r με προσθετέους οσουσδήποτε και οσεσδήποτε φορές από τους αριθμούς $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ..., $\alpha_n$, και ταυτίζεται με το συντελεστή της δύναμης του $x^n$ στο πολυώνυμο

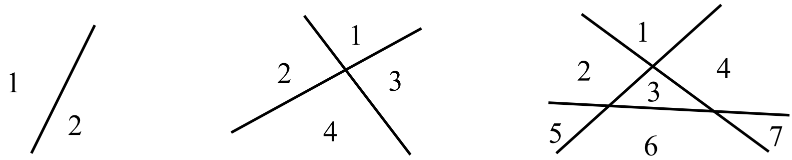
$$(1+x^{\alpha_1}+x^{2\alpha_1}+x^{3\alpha_1}+\ldots)(1+x^{\alpha_2}+x^{2\alpha_2}+x^{3\alpha_2}+\ldots)\cdots(1+x^{\alpha_n}+x^{2\alpha_n}+x^{3\alpha_n}+\ldots),$$

όπου η μεγαλύτερη δύναμη του x σε κάθε παρένθεση δεν υπερβαίνει το n.

■

### *2.2.4. Διαμερίσεις του επιπέδου*

Αν θεωρήσουμε μία ευθεία στο επίπεδο (αριστερά στο σχήμα 2.3), τότε παρατηρούμε ότι το επίπεδο χωρίζεται σε δύο χωρία. Αν έχουμε δύο ευθείες το επίπεδο χωρίζεται σε 4 χωρία, ενώ αν έχουμε τρεις σε επτά χωρία (σχήμα 2.3). Γενικεύοντας έχουμε το επόμενο πρόβλημα.




Σχήμα 2.3

**Πρόβλημα 2.4.** Δίνονται n ευθείες στο επίπεδο οι οποίες δεν είναι παράλληλες ανά δύο, ούτε υπάρχουν οποιεσδήποτε τρεις απ' αυτές που να περνούν από το ίδιο σημείο. Σε πόσα χωρία χωρίζεται το επίπεδο;

Λύση

Έστω f(n) συμβολίζει το ζητούμενο πλήθος. Θα αναζητήσουμε ένα αναδρομικό τύπο για την ακολουθία f(n), $n\in\mathbb{N}$.

Από το σχήμα 2.3 έχουμε f(1)=2, f(2)=4, f(3)=7. Παρατηρούμε ότι το τρίτο από τα σχήματα στο 2.3, προκύπτει με την προσθήκη μιας ευθείας στο δεύτερο. Η ευθεία αυτή χωρίζεται από τις δύο που υπήρχαν ήδη σε τρία τμήματα (διότι την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία). Κάθε ένα από αυτά χωρίζει ένα από τα χωρία που υπήρχαν σε δύο, αυξάνοντας τα υπάρχοντα χωρία κατά 3 χωρία. Εύκολα, γενικεύουμε αυτή την παρατήρηση. Πράγματι, αν φέρουμε την n+1-στή ευθεία, αυτή θα τέμνεται από όλες τις άλλες και θα ορίζονται n+1 τμήματά της. Κάθε ένα από αυτά θα κείται σε διαφορετικό από τα μέχρι τότε υπάρχοντα χωρία και θα τα χωρίζει σε 2 χωρία. Έτσι, αν είναι γνωστό το f(n), τότε θα ισχύει

$$f(n)=f(n-1)+n, \quad n\geq 2. \text{ με } f(1)=2.$$

Με τηλεσκοπική άθροιση βρίσκουμε

$$f(n)=f(n-1)+n= f(n-2)+(n-1)+n=\ldots=f(1)+2+\ldots+(n-1)+n,$$

οπότε, $f(n)=1+\dfrac{n(n+1)}{2}$, ή $f(n)=1+\dbinom{n+1}{2}$ ■

**Ασκήσεις**

**2.2.1.** Πόσοι ακέραιοι μεταξύ 1 και 1 000 000 έχουν άθροισμα ψηφίων 15;

**2.2.2.** Να αποδειχθεί το θεώρημα 2.3.

**2.2.3.** Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

| $p_k(n)$ | k=1 | k=2 | k=3 | k=4 | k=5 | k=6 | k=7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n=1 | 1 | | | | | | |
| n=2 | 1 | | | | | | |
| n=3 | 1 | | | | | | |
| n=4 | 1 | | | | | | |
| n=5 | 1 | | | | | | |
| n=6 | 1 | | | | | 11 | |
| n=7 | 1 | | | | | | |

**2.2.4.** Γράψτε το πολυώνυμο του οποίου το ανάπτυγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του πλήθους:

α. των διαμερίσεων του 38 με προσθετέους 6, 7, 12, 20.

β. των διαμερίσεων του 15 με προσθετέους μεγαλύτερους του 2.

**2.2.5.** Πόσες μη-αρνητικές και πόσες θετικές λύσεις έχει η εξίσωση:

$3x+5y+7z+9w=40$.

**2.2.6.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να χαλάσουμε ένα 100-ρικο σε ψιλά (των 5, 10, 20 και 50 δρχ) ;

**2.2.7.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να πληρώσουμε έναν λογαριασμό 73 λεπτών του ευρώ όταν έχουμε διαθέσιμα οσαδήποτε ψιλά χρειαζόμαστε από 1, 2, 5, 10, 20 και 50 λεπτά;

**2.2.8.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να συμπληρώσουμε 250 ευρώ, με διάφορα χαρτονομίσματα των 5, 10, 20, 50 και 100 ευρώ.;

**2.2.9.** Δίνονται n επίπεδα στο χώρο τα οποία δεν είναι παράλληλα ανά δύο, οποιαδήποτε τρία απ' αυτά τέμνονται σε ένα σημείο, αλλά δεν υπάρχουν τέσσερα που να περνούν όλα από το ίδιο σημείο. Έστω g(n) συμβολίζει το πλήθος των περιοχών στις οποίες χωρίζεται ο χώρος. Να βρεθεί το g(n) για τις διάφορες τιμές του n.

## 2.3. Προβλήματα Ταξινόμησης

Ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων της Συνδυαστικής αφορούν στην εύρεση του πλήθους των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε αντικείμενα σε κουτιά, άτομα σε δωμάτια, ή ενγένει σφαιρίδια σε κελιά. Διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις ανάλογα με το αν τα σφαιρίδια διαφέρουν ή όχι μεταξύ τους και αν τα κελιά διαφέρουν ή όχι μεταξύ τους.

### *2.3.1. n όμοια σφαιρίδια - k διακεκριμένα κελιά*

Είναι η απλούστερη περίπτωση. Πράγματι, αν συμβολίσουμε $x_1$ το πλήθος των σφαιριδίων στο πρώτο κελί, $x_2$ το πλήθος των σφαιριδίων στο δεύτερο κελί, κ.ο.κ $x_k$ το πλήθος των σφαιριδίων στο τελευταίο κελί, τότε θα ισχύει:

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=n \qquad (2.19)$$

όπου τα $x_i$ i=1,2,…,k παίρνουν προφανώς ακέραιες τιμές. Αν επιτρέπεται να υπάρχουν άδεια κελιά, τότε το ζητούμενο ταυτίζεται με το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης (2.19), που όπως δείξαμε στο θεώρημα 1.2 ισούται με $\binom{n+k-1}{k-1}$. Αν δεν επιτρέπεται να υπάρχουν άδεια κελιά, τότε το ζητούμενο ταυτίζεται με το πλήθος των θετικών λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης (2.19), που ισούται με $\binom{n-1}{k-1}$.

**Παράδειγμα 2.6.** Δέκα όμοιες καραμέλες πρόκειται να μοιραστούν σε τρία παιδιά. Η μοιρασιά γίνεται τυχαία με τρόπο ώστε κάθε παιδί μπορεί να πάρει από καμία μέχρι και όλες τις καραμέλες. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η μοιρασιά.

Λύση

Θεωρώντας τις καραμέλες ως σφαιρίδια και τα παιδιά ως κελιά και επειδή επιτρέπεται κάποια παιδιά να μην πάρουν καραμέλες (δηλ. να υπάρχουν άδεια κελιά), έχουμε:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+10-1}{10-1} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = 220 .$$ ■

*2.3.2. n διακεκριμένα σφαιρίδια - k διακεκριμένα κελιά*

Στην περίπτωση αυτή, αν δεν έχουμε περιορισμούς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε σφαιρίδιο έχει k δυνατότητες τοποθέτησης. Επομένως σύμφωνα με την θεμελιώδη αρχή της απαρίθμησης υπάρχουν $k^n$ δυνατές τοποθετήσεις.

Πιο ενδιαφέρον είναι το επόμενο ερώτημα. Ποιο είναι το πλήθος των τοποθετήσεων n διακεκριμένων σφαιριδίων σε k διακεκριμένα κελιά, με τρόπο ώστε να τοποθετηθεί τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί; Ας συμβολίσουμε το ζητούμενο πλήθος με f(n,k).

Για την εύρεση του f(n,k) θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή συμπερίληψης – εξαίρεσης (Α.Σ.Ε.).

Θέτουμε $\alpha_i$ την ιδιότητα «το i-στό κελί είναι άδειο», i=1,2,…,k.

Βρίσκουμε ότι $\mathrm{N}(\alpha_i) = (k-1)^n$, αφού και τα n σφαιρίδια θα τοποθετηθούν στα υπόλοιπα k-1 κελιά. (Σημειώστε ότι αν μία τοποθέτηση έχει την ιδιότητα $\alpha_i$ για κάποιο i, τότε μόνο για το i-στό κελί γνωρίζουμε ότι θα είναι άδειο. Τα υπόλοιπα μπορεί να είναι είτε άδεια είτε γεμάτα). Όμοια,

$\mathrm{N}(\alpha_i\alpha_j)=(k-2)^n$ και συνεχίζοντας ανάλογα βρίσκουμε ότι για λ, λ<k, ισχύει $N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_\lambda})=(k-\lambda)^n$ . Η Α.Σ.Ε. δίνει τώρα εύκολα τον επόμενο τύπο

$$f(n,k)=k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-...+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}(1)^n. \qquad (2.20)$$

**Παράδειγμα 2.7.** Με πόσους τρόπους 4 σφαιρίδια μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 κελιά ώστε (α) κανένα κελί άδειο, (β) ένα ακριβώς άδειο, (γ) δύο άδεια; Να καταγραφούν σε κάθε περίπτωση οι τοποθετήσεις, συμβολίζοντας με α,β,γ,δ τα σφαιρίδια, έτσι ώστε για παράδειγμα το (αβ,γ,δ) να συμβολίζει την τοποθέτηση των σφαιριδίων α,β στο 1ο κελί, του γ στο 2ο κελί και του δ στο 3ο κελί, ενώ (αβ,γδ,-) την τοποθέτηση των σφαιριδίων α,β στο 1ο κελί και των γ,δ στο 2ο κελί.

Λύση

α) Ζητούμε το $f(4,3)=3^4-\binom{3}{1}2^4+\binom{3}{2}1^4=36$ .

β) Πρέπει πρώτα να επιλέξουμε τα δύο κελιά που δεν θα είναι άδεια και μετά να εφαρμόσουμε τον τύπο (2.20).

Βρίσκουμε $\binom{3}{2}f(4,2)=3\cdot\left(2^4-\binom{2}{1}1^4\right)=42$ .

γ) Βρίσκουμε $\binom{3}{1}f(4,1)=3\cdot\left(1^4\right)=3$ .

Για την καταγραφή των τοποθετήσεων έχουμε:

α) Υπάρχουν 6 τρόποι με τα α, β στο ίδιο κελί, οι (αβ,γ,δ) (αβ,δ,γ) (γ,αβ,δ) (δ,αβ,γ) (γ,δ,αβ) (δ,γ,αβ). Από 6 τρόπους έχουμε αν τα α,γ είναι μαζί, τα α,δ μαζί, τα β, γ μαζί, τα β,δ μαζί και τα γ,δ μαζί. Άρα τελικά 6·6=36 τρόποι.

β) Με το 3ο κελί άδειο υπάρχουν 7 τοποθετήσεις οι (αβγ,δ,–) (αβδ,γ,–) (αγδ,β,–) (βγδ,α,–) (αβ,γδ,–) (αγ,βδ,–) (αδ,βγ,–). Άλλες 7 προκύπτουν με εναλλαγή των δύο πρώτων κελιών. Αφήνοντας το 2$^{\text{ο}}$ ή το 1$^{\text{ο}}$ κελί άδειο παίρνουμε άλλες 2·14 τοποθετήσεις.

γ) (αβγδ,–,–) (–,αβγδ,–), (–,–,αβγδ).

■

*2.3.3. n διακεκριμένα σφαιρίδια - k όμοια (αδιάκριτα) κελιά*

Ας συμβολίσουμε με G(n,k) το πλήθος των διαφορετικών τοποθετήσεων των n διακεκριμένων σφαιριδίων στα k όμοια κελιά. Ας συμβολίσουμε, επίσης, με g(n,k) το πλήθος των τοποθετήσεων των n διακεκριμένων σφαιριδίων στα k όμοια κελιά, με τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί (δηλαδή χωρίς να μείνει κανένα κελί άδειο).

Είναι φανερό ότι, επειδή τα κελιά δεν διακρίνονται μεταξύ τους και επειδή τα κελιά που θα μείνουν άδεια μπορεί να είναι από 0 έως και k-1, θα ισχύει

$$G(n,k)=g(n,k)+g(n,k-1)+...+g(n,1).$$

Για την εύρεση του g(n,r) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν επισυνάψουμε σε κάθε ένα από τα r αδιάκριτα κελιά έναν αριθμό, τότε γίνονται διακεκριμένα με f(n,r) δυνατές τοποθετήσεις. Υπάρχουν τότε r! μεταθέσεις των διακεκριμένων κελιών που δίνουν την ίδια τοποθέτηση αδιάκριτων κελιών. Άρα, θα είναι g(n,r)=f(n,r)/r!, δηλαδή

$$g(n,r)=\frac{1}{r!}\left\{r^n-\binom{r}{1}(r-1)^n+\binom{r}{2}(r-2)^n-...+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}(1)^n\right\} \qquad (2.21)$$

και τελικά

$$G(n,k)=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r!}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s\binom{r}{s}(r-s)^n=\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s\,\frac{(r-s)^n}{s!(r-s)!} \qquad (2.22)$$

**Παράδειγμα 2.8.** Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό 30030 χρησιμοποιώντας τρεις ακέραιους παράγοντες, όταν (α) το 1 επιτρέπεται να είναι παράγοντας και (β) το 1 δεν επιτρέπεται να είναι παράγοντας. (Η σειρά των παραγόντων δεν μετράει, δηλαδή $30\cdot77\cdot13 \equiv 13\cdot77\cdot30$)

Λύση

Παρατηρείστε ότι $30030=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$, δηλαδή ο αριθμός 30030 έχει 6 διαφορετικούς πρώτους παράγοντες, τους οποίους μπορούμε να θεωρήσουμε ως σφαιρίδια. Οι τρεις παράγοντες, που είναι αδιάκριτοι μεταξύ τους και έχουν γινόμενο ίσο με 30030, μπορούν να θεωρηθούν ως όμοια κελιά στα οποία τοποθετούνται τα 6 σφαιρίδια. Έχουμε:

(α) Ο παράγοντας 1 ισοδυναμεί με άδειο κελί. Άρα ζητείται το

$$G(6,3) = g(6,3) + g(6,2) + g(6,1) =$$
$$= \frac{f(6,3)}{3!} + \frac{f(6,2)}{2!} + \frac{f(6,1)}{1!} = \frac{540}{6} + \frac{62}{2} + \frac{1}{1} = 122 .$$

β) Ζητείται το g(6,3) που είναι 90. ■

### 2.3.4. *n ανάμικτα σφαιρίδια -k διακεκριμένα (ή όμοια) κελιά*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πλήθος από n σφαιρίδια $a_1$ από τα οποία είναι όμοια, $a_2$ είναι επίσης όμοια αλλά διαφορετικά από τα προηγούμενα και τελικά $a_r$ όμοια μεταξύ τους και διαφορετικά από όλα τα προηγούμενα, έτσι ώστε $a_1+a_2+\ldots+a_r=n$. Με πόσους τρόπους μπορούν τα αντικείμενα αυτά να τοποθετηθούν σε k κελιά;

Ας συμβολίσουμε με $\alpha_1$ το πλήθος των σφαιριδίων που τοποθετούνται στο πρώτο κελί, $\alpha_2$ το πλήθος αυτών που τοποθετούνται στο δεύτερο και τελικά $\alpha_k$ το πλήθος αυτών που τοποθετούνται στο τελευταίο κελί. Τότε θα ισχύει $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k=n$. Το πρόβλημα είναι να βρούμε το πλήθος όλων των τοποθετήσεων για μια συγκεκριμένη επιλογή των k αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ και μετά να αθροίσουμε για όλες τις δυνατές επιλογές.

Το πρόβλημα είναι πολύπλοκο και δεν μπορεί να βρεθεί γενικός τύπος. Θα διατυπώσουμε μόνο κάποιες ιδιότητες που βοηθούν στη λύση του και θα λύσουμε μια ειδική περίπτωση.

Στη διεθνή βιβλιογραφία συμβολίζουμε

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r \;\square\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k ] \qquad (2.23)$$

το πλήθος των τοποθετήσεων για δεδομένα τα πλήθη σφαιριδίων στα k κελιά. Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι έχουμε 5 σφαιρίδια 1 κόκκινο (Κ), 2 άσπρα (Α) και δύο μαύρα (Μ). Έστω ότι θέλουμε να δούμε με πόσους τρόπους τοποθετούνται σε 2 κουτιά, ώστε στο ένα να μπουν 3 σφαιρίδια και στο άλλο 2. Εύκολα, βρίσκουμε 5 λύσεις, τις:

{ΚΑΑ, ΜΜ}, {ΚΑΜ, ΑΜ}, {ΚΜΜ, ΑΑ}, {ΑΑΜ, ΚΜ}, {ΜΜΑ, ΚΑ}.

Με τον προηγούμενο συμβολισμό έχουμε $[1, 2, 2 \;\square\; 2, 3]=5$.

Μια προφανής ιδιότητα είναι ότι $[1, 2, 2 \;\square\; 2, 3]= [1, 2, 2 \;\square\; 3, 2]$, δηλαδή ότι η σειρά των αριθμών $\alpha_i$ δεν έχει σημασία. Ακριβώς ανάλογα, δείχνουμε ότι ούτε η σειρά των αριθμών $a_i$ έχει σημασία. Δηλαδή, στο συμβολισμό (2.23) η σειρά των αριθμών στο πρώτο ή στο δεύτερο τμήμα δεν έχει σημασία. Θα δείξουμε μία λιγότερο προφανή ιδιότητα που βοηθά στην απλοποίηση των υπολογισμών στα προβλήματα αυτά.

Ισχύει

$[a_1, a_2, \ldots, a_r\ []\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k] = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\ []\ a_1, a_2, \ldots, a_r]$ (2.24)

Πράγματι, για τον υπολογισμό του αριστερού μέλους αυτής της ισότητας, ας συμβολίσουμε $x_{ij}$ i=1, 2, …,r , j=1,2, …, k, το πλήθος των σφαιριδίων του είδους i που τοποθετούνται στο κελί j. Τότε θα ισχύουν τα δύο συστήματα σχέσεων:

$$\begin{matrix} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{r1}=\alpha_1 \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{r2}=\alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1k}+x_{2k}+\ldots+x_{rk}=\alpha_k \end{matrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1k}=\mathrm{a}_1 \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2k}=\mathrm{a}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{r1}+x_{r2}+\ldots+x_{rk}=\mathrm{a}_r \end{matrix} \qquad (2.25)$$

όπου το πρώτο σύστημα προέκυψε από το γεγονός ότι στο j κελί το σύνολο των σφαιριδίων που τοποθετούνται θα είναι ίσο με το $\alpha_j$. Το δεύτερο σύστημα προέκυψε από το γεγονός ότι όλα τα σφαιρίδια είδους i που τοποθετούνται σε όλα τα κελιά θα είναι συνολικά ίσα με τα διαθέσιμα σφαιρίδια $a_i$ αυτού του είδους. Το ζητούμενο πλήθος θα είναι το πλήθος των μη-αρνητικών λύσεων του συστήματος των k+r διοφαντικών εξισώσεων (2.25).

Το δεύτερο μέλος της ισότητας (2.24) οδηγεί ακριβώς στο ίδιο σύστημα εξισώσεων μόνο με διαφορετική σειρά. Αυτό αποδεικνύει την ισότητα.

Μερικές ειδικές περιπτώσεις είναι οι εξής:

α) [1, 1, …,1 [] 1, 1, ..., 1]=n!, (σε κάθε τμήμα οι μονάδες είναι n),

β) [1, 1, …,1 [] 1, 1, ..., 1,n-r]=$\Delta_n^r$, (στο πρώτο τμήμα οι μονάδες είναι n, στο δεύτερο είναι r),

γ) [1, 1, …,1 [] r, n-r]=$\binom{n}{r}$, (στο πρώτο τμήμα οι μονάδες είναι n),

δ) $[a_1, a_2, \ldots, a_r\ []\ s, n-s]=\binom{r+s-1}{s}$, αν $a_1+a_2+\ldots+a_r=n$, και κάθε $a_i$ δεν είναι μικρότερο του s,

που δίνουν ενδεικτικά την πολυπλοκότητα του γενικού προβλήματος.

Για την απόδειξη της (δ) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το αντίστοιχο σύστημα (2.25) γράφεται

$$\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{r1}=s \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{r2}=n-s \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{c} x_{11}+x_{12}=\mathrm{a}_1 \\ x_{21}+x_{22}=\mathrm{a}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r1}+x_{r2}=\mathrm{a}_r \end{array}$$

και να διαπιστώσουμε ότι αρκεί να λύσουμε την πρώτη από αυτές στο πρώτο σύστημα. Πράγματι, αν βρεθεί μία λύση από την πρώτη σχέση, τότε το δεύτερο σύστημα (επειδή δόθηκε $\mathrm{a}_i \geq s$), δίνει και μια λύση της δεύτερης.

Θα ασχοληθούμε τώρα με μια ειδική περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε. Η λύση γενικεύεται σε μία γενικότερη πρόταση.

**Πρόβλημα 2.5.** Έστω ότι έχουμε 5 σφαιρίδια 1 κόκκινο (Κ), 2 άσπρα (Α) και δύο μαύρα (Μ). Με πόσους τρόπους τοποθετούνται σε 2 κουτιά;

Λύση

Είναι φανερό ότι αν τα κουτιά είναι όμοια, τότε το ζητούμενο πλήθος θα ισούται με

[1, 2, 2 []0, 5]+ [1, 2, 2 []1, 4]+ [1, 2, 2 []2, 3]=1+3+5=9,

όπου το τελευταίο σύμβολο υπολογίστηκε στην αρχή της παραγράφου. Αν τα κουτιά είναι διακεκριμένα θα έπρεπε να προσθέσουμε επίσης και τα

[1, 2, 2 []5, 0]+ [1, 2, 2 []4, 1]+ [1, 2, 2 []3, 2],

που κάνουν τις τοποθετήσεις 18.

Ένας άλλος τρόπος για το ζητούμενο πλήθος είναι με το δενδροδιάγραμμα του πίνακα 2.2. Στον πίνακα αυτό μετρούμε τους διαφορετικούς τρόπους επιλογής των σφαιριδίων για τοποθέτησή τους στο $1^{\text{ο}}$ κουτί. Όσα σφαιρίδια δεν επιλέγονται τοποθετούνται στο δεύτερο κουτί. Έτσι βρίσκουμε 18 διαφορετικές επιλογές που αντιστοιχούν σε 18 τοποθετήσεις σε διακεκριμένα κελιά, ή 9 =18/2 τοποθετήσεις σε όμοια κουτιά.

■

Από την κατασκευή του διαγράμματος διαπιστώνεται ότι το συνολικό πλήθος 18 προέκυψε ως το γινόμενο $2\cdot3\cdot3$, όπου οι αριθμοί 2, 3 και 3 είναι ίσοι με τα πλήθη των όμοιων σφαιρών αυξημένων κατά 1. Γενικεύοντας έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πίνακας 2.2. Δενδροδιάγραμμα για το πρόβλημα 2.5

| Επιλογή των Κ | Επιλογή των Μ | Επιλογή των Α | Τελική επι-λογή |
|---|---|---|---|
| | | κανένα | κανένα |
| | κανένα | Α | Α |
| | | ΑΑ | ΑΑ |
| | | κανένα | Μ |
| κανένα | Μ | Α | ΜΑ |
| | | ΑΑ | ΜΑΑ |
| | | κανένα | ΜΜ |
| | ΜΜ | Α | ΜΜΑ |
| | | ΑΑ | ΜΜΑΑ |
| | | κανένα | Κ |
| | κανένα | Α | ΚΑ |
| | | ΑΑ | ΚΑΑ |
| | | κανένα | ΚΜ |
| Κ | Μ | Α | ΚΜΑ |
| | | ΑΑ | ΚΜΑΑ |
| | | κανένα | ΚΜΜ |
| | ΜΜ | Α | ΚΜΜΑ |
| | | ΑΑ | ΚΜΜΑΑ |

**Πρόταση 2.4.** Αν έχουμε $p_1$ αντικείμενα ενός είδους, $p_2$ αντικείμενα ενός δεύτερου είδους και τελικά $p_r$ αντικείμενα ενός r-στού είδους, τότε το πλήθος επιλογών που μπορούμε να κάνουμε παίρνοντας οσαδήποτε από τα αντικείμενα είναι $(p_1+1)\cdot(p_2+1)\cdot\ldots\cdot(p_r+1)$. ■

### *2.3.5. Αριθμοί Stirling*

Οι αριθμοί Stirling αν και από τον ορισμό τους δεν φαίνεται να έχουν σχέση με τις συνδυαστικές έννοιες που μελετούμε, εντούτοις θα δούμε στα επόμενα ότι βοηθούν στον υπολογισμό ποσοτήτων, όπως π.χ. του G(n,n).

Συμβολίζουμε με $k^{(n)}$ το γινόμενο $k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$ που δίνει το πλήθος των διατάξεων των k αντικειμένων ανά n, και με τη μορφή αυτή λέγεται παραγοντικό πολυώνυμο n βαθμού. Άλλοι συμβολισμοί για την ίδια ποσότητα είναι οι $(k)_n$ και $\Delta_k^n$.

Κάνοντας πράξεις, το παραγοντικό πολυώνυμο n βαθμού $k^{(n)}$ εκφράζεται ως πολυώνυμο n βαθμού ως προς k:

$$k^{(n)} = S_1^{(n)}k + S_2^{(n)}k^2 + \ldots + S_n^{(n)}k^n = \sum_{i=1}^{n} S_i^{(n)}k^i \tag{2.26}$$

του οποίου οι συντελεστές $S_i^{(n)}$ είναι προφανώς ακέραιοι αριθμοί και λέγονται αριθμοί Stirling 1ου είδους.

Αποδεικνύεται, επαγωγικά, ότι ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} &S_i^{(n+1)} = S_{i-1}^{(n)} - n\,S_i^{(n)},\ i = 2,3,\ldots,n,\ n \geq 1, \\ &S_{n+1}^{(n+1)} = 1,\ n \geq 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ S_1^{(n+1)} = -nS_1^{(n)},\ n \geq 1, \end{aligned} \tag{2.27}$$

με τη βοήθεια της οποίας κατασκευάζεται ο πίνακας 2.3. Οι γραμμές του πίνακα αυτού δίνουν, επομένως, τα παραγοντικά πολυώνυμα. Για παράδειγμα από την 5η γραμμή παίρνουμε:

$$k^{(5)} = 24\,k - 50\,k^2 + 35\,k^3 - 10\,k^4 + k^5$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις (2.26), μπορούμε να εκφράσουμε τις δυνάμεις $k^n$ με τη βοήθεια των παραγοντικών πολυωνύμων $k^{(n)}$. Αν συμβολίσουμε:

$$k^n = s_1^{(n)}k^{(1)} + s_2^{(n)}k^{(2)} + \ldots + s_n^{(n)}k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} s_i^{(n)}k^{(i)}\ ,$$

οι συντελεστές $s_i^{(n)}$ λέγονται αριθμοί Stirling 2ου είδους. Για τους αριθμούς αυτούς αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned} &s_i^{(n+1)} = s_{i-1}^{(n)} + is_i^{(n)},\ i = 2,3,\ldots,n,\ n \geq 1, \\ &s_{n+1}^{(n+1)} = 1,\ n \geq 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ s_1^{(n+1)} = s_1^{(n)},\ n \geq 1, \end{aligned} \tag{2.28}$$

Πίνακας 2.3. Αριθμοί Stirling 1ου είδους

| i / n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | -1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 2 | -3 | 1 | | | | | |
| 4 | -6 | 11 | -6 | 1 | | | | |
| 5 | 24 | -50 | 35 | -10 | 1 | | | |
| 6 | -120 | 274 | -225 | 85 | -15 | 1 | | |
| 7 | 720 | -1764 | 1624 | -735 | 175 | -21 | 1 | |
| 8 | -5040 | 13068 | -13132 | 6769 | -1960 | 322 | -28 | 1 |

απ' όπου κατασκευάζεται εύκολα ο πίνακας 2.4. Οι γραμμές αυτού του πίνακα, δίνουν τις δυνάμεις του k συναρτήσει των παραγοντικών πολυωνύμων. Για παράδειγμα από την $5^η$ γραμμή παίρνουμε:

$$k^5 = k^{(1)} + 15\,k^{(2)} + 25\,k^{(3)} + 10\,k^{(4)} + k^{(5)}.$$

Παρατηρείστε ότι λόγω του ορισμού των παραγοντικών πολυωνύμων ενδέχεται η προηγούμενη έκφραση να έχει μηδενικούς όρους. Για παράδειγμα αν k=3 έχουμε:

$$3^5 = 3^{(1)} + 15\cdot 3^{(2)} + 25\cdot 3^{(3)} + 10\cdot 3^{(4)} + 3^{(5)} = 3 + 15\cdot 6 + 25\cdot 6 + 10\cdot 0 + 0 = 243.$$

**Σημείωση.** Για το ίδιο n οι πίνακες με στοιχεία τους αριθμούς Stirling $1^{ου}$ και $2^{ου}$ είδους, είναι αντίστροφοι. Π.χ. αν με $A_8$ συμβολίσουμε τον 8×8 πίνακα που σχηματίζεται από τον πίνακα 2.3, συμπληρώνοντας με 0-κά τα κενά και με $B_8$ αντιστοίχως τον πίνακα που προκύπτει από τον 2.4, τότε ισχύει $A_8 \cdot B_8 = I_8$.

Πίνακας 2.4. Αριθμοί Stirling $2^{ου}$ είδους

| n \ i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | |
| 7 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | |
| 8 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 |

### *2.3.6. Αριθμοί BELL*

Το πλήθος $B_n$ των διαμερίσεων ενός συνόλου n στοιχείων σε υποσύνολα, λέγεται αριθμός Bell τάξης n. Για παράδειγμα, αν n=3 υπάρχουν πέντε διαφορετικές διαμερίσεις του {1,2,3}, οι:

{{1,2,3}}, {{1,2},{3}}, {{1,3},{2}}, {{2,3},{1}}, {{1},{2},{3}}.

Άρα είναι $B_3$= 5. Όμοια, διαπιστώνεται εύκολα ότι $B_1$=1, $B_2$=2.

Αποδεικνύεται η επόμενη αναγωγική σχέση.

**Θεώρημα 2.6.** Ισχύει

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \ B_0 = 1 \tag{2.29}$$

Απόδειξη

Ας συμβολίσουμε με X={1,2,..., n} το δοθέν σύνολο και ας θεωρήσουμε μία τυχαία διαμέριση του X. Υπάρχει πάντα ένα τμήμα T της διαμέρισης, που περιέχει το τελευταίο στοιχείο n. Ας υποθέσουμε ότι ο πληθικός αριθμός του τμήματος αυτού είναι k και ας συμβολίσουμε με Y το σύνολο των άλλων, εκτός του n, στοιχείων αυτού του τμήματος, δηλαδή T={n}∪Y. Για συγκεκριμένο k, υπάρχουν $\binom{n-1}{k-1}$ τρόποι να επιλεγούν τα k−1 στοιχεία από τα πρώτα n−1 στοιχεία του X, που θα σχηματίσουν το Y. Το υπόλοιπο τμήμα της διαμέρισης αποτελεί διαμέριση του συνόλου των υπολοίπων n−k στοιχείων του συνόλου X−T και υπάρχουν $B_{n-k}$ τέτοιες διαμερίσεις. Με τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης προκύπτει, επομένως, ότι το n ανήκει σε σύνολο πληθικού αριθμού k σε $\binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$ από τις διαμερίσεις. Αθροίζοντας για όλες τις τιμές του k από 1 έως και n, προκύπτει το ζητούμενο.

**Σημείωση.** Για την περίπτωση k=n εμφανίζεται στο προηγούμενο άθροισμα το σύμβολο $B_0$. Επειδή στην περίπτωση αυτή είναι X−T=∅ και υπάρχει μία μόνο διαμέριση του ∅, δεχόμαστε ότι $B_0$=1. ■

Οι αριθμοί Bell δεν μπορούν να δοθούν αναλυτικά. Θα προσπαθήσουμε όμως να βρούμε πρακτικούς τρόπους υπολογισμού τους.

Α΄ τρόπος

Στην επόμενη παράγραφο αποδεικνύουμε ότι η εκθετική γεννήτρια B(t) των αριθμών Bell είναι $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t - 1}$, από την οποία προκύπτει ότι οι αριθμοί Bell είναι οι παράγωγοι της συνάρτησης $e^{e^t-1}$, δηλαδή:

$$B_n = \frac{d^{(n)}}{dt^n}\left(e^{e^t-1}\right)\Bigg|_{t=0}\quad , \quad n=0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{2.30}$$

Μερικοί όροι του αναπτύγματος Taylor της B(t) στο 0, είναι:

$$e^{e^t-1} = 1+x+2\frac{t^2}{2!}+5\frac{t^3}{3!}+15\frac{t^4}{4!}+52\frac{t^5}{5!}+203\frac{t^6}{6!}+877\frac{t^7}{7!}+4140\frac{t^8}{8!}+21147\frac{t^8}{8!}+...$$

που δίνουν τους πρώτους από τους αριθμούς Bell.

Β΄ τρόπος.

Ας θεωρήσουμε πρώτα εκείνες τις διαμερίσεις ενός συνόλου n στοιχείων που αποτελούνται από ακριβώς k υποσύνολα, για σταθερό k. Το πλήθος τους το συμβολίζουμε με B(n,k), όπου το k κυμαίνεται από 1 έως n. Τότε, τα n στοιχεία του συνόλου μπορούν να θεωρηθούν ως (διακεκριμένα) σφαιρίδια, ενώ τα k υποσύνολα ως «όμοια» κελιά. Ο όρος όμοια εδώ, σημαίνει ότι αν εναλλάξουμε κάποια υποσύνολα σε μία διαμέριση, η διαμέριση παραμένει η ίδια. Επομένως, σύμφωνα με όσα περιγράψαμε στην παράγραφο §2.3.3 , θα ισχύει B(n,k)=g(n,k).

Αθροίζοντας τώρα για όλες τις τιμές του k, βρίσκουμε:

$B_n$=G(n,n)=g(n,n)+g(n,n-1)+...+g(n,1) .

και χρησιμοποιώντας την (2.22) βρίσκουμε

$$B_n = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=0}^{r-1}(-1)^s\,\frac{(r-s)^n}{s!(r-s)!} \tag{2.31}$$

Γ΄ τρόπος.

Έστω πάλι B(n,k) το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου Ω με n στοιχεία σε k υποσύνολα, k=1,2,…,n. Θα δείξουμε ότι

$$B(n,k)=s_k^{(n)} \tag{2.32}$$

δηλαδή ότι τα B(n,k) ταυτίζονται με τους αριθμούς Stirling δευτέρου είδους.

Πράγματι, έστω μια διαμέριση του X={1,2,...,n} με k υποσύνολα. Το στοιχείο n, έχει δύο δυνατότητες· είτε ανήκει σε μονοσύνολο είτε όχι.

(1) Στην πρώτη περίπτωση, (αν k≥2), διαγράφοντας το n προκύπτουν k-1 υποσύνολα που αποτελούν διαμέριση του X-{n}. Και, υπάρχουν B(n−1,k−1) τέτοιες διαμερίσεις.

(2) Στη δεύτερη περίπτωση, (αν $k \leq n-1$), διαγράφοντας το n προκύπτουν k υποσύνολα που αποτελούν διαμέριση του X-{n}. Επειδή το n μπορούσε να ανήκει σε οποιοδήποτε από τα k σύνολα της διαμέρισης, άρα υπάρχουν $B(n-1,k) \times k$, τέτοιες διαμερίσεις.

Επομένως, για k=2,3,…,n-1, ισχύει:

$B(n,k)=B(n-1,k-1)+k\,B(n-1,k)$

Αν k=1 η πρώτη περίπτωση που αναφέραμε δεν έχει νόημα και η (2) δίνει B(n,1)=B(n-1,1). Αν k=n, η δεύτερη περίπτωση που αναφέραμε δεν έχει νόημα και είναι φανερό ότι υπάρχει μόνο μία τέτοια διαμέριση, δηλαδή B(n,n)=1, για όλα τα n.

Ώστε ικανοποιείται η αναγωγική σχέση (2.28), που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Αθροίζοντας τώρα για όλες τις τιμές του k, βρίσκουμε:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} B(n,k) = \sum_{k=1}^{n} s_k^{(n)} . \tag{2.33}$$

Επειδή για σταθερό n οι αριθμοί Stirling 2ου είδους βρίσκονται στη n-στή γραμμή του πίνακα 2.4, η τελευταία σχέση δίνει ένα πρακτικό τρόπο υπολογισμού των αριθμών Bell. Πράγματι, αρκεί να συμπληρώσουμε τον πίνακα 2.4 μέχρι τη γραμμή που μας ενδιαφέρει και μετά να αθροίσουμε τα στοιχεία της γραμμής αυτής. Ως εφαρμογή υπολογίσαμε από τον πίνακα 2.4, τους 8 πρώτους αριθμούς Bell.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_n$ | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 |

Ως μία εφαρμογή των προηγουμένων, αποδεικνύουμε την παρακάτω πρόταση, που ταξινομεί τις μονοσήμαντες απεικονίσεις από ένα πεπερασμένο σύνολο σε άλλο και υπολογίζει το πλήθος των απεικονίσεων κάθε κατηγορίας.

**Πρόταση 2.5** Έστω T(n,r) συμβολίζει το πλήθος των μονοσήμαντων απεικονίσεων $f: X \to Y$, όπου $X=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, $Y=\{\beta_1, \beta_2, ... \beta_r\}$ και T(n,r,k) εκείνες από τις απεικονίσεις που έχουν k σημεία, $1 \leq k \leq r$, στο πεδίο τιμών τους. Ισχύουν:

$$T(n,r,k) = B(n,k) \cdot \Delta_r^k = B(n,k) \cdot r^{(k)} \tag{2.34}$$

όπου B(n,k) οι αριθμοί που ορίστηκαν προηγούμενα και

$$T(n,r)=\sum_{k=1}^{r}T(n,r,k)=r^{n}. \qquad (2.35)$$

Απόδειξη

Διαμερίζουμε πρώτα το πεδίο ορισμού X σε k υποσύνολα, $1\le k\le r$, με B(n,k) τρόπους (αν k>n τίθεται B(n,k)=0). Για κάθε μία από τις διαμερίσεις αυτές επιλέγουμε k από τα στοιχεία του Y. Επειδή η σειρά μετράει, αφού ορίζει διαφορετικές απεικονίσεις, αυτό γίνεται με $\Delta_r^k$. Άρα, η θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης αποδεικνύει αμέσως την (2.34).

Αθροίζοντας για τις επιτρεπτές τιμές του k παίρνουμε τη σχέση (2.35). Η ίδια σχέση προκύπτει επίσης και με τον εξής συλλογισμό. Στις μονοσήμαντες απεικονίσεις κάθε σημείο του πεδίου ορισμού έχει r δυνατότητες, αφού r είναι τα στοιχεία του πεδίου τιμών. Και επειδή υπάρχουν n στοιχεία στο πεδίο ορισμού, θα υπάρχουν τελικά $r^n$ δυνατές απεικονίσεις. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως άλλος τρόπος απόδειξης ότι οι αριθμοί B(n,k) των διαμερίσεων ενός συνόλου n στοιχείων με k υποσύνολα ισούνται με τους αριθμούς Stirling 2$^{ου}$ είδους.

■

**Παράδειγμα 2.9.** Να καταγραφούν οι $3^4$=81 διαφορετικές μονοσήμαντες απεικονίσεις από το σύνολο X={α, β, γ, δ} στο σύνολο Y={A, B, Γ}.

Λύση

Η καταγραφή των απεικονίσεων δίνεται στον πίνακα 2.5. Την απεικόνιση α→Κ, β→Λ, γ→Μ και δ→Ν, τη συμβολίσαμε ΚΛΜΝ, όπου Κ,Λ,Μ,Ν είναι στοιχεία του συνόλου Y.

Ο πίνακας είναι χωρισμένος σε τρία τμήματα: στο 1ο το πεδίο τιμών περιέχει k=1 στοιχεία, στο 2ο περιέχει k=2 στοιχεία και στο 3ο περιέχει k=3 στοιχεία. Το πλήθος περιπτώσεων σε κάθε τμήμα δίνεται από τους αριθμούς B(4,1)=1, B(4,2)=7 και B(4,3)=6, που δίνονται στην τέταρτη γραμμή του πίνακα 2.4. Στη δεύτερη στήλη συμβολίσαμε την αντίστοιχη διαμέριση του συνόλου X={α,β,γ,δ} σε k σύνολα. Έτσι για παράδειγμα ο συμβολισμός 1221 σημαίνει ότι τα α,δ είναι σε ένα υποσύνολο και τα β, γ σε άλλο, είναι δηλαδή η διαμέριση {{α,δ},{β,γ}}. Όμοια 2131 σημαίνει την διαμέριση

Πίνακας 2.5. Οι δυνατές απεικονίσεις $f:\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}\to\{Α,Β,Γ\}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| k=1 | 1111 | ΑΑΑΑ, ΒΒΒΒ, ΓΓΓΓ | 3 |
| k=2 | 1222 | ΑΒΒΒ, ΑΓΓΓ, ΒΓΓΓ, ΒΑΑΑ, ΓΑΑΑ, ΓΒΒΒ | 6 |
| | 2122 | ΒΑΒΒ, ΓΑΓΓ, ΓΒΓΓ, ΑΒΑΑ, ΑΓΑΑ, ΒΓΒΒ | 6 |
| | 2212 | ΒΒΑΒ, ΓΓΑΓ, ΓΓΒΓ, ΑΑΒΑ, ΑΑΓΑ, ΒΒΓΒ | 6 |
| | 2221 | ΒΒΒΑ, ΓΓΓΑ, ΓΓΓΒ, ΑΑΑΒ, ΑΑΑΓ, ΒΒΒΓ | 6 |
| | 1122 | ΑΑΒΒ, ΑΑΓΓ, ΒΒΓΓ, ΒΒΑΑ, ΓΓΑΑ, ΓΓΒΒ | 6 |
| | 1212 | ΑΒΑΒ, ΑΓΑΓ, ΒΓΒΓ, ΒΑΒΑ, ΓΑΓΑ, ΓΒΓΒ | 6 |
| | 1221 | ΑΒΒΑ, ΑΓΓΑ, ΒΓΓΒ, ΒΑΑΒ, ΓΑΑΓ, ΓΒΒΓ | 6 |
| k=3 | 1123 | ΑΑΒΓ, ΑΑΓΒ, ΒΒΑΓ, ΒΒΓΑ, ΓΓΑΒ, ΓΓΒΑ | 6 |
| | 1213 | ΑΒΑΓ, ΑΓΑΒ, ΒΑΒΓ, ΒΓΒΑ, ΓΑΓΒ, ΓΒΓΑ | 6 |
| | 1231 | ΑΒΓΑ, ΑΓΒΑ, ΒΑΓΒ, ΒΓΑΒ, ΓΑΒΓ, ΓΒΑΓ | 6 |
| | 2113 | ΑΒΒΓ, ΓΒΒΑ, ΑΓΓΒ, ΒΓΓΑ, ΒΑΑΓ, ΓΑΑΒ, | 6 |
| | 2131 | ΑΓΒΓ, ΒΓΑΓ, ΑΒΓΒ, ΓΒΑΒ, ΒΑΓΑ, ΓΑΒΑ | 6 |
| | 2311 | ΑΒΓΓ, ΒΑΓΓ, ΑΓΒΒ, ΓΑΒΒ, ΒΓΑΑ, ΓΒΑΑ | 6 |

$\{\{\beta,\delta\},\{\alpha\},\{\gamma\}\}$ Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις επιλέγουμε από το σύνολο Υ τις k τιμές που θα αποτελούν το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Αυτό γίνεται με $\Delta_4^k = 4(4-1)\cdots(4-k+1)$ τρόπους, δηλαδή με όσους τρόπους διατάσσονται τα 4 στοιχεία του Υ ανά k.

■

*2.3.7. Αριθμοί Catalan.*

Έστω $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n$ ένα γινόμενο. Το πλήθος των τρόπων υπολογισμού του γινομένου με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς δύο όρων κάθε φορά χωρίς αλλαγή της σειράς των αριθμών, συμβολίζεται $C_n$.

Βρίσκουμε εύκολα ότι $C_2=1$, $C_3=2$, $C_4=5$. Π.χ. το $C_4$ είναι 5, αφού το γινόμενο $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ υπολογίζεται με 5 τρόπους, $x_1\cdot\left(x_2\cdot\left(x_3\cdot x_4\right)\right)$ ή $x_1\cdot\left(\left(x_2\cdot x_3\right)\cdot x_4\right)$ ή $\left(x_1\cdot x_2\right)\cdot\left(x_3\cdot x_4\right)$ ή $\left(x_1\cdot\left(x_2\cdot x_3\right)\right)\cdot x_4$ ή $\left(\left(x_1\cdot x_2\right)\cdot x_3\right)\cdot x_4$ .

Οι αριθμοί $C_n$ , n=2, 3, ..., λέγονται αριθμοί Catalan προς τιμή του Eugene Charles Catalan που τους μελέτησε. Έχουν όμως πολλές εφαρμογές γι’ αυτό είναι χρήσιμο να τους μελετήσουμε.

Για τον υπολογισμό των αριθμών $C_n$, παρατηρούμε ότι το γινόμενο $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n$ μπορεί να θεωρηθεί ότι ισούται με το γινόμενο δύο επί μέρους γινομένων, δηλαδή

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_k\right) \cdot \left(x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n\right)$$

όπου το k είναι από 1 έως n-1. Το πρώτο μερικό γινόμενο έχει k όρους και επομένως υπολογίζεται με $C_k$ τρόπους. Το δεύτερο μερικό γινόμενο έχει n-k όρους και άρα υπολογίζεται με $C_{n-k}$ τρόπους. Εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης το γινόμενο των n όρων με τη δοσμένη διαμέριση σε δύο γινόμενα υπολογίζεται με $C_k \cdot C_{n-k}$ τρόπους. Αθροίζοντας, για όλα τα k βρίσκουμε τον αναδρομικό τύπο

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + C_3 \cdot C_{n-3} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1 \text{ , } n \geq 2, \text{ με } C_1 = 1$$

ή με άλλη μορφή

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \cdot C_{n-k} \text{ , , } n \geq 2, \text{ με } C_1 = 1 \qquad (2.36)$$

Για την επίλυση του αναδρομικού αυτού τύπου, χρησιμοποιούμε γεννήτριες. Στην επόμενη παράγραφο (παράδειγμα 2.14) αποδεικνύουμε ότι

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \text{ n=1,2,}\ldots \qquad (2.37)$$

Αντικαθιστώντας το n υπολογίζουμε τις 10 πρώτες τιμές του $C_n$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_n$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1430 | 4862 |

**Ασκήσεις**

**2.3.1.** Με πόσους τρόπους 4 σφαιρίδια μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 όμοια κελιά; Να καταγραφούν οι περιπτώσεις συμβολίζοντας τα σφαιρίδια με α,β,γ,δ.

**2.3.2.** Να αποδειχθούν επαγωγικά οι αναγωγικές σχέσεις (2.27) και (2.28).

**2.3.3.** Ας υποθέσουμε ότι τη δύναμη $2^{3^4}$ μπορούμε να την θεωρούμε είτε ως $\left(2^3\right)^4 = 8^4$, είτε ως $2^{\left(3^4\right)} = 2^{81}$ (δύο διαφορετικές τιμές). Πόσες είναι κατόπιν τούτου οι διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει η δύναμη $5^{3^{2^{3^4}}}$ ;

**2.3.4.** Να βρεθεί το πλήθος των τρόπων που ο αριθμός 144 εκφράζεται ως γινόμενο δύο παραγόντων.

**2.3.5.** Να υπολογιστεί το πλήθος $v_n$ ($n \geq 3$) των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε σε τρίγωνα ένα κυρτό n-γωνο με διαγωνίους που δεν τέμνονται.

**2.3.6.** Σε μία εκλογή 2n εκλέκτορες ψηφίζουν δύο υποψήφιους Α και Β. Μετά την καταμέτρηση των ψήφων βρέθηκε ότι οι υποψήφιοι πήραν από ίσους ψήφους. Δείξτε ότι:

α. Το πλήθος των δυνατών τρόπων καταμέτρησης των ψήφων ώστε σε όλη τη διαδικασία να προηγείται ο Α ισούται με $C_n$.

β. Το πλήθος των δυνατών τρόπων καταμέτρησης των ψήφων ώστε σε όλη τη διαδικασία ο Α να έχει τουλάχιστον τόσους ψήφους όσους και ο Β ισούται με $C_{n+1}$.

## 2.4. Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι γεννήτριες συναρτήσεις παίζουν ένα πολύ σπουδαίο ρόλο στη Συνδυαστική, τη Θεωρία Πιθανοτήτων αλλά και την Άλγεβρα. Στη συνήθη τους μορφή είναι ή μπορούν να εκφραστούν ως δυναμοσειρές, των οποίων οι όροι έχουν συντελεστές τους όρους κάποιας ακολουθίας. Έτσι, η γεννήτρια με την ανάπτυξή της σε δυναμοσειρά παράγει (γεννά) μια ακολουθία. Κατά μία έννοια θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι η γεννήτρια συνάρτηση κωδικοποιεί όλη την πληροφορία που εμπεριέχεται σε μια ακολουθία, σε ένα μαθηματικό αντικείμενο κλειστού τύπου που μπορεί να μελετηθεί ευκολότερα. Είναι, με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός μιας ακολουθίας σε συνάρτηση.

**Ορισμός.** Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ...$ ή συμβολικά $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή και σύντομα $(\alpha_n)$, μία ακολουθία πραγματικών (ή και μιγαδικών) αριθμών. Αν ισχύει $\alpha_n=0$, για $n \geq n_0$, τότε η ακολουθία είναι μια πεπερασμένη συλλογή αριθμών. Η σειρά:

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k \tag{2.38}$$

λέγεται **(συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση** της ακολουθίας $(\alpha_n)$, ενώ η σειρά

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{t^k}{k!} \qquad (2.39)$$

λέγεται **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση** της ακολουθίας $(\alpha_n)$.

Δίνουμε, επίσης, και τον επόμενο ορισμό.

**Συνέλιξη (convolution)** των ακολουθιών $(\alpha_n)$ και $(\beta_n)$, συμβολίζουμε $(\alpha_n)*(\beta_n)$, λέγεται η ακολουθία $(\gamma_n)$, για την οποία ισχύει,

$$\gamma_n = \alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0 \quad \text{ή σύντομα } \gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_{n-i}$$

Για να ορίσουμε πράξεις μεταξύ των γεννητριών, παρατηρούμε ότι η γεννήτρια είναι δυναμοσειρά ή, στην περίπτωση πεπερασμένης ακολουθίας, πολυώνυμο. Έτσι, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυναμοσειρών και των πολυωνύμων, μπορούμε να θεωρούμε δύο γεννήτριες (ίδιου τύπου) ίσες όταν οι συντελεστές ομοιόβαθμων όρων είναι ίσοι, δηλαδή όταν αντιστοιχούν στην ίδια ακολουθία.

Ας θεωρήσουμε τώρα τρεις ακολουθίες $(\alpha_n)$, $(\beta_n)$ και $(\gamma_n)$, και τις αντίστοιχες γεννήτριες $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$, $B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$ και $\Gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k$. Αποδεικνύονται άμεσα οι παρακάτω προτάσεις.

**Θεώρημα 2.7.** Η γεννήτρια Γ(t) είναι το **άθροισμα** A(t)+B(t), των γεννητριών A(t) και B(t), όταν η ακολουθία $(\gamma_n)$ είναι άθροισμα $(\alpha_n)+(\beta_n)$, των αντίστοιχων ακολουθιών δηλαδή

$$\Gamma(t)=A(t)+B(t) \text{ αν και μόνο αν } \gamma_k = \alpha_k + \beta_k,\ k=0, 1, 2,\ldots .$$

**Θεώρημα 2.8.** Η γεννήτρια Γ(t) είναι το **γινόμενο** A(t)·B(t), των γεννητριών A(t) και B(t), όταν η ακολουθία $(\gamma_n)$ είναι συνέλιξη $(\alpha_n)*(\beta_n)$, των αντίστοιχων ακολουθιών δηλαδή

$$\Gamma(t)=A(t)\cdot B(t) \text{ αν και μόνο αν } \gamma_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \beta_{k-i},\ k=0, 1, 2,\ldots .$$

Επειδή η γεννήτρια ορίζεται ως σειρά, θα πρέπει το όρισμά της t να βρίσκεται στο διάστημα σύγκλισης της σειράς. Τα γνωστά θεωρήματα της ανάλυσης που αφορούν το διάστημα σύγκλισης του αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου δυναμοσειρών, αλλά και της παραγώγου και του ολοκληρώματος δυναμοσειράς, ισχύουν ομοίως και στις γεννήτριες.

**Παράδειγμα 2.10.** Μερικά απλά παραδείγματα γεννητριών συναρτήσεων προκύπτουν από τα γνωστά αναπτύγματα Taylor.

**i.** η συνάρτηση $\frac{1}{1-t}$, για $|t|\leq 1$, είναι γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_n=1$, $n\in\mathbb{N}_0$, και εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_n=n!$, $n\in\mathbb{N}_0$, διότι

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}n!\cdot\frac{t^n}{n!}=1+t+t^2+t^3+\ldots,\ |t|\leq 1.$$

**ii.** η συνάρτηση $e^t$, είναι γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_n=\frac{1}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_0$ και εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_n=1$, $n\in\mathbb{N}_0$, διότι

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots,\ t\in\mathbb{R}.$$

**iii.** η συνάρτηση $\ln(1+t)$, για $|t|\leq 1$, είναι γεννήτρια της $\alpha_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, διότι $\ln(1+t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}t^k=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+\ldots,\ |t|\leq 1$.

Εφαρμόζοντας το γινόμενο των γεννητριών έχουμε

**iv.** η συνάρτηση $\frac{e^t}{1-t}$, είναι γεννήτρια της $\alpha_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, $n\in\mathbb{N}_0$, διότι

$$\frac{e^t}{1-t}=\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+t+t^2+t^3+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)t^n=$$

$$=1+2t+(5/2)t^2+(8/3)t^3+\ldots$$

Παραγωγίζοντας όρο προς όρο έχουμε

**v.** η συνάρτηση $\frac{1}{(1-t)^2}$, για $|t|\leq 1$, είναι γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_n=n$, $n\in\mathbb{N}$, διότι $\frac{1}{(1-t)^2}=\left(\frac{1}{1-t}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{\infty}t^k\right)'=1+2t+3t^2+4t^3+\ldots,\ |t|\leq 1$.

Ακόμη, από το διωνυμικό θεώρημα (1.32) έχουμε ότι:

**vi.** η συνάρτηση $(1+t)^r$, για δοθέν r, είναι γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_k=\binom{r}{k}$, k=0, 1, 3, …, των γενικευμένων διωνυμικών συντελεστών.

Αν r=n φυσικός, τότε

**vii.** η συνάρτηση $(1+t)^n$, για δοθέν n, είναι γεννήτρια της πεπερασμένης ακολουθίας των συνδυασμών $\alpha_n=\binom{n}{k}$, k=0, 1, 3, …,n και εκθετική γεννήτρια των διατάξεων $\alpha_n=\Delta_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$, k=0, 1, 3, …,n

Αν r=-n, n φυσικός, τότε από τη σχέση (1.35) έχουμε ότι:

**viii.** η συνάρτηση $(1-t)^{-n}$, για δοθέν n, είναι γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_k=\mathcal{E}_n^k=\binom{n+k-1}{k}$, k=0, 1,…, n, ….

Τέλος, από τη σχέση (2.26), το παραγοντικό πολυώνυμο $t^{(n)}$ είναι γεννήτρια των αριθμών Stirling 1^ου^ είδους.

### *2.4.1. Γραμμικές αναδρομικές σχέσεις.*

Συχνά στην αντιμετώπιση προβλημάτων της συνδυαστικής διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη ποσότητα $\alpha_n$, που εξαρτάται συνήθως από το φυσικό αριθμό n, ικανοποιεί μία γραμμική αναδρομική σχέση k τάξης. Με τον όρο αυτό εννοούμε μία σχέση της μορφής:

$$\alpha_n=c_1\alpha_{n\text{-}1}+\ c_2\alpha_{n\text{-}2}+\ c_3\alpha_{n\text{-}3}+\ldots+\ c_k\alpha_{n\text{-}k},\quad n\geq k, \qquad (2.40)$$

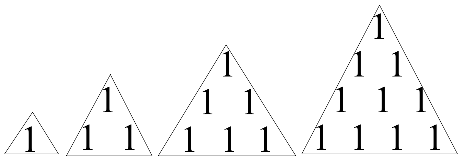
όπου οι συντελεστές $c_i$ είναι σταθερές ή γνωστές συναρτήσεις του n και οι αρχικές τιμές $\alpha_0$, $\alpha_1$, ..., $\alpha_{k-1}$ γνωστές.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για την επίλυση τέτοιων σχέσεων. Εμείς θα ασχοληθούμε εδώ με την επίλυση γραμμικών αναδρομικών σχέσεων με τη βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων.

Η διαδικασία είναι η εξής. Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση A(t) της ακολουθίας $\alpha_n$. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (2.40) με $t^n$ και αθροίζουμε για όλες τις επιτρεπτές τιμές n≥k. Στην παράσταση που σχηματίζεται εκφράζουμε τις σειρές που εμφανίζονται με τη βοήθεια της A(t), ή, αν είναι γνωστές, με το γνωστό άθροισμά τους. Με τον τρόπο αυτό, λύνοντας ως προς A(t), υπολογίζουμε τη γεννήτρια ως συνάρτηση του t. Τέλος, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση που βρήκαμε σε σειρά Taylor και ταυτοποιούμε τους συντελεστές με τις ζητούμενες ποσότητες.

Θα δώσουμε κάποια παραδείγματα εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας για τον υπολογισμό χρήσιμων συνδυαστικών ποσοτήτων.

**Παράδειγμα 2.11.** (**Τρίγωνοι αριθμοί**) Ο Νικόμαχος ορίζει τους τρίγωνους αριθμούς, ως εκείνους οι οποίοι διαλυόμενοι στις μονάδες τους και τοποθετούμενοι στο επίπεδο, σχηματίζουν ισόπλευρο τριγωνικό σχηματισμό. Οι τέσσερις πρώτοι τρίγωνοι αριθμοί είναι οι 1, 3, 6 και 10, που πράγματι σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα (βλέπε και §2.1.1). (Ο τέταρτος τρίγωνος αριθμός με τη μορφή αυτή ονομάζονταν **τετρακτύς** και ήταν το σύμβολο στο οποίο ορκίζονταν οι Πυθαγόρειοι).




Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι τρίγωνοι αριθμοί $\alpha_n$, ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$\alpha_n = n + \alpha_{n-1}\,,\, n = 2,3,...\ \alpha_1 = 1 \tag{2.41}$$

Εφαρμόζοντας τηλεσκοπική άθροιση, βρίσκουμε:

$$\alpha_n = n + \alpha_{n-1} = n + (n-1) + \alpha_{n-2} = ... = n + (n-1) + ... + \alpha_1\,,$$

απ' όπου προκύπτει αμέσως ότι $\alpha_n = n(n+1)/2$. Θα βρούμε το $\alpha_n$ και με τη βοήθεια γεννητριών.

Έστω $A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^n$ η γεννήτρια της ακολουθίας ($\alpha_n$). Πολλαπλασιάζοντας την (2.41) με $t^n$ και προσθέτοντας για n=2,3, … βρίσκουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n t^n = \sum_{n=2}^{\infty} n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_{n-1} t^n\ . \tag{2.42}$$

Από τις σειρές που σχηματίστηκαν η πρώτη είναι η γεννήτρια A(t) χωρίς τον πρώτο όρο της, η τρίτη είναι η A(t) πολλαπλασιασμένη επί t και η δεύτερη γράφεται $t\left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}\right) = -t + t\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)' = -t + t\left(\frac{1}{1-t}\right)'$. Αντικαθιστώντας στην (2.42) βρίσκουμε:

$$A(t)-t=-t+t\cdot\frac{1}{(1-t)^2}+t\cdot A(t),$$

από την οποία προκύπτει αμέσως ότι

$$A(t)=\frac{t}{(1-t)^3}.$$

Για να βρούμε το ανάπτυγμα Taylor της τελευταίας συνάρτησης, χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα $(1-t)^{-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}t^k$ (Παράδειγμα 2.10(viii)), ή το ανάπτυγμα της $\frac{1}{1-t}$ το οποίο το παραγωγίζουμε δύο φορές. Τελικά βρίσκουμε

$$A(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+1}{2}t^k$$

που δίνει και πάλι $\alpha_n=n(n+1)/2$, n∈ℕ. ■

**Παράδειγμα 2.12. (Αριθμοί Fibonacci).** Στην παράγραφο 2.1.2 ορίστηκαν οι αριθμοί Fibonacci που ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n\geq 2,\ \ F_0=1,\ \ F_1=1$$

Θα υπολογίσουμε αναλυτικά τους αριθμούς αυτούς με τη βοήθεια γεννητριών.

Έστω $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n t^n$ η συνήθης γεννήτρια των αριθμών $F_n$. Πολλαπλασιάζοντας την αναδρομική σχέση με $t^n$ και αθροίζοντας για όλα τα $n\geq 2$, έχουμε

$$\sum_{n=2}^{\infty}F_n t^n=t\cdot\sum_{n=1}^{\infty}F_{n-1}t^{n-1}+t^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}t^{n-2}$$

Είναι πολύ εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η πρώτη σειρά που εμφανίστηκε είναι η γεννήτρια F(t) χωρίς τους δύο πρώτους όρους, η δεύτερη σειρά (με αλλαγή δείκτη n-1=m) είναι η γεννήτρια F(t) χωρίς τον πρώτο όρο της και η τρίτη σειρά (με αλλαγή δείκτη n-2=m) είναι η γεννήτρια F(t). Έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$F(t)-1-t=t\cdot\big(F(t)-1\big)+t^2F(t),$$

που αν λυθεί ως προς F(t) δίνει $F(t)=\dfrac{1}{1-t-t^2}$.

Χρησιμοποιήσαμε τις ρίζες $\kappa=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ του παρονομαστή, μπορούμε να βρούμε εύκολα το ανάπτυγμα Taylor της F(t) ως εξής:

$$F(t)=\frac{1}{(1-\kappa t)(1-\lambda t)}=\frac{1}{\kappa-\lambda}\left(\frac{\kappa}{1-\kappa t}-\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\kappa\sum_{j=0}^{\infty}(\kappa t)^j-\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda t)^j\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\kappa^{j+1}-\lambda^{j+1}}{\sqrt{5}}\cdot t^j$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ομοιόβαθμων όρων έχουμε τελικά

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},\quad n=0,1,2,...$$

■

**Παράδειγμα 2.13. (Αριθμοί Bell).** Στην παράγραφο 2.3.6 δείξαμε ότι οι αριθμοί Bell ικανοποιούν την αναδρομική σχέση $B_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}$, με $B_0=1$. Αν και δεν υπάρχει κλειστός τύπος να εκφραστούν οι αριθμοί Bell ως συναρτήσεις του n, εντούτοις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των γεννητριών, θα υπολογίσουμε την εκθετική γεννήτρια των αριθμών αυτών, απ' όπου θα εκφράσουμε τους αριθμούς αυτούς με τη βοήθεια παραγώγων.

Αν θέσουμε $B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\dfrac{t^n}{n!}$ την εκθετική γεννήτρια των $B_n$ και παραγωγίσουμε όρο προς όρο, βρίσκουμε ότι $B'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$. Έτσι, αν πολλαπλασιάσουμε την αναδρομική σχέση με $\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ και αθροίζουμε ως προς n, παίρνουμε διαδοχικά

$$B'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}\right)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{B_{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{B_{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{B_{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}=e^t\cdot B(t),$$

όπου στις δύο τελευταίες σειρές κάναμε αλλαγή δείκτη (k-1=λ στην πρώτη και n−k=m στη δεύτερη). Άρα η B(t) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών $\frac{dB(t)}{dt}=e^tB(t)$, με B(0)=1, που έχει μερική λύση την $B(t)=e^{e^t-1}$, δηλαδή $\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}=e^{e^t-1}$. Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor το β΄ μέλος της τελευταίας σχέσης, βρίσκουμε ότι οι αριθμοί Bell είναι οι παράγωγοι της συνάρτησης $e^{e^t-1}$, δηλαδή:

$$B_n=\left.\frac{d^{(n)}}{dt^n}\left(e^{e^t-1}\right)\right|_{t=0},\quad \text{n=0, 1, 2, ...}$$ ■

**Παράδειγμα 2.14. (Αριθμοί Catalan).** Στην παράγραφο 2.3.6 δείξαμε ότι οι αριθμοί Catalan ικανοποιούν την αναδρομική σχέση $C_n=\sum_{k=1}^{n-1}C_k\cdot C_{n-k}$. Θα βρούμε την αναλυτική μορφή των αριθμών αυτών, με τη βοήθεια των γεννητριών.

Θέτουμε $C(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n t^n$, όπου έχουμε υποθέσει $C_0$=0, ενώ ισχύει επίσης $C_1$=1 από τον ορισμό. Πολλαπλασιάζοντας με $t^n$ την αναδρομική σχέση και προσθέτοντας για n≥2, έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty}C_n t^n=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}C_kC_{n-k}t^n=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}C_kt^kC_{n-k}t^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}C_kt^k\sum_{n=k+1}^{\infty}C_{n-k}t^{n-k}=\left(C(t)\right)^2,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρειάστηκε να κάνουμε αλλαγή δείκτη στη σειρά (n−k=m). Επειδή η πρώτη σειρά είναι η γεννήτρια χωρίς τον πρώτο όρο της, βρίσκουμε ότι η C(t) ικανοποιεί τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$C(t) = t + C(t)^2$ , με C(0)=0.

Από τις δύο λύσεις $C(t) = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4t}\right)$ της εξίσωσης αυτής, μόνο η μία, αυτή με το αρνητικό πρόσημο, ικανοποιεί την αρχική συνθήκη C(0)=0. Άρα $C(t) = \frac{1}{2}\left(1-(1-4t)^{1/2}\right)$.

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα, έχουμε:

$$C(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-4t)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\binom{1/2}{k}(-1)^{k-1}4^k t^k$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές βρίσκουμε $C_n = \frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-1)^{n-1}4^n$ . Αναπτύσσοντας το γενικευμένο διωνυμικό συντελεστή έχουμε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2}\frac{(1/2)\cdot(1/2-1)\cdot(1/2-2)\cdots(1/2-(n-1))}{n!}(-1)^{n-1}4^n \\ &= \frac{(-1/2)\cdot(-3/2)\cdots(-(2n-3)/2)}{n!}(-1)^{n-1}4^{n-1} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^{n-1}n!}4^{n-1} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!2^{n-1}n!}4^{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} \end{aligned}$$

και τελικά

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \text{ n=1,2,\ldots} \tag{2.43}$$

■

*2.4.2. Διαμερίσεις και γεννήτριες συναρτήσεις*

Ας θεωρήσουμε τον φυσικό αριθμό n και ας συμβολίσουμε με f(n;i) το πλήθος των τρόπων που το n γράφεται με χρήση μόνο του αριθμού i, δηλ. με τη μορφή n=i+i+…+i . Είναι φανερό ότι f(n;i)=1, αν ο n είναι πολλαπλάσιο του i και 0 αλλιώς. Δηλαδή

$$f(n;i) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ n = \lambda i,\ \lambda = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Η συνήθης γεννήτρια F(x;i) των αριθμών f(n;i), είναι προφανώς η συνάρτηση $F(x;i) = 1 + x^i + x^{2i} + ... + x^{\lambda i} + ...$ που γράφεται $F(x;i) = \dfrac{1}{1-x^i}$.

Έστω τώρα ότι f(n;i,j) το πλήθος των τρόπων που το n γράφεται με χρήση μόνο των αριθμών i και j, δηλαδή με τη μορφή n=λi+μj, λ,μ ακέραιοι. Για να βρούμε το f(n;i,j) σκεφτόμαστε ως εξής: Χωρίζουμε τον n σε δύο μέρη, δηλαδή n=k+(n-k) και θεωρούμε ότι το πρώτο μέρος σχηματίζεται μόνο με χρήση του i, ενώ το δεύτερο μόνο με χρήση του j. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς το k σχηματίζεται με f(k;i) τρόπους με χρήση μόνο του i ενώ το n-k σχηματίζεται με f(n-k;j) τρόπους με χρήση μόνο του j. Επειδή, προφανώς, ισχύει η θεμελιώδης αρχή απαρίθμησης, αφού οι τρόποι που σχηματίζεται το k είναι ανεξάρτητοι από αυτούς που σχηματίζεται το n-k, έπεται ότι το k+(n-k) σχηματίζεται με f(k;i)·f(n-k;j) τρόπους. Αθροίζοντας για όλα τα k, από 0 έως n, βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{f}(n;i,j) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{f}(k;i)\,\mathrm{f}(n-k;j),$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία f(n;i,j) είναι συνέλιξη των ακολουθιών f(n;i) και· f(n;j). Άρα, η γεννήτρια F(x;i,j) που αντιστοιχεί στην ακολουθία f(n;i,j), θα ισούται με το γινόμενο των γεννητριών των f(n;i) και· f(n;j), δηλαδή

$$F(x;i,j) = \frac{1}{(1-x^i)(1-x^j)}.$$

Συνεχίζοντας ανάλογα, καταλήγουμε εύκολα ότι αν $f(n;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ συμβολίζει το πλήθος των διαμερίσεων του n, με χρήση μόνο των ακεραίων $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ , τότε η συνήθης γεννήτρια $F(x;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ θα είναι

$$F(x;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k) = \frac{1}{(1-x^{\alpha_1})(1-x^{\alpha_2})\cdot ... \cdot (1-x^{\alpha_k})}. \tag{2.44}$$

που γράφεται ισοδύναμα

$$F(x;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k) = \left(1+x^{\alpha_1}+x^{2\alpha_1}+...\right)\cdot ... \cdot\left(1+x^{\alpha_k}+x^{2\alpha_k}+...\right).$$

Παρατηρείστε ότι ο συντελεστής του $x^r$ στο ανάπτυγμα της παραπάνω γεννήτριας είναι το πλήθος των διαμερίσεων του r με χρήση μόνο των αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$, δηλαδή το πλήθος των τρόπων που το r γράφεται ως

$$r=\lambda_1\alpha_1+ \lambda_2\alpha_2+...+\lambda_k\alpha_k, \text{ με } \lambda_i\geq 0, \tag{2.45}$$

ή ισοδύναμα δίνει το πλήθος λύσεων της, ως προς $\lambda_i$ διοφαντικής εξίσωσης (2.45). Αποδείξαμε δηλαδή την πρόταση 2.3 της παραγράφου 2.2.3. Το πολυώνυμο που δίδεται στην πρόταση 2.3, δεν είναι η γεννήτρια $F(x; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$, ταυτίζεται όμως με αυτήν για όρους μικρότερους του $x^r$.

Όμοια, αν f(n) συμβολίζει το πλήθος των διαμερίσεων του n, με οποιουσδήποτε προσθετέους (προφανώς μικρότερους του n), τότε η συνήθης γεννήτρια F(x) θα είναι

$$F(x) = \frac{1}{(1-x^1)(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^n)}. \tag{2.46}$$

που γράφεται ισοδύναμα

$$F(x) = \left(1+x+x^2+\ldots\right)\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)\left(1+x^3+x^6+\ldots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^n+x^{2n}+\ldots\right).$$

Επειδή το f(n) θα είναι ο συντελεστής του $x^n$ μετά την εκτέλεση των πράξεων στην τελευταία σχέση, οι όροι στα πολυώνυμα με δύναμη μεγαλύτερη του n δεν προσφέρουν τίποτε στον υπολογισμό του f(n). Έτσι, αποδείχθηκε η πρόταση 2.2 της παραγράφου 2.2.3.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε και την πρόταση 2.1 της παραγράφου 2.2.3, παίρνοντας τη γεννήτρια των αριθμών g(n) που συμβολίζουν το πλήθος των διαμερίσεων του n, με διακεκριμένους προσθετέους και που βρίσκεται ίση με

$$G(x) = (1+x^1)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n).$$

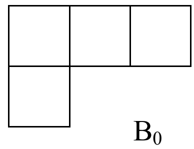
### *2.4.3. Πολυώνυμα Rook*

Ας θεωρήσουμε μία συνήθη 8×8 σκακιέρα, που αρχικά είναι άδεια. Ένας πύργος τοποθετείται τυχαία σε κάποιο από τα τετράγωνα της σκακιέρας με 64 τρόπους. Δύο πύργοι έχουν 64·63/2=2016 δυνατότητες να τοποθετηθούν τυχαία σε δύο από τα τετράγωνα της σκακιέρας, όσες οι συνδυασμοί των 64 ανά 2, αν δεν υπάρχει περιορισμός. Αν όμως θέλουμε κανένας πύργος να μην «παίρνει» τον άλλο, στην περίπτωση που είναι αντίπαλοι, τότε έχουμε 64·49/2=1568 δυνατότητες. Γενικότερα, αν έχουμε k≤8 πύργους, έχουμε $\binom{8}{k}\left(8\cdot 7\cdot\ldots\cdot(8-k+1)\right)=\binom{8}{k}^2\cdot k!$ δυνατότητες να τους τοποθετήσουμε τρόπους σε θέσεις που κανείς να μην παίρνει οποιονδήποτε άλλον. Πράγματι, εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης, διαλέγουμε πρώτα με τις k από τις γραμμές στις οποίες θα τοποθετηθούν οι k πύργοι, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους. Στη συνέχεια τοποθετούμε στην $1^η$ γραμμή από αυτές ένα πύργο με 8 τρόπους, στη $2^η$ ένα πύργο με 7 δυνατότητες κλπ.

Ακόμη πιο γενικά αν η σκακιέρα έχει διαστάσεις n×m με n≤m, τότε η τοποθέτηση k, (1≤k≤n), πύργων που κανείς να μην παίρνει άλλον είναι

$$\binom{n}{k}\Delta_m^k = \binom{n}{k}\binom{m}{k}\cdot k! \tag{2.47}$$

Το παραπάνω πρόβλημα γενικεύεται και για οποιαδήποτε σκακιέρα η οποία δεν είναι κατανάγκην ορθογώνια. Για παράδειγμα, υπάρχουν 4 τρόποι να τοποθετηθεί 1 πύργος στη διπλανή σκακιέρα $B_0$, 2 τρόποι να τοποθετηθούν 2 πύργοι, ενώ δεν μπορούν να τοποθετηθούν περισσότεροι πύργοι.

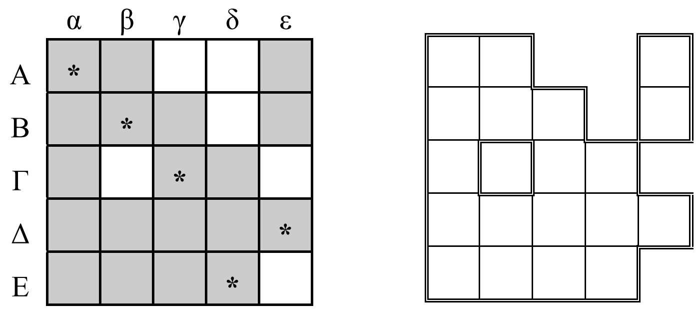


$B_0$

Το πρόβλημα αυτό έχει γενικότερο ενδιαφέρον διότι είναι ισοδύναμο με το πλήθος των μεταθέσεων αντικειμένων όταν υπάρχουν περιορισμοί στις θέσεις που μπορούν να καταλάβουν τα αντικείμενα. Δύο σχετικά προβλήματα που μπορούν να αντιμετωπισθούν με αυτό τον τρόπο, δίνονται στα επόμενα παραδείγματα.

**Παράδειγμα 2.15. Ανάθεση εργασιών.** Μία επιχείρηση διαθέτει 5 υπαλλήλους, τους Α, Β, Γ, Δ και Ε, στους οποίους πρόκειται να αναθέσει πέντε εργασίες, τις α, β, γ, δ, και ε, από μία στον καθένα. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να γίνει η ανάθεση των εργασιών, όταν είναι γνωστό ότι ο Α δεν μπορεί (ή δεν θέλει) τις εργασίες γ και δ, ο Β δεν μπορεί την δ, ο Γ δεν μπορεί τις β και ε και ο Ε δεν μπορεί την ε.

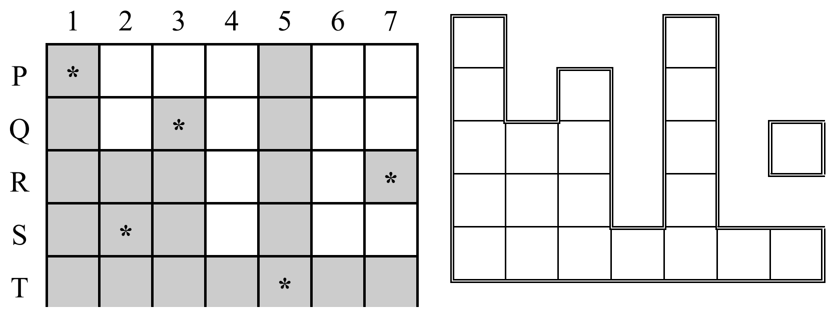
Σχηματίζουμε μία σκακιέρα 5×5 στην οποία οι γραμμές να συμβολίζουν τους υπαλλήλους και οι στήλες να συμβολίζουν τις εργασίες (σχήμα 2.4α). Σκιαγραφούμε τα τετράγωνα της σκακιέρας που επιτρέπεται να επιλεγούν, ενώ αφήνουμε λευκά, αυτά που είναι «απαγορευμένα». Μία εφικτή λύση του προβλήματος είναι η τοποθέτηση 5 πύργων (αστερίσκων) στα σκιαγραφημένα κελιά. Μία τέτοια λύση φαίνεται στο σχήμα. Το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο με την τοποθέτηση 5 πύργων, που κανείς να μην παίρνει κανένα, στη σκακιέρα του σχήματος 2.4β (Η διπλή γραμμή δείχνει τα εξωτερικό μέρος της σκακιέρας).




(α) (β)

Σχήμα 2.4

**Παράδειγμα 2.16. Αποθήκευση προγραμμάτων.** Πέντε προγράμματα, τα P, Q, R, S και T, πρόκειται να αποθηκευθούν σε επτά διαθέσιμες μνήμες, τις 1, 2, ..., 7, ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Υπάρχουν όμως περιορισμοί διότι δεν χωρούν όλα τα προγράμματα σε όλες τις μνήμες. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι αποθήκευσης υπάρχουν, αν το P χωρά μόνο στις 1 και 5, το Q χωρά μόνο στις 1, 3 και 5, το R δεν χωρά στις 4 και 6 και το S δεν χωρά στις 4, 6 και 7;




(α) (β)

Σχήμα 2.5

Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, σχηματίζουμε μία σκακιέρα 5×7, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5α. Η λύση του προβλήματος ισοδυναμεί με την απαρίθμηση των τρόπων τοποθέτησης πύργων που να μην παίρνονται μεταξύ τους στα επιτρεπτά κελιά της σκακιέρας στο Σχήμα 2.5α, ή στη σκακιέρα στο Σχήμα 2.5β. Μία εφικτή λύση φαίνεται με τους αστερίσκους.

Για την αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων και επειδή ο πύργος του σκακιού λέγεται rook, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός.** Έστω $r_k(B)$ συμβολίζει το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε k πύργους στη σκακιέρα B που έχει n τετράγωνα, με τρόπο ώστε κανένας πύργος να μην «παίρνει» οποιονδήποτε άλλο. Η γεννήτρια συνάρτηση

$$R(x,B) = \sum_{k=0}^{n} r_k(B)\, x^k \tag{2.48}$$

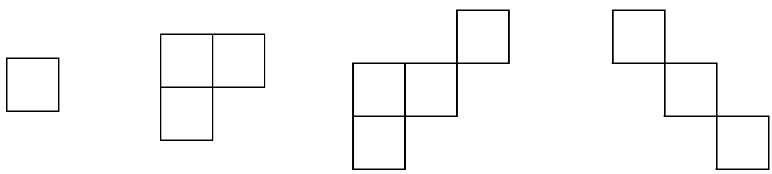
της ακολουθίας ( $r_k(B)$ ), που είναι πολυώνυμο το πολύ n βαθμού, λέγεται πολυώνυμο Rook της σκακιέρας B. (Θέτουμε κατά συνθήκην $r_0(B)=1$ για κάθε σκακιέρα B)

Λόγω της (2.47) το πολυώνυμο Rook για μια ορθογώνια σκακιέρα με διαστάσεις n×m, (n≤m), που θα τη συμβολίζουμε $B_{n\times m}$ , είναι

$$R(x,B_{n\times m}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta_m^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{k}\cdot k!$$

Για μη ορθογώνιες σκακιέρες δεν υπάρχει γενικός τύπος εύρεσης του αντίστοιχου πολυωνύμου. Για παράδειγμα το πολυώνυμο Rook της σκακιέρας $B_0$, που δόθηκε προηγούμενα, είναι $R(x,B_0) = 1 + 4x + 2x^2$ .

Όμοια, για τις σκακιέρες



$B_1$ $B_2$ $B_3$ $B_4$

βρίσκουμε εύκολα ότι $R(x,B_1) = 1 + x$ , $R(x,B_2) = 1 + 3x + x^2$ ,

$R(x,B_3) = 1 + 4x + 4x^2 + x^3$ και $R(x,B_4) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ .

Θα δώσουμε στη συνέχεια δύο θεωρήματα που απλοποιούν με αναγωγικό τρόπο το πολυώνυμο Rook μιας σκακιέρας.

**Θεώρημα 2.9.** Έστω B μία σκακιέρα στην οποία έχουμε επιλέξει ένα τετράγωνο. Συμβολίζουμε με $B_r$ τη σκακιέρα που προκύπτει αν διαγράψουμε τη στήλη και τη γραμμή που περιέχουν το επιλεγμένο τετράγωνο και με $B_s$ τη σκακιέρα που προκύπτει αν διαγράψουμε το επιλεγμένο τετράγωνο. Τότε ισχύει:

$$R(x,B) = x \cdot R(x,B_r) + R(x,B_s) \tag{2.49}$$

Απόδειξη

Η τοποθέτηση k πύργων στη σκακιέρα B γίνεται με $r_k(B)$ τρόπους. Αυτοί διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Σε εκείνους τους τρόπους που υπάρχει πύργος στο επιλεγμένο τετράγωνο και σε εκείνους που δεν υπάρχει. Στην πρώτη περίπτωση δεν υπάρχει άλλος πύργος στη στήλη και τη γραμμή που περιέχουν το ενλόγω τετράγωνο και άρα οι υπόλοιποι πύργοι είναι τοποθετημένοι στη σκακιέρα $B_r$. Αυτό γίνεται με $r_{k-1}(B_r)$ τρόπους. Στη δεύτερη περίπτωση όλοι οι πύργοι είναι τοποθετημένοι στα υπόλοιπα εκτός του επιλεγμένου τετράγωνα, δηλαδή στη σκακιέρα $B_s$, με $r_k(B_s)$ τρόπους. Άρα

$$r_k(B) = r_{k-1}(B_r) + r_k(B_s).$$

Η ζητούμενη σχέση προκύπτει τώρα ως εξής:

$$R(x,B) = \sum_{k=0}^{n} r_k(B)\,x^k = \sum_{k=0}^{n}\left(r_{k-1}(B_r) + r_k(B_s)\right)x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} r_{k-1}(B_r)\,x^k + \sum_{k=0}^{n} r_k(B_s)\,x^k = x \cdot R(x,B_r) + R(x,B_s)$$

■

Ως εφαρμογή του θεωρήματος, παρατηρούμε ότι αν η σκακιέρα B είναι η $B_0$ που δώσαμε προηγούμενα και αν επιλέξουμε το άνω δεξιά τετράγωνο, τότε θα είναι $B_r=B_1$ και $B_s=B_2$ και η σχέση (2.49) δίνει

$$R(x,B_0) = x \cdot R(x,B_1) + R(x,B_2)$$

και αντικαθιστώντας τα Rook πολυώνυμο της $B_1$ και $B_2$ έχουμε

$$R(x,B_0) = x \cdot (1+x) + \left(1+3x+x^2\right) = 1+4x+2x^2$$

δηλαδή ξαναβρήκαμε το Rook πολυώνυμο της $B_0$.

Παρατηρούμε, ότι η σκακιέρα $B_3$ μπορεί να χωριστεί στις σκακιέρες $B_2$ και $B_1$ με μια οριζόντια και μια κατακόρυφη διαχωριστική γραμμή. Λέμε για το λόγο αυτό ότι η $B_3$ αποτελείται από δύο διακεκριμένες σκακιέρες. Όμοια μπορούμε να δούμε ότι η σκακιέρα $B_5$ αποτελείται από τρεις διακεκριμένες που όλες είναι ίσες με την $B_1$. Οι άλλες σκακιέρες που έχουμε σχεδιάσει δεν χωρίζονται σε διακεκριμένες υπο-σκακιέρες. Ισχύει:

**Θεώρημα 2.10.** Αν η σκακιέρα B αποτελείται από δύο διακεκριμένες υπο-σκακιέρες $B_1$ και $B_2$ τότε θα ισχύει

$$R(x,B) = R(x,B_1)\cdot R(x,B_2) \tag{2.50}$$

Απόδειξη

Επειδή οι υπο-σκακιέρες $B_1$ και $B_2$ είναι διακεκριμένες, η τοποθέτηση κάποιων πύργων στη μία από αυτές δεν επηρεάζει καθόλου την τοποθέτηση των πύργων στην άλλη. Επειδή από τους k πύργους, ορισμένοι έστω i (i=0, 1, …,k) θα τοποθετηθούν στην $B_1$ και οι υπόλοιποι k-i θα τοποθετηθούν στην $B_2$. Εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη αρχή απαρίθμησης και αθροίζοντας για όλα τα i βρίσκουμε

$$r_k(B) = \sum_{i=0}^{k} r_i(B_1)\cdot r_{k-i}(B_2)$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $r_k(B)$ είναι συνέλιξη των ακολουθιών $r_k(B_1)$ και $r_k(B_2)$. Το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από το θεώρημα 2.8.

■

Ως εφαρμογή του θεωρήματος, επαληθεύουμε ότι το πολυώνυμο Rook της σκακιέρας $B_3$ ισούται με το γινόμενο των πολυωνύμων Rook των $B_1$ και $B_2$. Πράγματι

$$\begin{aligned} R(x,B_3) &= R(x,B_1)\cdot R(x,B_2) = \\ &= (1+x)(1+3x+x^2) = 1+4x+4x^2+x^3 \end{aligned}$$

Επίσης το πολυώνυμο Rook της σκακιέρας $B_4$ ισούται με την τρίτη δύναμη του πολυωνύμου Rook της $B_1$, δηλαδή

$$R(x,B_4) = \left(R(x,B_1)\right)^3 = (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 .$$

Τα πολυώνυμα Rook μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των μεταθέσεων (αναδιατάξεων) n αντικειμένων όταν υπάρχουν απαγορευμένες θέσεις. Πράγματι ας θεωρήσουμε πάλι το παράδειγμα 2.15. Η εφικτή λύση που είναι σημειωμένη στο σχήμα 2.4α, μπορεί να γραφεί ως 1,2,3,5,4 όπου ο αριθμός δείχνει τη σειρά και η θέση δείχνει τη στήλη. Έτσι το πλήθος λύσεων στο παράδειγμα 2.15 μπορεί να θεωρηθεί ως πλήθος των μεταθέσεων των 1,2,3,4,5 στις οποίες απαγορεύεται το 1 να είναι 3ο ή 4ο, το 2 να είναι 4ο, το 3 να είναι 2ο ή 5ο και το 5 να είναι 5ο.

Η παραπάνω παρατήρηση που συνδυάζει τις μεταθέσεις με περιορισμούς με τις τοποθετήσεις πύργων που δεν παίρνονται σε σκακιέρες, η σχέση (2.47) και η αρχή συμπερίληψης - εξαίρεσης αποδεικνύουν το επόμενο.

**Θεώρημα 2.11.** Το πλήθος διατάξεων m αντικειμένων ανά n, (n≤m), με περιορισμούς δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} r_n(B) = \Delta_m^n - \Delta_{m-1}^{n-1} r_1(B') + \Delta_{m-2}^{n-2} r_2(B') - \ldots + \\ +(-1)^t \Delta_{m-t}^{n-t} r_t(B') + \ldots + (-1)^n \Delta_{m-n}^{0} r_n(B') \end{aligned} \tag{2.51}$$

όπου B η n×m σκακιέρα από την οποία έχουμε αφαιρέσει τις απαγορευμένες θέσεις και B΄ η σκακιέρα των απαγορευμένων θέσεων.

Απόδειξη

Θεωρούμε μία ορθογώνια n×m σκακιέρα B, στην οποία σημειώνουμε τις απαγορευμένες θέσεις που καθορίζονται από τους περιορισμούς των διατάξεων. Από τη σχέση (2.47) υπολογίζουμε το πλήθος των τοποθετήσεων στην ορθογώνια σκακιέρα n πύργων με τρόπο που να μην παίρνονται. Αν από αυτές αφαιρέσουμε όσες έχουν έστω και ένα πύργο σε απαγορευμένη θέση, θα προκύψει το ζητούμενο. Προς τούτο θα εφαρμόσουμε την ΑΣΕ και θα χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές του Rook πολυωνύμου R(x, B΄) της σκακιέρας B΄ που υποτίθεται ότι είναι γνωστό.

Θέτουμε $\alpha_i$ την ιδιότητα η τοποθέτηση των n πύργων στη σκακιέρα B, να έχει τον i πύργο, (i=1,2,…,n), σε απαγορευμένη θέση. Τότε για τον υπολογισμό του $N(\alpha_1)$ αρκεί να θεωρήσουμε την (n-1)×(m-1) σκακιέρα, που προκύπτει από τη διαγραφή της γραμμής και στήλης που περιέχουν την απαγορευμένη θέση, και να τοποθετήσουμε σ’ αυτήν τους υπόλοιπους n-1 πύργους. Υπάρχουν $\Delta_{m-1}^{n-1}$ τρόποι να συμβεί αυτό. Επειδή οι απαγορευμένες θέσεις αποτελούν τη σκακιέρα B΄ υπάρχουν $r_1$(B΄) τοποθετήσεις ενός πύργου σε απαγορευμένη θέση. Άρα το άθροισμα $\sum N(\alpha_i)$ ισούται με $\Delta_{m-1}^{n-1} \cdot r_1$(B΄). Σκεπτόμενοι με το ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι αν τοποθετήσουμε δύο πύργους σε απαγορευμένη θέση, τότε οι υπόλοιποι n-2 μπορούν να τοποθετηθούν στην (n-2)×(m-2) σκακιέρα, που προκύπτει από τη διαγραφή των γραμμών και στηλών που περιέχουν τις απαγορευμένες θέσεις. Υπάρχουν $\Delta_{m-2}^{n-2}$ τρόποι να συμβεί αυτό. Αλλά δύο πύργοι σε απαγορευμένες θέσεις τοποθετούνται με $r_2(B')$ τρόπους. Άρα το άθροισμα $\sum N(\alpha_i\alpha_j)$ ισούται με $\Delta_{m-2}^{n-2}\cdot r_2(B')$. Τελικά το ζητούμενο αποδεικνύεται με την παρατήρηση ότι το $r_n(B)$ είναι το πλήθος των περιπτώσεων που δεν ισχύει καμία από τις n ιδιότητες, δηλαδή:

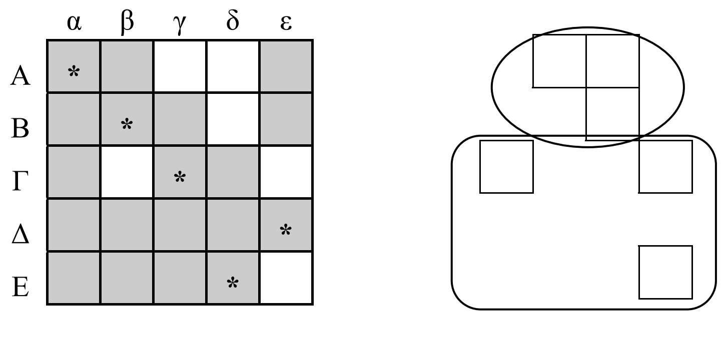
$$r_n(B) = \mathrm{N}(\alpha_1'\alpha_2'...\alpha_n') = N - \sum N(\alpha_i) + \sum N(\alpha_i\alpha_j) - ...$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k(B')\Delta_{m-k}^{n-k}\ . \qquad \blacksquare$$

Ας επανέλθουμε τώρα στο παράδειγμα 2.15. Η σκακιέρα των απαγορευμένων θέσεων B αποτελείται από δύο διακεκριμένες σκακιέρες ίσες με την $B_2$ της σελίδας 130, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6β. Πράγματι, η υποσκακιέρα της B που σημειώθηκε στο σχήμα, όπως και αυτή που αποτελείται από τα τρία μεμονωμένα τετράγωνα είναι διακεκριμένες, διότι οι οριζόντιες και κατακόρυφες σειρές που περιέχουν τετράγωνα της μιας δεν περιέχουν τετράγωνα της άλλης. Το θεώρημα 2.10 δίνει τώρα

$$R(x,B) = \left(R(x,B_2)\right)^2 = \left(1+3x+x^2\right)^2 = 1+6x+11x^2+6x^3+x^4$$

το πολυώνυμο Rook της σκακιέρας των απαγορευμένων θέσεων. Και το θεώρημα 2.11, δίνει για m=n=5 το ζητούμενο πλήθος

$$r_5(B) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k r_k(B')\Delta_{5-k}^{5-k} = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k r_k(B')(5-k)!$$
$$= 5! - 6(5-1)! + 11(5-2)! - 6(5-3)! + (5-4)! = 31\ .$$




(α) Σχήμα 2.6 (β)

Εργαζόμενοι ανάλογα για το παράδειγμα 2.16 βρίσκουμε, εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα 2.9 αρκετές φορές βρίσκουμε ότι το πολυώνυμο Rook της σκακιέρας των απαγορευμένων θέσεων του σχήματος 2.5, είναι

$$R(x,B')=1+14x+55x^2+65x^3+16x^4$$

οπότε η σχέση (2.51) για n=5, m=7 δίνει

$$\begin{aligned} r_5(B) &= \Delta_7^5-\Delta_6^4 r_1(B')+\Delta_5^3 r_2(B')-\Delta_4^2 r_3(B')+\Delta_3^1 r_4(B')= \\ &= 2520-360\cdot 14+60\cdot 55-12\cdot 65+3\cdot 16=48\,. \end{aligned}$$

Τις 48 λύσεις του παραδείγματος μπορούμε να τις καταγράψουμε με χρήση δενδροδιαγράμματος. ■

**Ασκήσεις**

**2.4.1.** Βρέστε μία απλή έκφραση της συνήθους γεννήτριας των ακολουθιών:

α. $\alpha_k$=k+2, k=0,1,… β. $\alpha_k$=2k+3, k=0,1,…

γ. $\alpha_k=k^2$, k=0,1,… δ. $\alpha_k$=(k+1)/k!, k=0,1,…

**2.4.2.** Έστω A(t) και B(t) οι συνήθεις γεννήτριες για τις ακολουθίες ($\alpha_n$) και ($\beta_n$) αντίστοιχα. Αν ισχύει $\alpha_k=\sum_{i=0}^{k-2}\beta_i\beta_{k-2-i}$ , για k≥2, $\alpha_0=\alpha_1=0$, να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις γεννήτριες A(t) και B(t).

**2.4.3.** Ρίχνουμε δύο κανονικά ζάρια και έστω $\alpha_k$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους εμφανίζεται το άθροισμα k, k=0,1,2,…. Δείξτε ότι η ακολουθία ($\alpha_k$) είναι συνέλιξη της ακολουθίας ($\beta_k$)=(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, …) με τον εαυτό της. Υπολογίστε κατόπιν τούτου τη γεννήτρια της ακολουθία ($\alpha_k$).

**2.4.4.** (Συνέχεια). Γενικεύοντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης δείξτε ότι η γεννήτρια των αριθμών $s_{k;n}$ που δίνουν το πλήθος των τρόπων με τους οποίους εμφανίζεται το άθροισμα k , k=0,1,2,…. , στη ρίψη n ζαριών γράφεται $t^n\left(1-t^6\right)^n\left(1-t\right)^{-n}$ . Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor δείξτε ότι:

$$s_{k;n}=\binom{k-1}{n-1}-\binom{n}{1}\binom{k-1-6}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{k-1-2\cdot 6}{n-1}-\binom{n}{3}\binom{k-1-3\cdot 6}{n-1}+\ldots$$

όπου η άθροιση εκτείνεται έως ότου να εμφανιστούν μηδενικοί όροι. Βρέστε την ακριβή τιμή του $s_{k;n}$ για n=10, k=30.

**2.4.5.** Έστω f(n) συμβολίζει το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων. Ας θεωρήσουμε το σύνολο {1,2,..., n+1}. Για να σχηματίσουμε τα υποσύνολα αυτού παίρνουμε πρώτα τα υποσύνολα του {1,2,...,n} και τα επεκτείνουμε σε υποσύνολα του πρώτου συνόλου με δύο τρόπους· είτε μην κάνοντας τίποτε είτε προσθέτοντας το n+1. Άρα θα ισχύει η αναδρομική σχέση f(n+1)= 2f(n), με f(0)=1. Να υπολογιστεί το f(n) με χρήση της γεννήτριας $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n$ .

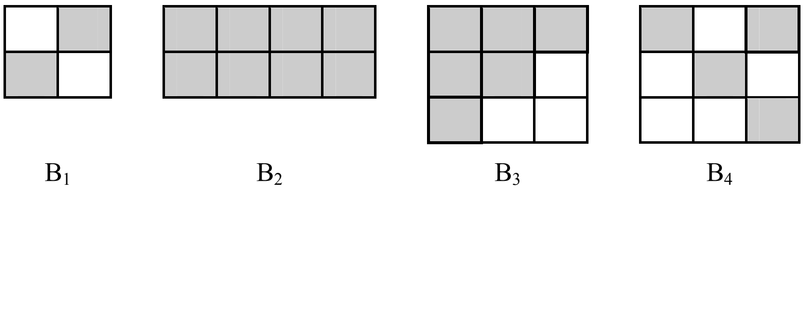
**2.4.6.** Στην παράγραφο 1.5.2 δείξαμε ότι οι διαταράξεις $D_n$ μιας μετάθεσης n στοιχείων ικανοποιούν τη σχέση $D_n=(n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}\right)$, $D_0=1$, $D_1=0$, που είναι αναδρομική $2^{ης}$ τάξης. Βρέστε τα $D_n$ χρησιμοποιώντας την εκθετική τους γεννήτρια $D(t)=\sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{t^n}{n!}$ και την παράγωγό της.

**2.4.7.** (Συνέχεια) Δείξτε ότι η αναδρομική σχέση των διαταράξεων μετασχηματίζεται στην $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$, $D_0=1$, που είναι $1^{ης}$ τάξης. Βρέστε από αυτήν τα $D_n$ χρησιμοποιώντας την εκθετική τους γεννήτρια.

**2.4.8.** **Αριθμοί Loucas.** Στην παράγραφο 2.1.3. ορίστηκαν οι αριθμοί Loucas που ικανοποιούν τη σχέση $g_n=g_{n-1}+g_{n-2}$ με αρχικές συνθήκες $g_0=2$ και $g_1=1$. Να βρεθεί η συνήθης γεννήτρια των αριθμών αυτών και από αυτήν να βρεθούν οι αριθμοί συναρτήσει του n.

**2.4.9.** Οι αριθμοί Bernoulli B(n) είναι διαφορετικοί από τους αριθμούς Bell $B_n$, και ορίζονται από την αναδρομική σχέση $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B(k)$, $n\geq 1$ και B(0)=1. Δείξτε ότι η εκθετική γεννήτρια των αριθμών Bernoulli είναι $b(t)=\sum_{n=0}^{\infty} B(n)\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{e^t-1}$. Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση φ(t)= b(t)+t/2 είναι άρτια, που σημαίνει ότι B(2k+1)=0, k=1, 2, …

**2.4.10.** Υπολογίστε το πολυώνυμο Rook για κάθε μία από τις σκακιέρες:



$B_1$ $B_2$ $B_3$ $B_4$

**2.4.11.** Δείξτε ότι οι διαταράξεις 4 αντικειμένων 1,2,3,4 είναι το $r_4(B)$, όπου Β η σκακιέρα 4 χωρίς την κύρια διαγώνιο.

**2.4.12.** Μία οικογένεια έχει 3 ενήλικα άτομα, τα Α, Β και Γ, που ενδιαφέρονται να αγοράσουν αυτοκίνητο. Επειδή δεν έχουν χρήματα για τρία αυτοκίνητα θα αγοράσουν δύο από τα 1, 2, 3, 4, για τα δύο από τα τρία άτομα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η αγορά αν δεν υπάρχει περιορισμός. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η αγορά αν ο Α δεν θέλει να αγοράσει το 3 και ο Γ θέλει ή το 2 ή το 4;

**Ασκήσεις προς λύση**

**2.1.** Να βρεθεί το πλήθος των τριάδων (x, y, z) μη-αρνητικών ακεραίων που ικανοποιούν τη συνθήκη $x+y+z \leq 20$.

**2.2.** Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικρότεροι του 10000 έχουν άθροισμα ψηφίων (α) ίσο με 5; (β) μικρότερο του 5;

**2.3.** Καταγράψτε όλες τις περιπτώσεις ταξινόμησης
α) 3 διακεκριμένων σφαιρών α, β, γ σε 2 διακεκριμένα κελιά 1, 2.
β) 4 διακεκριμένων σφαιρών α, β, γ, δ σε 2 διακεκριμένα κελιά 1, 2.
γ) 2 διακεκριμένων σφαιρών α, β σε 4 διακεκριμένα κελιά 1, 2, 3, 4.
δ) 3 όμοιων σφαιρών α, α, α σε 2 διακεκριμένα κελιά 1, 2.
ε) 4 όμοιων σφαιρών α, α, α, α σε 2 διακεκριμένα κελιά 1, 2.
στ) 2 όμοιων σφαιρών α, α σε 4 διακεκριμένα κελιά 1, 2, 3, 4.

**2.4.** Καταγράψτε τις περιπτώσεις ταξινόμησης του προηγούμενου προβλήματος αν τα κελιά είναι όμοια.

**2.5.** Να υπολογιστεί ο αριθμός των τρόπων που $v=r\cdot k$ διαφορετικές κάρτες, μπορούν (α) να μοιραστούν εξίσου σε r παιδιά, και (β) να τοποθετηθούν εξίσου σε r όμοια κουτιά δώρων). (Υπόδ. Παρατηρείστε ότι στο (α) τα παιδιά είναι διακεκριμένα ενώ τα κουτιά στο (β) είναι όμοια).

**2.6.** Μία ακολουθία αριθμών $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ λέγεται μονοκόρυφη αν για κάποιον ακέραιο t, $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_t$ και $\alpha_t \geq \alpha_{t+1} \geq \ldots \geq \alpha_n$.

α) Δείξτε ότι αν η $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι μονοκόρυφη, το t δεν είναι κατανάγκην μοναδικό.

β) Δείξτε ότι για κάθε n>0, η ακολουθία $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$, είναι μονοκόρυφη και βρέστε το μέγιστο στοιχείο της ακολουθίας.

**2.7.** Για να ζυγίσουμε ένα βάρος 47 κιλών διαθέτουμε ένα μεγάλο πλήθος σταθμών με βάρη 1, 5, 10 και 25 κιλών. (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να ζυγίσουμε το ενλόγω βάρος. (β) Αν υποτεθεί ότι τα σταθμά είναι βαμμένα μαύρα ή κόκκινα σε ικανοποιητικό πλήθος, και ότι η χρησιμοποίηση σταθμών διαφορετικού χρώματος δίνει διαφορετική ζύγιση, πόσες γίνονται τώρα οι περιπτώσεις. Διευκρινίζεται ότι "μαύρο 25-άρι, μαύρο 10-άρι, κόκκινο 5-άρι" είναι διαφορετική ζύγιση από "μαύρο 10-άρι μαύρο 5-άρι, κόκκινο 25-άρι", ενώ δεν διαφέρει από τη ζύγιση "μαύρο 10-άρι κόκκινο 5-άρι, μαύρο 25-άρι".

**2.8.** Βρέστε το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του 100 και που δεν έχουν επαναλαμβανόμενους πρώτους παράγοντες. (Υπόδ. Παρατηρείστε ότι ένας αριθμός για να μην έχει επαναλαμβανόμενο πρώτο παράγοντα π.χ. το 3 πρέπει και αρκεί να μην διαιρείται με το 9).

**2.9.** Με πόσους τρόπους 50 αντίγραφα ενός βιβλίου, 80 αντίγραφα ενός δεύτερου και 100 ενός τρίτου μπορούν να μοιραστούν στα δύο υποκαταστήματα ενός βιβλιοπωλείου;

**2.10.** Αν για την ακολουθία $\alpha_n$ ισχύει $\alpha_{n+1}=2n\ \alpha_n+2\ \alpha_n+2$, $n\geq 0$ και $\alpha_0=1$, να βρεθεί η αναλυτική έκφραση του $\alpha_n$.

**2.11.** Το πλήθος βημάτων για τη λύση ενός προβλήματος που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n, δίνεται από τη σχέση

$$f(n+1)=\begin{cases} 2f(n), & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 2f(n)+1, & n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Δείξτε πρώτα ότι $f(n+2)=f(n+1)+2f(n)+1$, και στη συνέχεια βρέστε αναλυτική έκφραση για το $f(n)$.

**2.12.** Αν το σύνολο S έχει n στοιχεία, όπου το n είναι πολλαπλάσιο του 8, τότε το πλήθος των υποσυνόλων του S με πλήθος στοιχείων που διαιρείται με 4 ισούται με $2^{n-2}+2^{n/2}$. (Υπόδ. Δείξτε πρώτα ότι αν i είναι η φανταστική μονάδα τότε $(1+i)^n=2^{n/2}$ και μετά αναπτύξτε το διώνυμο).