# Γραφήματα

- Ορισμοί - Ιδιότητες
- Συνδετικότητα – Επιπεδότητα
- Χρωματισμοί και χρωματικά πολυώνυμα
- Τυχαία Γραφήματα

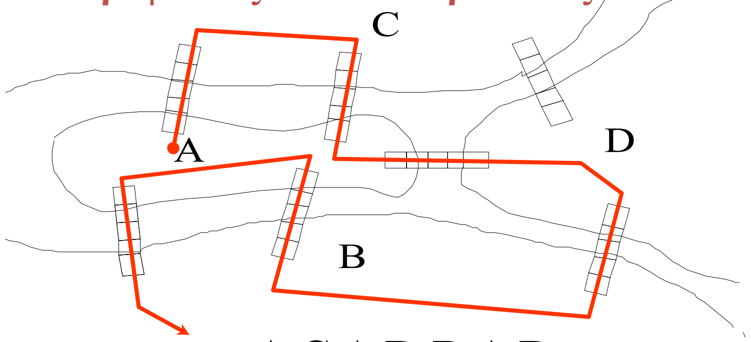
Πιθανοθεωρητική Προσομοίωση και Γραφήματα
Μωυσιάδης Πολυχρόνης

# Ανακάλυψη

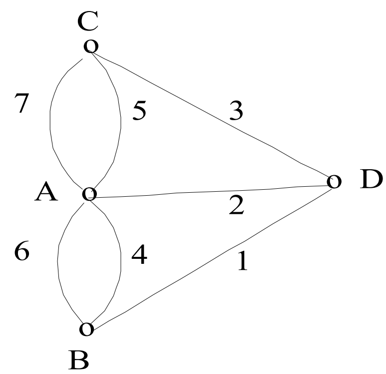
W. Leibniz (1679) προς C. Huygens: "μας χρειάζεται ένα άλλο είδος ανάλυσης, γεωμετρικής ή γραμμικής, που να ασχολείται απ' ευθείας με τη θέση, όπως η άλγεβρα ασχολείται με το μέγεθος".

“analysis situs” “geometria situs” “geometry of position” “Graph theory”

**Το 1735 επτά γέφυρες συνέδεαν τις δύο νησίδες που σχηματίζει το ποτάμι της πόλης K`nigsberg (Kalliningrand) στη σημερινή Λιθουανία. Υπάρχει τρόπος να κάνει κάποιος βόλτα ξεκινώντας από ένα σημείο και επιστρέφοντας σ’ αυτό περνώντας από κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά;**




A C A D B A B.....




Έπρεπε με Α…Α με 8 γράμ. αλλά απαιτούνται 9

μονοκονδυλιά;

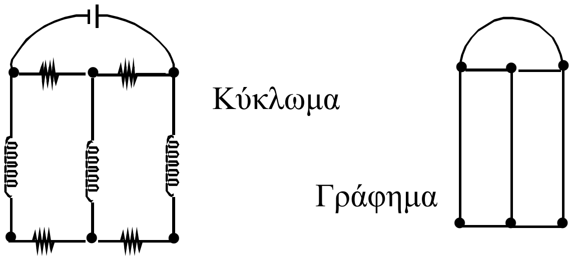
# Άλλα ιστορικά

Σε κυρτά στερεά

**H+S=A+2**

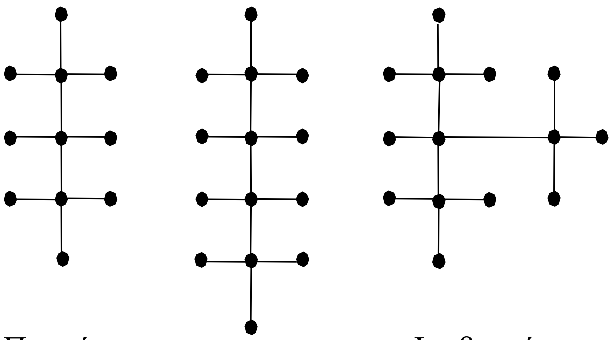
H=έδρες , A=ακμές,

S=στερεές γωνίες



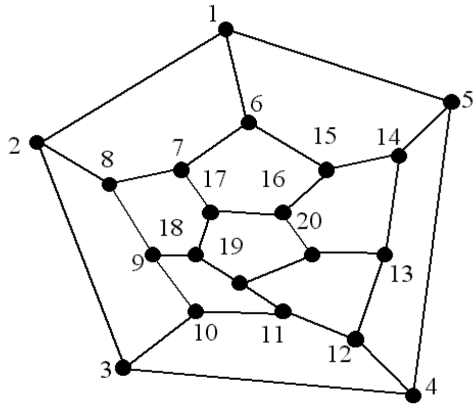

Kirchhoff (1847)

Euler (1750)



Προπάνιο Βουτάνιο Ισοβουτάνιο

Cayley (1857)




1, 2, 3, 4, 5, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 17, 18, 19, 20, 16, 15, 6, 1

Sir William Hamilton (1859)



# Βασικές έννοιες

Γράφημα (graph) είναι ένα ζεύγος συνόλων G=(V,E)

V : σύνολο n στοιχείων $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και

E : υποσύνολο των 2-υποσυνόλων του V

$$E \subseteq [V]^2,\ [V]^2 = 2 - subsets\ of\ V$$

Συμβολίζουμε:

$V(G)=\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$, n κορυφές (vertices. nodes)

$E(G)=\{x_1, x_2,\ldots, x_m\}$, m ακμές (edges, arcs)

όπου $x_i=\{u_i, v_i\}$ με $u_i \in V(G)$, $v_i \in V(G)$, i=1,2,…, n

ή απλούστερα $x_i=u_iv_i$

Γενικά για ακμές ή κορυφές του G γράφουμε:

$x_i \in G$ ή $u_i \in G$

|V(G)| =n : τάξη του γραφήματος G.

# Βασικές έννοιες

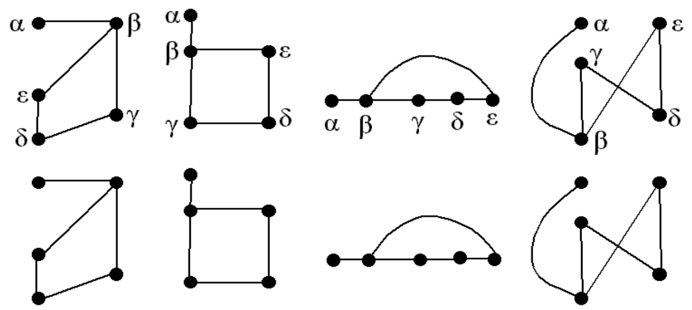
Η απεικόνιση του G γίνεται με τελείες ή κυκλάκια κλπ που συμβολίζουν τις κορυφές και γραμμές που ενώνουν τις κορυφές και συμβολίζουν τις ακμές.

•u, w $\in$V(G), *διαδοχικές ή άμεσα συνδεδεμένες* αν η ακμή {u,w}$\in$E(G).

Η πληροφορία που εμπεριέχει το γράφημα δεν αλλοιώνεται από τον τρόπο απεικόνισής του, όμως πολλές φορές ο τρόπος απεικόνισής του μπορεί να αποκρύψει ή να αποκαλύψει αυτήν την πληροφορία.

V = { α, β, γ, δ, ε },
E = { {α, β},{β, γ}, {γ, δ}, {δ, ε}, {β, ε} }

*σημασμένα*
(labeled)

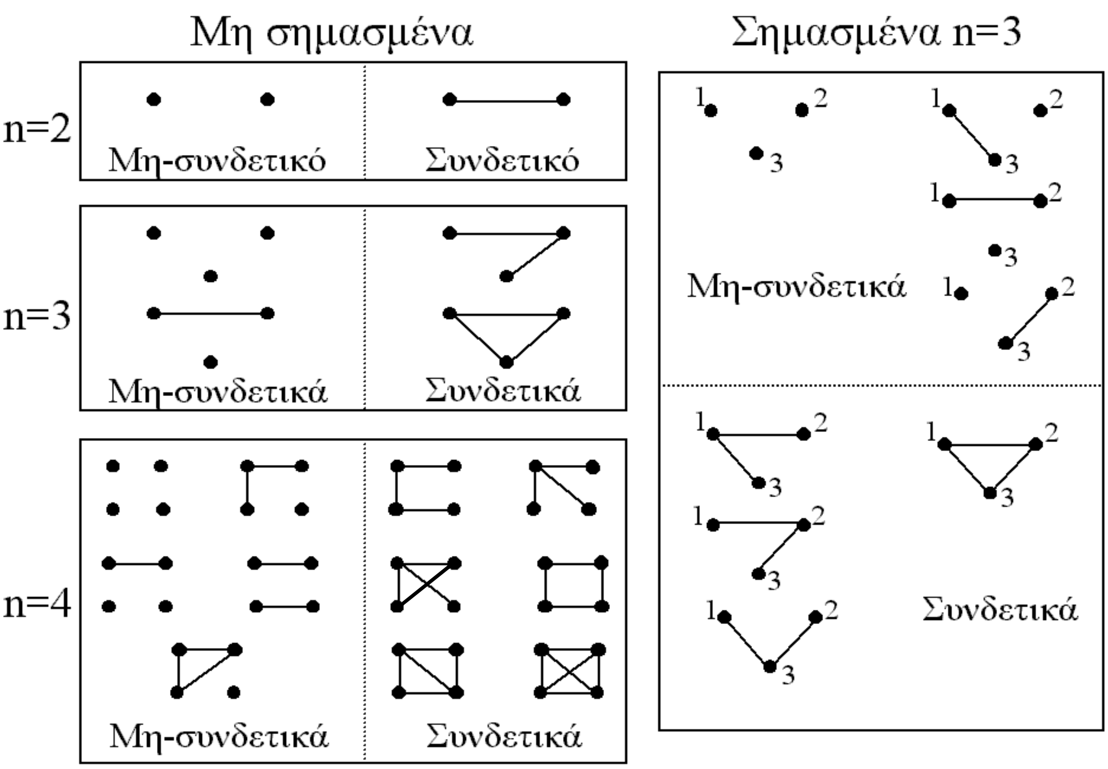




# Σχεδιασμός Γραφημάτων

- Διάφορα προγράμματα και πακέτα σχεδιάζουν γραφήματα με διάφορους αλγορίθμους, με καθέναν από τους οποίους αποκαλύπτονται, με αισθητικό τρόπο, άλλες ιδιότητες.
- Ορισμένα από τα πακέτα αυτά είναι τα:
  – Mathematica
  – Igraph (με την R)
  – NodeXL
  – ……
- Τα πακέτα αυτά διαθέτουν συναρτήσεις που υπολογίζουν χρήσιμες παραμέτρους των γραφημάτων, ή εκτελούν αλγορίθμους αναζήτησης για διάφορων ειδών βελτιστοποιήσεις

# Καταγραφή Γραφημάτων




Γραφήματα με |V(G)|= n=2,3,4



# Ισομορφισμός

Γραφήματα που εμπεριέχουν ακριβώς την ίδια πληροφορία ονομάζονται ισόμορφα και αυτό φανερώνεται από την ύπαρξη μιας αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας φ τέτοιας ώστε:

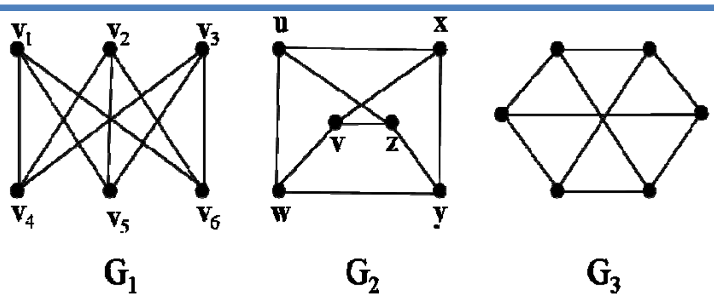
$$\text{Αν}, G(V,E) \simeq G'(V',E'), \textit{ τότε υπάρχει μια } '1-1' \textit{ συνάρτηση}$$

$$\varphi : V \to V', \textit{ τέτοια ώστε για κάθε}$$

$$xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

ισόμορφα γραφήματα

| v | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| φ(v) | u | v | y | w | x | z |



# Απαρίθμηση

Έστω $G_{p,k}$ το πλήθος των γραφημάτων p κορυφών και k ακμών και $G_p(x)$ η γεννήτριά τους. Δηλαδή: $G_p(x) = \sum_{k=0}^{m} G_{p,k} x^k$ με $m = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

Είναι φανερό ότι: $G_{p,k} = \binom{m}{k}$ αρκεί να επιλεγούν k από τις m το πλήθος δυνατές ακμές.

Άρα: $\boxed{G_p(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m}$

Επομένως αν $G_p$ είναι το πλήθος των γραφημάτων p κορυφών θα είναι:

$$\boxed{G_p = \sum_{k=0}^{m} G_{p,k} = G_p(1) = 2^m = 2^{p(p-1)/2}}$$

Το πλήθος των μη-σημασμένων άγνωστο γενικά. Για μικρά n η γεννήτρια είναι:

$F(x)=1+x+2x^2+4x^3+11x^4+34x^5+156x^6+1044x^7+12346x^8+274668x^9+\ldots$

και για τα συνδετικά

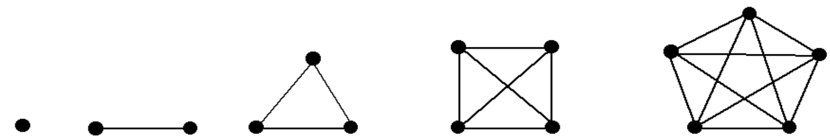
$C(x)=1+x+x^2+2x^3+6x^4+21x^5+112x^6+853x^7+11117x^8+261080x^9+\ldots$



# Πλήρη γραφήματα

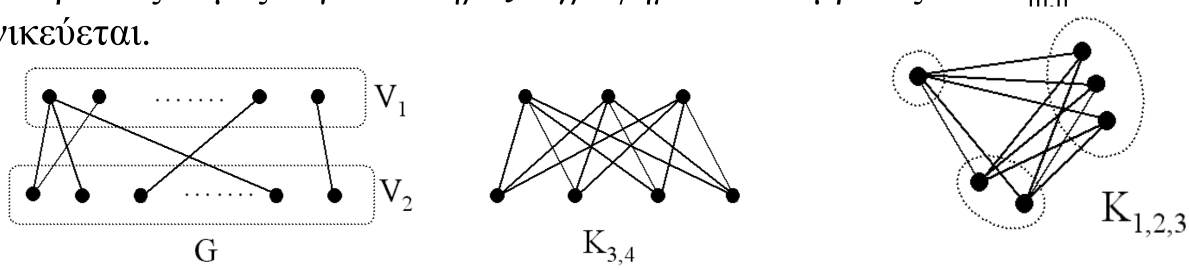
•Αν κάθε κορυφή του G συνδέεται άμεσα με οποιαδήποτε άλλη, τότε το G λέγεται πλήρες γράφημα και συμβολίζεται $K_n$.

•Αν καμία κορυφή του G δεν συνδέεται άμεσα με άλλη, (δηλαδή G δεν έχει ακμές), τότε το G λέγεται *πλήρως ασυνδετικό* γράφημα και συμβολίζεται $A_v$.



$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$ πλήρη γραφήματα

Αν $V(G)=V_1 \cup V_2$, και E(G) δεν περιέχει ακμή που συνδέει δύο κορυφές του $V_1$ ή του $V_2$, το G λέγεται *διγράφημα ή διμερές γράφημα*. Αν υπάρχουν όλες οι επιτρεπτές ακμές λέγεται *πλήρες διγράφημα* και συμβολίζεται $K_{m,n}$. Γενικεύεται.

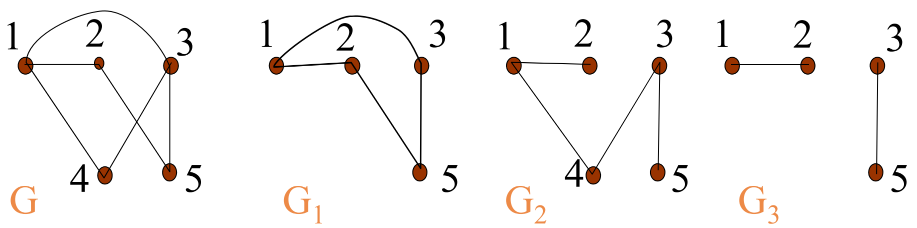


# Υπογραφήματα

$G=(V, E)$ , $H=(U, F)$ δύο γραφήματα.
ένωση $G\cup H= (V\cup U, E\cup F)$ τομή $G\cap H= (V\cap U, E\cap F)$
Αν $G\cap H=\emptyset$ τα γραφήματα G και H λέγονται ξένα.
Αν ισχύει $U\subseteq V$ και $F\subseteq E$, τότε το H λέγεται *υπογράφημα* του G, ενώ το G λέγεται *υπεργράφημα* του H. Συμβολίζουμε $H\subseteq G$.

Αν $U\subseteq V$ , τότε $G[U] = (U, E_U)$, όπου $E_U=\{x : x=\{u,v\}\in E, u\in U, v\in U\}$
φέρον υπογράφημα του G επί του U

Αν $G=(V, E)$ και $H=(V,F)$ όπου $F \subseteq E$ (γνήσιο) τότε G λέγεται υπογράφημα ζεύξης (ή επικαλύπτον υπογράφημα, spanning subgraph)




$G_i$ υπογρ. του G
$G_1$ φέρον επί $\{1,2,3,5\}$
$G_2$ υπογρ. ζεύξης
$G_1\cup G_2=G$
$G_1\cap G_2=G_3$



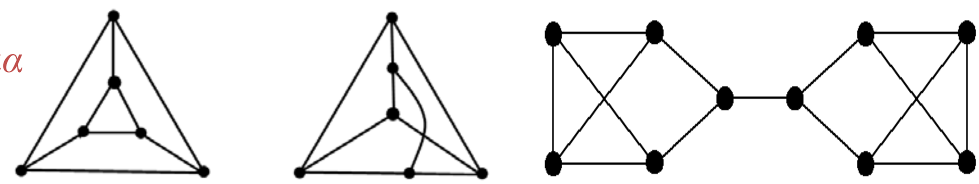
# Βαθμός κορυφής

Το πλήθος των ακμών που ένα από τα άκρα τους είναι η κορυφή $v$, λέγεται *βαθμός* (degree) ή *αξία* (valency) της κορυφής v και συμβολίζεται $\delta(v)$.

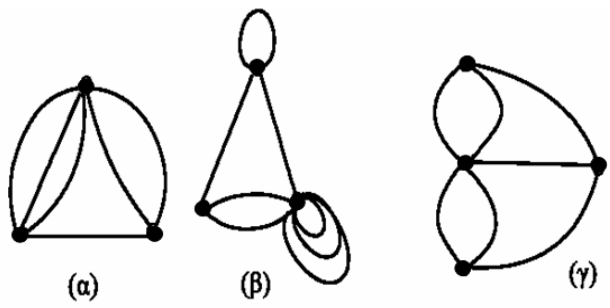
Ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών ενός γραφήματος $G$ συμβολίζεται με $\delta(G)$ και ο μέγιστος βαθμός με $\Delta(G)$. Προφανώς ισχύει: $\delta(G)\le\Delta(G)$.

$$\delta(G)=\min_{v_i\in V(G)}\{\delta(v_i)\} \quad \text{και} \quad \Delta(G)=\max_{v_i\in V(G)}\{\delta(v_i)\}$$

$\delta(G)=\Delta(G)=k$
*κανονικό γράφημα* τάξης k.
k=3 κυβικό



*πολλαπλά γραφήματα*
και ψευδογραφήματα



# Κύκλοι και μονοπάτια

Η ακολουθία

$$v_1\{v_1, v_2\}v_2\{v_2, v_3\}v_3\{v_3, v_4\} \ldots \{vn_{-1}\, vn\}v_n \,,$$

λέγεται ***περίπατος*** ή ***άλυσσος*** (walk ή chain).

Περίπατος με όλες τις ακμές διαφορετικές λέγεται ***διαδρομή*** (trail).

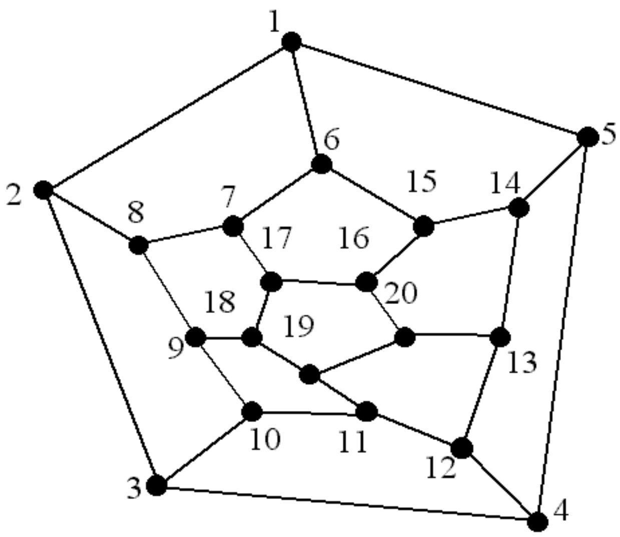
Περίπατος με όλες τις κορυφές διαφορετικές, λέγεται ***μονοπάτι*** (path).

Αν $v_n = v_1 \Rightarrow$ ***κλειστός περίπατος***, ***κλειστή διαδρομή***, ***κύκλος*** (cycle ή circuit)

Αν $\forall u, v \in V(G)$ υπάρχει περίπατος από $u$ σε $v$, $G$ ***συνδετικό***. Αλλιώς λέγεται ***μη-συνδετικό***, ή ***ασυνδετικό***.



# Κύκλοι και μονοπάτια



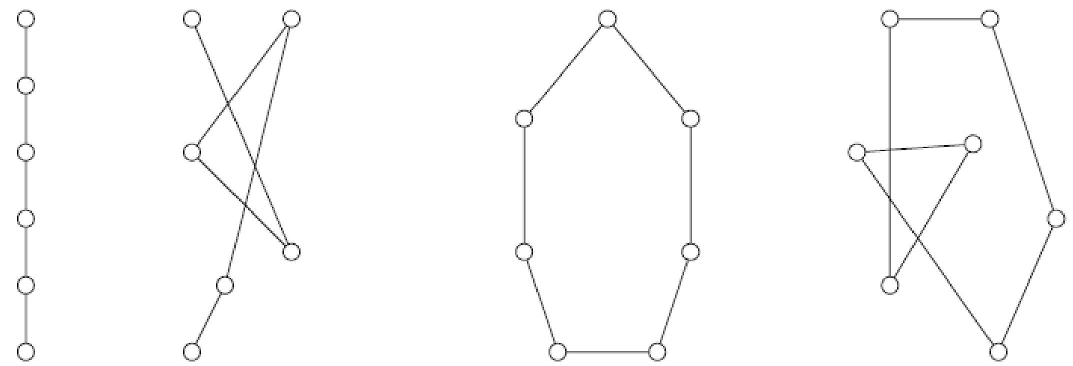

1, 2, 3, 4, 5, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 17, 18, 19, 20, 16, 15, 6, 1

Sir William Hamilton (1859)

$W = [1\{1,2\}2\{2,3\}3\{3,10\}10\{10,3\}3\{3,10\}10\{10,9\}9\{9,8\}8]$, περίπατος.

# Αποστάσεις

- Μήκος (length) περιπάτου, διαδρομής, μονοπατιού ή κύκλου λέγεται το πλήθος των ακμών του.
- Ένα μονοπάτι μήκους $n$ συμβολίζεται με $P_n$.
- Ένας κύκλος μήκους $n$ συμβολίζεται με $C_n$.



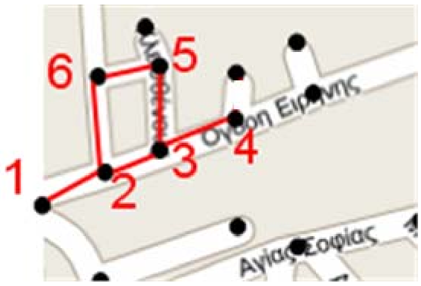
Δυο μονοπάτια $P_5$ (αριστερά)
και δυο κύκλοι $C_7$ (δεξιά)



# Αποστάσεις

- Το συντομότερο μονοπάτι που συνδέει δύο κορυφές $u, v$ του $G$, λέγεται **γεωδαισιακή**.
- Το μήκος της γεωδαισιακής των $u, v$ λέγεται **απόσταση** (distance) των $u, v$ και συμβολίζεται $d(u, v)$. Η $d(u, v)$ είναι απόσταση, δηλ.
  - $d(u, v) \geq 0$
  - $d(u, v) = 0$, ανν $u \equiv v$
  - $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (τριγωνική)
- Το μήκος της μακρύτερης γεωδαισιακής στο $G$, δηλαδή το μέγιστο των αποστάσεων μεταξύ των κορυφών του $G$, λέγεται **διάμετρος** $d(G)$.

# Παράδειγμα

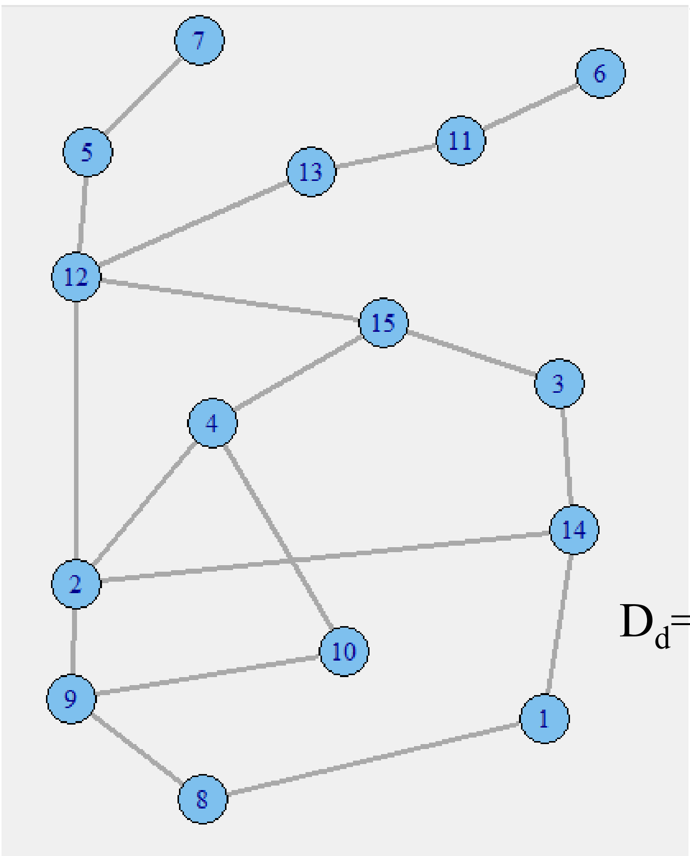



$G$:ένα γράφημα που αντιστοιχεί σε υποσύνολο των δρόμων ενός χάρτη, με $V(G) = \{1,2,3,4,5,6\}$ και σύνολο ακμών τις σημειωμένες κόκκινες.

- $P = [1\{1,2\}2\{2,3\}3\{3,4\}4]$, μονοπάτι μήκους 4.
- $C = [2\{2,3\}3\{3,5\}5\{5,6\}6\{6,2\}2]$, κύκλος μήκους 4.
- $d(2,5) = 2, d(1,5) = d(1,4) = 3$ (αποστάσεις).
- $d(G) = 3$ (διάμετρος του $G$).



# Εύρεση πίνακα αποστάσεων γραφήματος




Το γράφημα g1 με ακμές

$\{\{2,4\},\{5,7\},\{1,8\},\{2,9\},\{8,9\},\{4,10\},\{9,10\},\{6,11\},\{2,12\},\{5,12\},\{11,13\},\{12,13\},\{1,14\},\{2,14\},\{3,14\},\{3,15\},\{4,15\},\{12,15\}\}$

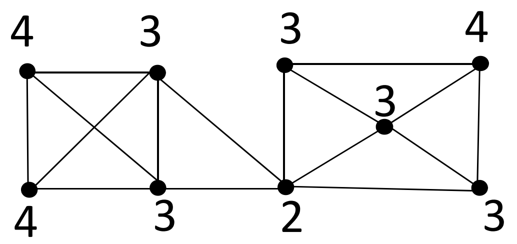
## Πίνακας αποστάσεων

$$D_d=(d_{ij})=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&2&2&3&4&6&5&1&2&3&5&3&4&1&3\\ 2&0&2&1&2&4&3&2&1&2&3&1&2&1&2\\ 2&2&0&2&3&5&4&3&3&3&4&2&3&1&1\\ 3&1&2&0&3&5&4&3&2&1&4&2&3&2&1\\ 4&2&3&3&0&4&1&4&3&4&3&1&2&3&2\\ 6&4&5&5&4&0&5&6&5&6&1&3&2&5&4\\ 5&3&4&4&1&5&0&5&4&5&4&2&3&4&3\\ 1&2&3&3&4&6&5&0&1&2&5&3&4&2&4\\ 2&1&3&2&3&5&4&1&0&1&4&2&3&2&3\\ 3&2&3&1&4&6&5&2&1&0&5&3&4&3&2\\ 5&3&4&4&3&1&4&5&4&5&0&2&1&4&3\\ 3&1&2&2&1&3&2&3&2&3&2&0&1&2&1\\ 4&2&3&3&2&2&3&4&3&4&1&1&0&3&2\\ 1&1&1&2&3&5&4&2&2&3&4&2&3&0&2\\ 3&2&1&1&2&4&3&4&3&2&3&1&2&2&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Εκκεντρότητα

Είναι η απόσταση μιας κορυφής από την πλέον απομακρυσμένη κορυφή του G, δηλ.:

$$\mathrm{E}(u) = \max(dist(u, v), \forall\, v \in V)$$

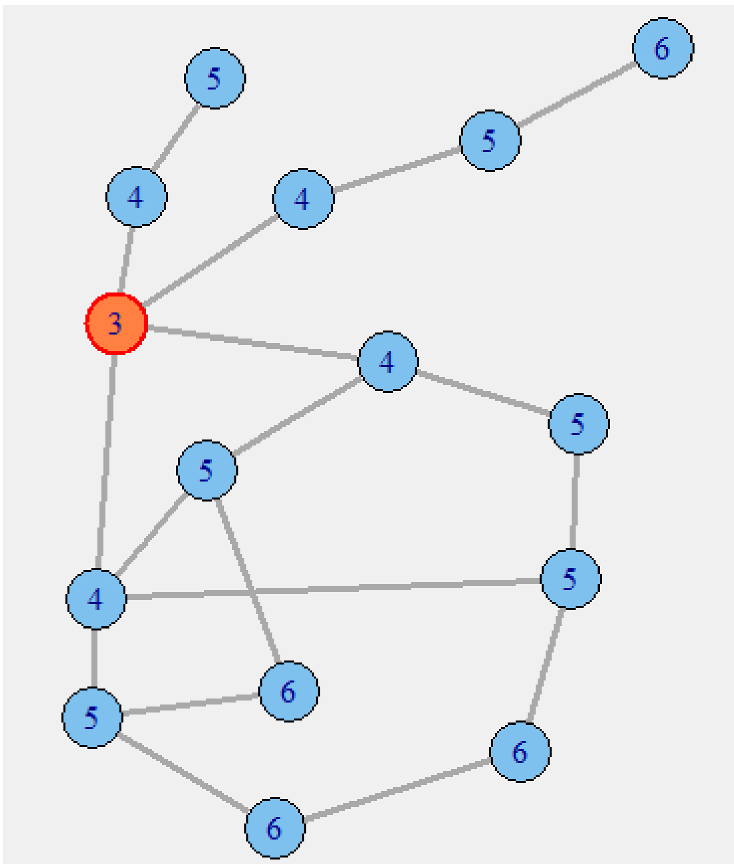



G

Το σημείο ή σύνολο κορυφών με την ελάχιστη εκκεντρότητα λέγεται κέντρο

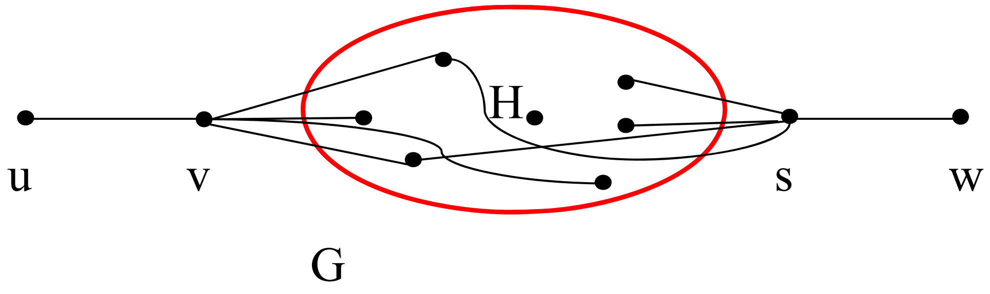


# Η εκκεντρότητα και το κέντρο του g1



# Γράφημα ως κέντρο γραφήματος

Ενώνουμε όλες τις κορυφές του H με τα $v$ και $s$



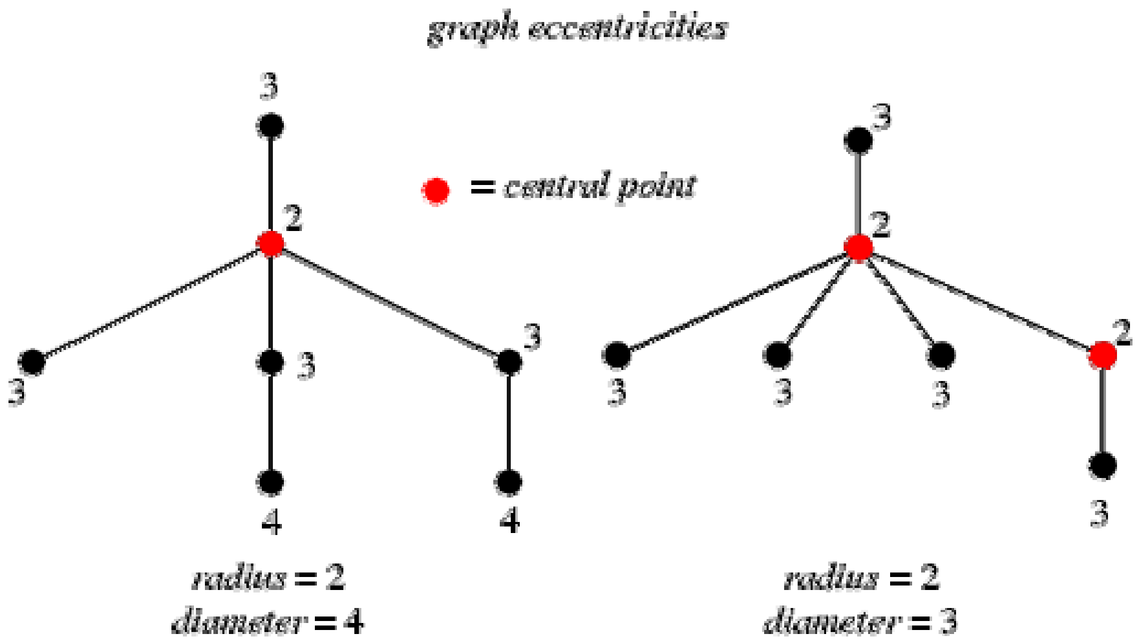

Κάθε κορυφή του H απέχει το πολύ 2 από τις άλλες κορυφές του H και 2 από τα $u, w$. Άρα $E(x) = 2, x \in H$
Επίσης $E(v) = E(s) = 3 \quad E(u) = E(w) = 4$

Η εκκεντρότητα των κορυφών του κέντρου λέγεται ακτίνα του γραφήματος $rad(G)$

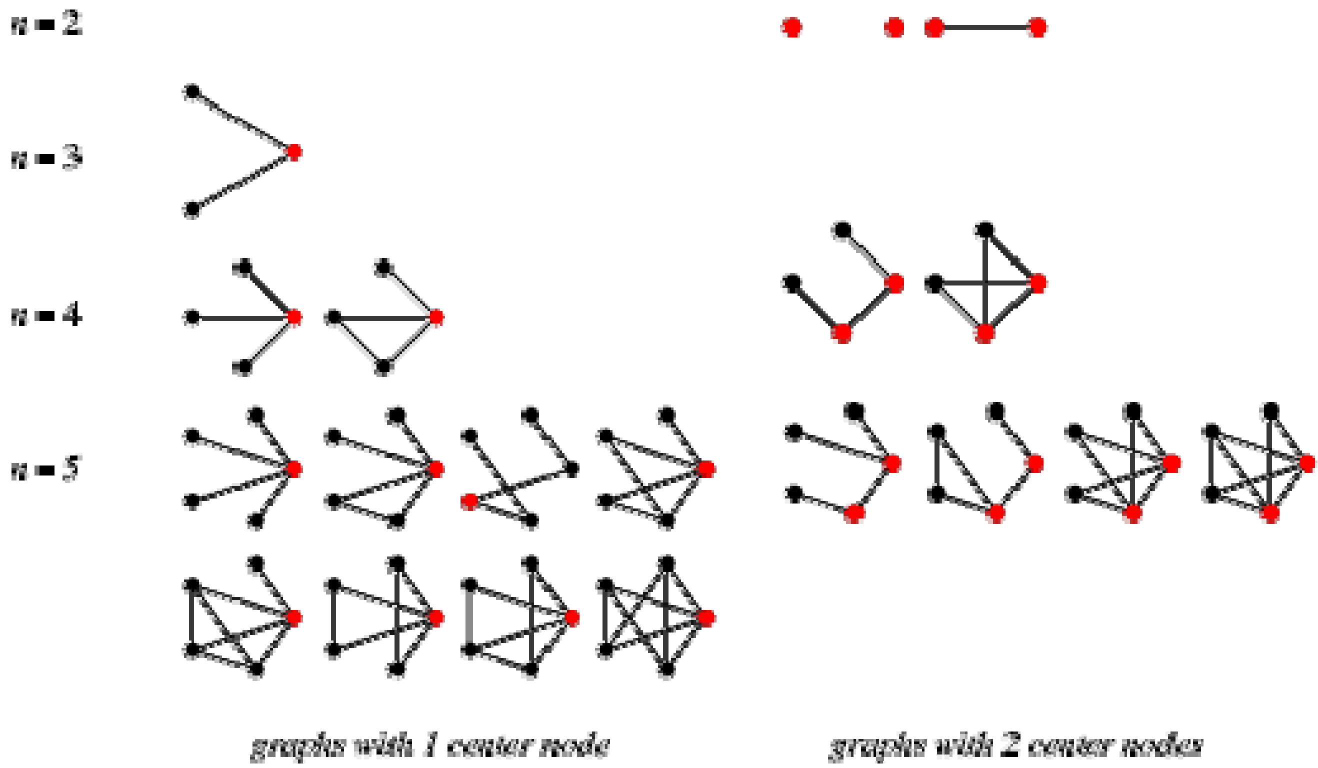
Γενικά ισχύει ότι $d(G) = \max\{E(v), v \in V(G)\}$ – διάμετρος
και $rad(G) = \min\{E(v), v \in V(G)\}$ – ακτίνα



# Παράδειγμα κέντρου



# Γραφήματα με 1 ή 2 κεντρικές κορυφές





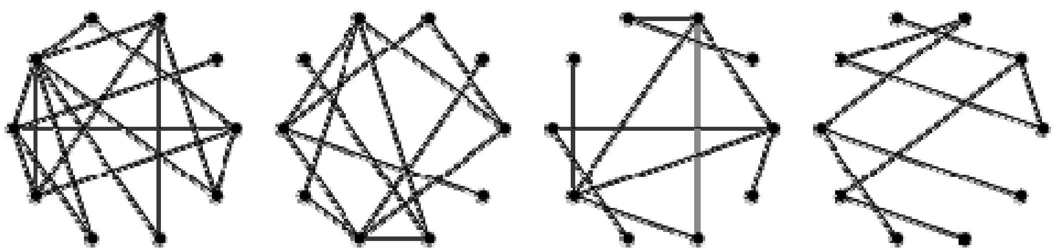

# Θεώρημα

Θ. Σε συνδετικά γραφήματα ισχύει

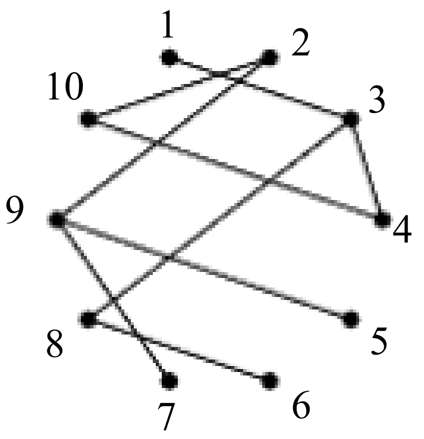
$$rad(G) \leq d(G) \leq 2 \cdot rad(G)$$

Για την απόδειξη του β΄ μέλους αρκεί να πάρουμε δύο κορυφές $x, y$ με απόσταση ίση με τη διάμετρο και να πάρουμε μία κορυφή του κέντρου $z$ που απέχει $rad(G)$ από τις $x, y$ και να εφαρμόσουμε την τριγωνική ιδιότητα.

Στα παρακάτω γραφήματα διαπιστώστε ότι η διάμετρος είναι αντίστοιχα 3, 4, 5 και 7 και επαληθεύσατε το θεώρημα



# Επαλήθευση για το $4^o$ γράφημα




Ακμές: {1,3}, {3,4}, {4,10}, {2,10}, {2,9}, {7,9}, {5,9}, {3,8}, {6,8}

| | [,1] | [,2] | [,3] | [,4] | [,5] | [,6] | [,7] | [,8] | [,9] | [,10] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [1,] | 0 | 4 | 1 | 2 | 6 | 3 | 6 | 2 | 5 | 3 |
| [2,] | 4 | 0 | 3 | 2 | 2 | 5 | 2 | 4 | 1 | 1 |
| [3,] | 1 | 3 | 0 | 1 | 5 | 2 | 5 | 1 | 4 | 2 |
| [4,] | 2 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| [5,] | 6 | 2 | 5 | 4 | 0 | 7 | 2 | 6 | 1 | 3 |
| [6,] | 3 | 5 | 2 | 3 | 7 | 0 | 7 | 1 | 6 | 4 |
| [7,] | 6 | 2 | 5 | 4 | 2 | 7 | 0 | 6 | 1 | 3 |
| [8,] | 2 | 4 | 1 | 2 | 6 | 1 | 6 | 0 | 5 | 3 |
| [9,] | 5 | 1 | 4 | 3 | 1 | 6 | 1 | 5 | 0 | 2 |
| [10,] | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 0 |

εκκεντρότητα = (6 5 5 4 7 7 7 6 6 4)
ακτίνα =4
διάμετρος =7

επαλήθευση

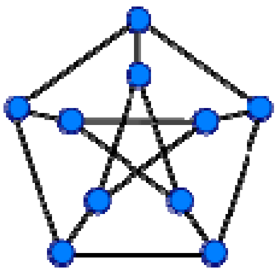
| ακτίνα | διάμετρος | διπλάσια ακτίνα |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 8 |



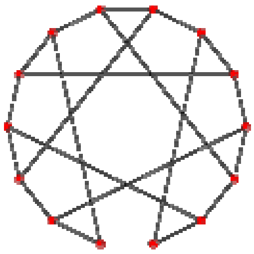
# Girth (Περίμετρος)

- Η περίμετρος (girth) ενός γραφήματος είναι το μήκος του συντομότερου κύκλου που περιέχεται στο γράφημα.
- Αν το γράφημα δεν περιέχει κύκλους (είναι δέντρο ή δάσος) τότε θεωρούμε ότι έχει άπειρη περίμετρο (girth=$\infty$)
- Ένα γράφημα με girth $\geq$ 4 δεν περιέχει τρίγωνα.

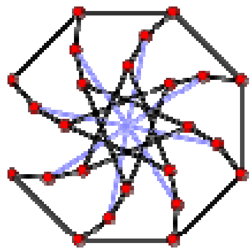
# Γραφήματα με girth 5,6,7 και 8



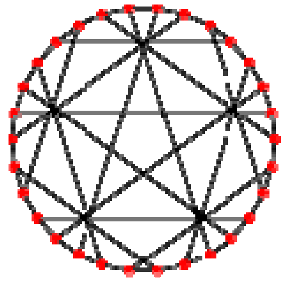
Το γράφημα Petersen έχει girth 5



Το γράφημα Heawood έχει girth 6



Το γράφημα McGee έχει girth 7

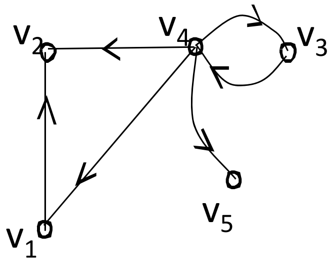


Ο 8-κλωβός Tutte έχει girth 8

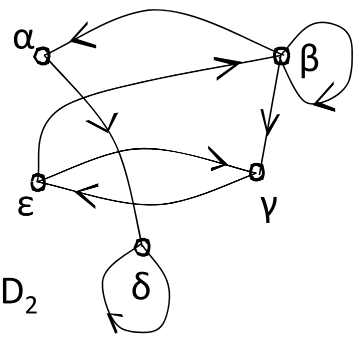


# Κατευθυνόμενα γραφήματα

Αν στο G=(V,E), το στοιχείο (α,β) ∈E, θεωρηθεί ως διατεταγμένο ζεύγος και όχι ως 2-σύνολο, τότε G είναι κατευθυνόμενο.




$D_1$




$D_2$

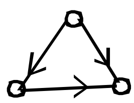
$\delta_-(v) = d_{in}(v)$ *έσω-βαθμός*

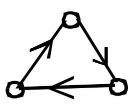
$\delta_+(v) = d_{out}(v)$ *έξω-βαθμός*

*ασθενικά συνδετικό*

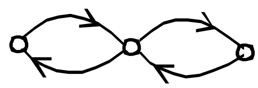
*μονόδρομα συνδετικό*

*ισχυρά συνδετικό*



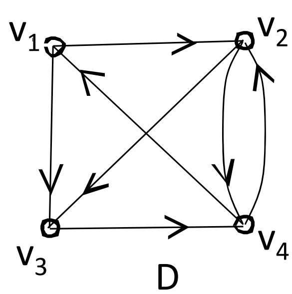


Μονόδρομα συνδετικό



Ισχυρά συνδετικά

$v_1v_2$ , $v_2v_4v_1$,
$v_1v_3$ , $v_3v_4v_1$,
$v_1v_2v_4$ , $v_4v_1$ ,
..........................................




D

# Πλήθος κατευθυνομένων γραφημάτων

Έστω $D_{p,k}$ το πλήθος των κατευθυνομένων σημασμένων γραφημάτων p κορυφών και k ακμών και $D_p(x)$ η γεννήτριά τους. Δηλαδή:

$$D_p(x) = \sum_{k=0}^{p(p-1)} D_{p,k} x^k \ ,$$

Είναι φανερό ότι: $D_{p,k} = \binom{p(p-1)}{k}$ αρκεί να επιλεγούν k από τις p(p-1) το πλήθος δυνατές κατευθυνόμενες ακμές.

Άρα: $$\boxed{D_p(x) = \sum_{k=0}^{p(p-1)} \binom{p(p-1)}{k} x^k = (1+x)^{p(p-1)}}$$

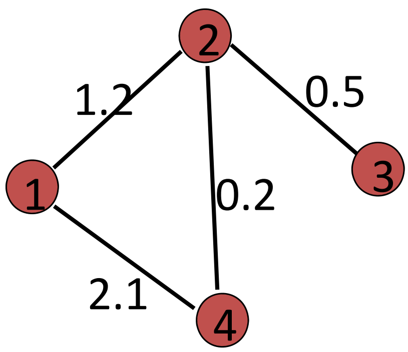
Παρατηρούμε ότι $D_p(x) = (G_p(x))^2$, άρα

$$\boxed{D_p = \sum_{k=0}^{m} D_{p,k} = D_p(1) = 2^{p(p-1)} = G_p{}^2(1)}$$

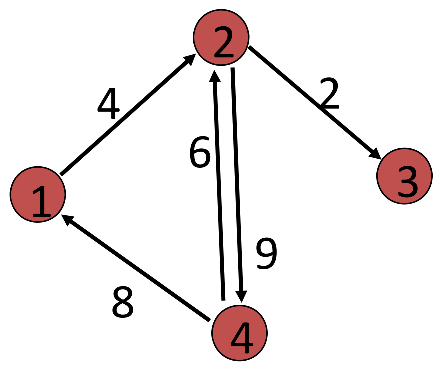


# Σταθμισμένα Γραφήματα - Δίκτυα

Ζυγισμένο Γράφημα




Δίκτυο

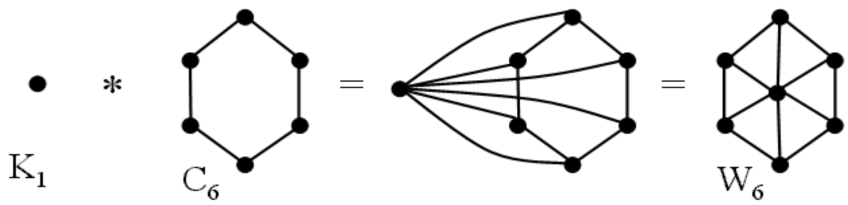



Δηλαδή στις ακμές του γραφήματος G(V,E) αντιστοιχούμε τιμές μέσω μιας συνάρτησης $w: E(G) \to \mathbb{R}$

# Σύνδεση - Συμπλήρωμα

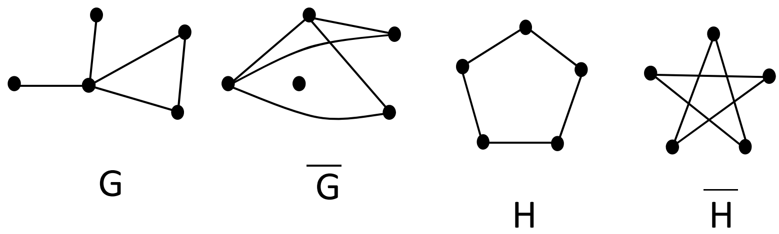
Έστω $G = (V, E)$ και $H = (U, F)$ δύο ξένα γραφήματα. Τότε:

$G{*}H$ (*σύνδεση* των $G$ και $H$)= $G \cup H$ με την προσθήκη όλων των ακμών που συνδέουν τις κορυφές του G με τις κορυφές του H.




(πλήρες τάξης 1)*
(κύκλος μήκους 6)=
(τροχός τάξης 6)

Συμπλήρωμα $\bar{G}$ του $G = (V, E)$, είναι το γράφημα $(V, \bar{E})$, όπου το $\bar{E} = [V]^2 - E$ περιέχει όλα τα 2-σύνολα του $V$ που δεν περιέχονται στο E




H και $\bar{H}$
ισόμορφα
αυτοσυμπληρωματικά

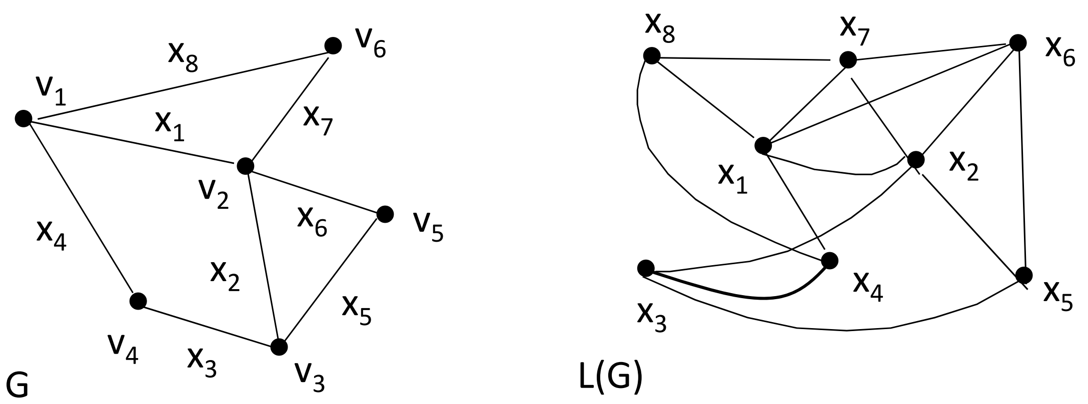


# Γραμμογράφημα

Αν σε γράφημα εναλλάξουμε ρόλους μεταξύ των κορυφών και των ακμών του, προκύπτει το *γραμμογράφημα* (line graph) του $G$, $L(G)$.

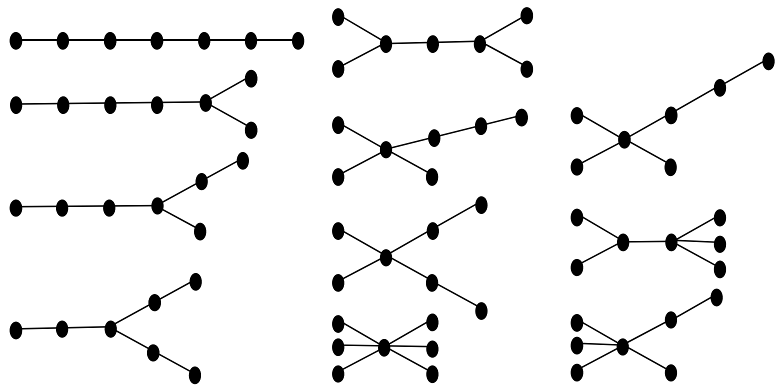
$V(L(G)) = E(G)$,

$E(L(G)) = \{\{x, y\}: x = \{a, b\}, y = \{c, d\}, \quad \{a, b\} \cap \{c, d\} \neq \emptyset, a, b, c, d \in V\}$



# Δένδρα

Γράφημα συνδετικό χωρίς κύκλους λέγεται *δένδρο* (tree)



όλα τα δένδρα 7 κορυφών

Υπογράφημα ζεύξης που είναι δένδρο λέγεται δένδρο ζεύξης
Είναι βασικό πρόβλημα



# Ιδιότητες

Θ. (Euler). Σε κάθε $G(p,q)$ με $V = \{v_i, i = 1,2,\dots,p\}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \delta(v_i) = 2q}$$

Π. Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού σε κάθε G είναι άρτιος αριθμός.

---

Θ. Δεν υπάρχει κυβικό γράφημα με περιττό πλήθος κορυφών.

---

Το πλήθος των ακμών του πλήρους γραφήματος $K_n$ είναι ίσο με $\binom{n}{2}$
Το πλήθος κορυφών του διγραφήματος $K_{m,n}$ είναι $m{\cdot}n$.

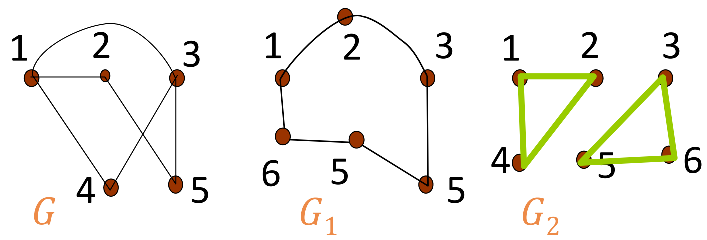
---

Θ. Ο μέγιστος αριθμός ακμών σε γράφημα p κορυφών χωρίς τρίγωνα, είναι $\left[\frac{p^2}{4}\right]$, όπου $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού $x$

# Γραφικές Ακολουθίες

Ακολουθία μία αρνητικών αριθμών που μπορεί να είναι βαθμοί των κορυφών ενός γραφήματος λέγεται γραφική (graphic).

π.χ. 3,3,2,2,2 για $G$
2,2,2,2,2,2 για $G_1$
2,2,2,2,2,2 για $G_2$




Θεώρημα (Havel, 1955 και Hakimi, 1962). Έστω

$$s, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, t_s, \quad d_1, .., d_n \quad (1)$$
$$t_1 - 1, t_2 - 1, \ldots, t_s - 1, \quad d_1, .., d_n \quad (2)$$

δύο ακολουθίες μη-αρνητικών σε φθίνουσα διάταξη. Τότε (1) είναι τότε και μόνον γραφική αν είναι η (2) γραφική.

$\Leftarrow$ Αρκεί να προστεθεί μία κορυφή που να συνδεθεί με τις s κορυφές με τους μεγαλύτερους βαθμούς



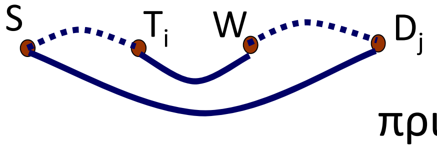
# Απόδειξη του $\Rightarrow$

Έστω $S, T_1, \ldots, T_s$ , $D_1, \ldots D_n$ οι κορυφές με τη φθίνουσα σειρά βαθμών. Ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

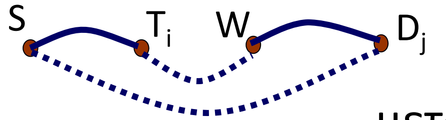
B1.Αν $S$ διαδοχική των $T_1, \ldots, Ts$, τότε διαγράφουμε την $S$.

B2. Έστω ότι η $S$ δεν είναι διαδοχική με την $T_i$, για κάποιο $i$. Τότε θα είναι διαδοχική με κάποια $D_j$, για $j \geq 1$, και θα ισχύει $t_i \geq d_j$.

- B2α. Αν $t_i = d_j$ εναλλάσσουμε τα ονόματα στις δύο κορυφές και πηγαίνουμε στο βήμα B1.
- B2β. Αν $t_i > d_j$. Τότε υπάρχει κορυφή $W$ διαδοχική της $\mathrm{T}_i$ που δεν είναι διαδοχική της $D_j$ . Διαγράφουμε την $\{S, D_j\}$ και την $\{\mathrm{T}_i, W\}$ και προσθέτουμε την $\{S, T_i\}$ και $\{D_j, W\}$. Αν υπάρχει και άλλη $T_k$, μη-διαδοχική πάμε στο B2, αλλιώς στο B1.



πριν



μετά

# Ασκήσεις

- Επτά φοιτητές πήγαν διακοπές. Αποφάσισαν καθένας να στείλει από μία κάρτα σε τρεις από τους άλλους. Είναι δυνατόν καθένας τους να πάρει κάρτα από τους τρεις που έστειλε και ο ίδιος;
- α. Δείξτε ότι για κάθε άρτιο n≥4 υπάρχει γράφημα με όλες τις κορυφές βαθ. 3

  β. Δείξτε ότι για κάθε περιττό $n \geq 5$ υπάρχει γράφημα με $n+1$ κορυφές, ώστε ακριβώς $n$ να έχουν βαθμό 3.
- Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 5$ υπάρχει γράφημα με όλες τις κορυφές βαθ. 4
- Ποιες από τις ακολουθίες είναι γραφικές;

| | |
|---|---|
| α. $5, 4, 3, 2, 2, 1$ | β. $5, 5, 4, 4, 0$ |
| γ. $6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2$ | δ. $6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0$ |
| ε. $5, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1$ | στ. $6, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 2$ |

- Δείξτε επαγωγικά ότι η ακολουθία $(n, n, n-1, n-1, \ldots, 2,2,1,1)$ είναι πάντα γραφική.

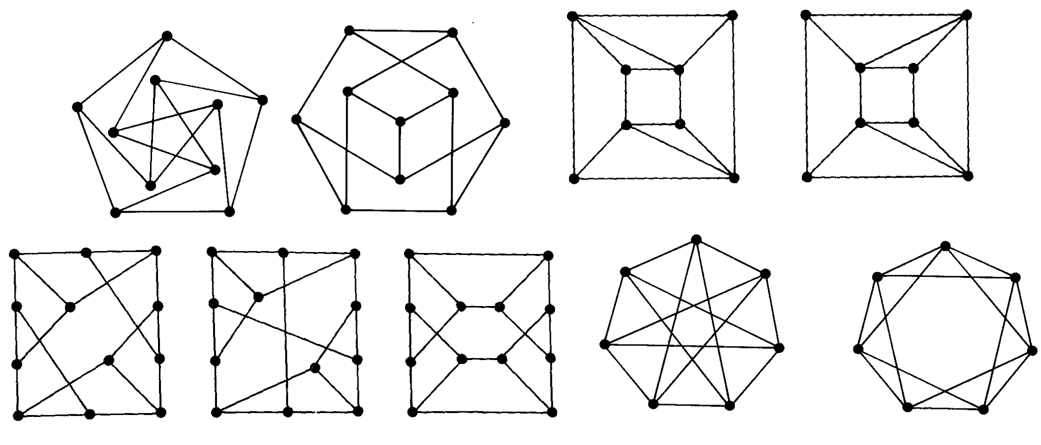


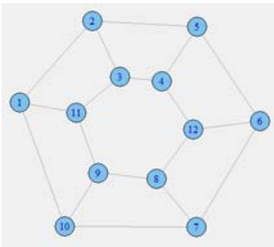
# Ασκήσεις

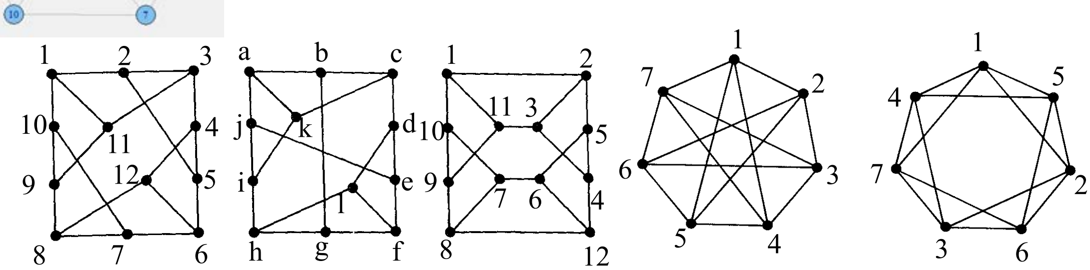
- Βρέστε γράφημα 5 κορυφών με ακριβώς

  (α) Ένα κύκλο, (β) τρεις κύκλους, (γ) έξι κύκλους
- Βρέστε γράφημα $G(6,7)$ που να μην έχει υπογράφημα ισόμορφο με το $C_4$.
- Βρέστε γράφημα $G(6,12)$ που να μην έχει υπογράφημα ισόμορφο με το $K_4$.

Ποια ζεύγη από τα γραφήματα είναι ισόμορφα;









# Επιπεδότητα

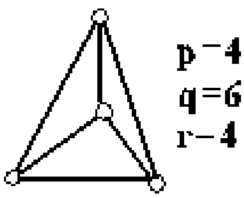
Ένα γράφημα G λέγεται *επίπεδο* αν μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι γραμμές του να μην τέμνονται.

Το 1750, ο Euler παρατήρησε ότι στα κυρτά γεωμετρικά στερεά ισχύει η σχέση:

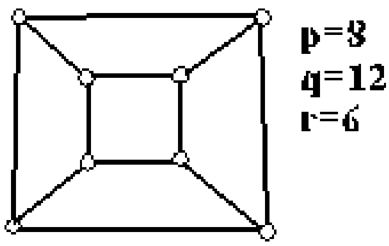
$H + S = A + 2$,

όπου H (έδρες), S (στερεές γωνίες), A (ακμές).

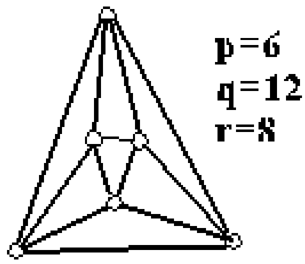
Θ. Στα στα επίπεδα γραφήματα ισχύει :
$p - q + r = 2$, $p$ (κορυφές), $q$ (ακμές), $r$ (επιφάνειες). π.χ.




ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ



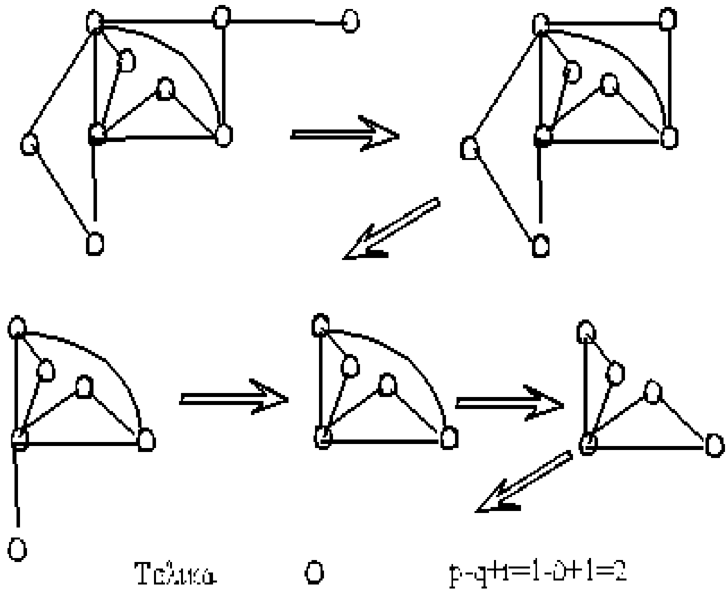

ΚΥΒΟΣ




ΟΚΤΑΕΔΡΟ

# Απόδειξη

Η ποσότητα $K = p - q + r$ μένει αναλλοίωτη όταν κάνουμε έναν από τους μετασχηματισμούς:




(1) Διαγράφω κορυφές βαθμού 1, οπότε ελαττώνεται το p και το q κατά 1.

(2) Διαγράφω κορυφές βαθμού 2, οπότε ελαττώνεται το p κατά 1, το q κατά 2 και το r κατά 1.

(3) Διαγράφω εξωτερικές ακμές (αν η κορυφή έχει βαθμό > 2) οπότε το p μένει ίδιο, το q ελαττώνεται κατά 1 και το r ελαττώνεται κατά 1.



# Προτάσεις για επίπεδα γραφήματα

1. Αν G(p,q;r) είναι επίπεδο γράφημα και κάθε επιφάνειά του είναι n-κύκλος, τότε: $q = \dfrac{n(p-2)}{n-2}$

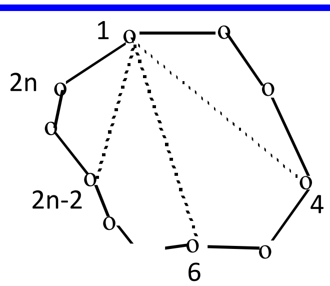
2. Αν G(p,q;r) μέγιστο επίπεδο γράφημα τότε κάθε επιφάνειά του θα είναι τρίγωνο και θα ισχύει: $q = 3p - 6$

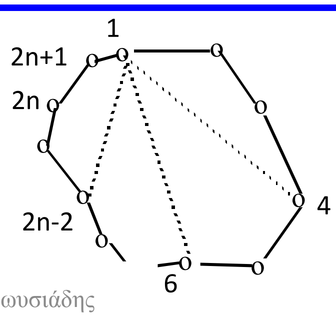
3. Αν G επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε επιφάνεια είναι 4-κύκλος είτε 5-κύκλος, τότε θα έχει υποχρεωτικά άρτιο πλήθος 5-κύκλων, έστω 2t, και θα ισχύει: $q = 2p - 4 - t$

4. Αν G είναι επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε επιφάνεια είναι 4-κύκλος, τότε θα ισχύει: $q = 2p - 4 - t$

5. Αν G είναι επίπεδο γράφημα με p≥ 3, τότε: $q \le 3p - 6$

6. Αν G είναι επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα, τότε:

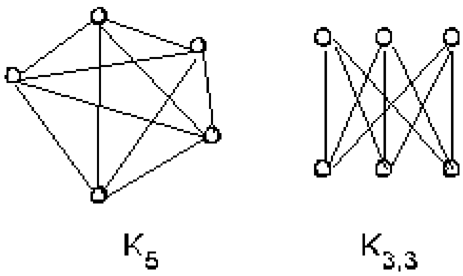



$q \le 2p - 4$

# Τα γραφήματα $K_5$, $K_{3,3}$

7. Τα $K_5$ και $K_{3,3}$, δεν είναι επίπεδα.




Απόδειξη

$K_5$: $q = 10$ και $p = 5$

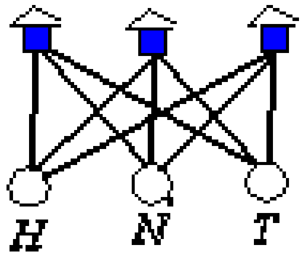
ενώ θα έπρεπε $q \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$

$K_{3,3}$ : $q = 9$ και $p = 6$ και δεν έχει τρίγωνα,

ενώ θα έπρεπε $q \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Τρία γειτονικά σπίτια πρόκειται να συνδεθούν με τρεις παροχές (π.χ. ηλεκτρικό φως, νερό, τηλέφωνο), από τρία σημεία που βρίσκονται ανά ένα απέναντι από κάθε σπίτι. Είναι δυνατόν να βρεθούν συνδέσεις, τέτοιες ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους;

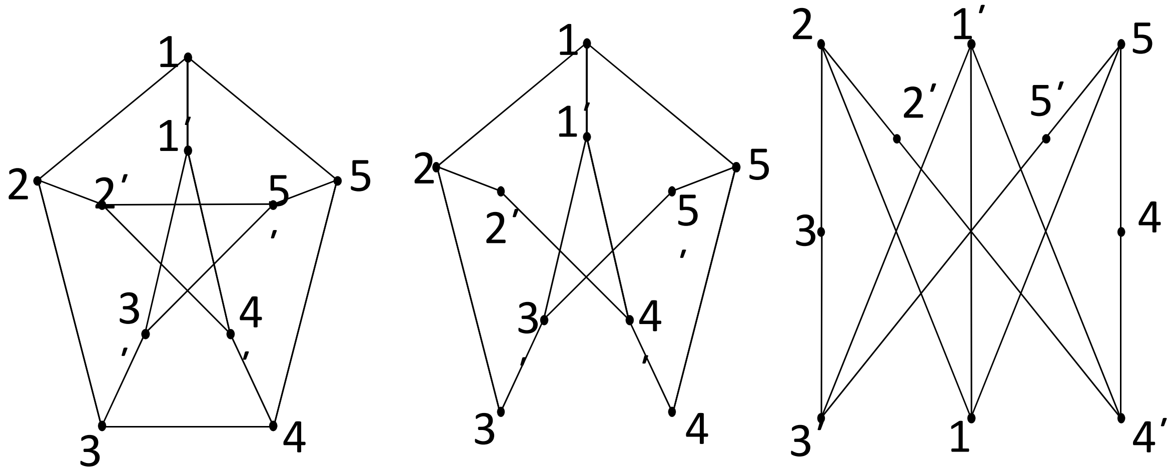





# Θεώρημα Kuratowski

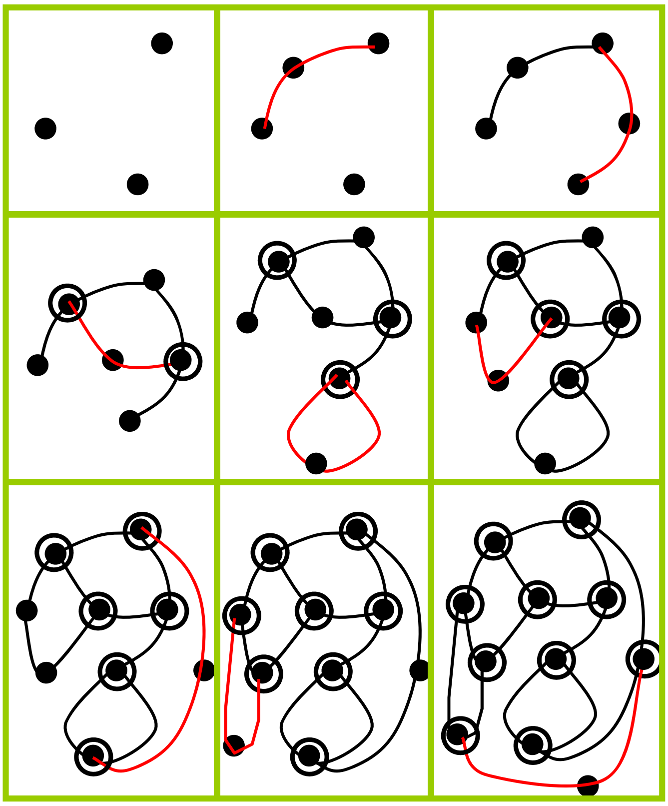
Ένα γράφημα G είναι τότε και μόνο επίπεδο γράφημα, αν δεν έχει υπογράφημα ομόμορφο με το $K_5$ ή $K_{3,3}$.

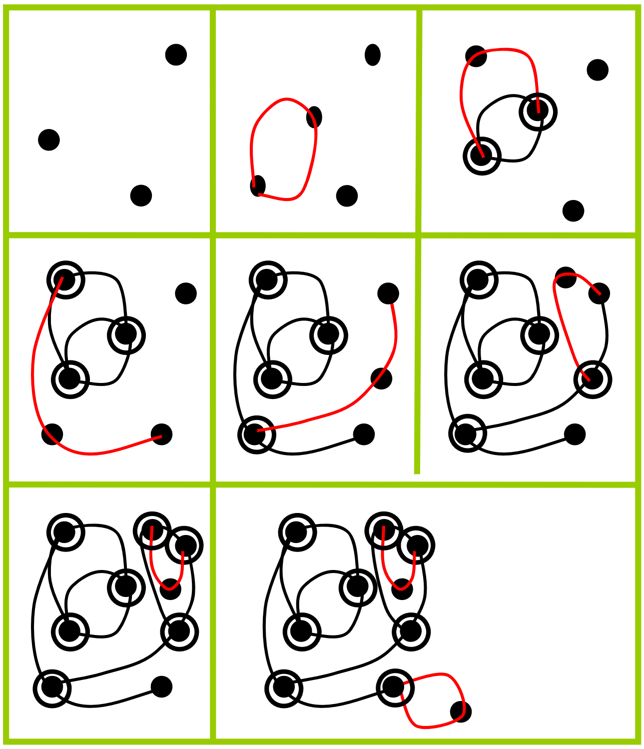
Εφαρμογή. Το γράφημα P του Petersen δεν είναι επίπεδο.



# Βλαστάρια (sprouts) - Ένα παιχνίδι

Γράφουμε ακμή και κορυφή μέχρι το πολύ 3 ακμές/κορυφή, ώστε G επίπεδο.





Αρχικά 9 δυνατές ακμές,
μετά 8 (το πολύ), μετά 7 κλπ

Conway & Paterson 1967

Το πολύ 8 κινήσεις. Γενίκευση



# Δένδρα

Θ. Αν όλες οι κορυφές ενός γραφήματος $G$ έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με 2, τότε υπάρχει κύκλος στο $G$.

Π. Αν T δένδρο με τουλ. μία ακμή, τότε έχει μία τουλ. κορυφή βαθμού 1.

Θ. Αν G είναι συνδετικό με $p \geq 2$ και $q < p$, τότε έχει κορυφή βαθμού 1.

Θ. Αν το $G(p,q)$ είναι δένδρο τότε ισχύει $p = q + 1$. Αντίστροφα, αν ένα συνδετικό γράφημα $G(p,q)$ ικανοποιεί τη σχέση $p = q + 1$, τότε είναι δένδρο.

Επαγωγικά. $\Rightarrow$ q=0 τότε υποχρεωτικά p=1 (αφού συνδετικό). Έστω ισχύει για q και G δένδρο με q+1 ακμές. Τότε υπάρχει κορυφή βαθμού 1. Διαγράφοντάς την παίρνουμε δένδρο με 1 κορυφή και μία ακμή λιγότερες ….

$\Leftarrow$ q=0 τότε p=1, δηλ. δένδρο. Έστω ισχύει για q και G με q+1 ακμές. Αφού G συνδετικό και ακμ.<κορυφ. έχει κορυφή βαθμού 1. Η διαγραφή της δεν χαλάει τη συνδετικότητα και αφαιρεί 1 κορυφή και1 ακμή κλπ.

Θ. Για $p \geq 2$ υπάρχουν $p^{p-2}$ διαφορετικά σημασμένα δένδρα με p κορυφές.

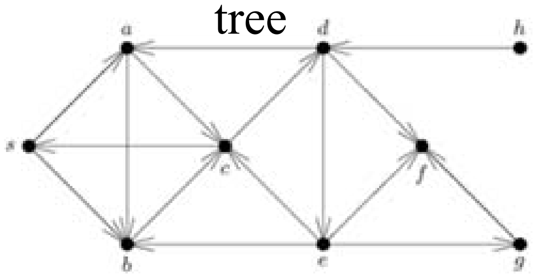
Θ. Για $p \geq 2$ και $d_i \geq 0$ ισχύει $$N\left(d_1, d_2, \ldots, d_p\right) = \frac{(p-2)!}{d_1! d_2! \ldots d_p!} \quad αν \sum_{i=1}^{p} d_i = p-2$$

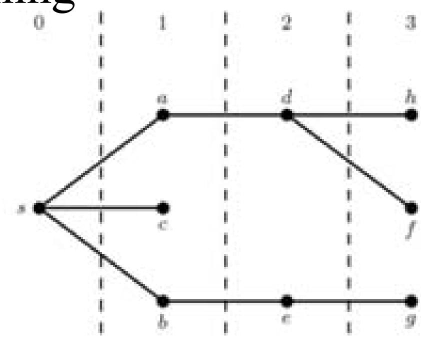
$\delta(v_i)=d_i+1$

# Αλγόριθμος BFS

The **Breadth first search (BFS)** algorithm works outward from $u_i$, first discovering nodes adjacent to $u_i$, (i.e one "hop" away), then continuing to modes two hops away, then three hops away, and so on, until all reachable nodes are discovered. The output of the algorithm is a tree, rooted at $u_i$, and organized so that the path from $u_i$, to a reachable node $u_j$ in the tree corresponds to the shortest path from $u_i$, to $u_j$ in $G$. The BFS algorithm is at the core of standard algorithms requiring shortest path information, like Prim's algorithm for producing a minimum spanning tree and Dijkstra's algorithm for finding all shortest paths from a single source $u_i$, in a directed graph.

Breath First Search spanning tree



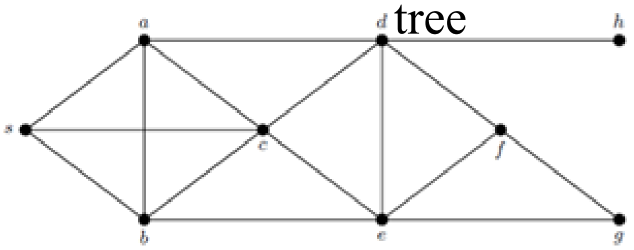


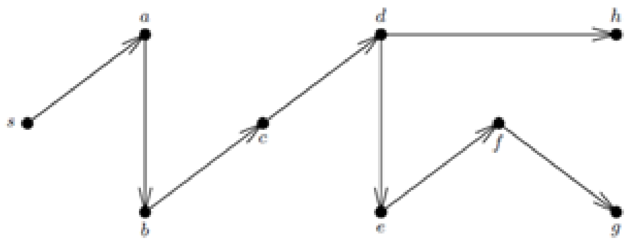


# Αλγόριθμος DFS

The **Depth first search** (DFS) algorithm, as its name suggests, instead proceeds from $u_i$, by delving as deeply into $G$ as possible from the first adjacent node to $u_i$, after which it iteratively backtracks to the most recently discovered node $u_j$ for which there are undiscovered edges to be explored. The DFS algorithm is often a sub-routine in a larger algorithm, such as the "topological sort algorithm" which can be used to determine whether a directed graph $G$ is acyclic or not, and algorithms for decomposing $G$ into its strongly connected components, all of which can be implemented in linear time.

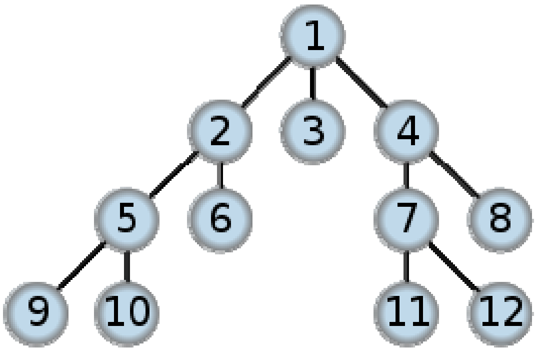
Depth First Search spanning tree



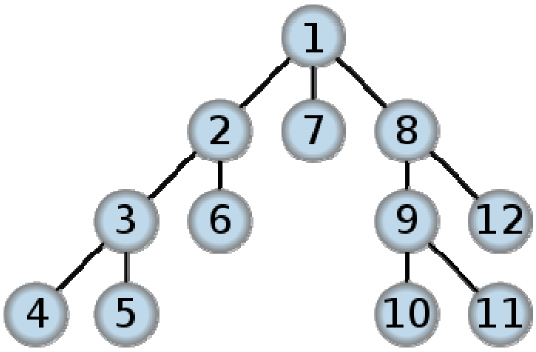


# BFS vs DFS

BFS




DFS






# Αλγόριθμος Kruskal

Έστω ένα δίκτυο G (γράφημα του οποίου οι ακμές έχουν διαφορετικό βάρος). Για να βρούμε ένα ελάχιστο δένδρο ζεύξης εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 1. Διατάσσουμε τις ακμές του G σε αύξουσα σειρά ως προς το βάρος, ακολουθώντας τυχαία τοποθέτηση στη σειρά σε περίπτωση ίσων βαρών. Θέτουμε T=∅, όπου T οι ακμές του ζητούμενου δένδρου.

Βήμα 2. Προσθέτουμε την πρώτη ακμή στο σύνολο T.

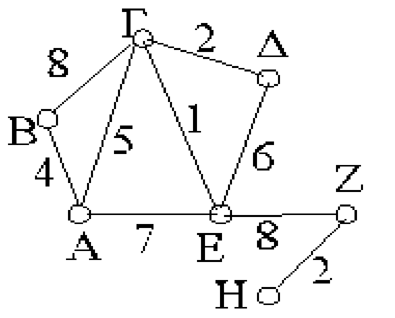
Βήμα 3. Αν κάθε ακμή έχει εξεταστεί, σταματούμε και συμπεραίνουμε ότι το G είναι μη-συνδετικό. Αλλιώς εξετάζουμε την πρώτη μη εξετασθείσα ακμή στη διάταξη που αναφέρθηκε και την προσθέτουμε στο T αν και μόνον αν δεν δημιουργεί κύκλο με κάποιες από τις ακμές που έχουν ήδη προστεθεί στο T. Αν η ακμή προστεθεί στο T πηγαίνουμε στο βήμα 4, αλλιώς επαναλαμβάνουμε το βήμα 3.

Βήμα 4. Αν T έχει n-1 ακμές όπου n το πλήθος κορυφών του G, σταματούμε και συμπεραίνουμε ότι το T είναι το ζητούμενο δένδρο. Αλλιώς πηγαίνουμε στο βήμα 3.

# Παράδειγμα

Το δίκτυο του σχήματος παριστάνει το οδικό δίκτυο 7 οικισμών σ’ ένα νησί. Οι αριθμοί στις ακμές παριστάνουν χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ των αντίστοιχων οικισμών. Ζητείται να βρεθεί διαδρομή ελαχίστου μήκους που να συνδέει τους 7 οικισμούς. Άρα, ζητείται το ελάχιστο δένδρο ζεύξης.

Διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά τις ακμές π.χ.
E(G)={ΓΕ, ΓΔ, ΖΗ, ΑΒ, ΑΓ, ΕΔ, ΕΑ, ΕΖ, ΒΓ}
και θέτουμε T=$\emptyset$.

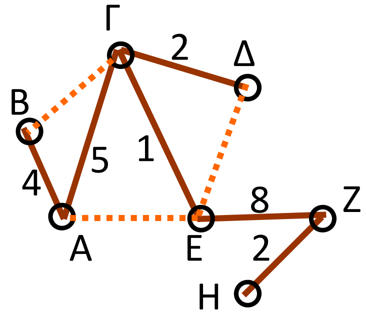



Προσθέτουμε την πρώτη ακμή στο σύνολο T και την σημειώνουμε στο γράφημα (χωρίς ακμές)

Εξετάζουμε διαδοχικά τις ακμές του E(G) και αν δεν σχηματίζουν τρίγωνο τις προσθέτουμε στο T. Το τελικό T είναι ένα σχεδόν βέλτιστο δένδρο ζεύξης

T={ΓΕ,ΓΔ , ΖΗ ,ΑΒ , ΑΓ , ΕΖ }

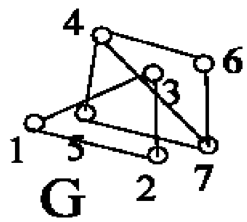
ελάχιστο
μήκος =22






# Παράγοντες – Τομές – Γέφυρες

Ένα υπογράφημα του G λέγεται (συνδετικός) *παράγοντας* (connected component) του G αν είναι μέγιστο συνδετικό υπογράφημα του G




H, με V(H)={1,2,3}, E(H)={12,13,23} είναι παράγοντας του G

K, με V(K)={4,6,7}, E(K)={46, 47, 67} δεν είναι παράγοντας διότι το K περιέχεται στο L με V(L)={4,5,6,7}, E(L)={45, 46, 47, 57, 67}.

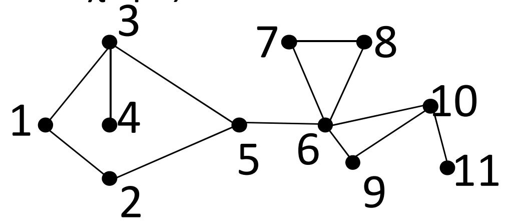
---

Αν A, B $\subseteq$V και για το σύνολο X $\subseteq$V$\cup$E ισχύει ότι κάθε μονοπάτι που συνδέει κορυφές του A με κορυφές του B περνάει οπωσδήποτε από μία κορυφή ή ακμή του X, τότε το X χωρίζει τα σύνολα κορυφών A, B. Γενικότερα, αν το X χωρίζει δύο κορυφές του G-X, τότε το X λέγεται *σύνολο τομής του G* ή λέμε ότι το σύνολο X χωρίζει το G.

σημεία
τομής
3,5,6,10

Αν X ={v}, v$\in$V, τότε η κορυφή v λέγεται *σημείο τομής* (cutvertex).

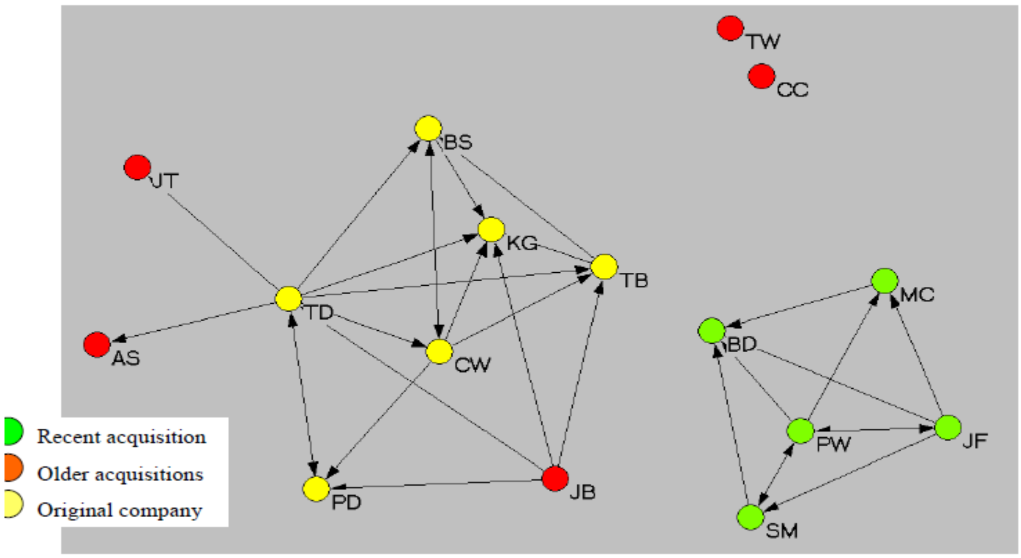
Αν X ={x}, x$\in$E, τότε η ακμή x λέγεται γέφυρα (bridge).




γέφυρες
34,56,
(10)(11)

# Παράδειγμα

## A network with 4 components

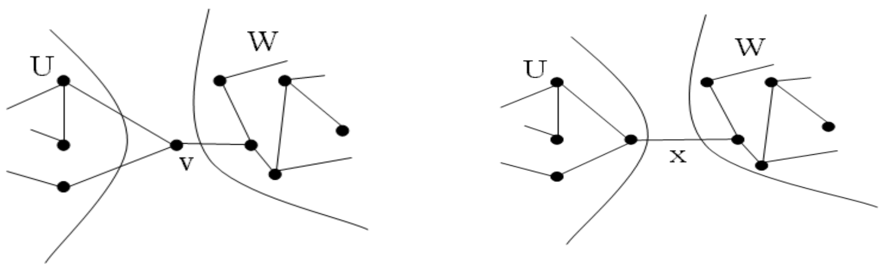



Data drawn from Cross, Borgatti & Parker 2001.



# Θεώρημα για κυβικό γράφημα

Θ. Ένα συνδετικό κυβικό γράφημα έχει σημείο τομής $\Leftrightarrow$ έχει γέφυρα.




## Συνδετικός αριθμός

Συνδετικός αριθμός k ή k(G) λέγεται ο ελάχιστος αριθμός κορυφών του G που πρέπει να απομακρύνουμε, για να προκύψει μη συνδετικό γράφημα.

Ισχύει $k(A_n)=0$, $k(G)=1$ αν υπάρχει σημείο τομής στο G, $k(G)\geq 2$ για κάθε αδιαχώριστο γράφημα και $k(K_p)=p-1$.

Γραμμοσυνδετικός αριθμός λ ή λ(G) λέγεται ο ελάχιστος αριθμός ακμών του G που πρέπει να απομακρύνουμε, για να προκύψει μη συνδετικό γράφημα.

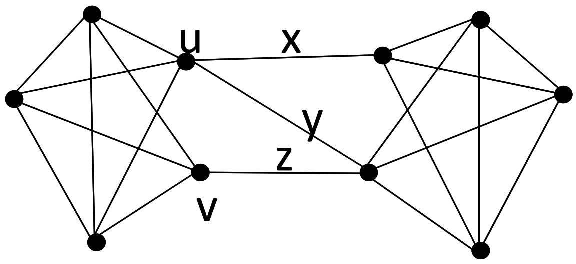
Ισχύει $\lambda(K_1)=0$ , λ (ενός μη συνδετικού γραφήματος) = 0 και $\lambda(G)=1$, αν υπάρχει γέφυρα.

# Θεώρημα Whitney

Για κάθε γράφημα G, ισχύει: $\mathrm{k}(\mathrm{G}) \leq \lambda(\mathrm{G}) \leq \delta(\mathrm{G})$

Παράδειγμα

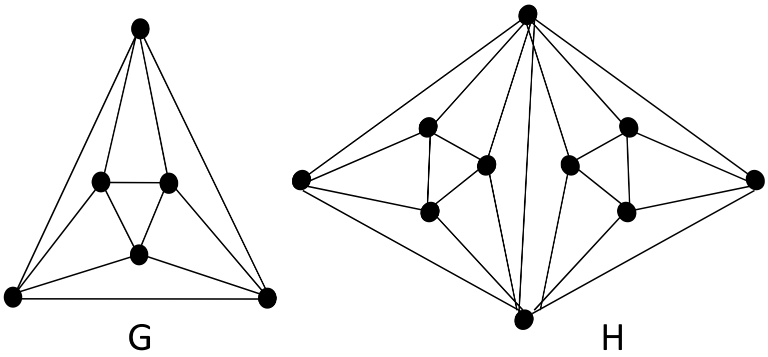
k=2 λ=3




Παράδειγμα

G: Πρέπει k≤λ≤4
Τελικά k=λ=4

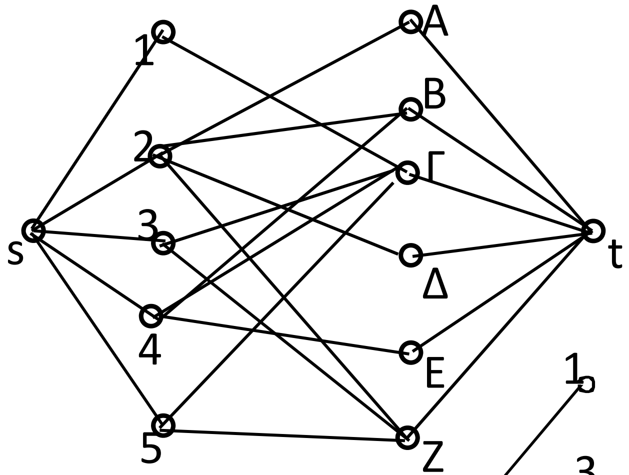
H: Πρέπει k≤λ≤4
Τελικά k=2, λ=4



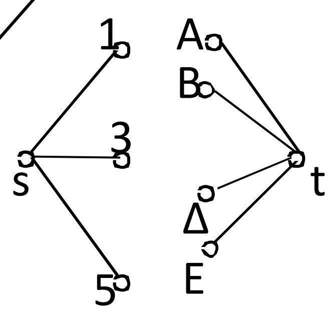


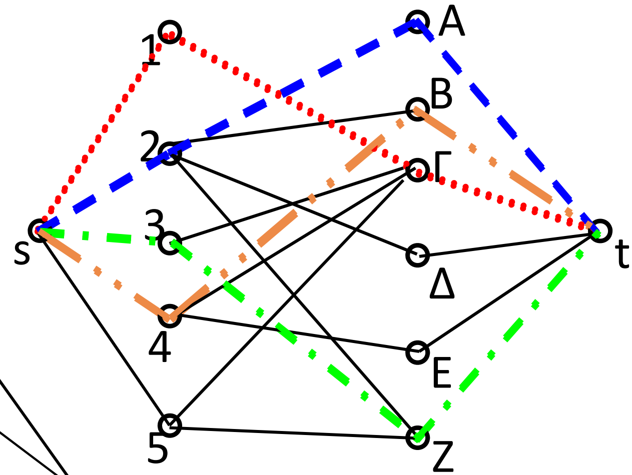

# Θεώρημα Menger

Ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που χωρίζουν δύο μη-άμεσα συνδεμένες κορυφές s και t σε ένα γράφημα, είναι ίσος με το μέγιστο αριθμό ανεξάρτητων μονοπατιών από την s στην t, δηλαδή μονοπατιών που είναι τέτοια ώστε να μη έχουν άλλες κοινές κορυφές εκτός από τα άκρα.




2,4,Γ,Z




s1Γt, s2At, s3Zt, s4Bt

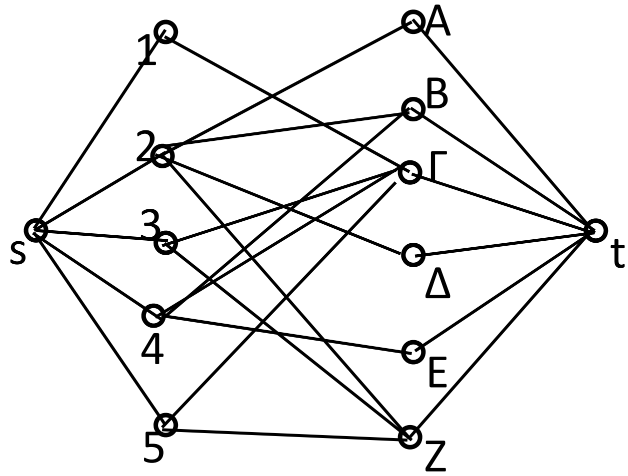
# Θεώρημα König

Το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων μονάδων σε έναν (0,1)-πίνακα M ισούται με το ελάχιστο πλήθος γραμμών ή/και στηλών του M που τον καλύπτουν.

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A, & B, & \Gamma, & \Delta, & E, & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A={2}, B={2,4}, Γ={1,3,4,5},

Δ={2}, E={4}, Z={2,3,5}




s={1, 2, 3, 4, 5}
t={A, B, Γ, Δ, E, Z}

$\Rightarrow$ Θεώρημα Menger



# Χρωματισμοί

*Χρωματισμός* του G είναι η αντιστοίχιση χρωμάτων στις κορυφές του G ώστε συνδεδεμένες κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα. Το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτούνται λέγεται *χρωματικός αριθμός* και συμβολίζουμε X(G). Το σύνολο των κορυφών με το ίδιο χρώμα λέγεται *χρωματική κλάση.*

| | | |
|---|---|---|
| Ισχύουν: | $X(K_p\text{-}x) = p-1$ | $X(C_{2n}) = 2$ |
| $X(G) \leq p$, | $X(A_p) = 1$, | $X(C_{2n+1}) = 3$ |
| $X(K_p) = p$, | $X(K_{m,n}) = 2$, | X(T) = 2 για T δένδρο. |

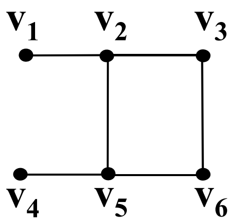
Θ. (Köning)
Ένα γράφημα έχει έναν 2-χρωματισμό (δηλαδή X(G)=2), αν και μόνο αν δεν έχει περιττούς κύκλους.

# Πίνακας συνδέσεων

Πίνακας συνδέσεων είναι ο p×p πίνακας $A=(a_{ij})$, με όπου G(p,q) σημασμένο γράφημα με $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \alpha\nu\ \{v_i,v_j\}\in E(G)\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

G:




$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

**Θ.** (1) $a_{ii}=0,\ i=1,2,\dots,p$

(2) $a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,2,\dots,p$

(3) $\mathbf{1}'A=\boldsymbol{\delta}'$ και $A\cdot\mathbf{1}=\boldsymbol{\delta}$

$$\delta=\big(\delta(v_1),\ \delta(v_2),\ \dots,\ \delta(v_p)\big)'$$



# Πίνακας συνδέσεων

Ο πίνακας συνδέσεων του πλήρους γραφήματος $K_n$ έχει όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία ίσα με 1.

$$A(K_n)=J_n-I_n$$

Ο πίνακας συνδέσεων του πλήρους διγραφήματος $K_{m,n}$ με κατάλληλη σήμανση γράφεται:

$$A(K_{m,n})=\begin{pmatrix}0 & J_{m,n}\\ J_{n,m} & 0\end{pmatrix}$$

$$A+\bar{A}=J_n-I_n$$

συμπληρωματικά

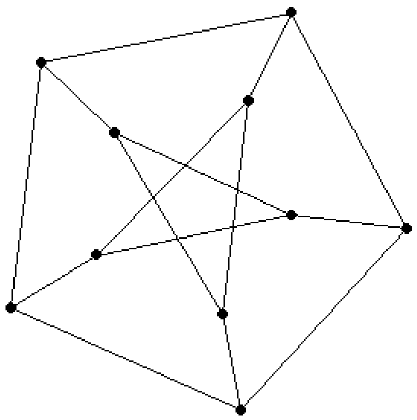
G μη συνδετικό, τότε A(G) γράφεται ως διαχωρισμένος

$$A(G)=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

# Πίνακας συνδέσεων -παράδειγμα

Η συνάρτηση **ToAdjacencyMatrix** δίνει τον πίνακα συνδέσεων στο Mathematica.

```
ShowGraph[gh = PetersenGraph]
```



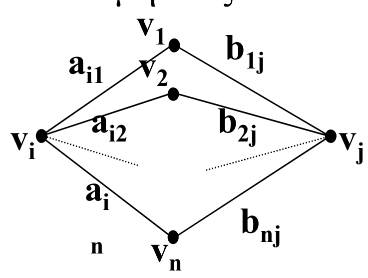
```
In[262]:= MatrixForm[m1 = ToAdjacencyMatrix[gh]]
Out[262]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$



# Ιδιότητες του πίνακα συνδέσεων

**Θ.** Έστω A ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G. Το (i,j) στοιχείο του πίνακα $A^k$ δίνει το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους k που συνδέουν τις κορυφές $v_i$ και $v_j$.




Απόδ. $A=(a_{ij})$ , $A^s=(b_{ij})$ και $A^{s+1}=(c_{ij})$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

**Π.** Έστω G γράφημα με n κορυφές m ακμές και t τρίγωνα. Αν A είναι ο πίνακας συνδέσεων του G θα ισχύουν:

1. tr(A)=0 ($a_{ii}$=0 για κάθε i∈{1,2,…,n}).
2. tr($A^2$)=2m (κλειστοί περίπατοι μήκους 2, δηλαδή στην ίδια ακμή)
3. tr($A^3$)=6t (οι τρείς διαφορετικές κορυφές κάθε τριγώνου παράγουν 3 τρίγωνα, ενώ κάθε τρίγωνο μπορεί να σχηματιστεί με 2 τρόπους – πχ ΑΒΓ ή ΑΓΒ-κλειστοί περίπατοι μήκους 3)

tr(A)=άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων

# Πίνακας συνδέσεων-Συνδετικότητα

**Θ.** Αν υπάρχει περίπατος που συνδέει τις κορυφές α και β ενός γραφήματος G τότε υπάρχει και μονοπάτι μεταξύ αυτών των κορυφών.

**Π.** Αν G συνδετικό γράφημα n κορυφών, τότε οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με μονοπάτι μήκους το πολύ n-1.

**Θ.** Έστω A ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G που έχει n>2 κορυφές. Το G είναι συνδετικό αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του πίνακα $A+A^2+A^3+...+A^{n-1}$, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

**Θ.** Αν το γράφημα G είναι μη-συνδετικό τότε το $\overline{G}$ είναι συνδετικό.

**Π.** Κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα είναι συνδετικό.



# Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα Γραφήματος

- $\varphi(\mathrm{A}(G),\lambda) = \det(A(G) - \lambda \mathrm{I})$, χαρακτηριστικό πολυώνυμο του G.
- Λύνουμε την εξίσωση $\det(A(G) - \lambda \mathrm{I}) = 0$ και συμβολίζουμε $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots . \geq \lambda_\mu$, $\mu \leq n$, τις λύσεις σε φθίνουσα σειρά. Το σύνολο των λύσεων αποτελεί τις ιδιοτιμές του G (φάσμα του G). Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις προηγούμενες ιδιοτιμές αποτελούν τα ιδιοδιανύσματα του G. Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\lambda_1$ αποτελεί τη φασματική ακτίνα του G.
- Αν το γράφημα δεν είναι κατευθυνόμενο τότε ο A(G) είναι συμμετρικός και οι ιδιοτιμές του πραγματικοί αριθμοί.
- Αν λ ιδιοτιμή του A τότε $\lambda^k$ είναι ιδιοτιμή του $A^k$.

  Ισχύουν: $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\mu$ $(= 0)$ και

  $tr(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots \lambda_\mu^k$

  **επομένως το πλήθος των ακμών και των κλειστών περίπατων μήκους κ από την κορυφή *i* προς τον εαυτό της καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του G.**

## Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα Γραφήματος

- Το μέγιστο πλήθος κορυφών **α(G)** που δεν είναι άμεσα συνδεδεμένες στο G ονομάζεται **αριθμός ανεξαρτησίας (independence number).**
- Το πλήθος **ω(G)** των κορυφών του μέγιστου πλήρους υπογραφήματος του G ονομάζεται **αριθμός κλίκας (clique number)**.
- Ισχύει **α(G)** = **ω(G-συμπληρωματικό)**

---

**Θ.** Το πλήθος των μη αρνητικών (όχι διακεκριμένων κατανάγκη) ιδιοτιμών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α(G). Το πλήθος των μη θετικών (όχι διακεκριμένων κατανάγκη) ιδιοτιμών του G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α(G).



## Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα Γραφήματος

**Θ. Perron-Frobenius**. Έστω $G(m,n)$ ένα συνδετικό γράφημα με $m \geq 2$ , τότε:

- Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\lambda_1$ είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $G$.
- Το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{x}_1$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1$ έχει όλες τις συντεταγμένες του θετικές.
- Για κάθε $\lambda_i$ που ανήκει στο φάσμα του $G$ ισχύει $-\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_1$.
- Η αφαίρεση οποιασδήποτε πλευράς μειώνει την $\lambda_1$.

---

- Lovasz-Pelican (1973). $\lambda_1 \geq \Delta(\mathrm{G})$

---

- Wilf. Για το γράφημα $G(n,m)$ ισχύει $\lambda_1 \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$

# Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα Γραφήματος

**Ο Μέσος βαθμός,** ad(G) ενός γραφήματος G είναι:

$$\boldsymbol{ad(G)} = \frac{\boldsymbol{d_1 + d_2 + \cdots . + d_n}}{\boldsymbol{n}}$$

Ο μέσος βαθμός αποτελεί **ένα μέτρο της πυκνότητας του** G(n,m). Κάποιες φορές χρησιμοποιείται το πηλίκο:

$$\varepsilon(\boldsymbol{G}) = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} \quad \left(= \frac{\boldsymbol{ad(G)}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

---

**Θ.** Για κάθε G συνδετικό γράφημα ισχύει:

$$\boldsymbol{\delta(G)} \le \boldsymbol{ad(G)} \le \boldsymbol{\lambda_1} \le \boldsymbol{\Delta(G)}$$

---

**Θ.** Για κάθε συνδετικό γράφημα $G(n,m)$, $\eta$ $\Delta(G)$ είναι ιδιοτιμή του G αν και μόνο αν το G είναι **Δ(G)-κανονικό**. Επιπλέον αν το G είναι Δ(G)-κανονικό με ιδιοτιμές $\boldsymbol{\Delta(G), \lambda_2, \ldots, \lambda_s}$**,** το συμπληρωματικό του έχει ίδια ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές, $\boldsymbol{n - \Delta(G) - 1, -1 - \lambda_2, \ldots, -1 - \lambda_s}$. Το διάνυσμα $\mathbf{1}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1})_{\mathbf{1} \times \boldsymbol{n}}$ αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.



# Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα Γραφήματος

**Θ.** Αν στο συνδετικό γράφημα G(n,m), η $-\boldsymbol{\Delta(G)}$ είναι ιδιοτιμή του G τότε το G είναι **διμερές** και **Δ(G)-κανονικό**.

---

**Θ.** Αν το συνδετικό G είναι **διμερές** και έχει ιδιοτιμή **λ** τότε έχει ιδιοτιμή και την $-\boldsymbol{\lambda}$.

---

**Θ**. Αν το συνδετικό γράφημα G(n,m), έχει **t** διακεκριμένες ιδιοτιμές και διάμετρο **d(G)** θα ισχύει:

$$\boldsymbol{t} \ge \boldsymbol{d(G)}$$

---

**Θ.** Για το μη κενό γράφημα G ισχύει:

$$\mathbf{1} - \left[\frac{\boldsymbol{\lambda_{max(G)}}}{\boldsymbol{\lambda_{min(G)}}}\right] \le \boldsymbol{\chi(G)} \le \boldsymbol{\lambda}_{\max}(\boldsymbol{G}) + \mathbf{1}$$

# Πίνακας συνδέσεων-ισόμορφα γραφήματα

Έστω G, H δυο γραφήματα με A(G), A(H) πίνακες σύνδεσης αντίστοιχα. Θα είναι ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης P ώστε

$$PTA(G)\,P = \mathrm{A}(H)$$

Οι πίνακες μετάθεσης είναι ορθομοναδιαίαοι επομένως $P^T = P^{-1}$, άρα

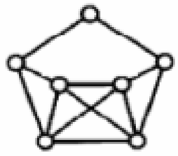
$$\varphi(\mathrm{A(H)},\lambda) = \det(PTA(G)\,P - \lambda\mathrm{I}) = \det(A(G) - \lambda\mathrm{I})$$
$$= \varphi(\mathrm{A}(G),\lambda)$$

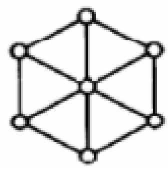
Επομένως ισόμορφα γραφήματα έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

**Όμως αυτό δεν ισχύει αντίστροφα**, όπως μπορεί να διαπιστωθεί στο επόμενο αντιπαράδειγμα δυο μη ισόμορφων γραφημάτων με το ίδιο φάσμα.

$\varphi(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+1)2(\lambda-1)2(\lambda^2 -$

$\Phi = \left\{-2, -1^{(2)}, 1^{(2)}, 1 \pm \sqrt{7}\right\}$





$^{(2)}$: ρίζα πολλαπλότητας 2.



# Βαθμολογία παικτών σε τουρνουά – Ranking in Tournaments

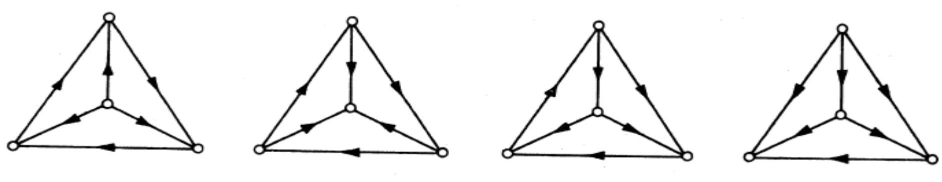
- Τουρνουά – tournament, καλούμε ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα.

**Λ.** Στα τουρνουά υπάρχει μια κορυφή τέτοια από την οποία υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι μήκους 2 προς κάθε άλλη κορυφή.

- Η απόδειξη στηρίζεται στο επόμενο Θεώρημα.

**Θ.** Σε κάθε κατευθυνόμενο γράφημα D χωρίς κύκλους μήκους 1 (loops), υπάρχει ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών S τέτοιο ώστε για κάθε κορυφή του D – S υπάρχει ένα μονοπάτι από κάποια κορυφή του S με μήκος το πολύ 2.

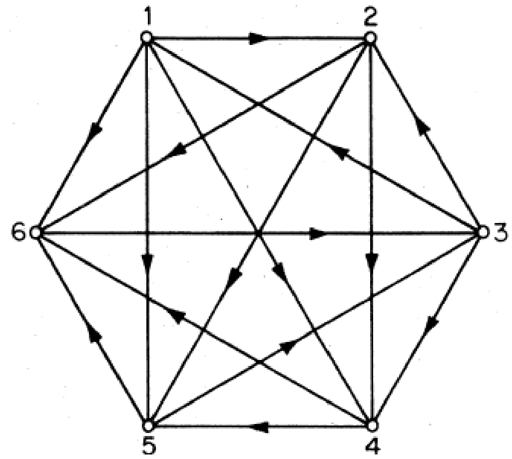
**Απόδειξη**. Με επαγωγή το Θ ισχύει για n=1. Υποθέτουμε ότι ισχύει για γραφήματα τάξης μικρότερης του n. Έστω v μια κορυφή του D (|V(D)|=n). Θεωρούμε το γράφημα D΄ = D-{{v}∪N⁺(v)}, όπου N⁺(v) το σύνολο των έξω γειτόνων της v ( η αντίστοιχη ακμή έχει εκεί το πέρας της). Στο D΄ η ιδιότητα ισχύει από την επαγωγή, δηλαδή υπάρχει ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών S ώστε κάθε κορυφή του είναι προσπελάσιμη από μια κορυφή του D΄– S από ένα μονοπάτι το πολύ μήκους 2. Αν η κορυφή v είναι έξω γείτονας για μια κορυφή του S τότε κάθε άλλη κορυφή του N⁺(v) είναι προσπελάσιμη από αυτή με ένα μονοπάτι μήκους 2. Αν η v δεν είναι γείτονας για καμία κορυφή του S τότε το ανεξάρτητο σύνολο κορυφών S΄=S ∪{v} έχει τη ζητούμενη ιδιότητα για το D.



Τουρνουά 4 κορυφών

# Βαθμολογία παικτών σε τουρνουά – Ranking in Tournaments

- Το πρόβλημα σε ένα τουρνουά είναι ένας αποδοτικός – αμερόληπτος τρόπος βαθμολόγησης των παικτών ανάλογα με τις νίκες του καθενός.




- Σε τουρνουά με 6 παίκτες η κατευθυνόμενη ακμή uv σημαίνει ότι ο u νίκησε τον v.
- **Ένας πρώτος τρόπος** βαθμολόγησης είναι με τις τελικές νίκες

$$s_1 = (4, 3, 3, 2, 2, 1)$$

οπότε βλέπουμε ότι πρώτος είναι ο 1 και οι επόμενοι δυο ισοβαθμούν.

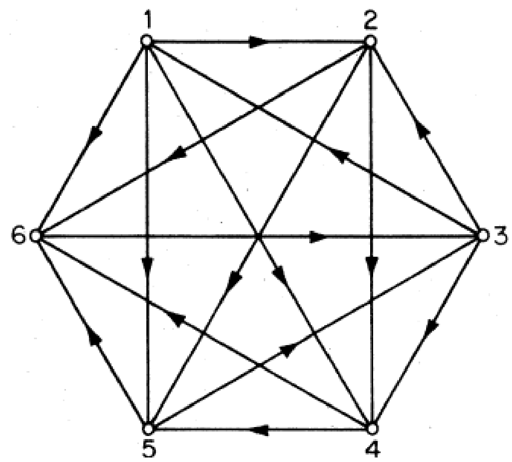
- Λαμβάνοντας όμως υπόψη και τις νίκες που είχε πραγματοποιήσει κάθε ηττημένος παίρνουμε μια διαφορετική εικόνα για τη βαθμολογία (ο τρίτος σταθμίζεται περισσότερο).

$$s_2 = (8, 5, 9, 3, 4, 3)$$



# Βαθμολογία παικτών σε τουρνουά – Ranking in Tournaments

- Προχωρώντας τη διαδικασία σε 6 βήματα (τελική βαθμολογία και συμπληρωματικά από τους 5 αγώνες που έδωσε ο καθένας), έχουμε:




$$s_3 = (15, 10, 16, 7, 12, 9)$$
$$s_4 = (38, 28, 32, 21, 25, 16)$$
$$s_5 = (90, 62, 87, 41, 48, 32)$$
$$s_6 = (183, 121, 193, 80, 119, 87)$$

- **Επομένως στο βήμα $s_6$ όπου είναι συγκεντρωμένη όλη η πληροφορία των αγώνων, βλέπουμε ότι ο τρίτος παίκτης είναι ισχυρότερος ελάχιστα από τον πρώτο ενώ οι υπόλοιποι είναι αρκετά χαμηλότερα.**

# Προσέγγιση με πίνακες

Αν A είναι ο πίνακας συνδέσεων:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad A\cdot\mathbf{1}=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\3\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$A^2\cdot\mathbf{1}=\begin{pmatrix}8\\5\\9\\3\\4\\3\end{pmatrix}\quad A^3\cdot\mathbf{1}=\begin{pmatrix}15\\10\\16\\7\\12\\9\end{pmatrix}\quad A^4\cdot\mathbf{1}=\begin{pmatrix}38\\28\\32\\21\\25\\16\end{pmatrix}\quad A^5\cdot\mathbf{1}=\begin{pmatrix}90\\62\\87\\41\\48\\32\end{pmatrix}\quad A^6\cdot\mathbf{1}=\begin{pmatrix}183\\121\\193\\80\\119\\87\end{pmatrix}$$

διότι είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η δύναμη k τάξης του πίνακα συνδέσεων δίνει τους περιπάτους k τάξης μεταξύ των διαφόρων κορυφών του γραφήματος



# Βαθμολογία παικτών σε τουρνουά – η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα συνδέσεων

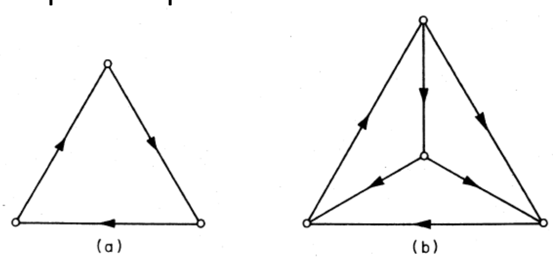
- Ένας τρόπος να βαθμολογήσουμε τους παίκτες σύμφωνα με τη σχετική αξία τους δίνεται από το Θεώρημα Perron-Frobenius.
- Ένας πίνακας A καλείται **πρωταρχικός** (primitive, οπότε και το αντίστοιχο γράφημα είναι αδιαχώριστο-αποτελεί μια συνιστώσα) όταν

  **$A^r > 0$** , για κάποιο r>0 (δηλαδή έχει κάθε στοιχείο θετικό).

Θ. Έστω D ένα τουρνουά ώστε το αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα να είναι ισχυρά συνδετικό, |V(D)|≥5 και d η διάμετρος του κατευθυνόμενου D. Τότε ο πίνακας **$A^{d+3}$** έχει όλα τα στοιχεία του θετικά.

Π. Ο πίνακας συνδέσεων A ενός τουρνουά είναι πρωταρχικός αν και μόνο αν είναι ισχυρά συνδετικό και |V(D)| ≥4.

Η απόδειξη (στηρίζεται στην απαρίθμηση των περιπάτων με δοθέν μήκος που δίνεται από τις δυνάμεις του πίνακα συνδέσεων), επεκτείνεται στην περίπτωση των 4 παικτών.




Στην περίπτωση του τριγώνου εύκολα με τις δυνάμεις του πίνακα συνδέσεων αποδεικνύεται ότι δεν είναι πρωταρχικός, ενώ για |V(D)| =4, και εκθέτη 9 αποδεικνύεται ότι κάθε στοιχείο του πίνακα συνδέσεων είναι θετικό.

# Βαθμολογία παικτών σε τουρνουά – η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα συνδέσεων

- Το σκορ των παικτών για κάθε ένα από τα βήματα είναι το πλήθος των κατευθυνόμενων κλειστών περιπάτων με αρχή τον εκάστοτε παίκτη έτσι

  $$\mathbf{s}_i = \mathbf{A}^i\mathbf{J}$$

  με J το διάνυσμα με κάθε στοιχειο ισο με 1.

  Αφού ο πίνακας είναι πρωταρχικός το γράφημα είναι ισχυρά συνδετικό επομένως από το Θεώρημα Perron-Frobenius στην θετική μεγαλύτερη ιδιοτιμή αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα με θετικά στοιχεία, ενώ επιπλέον

  $$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\mathbf{A}}{r}\right)^i \mathbf{J} = \mathbf{s}$$

  όπου r η μεγαλύτερη ιδιοτιμή και s το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Για την περίπτωση του παραδείγματος με τους 6 παίκτες βρίσκουμε την εξής σειρά

  $$r = 2.232 \quad \text{and} \quad \bar{\mathbf{s}} = (.238, .164, .231, .113, .150, .104)$$

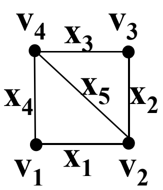
  Επομένως τελικά ότι ο πρώτος είναι ελάχιστα ισχυρότερος του τρίτου ενώ οι υπόλοιποι απέχουν αρκετά.



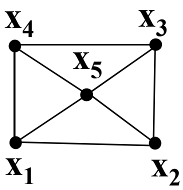
# Πίνακας αντιστοιχιών

Πίνακας αντιστοιχιών είναι ο p×q πίνακας $B=(b_{ij})$, με όπου G(p,q) σημασμένο γράφημα με
$V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ και $E(G)=\{x_1, x_2, ..., x_q\}$

$$\boxed{b_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ v_i \in x_j \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}}$$



G=K4-x



L(G)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Θ.** (1) $\mathbf{1}_p{}'B = 2\cdot\mathbf{1}_q{}'$

(2) $B\cdot\mathbf{1}_q = \boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\delta} = \left(\delta(v_1), \delta(v_2), ..., \delta(v_p)\right)'$$

# Πίνακας αντιστοιχιών

**Θ.** Αν L(G) το γραμμογράφημα του G, τότε ο πίνακας συνδέσεων A(L(G)) του L(G) και ο πίνακας αντιστοιχιών B(G) του G, ικανοποιούν τη σχέση:

$$A(L(G)) = B(G)'B(G) - 2 \cdot I_q$$

Επαλήθευση του θεωρήματος για το προηγούμενο παράδειγμα

$$A(L(G)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B'B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



# Θεώρημα Kirchoff

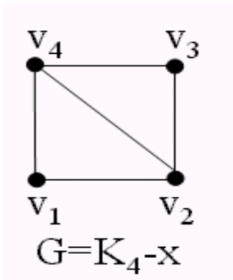
G συνδετικό, A(G) πίνακας συνδέσεων, **δ**(G) το διάνυσμα των βαθμών και M(G) ο πίνακας

$$M(G) = -A(G) + diag(\boldsymbol{\delta}(G))$$

Τότε οι συμπαράγοντες του M(G) είναι όλοι ίσοι και η κοινή τιμή τους δίνει το πλήθος των δένδρων ζεύξης του G

# Θεώρημα Kirchoff

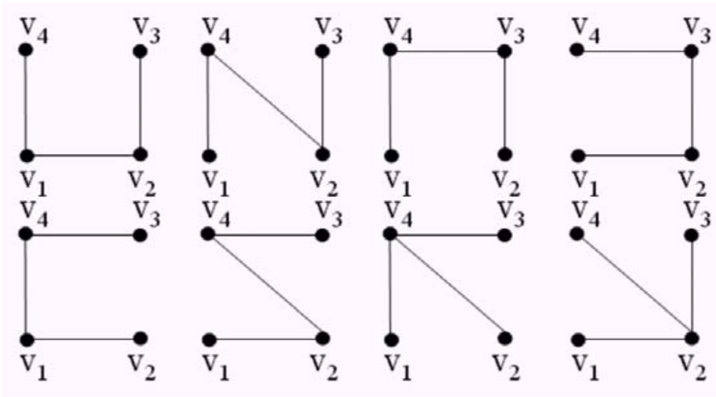
**Παράδειγμα**




$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}\quad \mathrm{M}(G)=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&2&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$(-1)^{1+1}\mathrm{M}_{11}=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=8$$

$$(-1)^{1+2}\mathrm{M}_{12}=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\0&2&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=8$$




**Π.** (Caylay) Το πλήθος σημασμένων δένδρων με p κορυφές είναι $p^{p-2}$.



# Λαπλασιανός Πίνακας (Laplacian)

Ο πίνακας M(G) ονομάζεται πίνακας Λαπλάς του G

$$M(G)=-A(G)+diag(\boldsymbol{\delta}(G))$$

**Ισχύει ότι:**

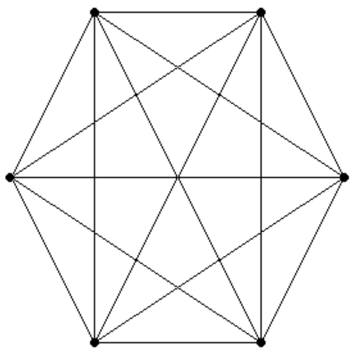
$$\mathbf{M(G)=D-A=BB^T}$$

όπου B ο προσανατολισμένος πίνακας αντιστοιχιών.

Πράγματι το γινόμενο δυο γραμμών του $BB^T$ μπορεί να δημιουργείται (α) από γραμμές που αντιστοιχούν στην ίδια κορυφή, οπότε το γινόμενο είναι ο βαθμός της κορυφής,
(β) από γραμμές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές κορυφές οι οποίες αν δεν ανήκουν στην ίδια ακμή θα έχουν γινόμενο 0 ενώ αν ανήκουν θα έχουν γινόμενο -1 αφού η μια θα είναι η αρχή και η άλλη το πέρας (προσανατολισμός στον B).

# Λαπλασιανός Πίνακας (Laplacian)

Η μεγαλύτερη μη μηδενική ιδιοτιμή του πίνακα Laplace είναι ένας δείκτης που σχετίζεται με τη δομή του γραφήματος (ειδικά σε δίκτυα που έχουν τοπολογική εξέλιξη και δεν είναι στατικά). Σαν παράδειγμα θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές ενός «πυκνού» και ενός «αραιού» γραφήματος



Το πλήρες $K_6$.

$$M(K_6)=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$v, e := \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

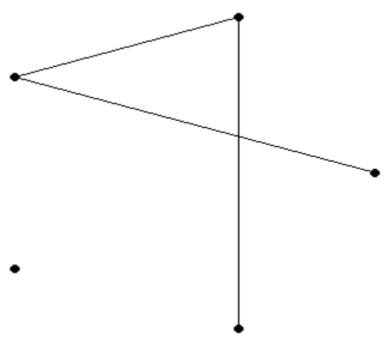
Το πρώτο διάνυσμα περιέχει τις ιδιοτιμές και τα υπόλοιπα τα ιδιοδιανύσματα, αντίστοιχα (**$\lambda_1$=6**, πολλαπλότητας 5, η μικρότερη 0)



# Λαπλασιανός Πίνακας (Laplacian)

Θεωρούμε τον πίνακα adj1 και δημιουργούμε το γράφημα από αυτόν

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$



Ο λαπλασιανός πίνακας είναι

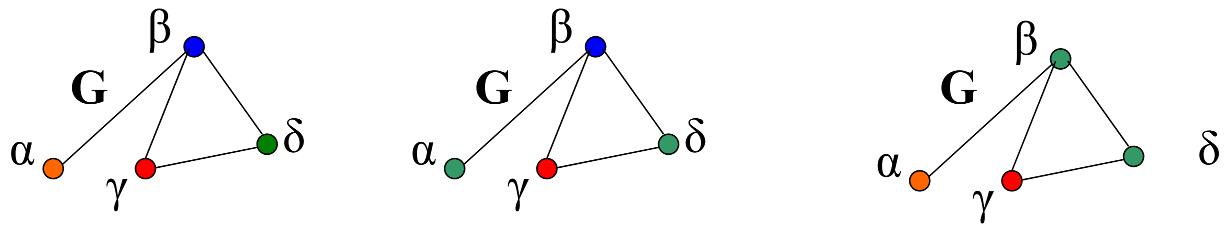
$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

και η φασματική ανάλυσή του:

$$v, e := \begin{bmatrix} 2. \\ 3.414 \\ 0.586 \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1. & 2.414 & -0.414 & 1. & 0. \\ -1. & -2.414 & 0.4143 & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \\ 1. & -1. & -1. & 1. & 0. \\ 1. & 1. & 1. & 1. & 0. \end{bmatrix}$$

Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ≠0 είναι ίση με 3,414

# Χρωματικά Πολυώνυμα




γνήσιοι χρωματισμοί — μη-γνήσιος χρωματισμός

P(G,x) : πλήθος γνήσιων χρωματισμών με το πολύ x χρώματα.

**Εύρεση του P(G,x)**

$\alpha_1$ Οι κορυφές α,β έχουν ίδιο χρώμα
$\alpha_2$ Οι κορυφές β,γ έχουν ίδιο χρώμα
$\alpha_3$ Οι κορυφές β,δ έχουν ίδιο χρώμα
$\alpha_4$ Οι κορυφές γ,δ έχουν ίδιο χρώμα

Θεωρούμε όλους τους χρωματισμούς με x χρώματα, γνήσιους και μη-γνήσιους

Ισχύουν
$N = x^4$,
$N(\alpha_1) = \cdots = N(\alpha_4) = x^3$,
$N(\alpha_1\alpha_2) = \cdots = N(\alpha_3\alpha_4) = x^2$,
$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4) = N(\alpha_1\alpha_3\alpha_4) = x$,
ενώ $N(\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = x^2$
$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = x$.



# Χρωματικά Πολυώνυμα (2)

Τότε: $$P(G,x) = N(\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\ \alpha_n') = N - \sum N(\alpha_i) + \sum N(\alpha_i\alpha_j) - $$
$$- \sum N(\alpha_i\alpha_j\alpha_j) + N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) =$$
$$= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - (3x + x^2) + x$$

Άρα $\boxed{P(G,x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x}$ Χρωματικό πολυώνυμο

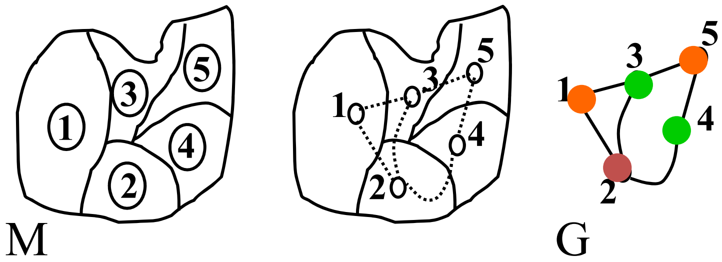
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(G,x) | 0 | 0 | 12 | 72 | 240 | 600 |

Οι 12 χρωματισμοί του G με ακριβώς 3 χρώματα 1,2,3 είναι

1213 2123 3132
1312 2321 3231
1231 2132 3123
1321 2312 3213

χ(G)=3 Χρωματικός αριθμός
μικρότερο x για μη μηδενική τιμή

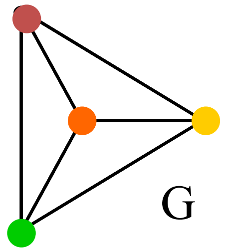
# Χάρτες



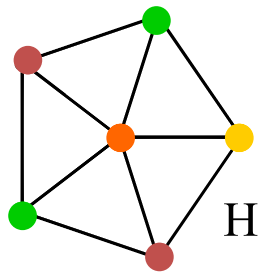

Ο χρωματισμός των κορυφών του G, ισοδυναμεί με χρωματισμό των χωρών του χάρτη M. Το G είναι προφανώς επίπεδο γράφημα.

**Θ.** Ισχύει

$X(G) \leq 1 + \Delta(G)$




$X(G)=4=$
$=1+\Delta(G)$




$X(G)=4<$
$<1+\Delta(G)$

## Το πρόβλημα των 4 χρωμάτων

Οι Appel and Haken στο Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) σελ. 711-712, απέδειξαν με Η/Υ με εκτύπωση αρκετών εκατοντάδων σελίδων, ότι αρκούν 4 χρώματα για το χρωματισμό κάθε επίπεδου γραφήματος. Η προσπάθεια συνεχίζεται για απλούστερη απόδειξη.



# Το πρόβλημα των 5 χρωμάτων

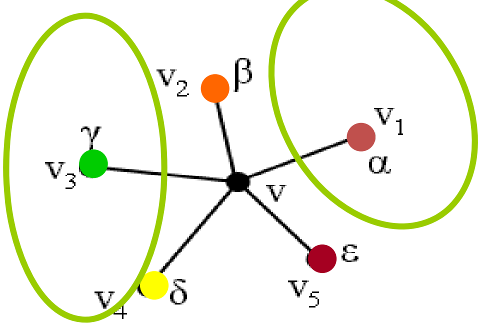
**Θ.** (Heawood 1890). Για κάθε επίπεδο γράφημα $X(G) \leq 5$.

Έχει νόημα για p>5. Επαγωγικά. Έστω ισχύει για p. Θεωρούμε G επίπεδο με p+1 κορυφές. Υπάρχει τότε κορυφή v με βαθμό 5 ή λιγότερο (άσκηση 5.5.3). Το G-v έχει $X(G\text{-}v) \leq 5$. Αν $\delta(v)<5$ χρωματίζουμε τη v με το χρώμα που δεν συνδέεται. Έστω $\delta(v)=5$.

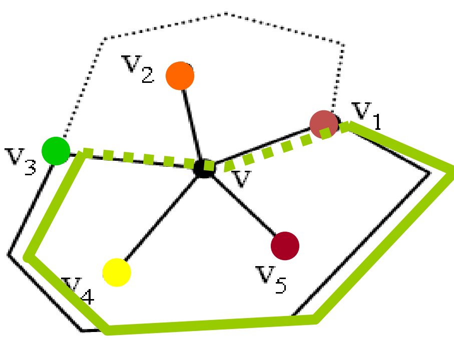
Στο G-v παίρνω το υπογράφημα με κορυφές α ή γ. Υπάρχουν 2 περιπτώσεις

(1) $v_1$, $v_3$ σε διαφορετικούς παράγοντες

Σ' αυτόν που έχει την $v_1$ αντιμετα-θέτω α με γ. Θέτω στην v το α




(2) $v_1$, $v_3$ στον ίδιο παράγοντα




$v_2$, $v_4$ θα ανήκουν σε άλλους παράγ. κλπ.

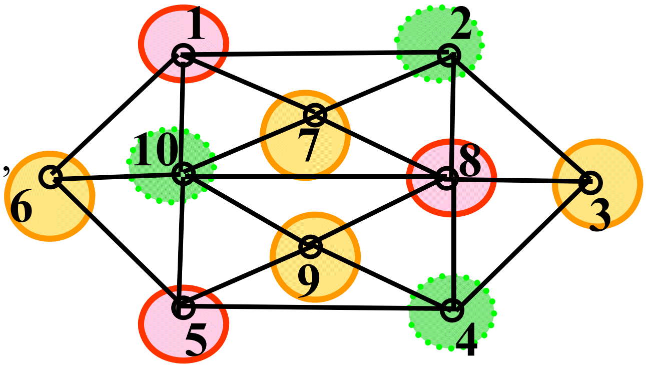
# ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ (με ανεξάρτητα σύνολα κορυφών)

*Πρώτη φάση*: Εύρεση όλων των ανεξάρτητων συνόλων κορυφών με την ιδιότητα κανένα από αυτά να μην είναι υποσύνολο άλλου.

*Δεύτερη φάση*: Εύρεση όλων των δυνατών ενώσεων των ανεξαρτήτων συνόλων κορυφών που έχουν ένωση το V. Το s που δίνει το μικρότερο πλήθος τέτοιων συνόλων είναι ο χρωματικός αριθμός.

Παράδειγμα

α΄: Τα ανεξάρτητα σύνολα:
{1,3,5}, {1,3,9}, {1,4}, {1,5,8}, {2,4,6}, {2,4,10}, {2,5}, {2,6,9}, {3,5,7}, {3,6,7,9}, {3,10}, {4,6,7}, {6,8}.




β΄: Η ένωση των λιγότερων από αυτά που συμπληρώνουν το V είναι:
$\{1,5,8\} \cup \{2,4,10\} \cup \{3,6,7,9\} = V$.

Άρα X(G)=3.



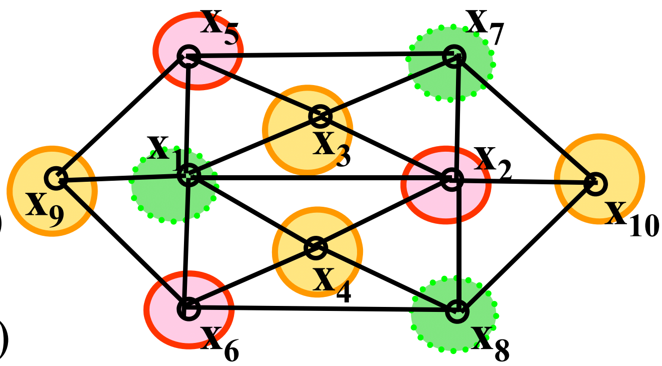
# ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ (του Χριστοφίδη)

1. Διατάσσουμε τις κορυφές σε φθίνουσα σειρά βαθμών, δηλ.
   $x_1, x_2, ..., x_p$ αν $\delta(x_1) \geq \delta(x_2) \geq ... \geq \delta(x_p)$.
2. Αντιστοιχίζω το χρώμα 1 στην $x_1$.
3. Ελέγχουμε την επόμενη κορυφή στη σειρά, αν δεν συνδέεται άμεσα με κάποια από τις κορυφές που έχει εξεταστεί προηγούμενα. Αν συμβαίνει αυτό δίνουμε στην κορυφή το χρώμα αυτό και μάλιστα το μικρότερο δυνατό. Αλλιώς της δίνουμε το επόμενο χρώμα, αυτό που δεν είχε δοθεί μέχρι τώρα.

Παράδειγμα

$x_1 \leftarrow 1$
$x_2 \leftarrow 2$ (συνδέεται με $x_1$)
$x_3 \leftarrow 3$ (συνδέεται με $x_1$ και με $x_2$)
$x_4 \leftarrow 3$ (δεν συνδέεται με $x_3$)
$x_5 \leftarrow 2$ (συνδέεται με $x_1$, όχι με $x_2$)
κλπ.

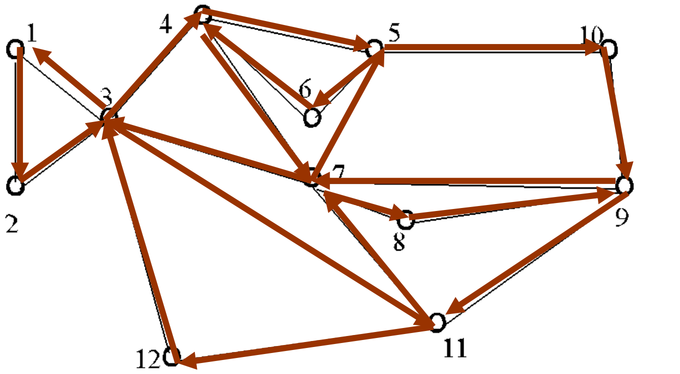
Τελικά **1, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 3**




Άρα X(G)=3.

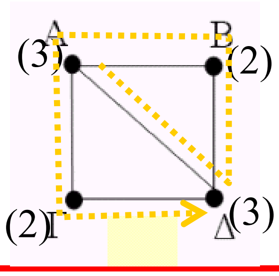
# Γραφήματα Euler

**Θ.** Οι προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(1) Το G είναι γράφημα Euler.
(2) Κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.
(3) Το σύνολο των κορυφών του G μπορεί να χωριστεί σε κύκλους

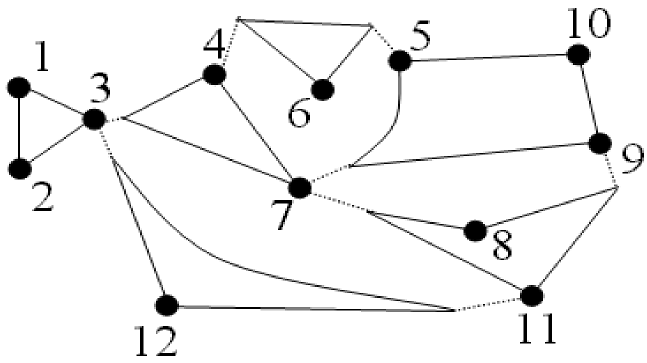



1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 7, 5, 10, 9, 7, 8, 9, 11, 7, 3, 11,12, 3, **1**

Κλειστή μονοκονδυλιά




Ανοικτή μονοκονδυλιά = ανοικτή διαδρομή Euler

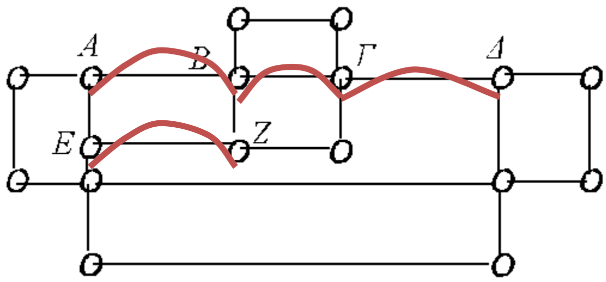



**Θ.** Αν G έχει 2n κορυφές περιττού βαθμού, τότε υπάρχουν n ανοιχτές διαδρομές Euler, ξένες μεταξύ τους.



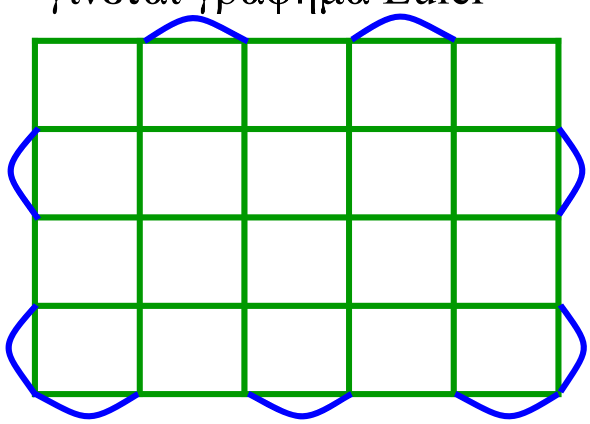
# Πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου

Διαπιστώσατε ότι το γράφημα δίπλα δεν είναι Euler, ούτε έχει ανοικτή διαδρομή Euler. Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος προσθήκης ακμών (επιτρεπτών) ώστε να υπάρξει διαδρομή Euler; (chinese postman problem).



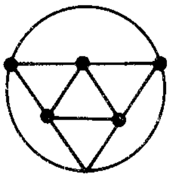

Με AB, BΓ, ΓΔ, EZ, γίνεται γράφημα Euler

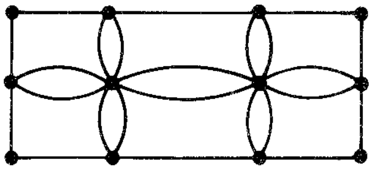
καλή μετατροπή γραφήματος οικοδομικών τετραγώνων, σε γράφημα Euler



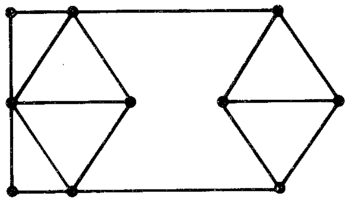
# Ασκήσεις

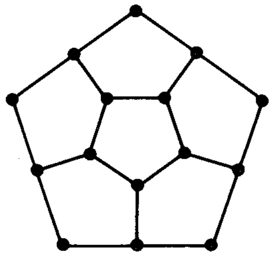
Βρέστε μία κλειστή διαδρομή Euler στα παρακάτω γραφήματα.



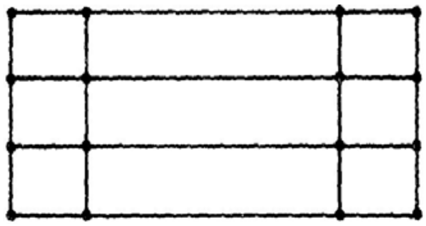


Συμπληρώστε ώστε να γίνουν γραφήματα Euler

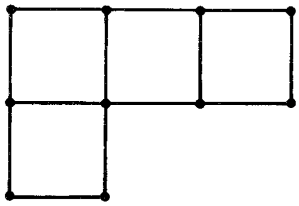


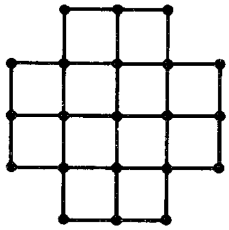


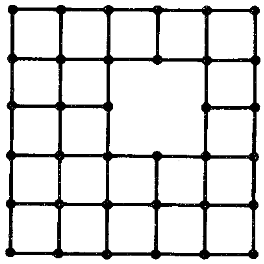
Τα τετράγωνα στο σχήμα έχουν πλευρά 1000 μ., ενώ η μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου 4000 μ. Μετατρέψτε το σε γράφημα Euler με τρόπο ώστε οι επί πλέον ακμές να έχουν μήκος 8000 μ.



Συμπληρώστε με καλές μετατροπές, ώστε να γίνουν γραφήματα Euler



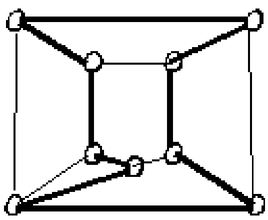


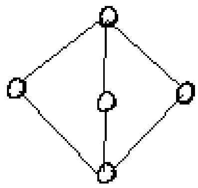


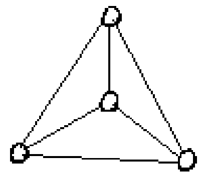


# Γραφήματα Hamilton

Αν το γράφημα G περιέχει έναν κύκλο Z που περνά από όλες τις κορυφές του G ακριβώς μία φορά, (αν δηλαδή ο Z είναι κύκλος ζεύξης), τότε το G λέγεται ***γράφημα Hamilton*** και ο Z λέγεται ***κύκλος Hamilton***.





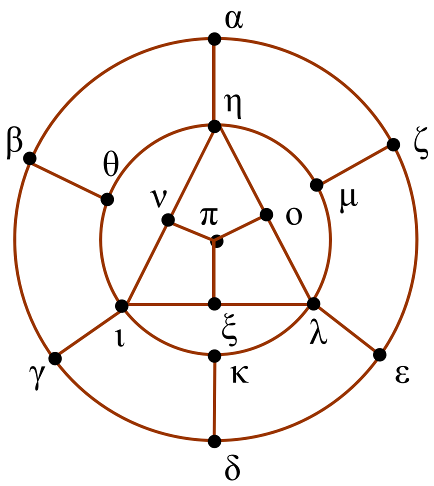


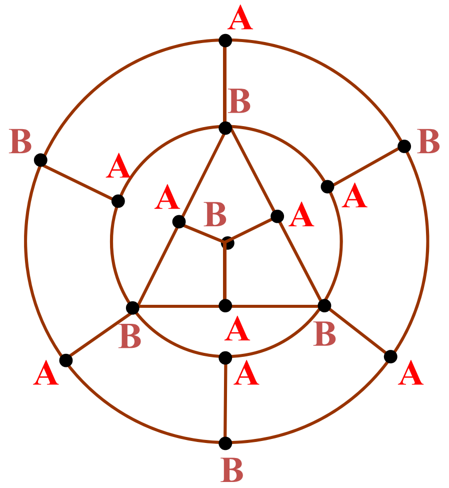
Το α΄ γράφημα έχει κύκλο Hamilton (όπως φαίνεται), το β΄ δεν έχει, ενώ το γ΄ έχει τρεις διαφορετικούς κύκλους.

Αν και έχουν δοθεί διάφορες ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα γράφημα G να περιέχει έναν κύκλο Hamilton, δεν υπάρχει μέχρι τώρα μία συνθήκη που να οδηγεί σε πολυωνυμικό αλγόριθμο. Το πρόβλημα του **περιοδεύοντος εμπορικού αντιπροσώπου** (traveling salesman problem) είναι μία γενίκευση του παραπάνω προβλήματος. Το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί με ένα γράφημα, στο οποίο ζητείται να εξετάσουμε αν περιέχεται κύκλος Hamilton και, αν ναι, να ευρεθεί εκείνος που ελαχιστοποιεί κάποια αντικειμενική συνάρτηση των ακμών που μπορεί να αφορά χρόνο, μήκος, κόστος, κλπ. Το πρόβλημα αυτό που είναι το διασημότερο στην Επιχειρησιακή έρευνα, είναι ένα NP-complete πρόβλημα.

# Μία μέθοδος για μη-Hamilton

Για το γράφημα αριστερά



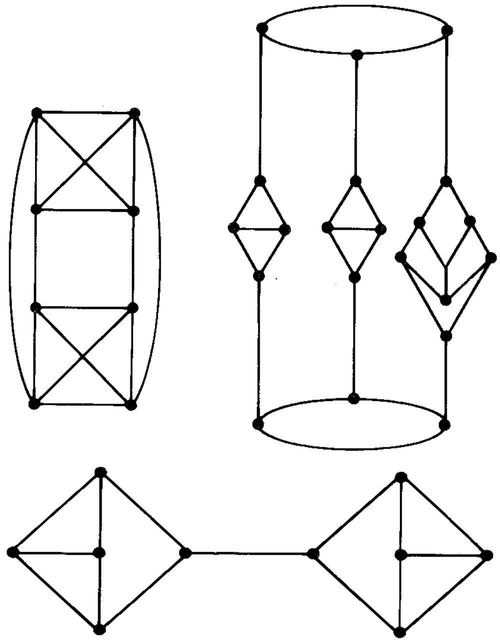




σημάναμε τις κορυφές με δύο γράμματα (χρώματα) ώστε διαδοχικές κορυφές να έχουν διαφορετικό γράμμα και δεν υπήρξε πρόβλημα. Επειδή υπάρχουν 9 κορυφές A και 7 κορυφές B, και ένας κύκλος Hamilton θα περιέχει εναλλάξ A και B, άρα δεν υπάρχει τέτοιος κύκλος.

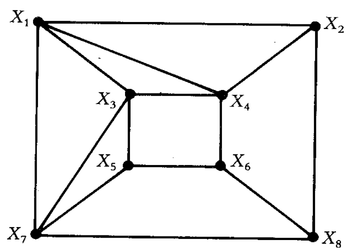


# Ασκήσεις

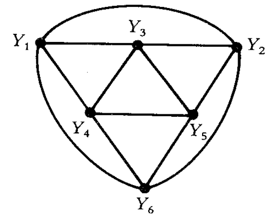
Βρέστε, αν υπάρχει, μία διαδρομή Hamilton στα παρακάτω γραφήματα.



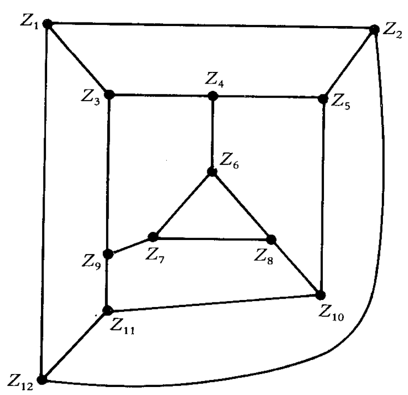
Βρέστε, αν υπάρχει, διαδρομή Euler ή Hamilton στα παρακάτω γραφήματα.



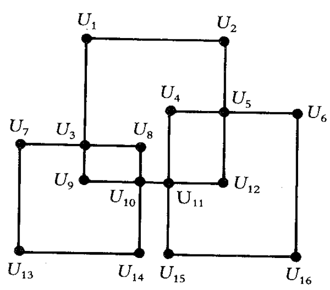

(a)




(b)




(c)

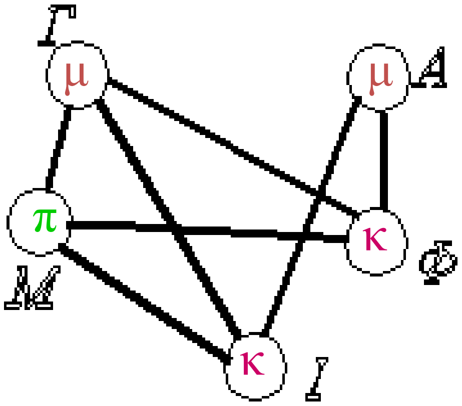



(d)

# Εφαρμογή

Δίνονται οι παρακάτω μαθητές και το μάθημα που πρόκειται να εξεταστούν:
Ιωάννου, Κων/νου, Χρήστου και Δήμου, θα εξεταστούν στη (Γ)λώσσα,
Νικολάου, Δήμου, Σιδεράς και Ιωάννου, θα εξεταστούν στα (Μ)αθηματικά
Λαδάς, Μανδαρίνος, θα εξεταστούν στα (Α)γγλικά,
Λαδάς, Δήμου και Γεωργός, θα εξεταστούν στη (Φ)υσική, και
Μανδαρίνος, Παπάς, Ιωάννου και Ιατρού, θα εξεταστούν στην (Ι)στορία.

**Ερώτημα:**
Μπορούν τα μαθήματα αυτά να εξεταστούν τις μέρες Δευτέρα, Τετάρτη και Παρασκευή χωρίς να υπάρξει πρόβλημα με τους μαθητές που χρωστούν περισσότερα από ένα μαθήματα;




κορυφές= μαθήματα

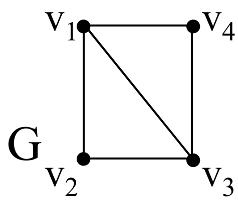
ακμές=κοινός εξεταζόμενος

Απάντηση. ΝΑΙ
Δευτέρα=κ, Τετάρτη=μ, Παρασκευή=π

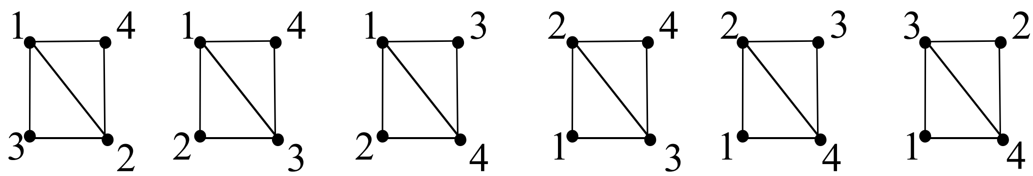


# Τρόποι σήμανσης γραφημάτων

Το γράφημα G, 4 κορυφών και 5 ακμών, που δίνεται δίπλα




μπορεί να σημανθεί με 6 διαφορετικούς τρόπους, τους:




Ισχύει το Θ.: Αν s(G) το πλήθος των αυτομορφισμών του V(G), τότε:
$\ell(G) = p!/s(G)$

Το G έχει 4 αυτομορφισμούς κορυφών, τους

$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4)$, $(v_1)(v_3)(v_2v_4)$, $(v_1v_3)(v_2)(v_4)$, $(v_1v_3)(v_2v_4)$

γραμμένους ως μεταθέσεις εκφρασμένες με κύκλους.
Άρα

$$\ell(G) = 4!/4=6$$

όπως διαπιστώθηκε ήδη.

# Θεώρημα Polya (PET)

Έστω ότι έχουμε n χάντρες k διαφορετικών χρωμάτων. Πόσα διαφορετικά κολιέ μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Αποδεικνύεται ότι αν c(n,k) είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε:

$$\boxed{c(n,k) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)k^{n/d}}$$

όπου $\phi(\cdot)$ η συνάρτηση Euler

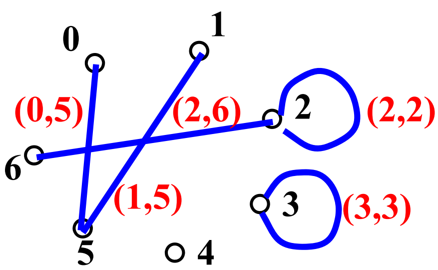
Αν και το πρόβλημα μοιάζει ασήμαντο, ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση ενός πολύ δύσκολου προβλήματος στη θεωρία των Lie αλγεβρών που έχει μεγάλη σπουδαιότητα στη μοντέρνα Φυσική.

Ο G. Polya έλυσε το 1937 το γενικό πρόβλημα απαρίθμησης, γνωστό ως Polya's Enumeration Theorem, αξιοποιώντας τη σχέση μεταξύ ομάδων (αυτομορφισμών), γραφημάτων και χημικών δεσμών. Είναι ένα θεώρημα απαρίθμησης συναρτήσεων. Συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι και η απαρίθμηση πολλών ειδών γραφημάτων.



# Εφαρμογές

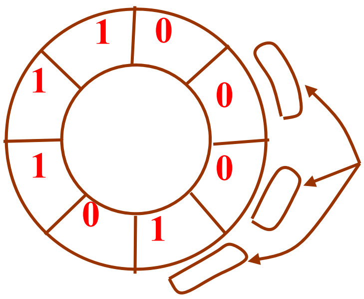
Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν όλα τα «ντόμινο» σε κυκλική διάταξη, ώστε τα γειτονικά να εφάπτονται με το ίδιο πλήθος τελειών;

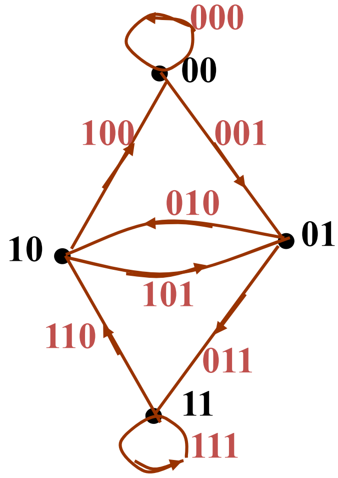



Ας θεωρήσουμε το γράφημα $K_7$ μαζί με τους 7 βρόχους. Κάθε μία από τις 21 ακμές παριστάνει το ντόμινο με διαφορετικά μισά (αυτά των άκρων της), ενώ οι βρόχοι με τα ίδια μισά.

Η λύση πετυχαίνεται με διαδρομή Euler που είναι εφικτή (γιατί;)

Αναγνώριση θέσης τυμπάνου χωρίς οπτική επαφή. Με αγώγιμα (1) και μη αγώγιμα (0) υλικά




Διαδρομή Euler

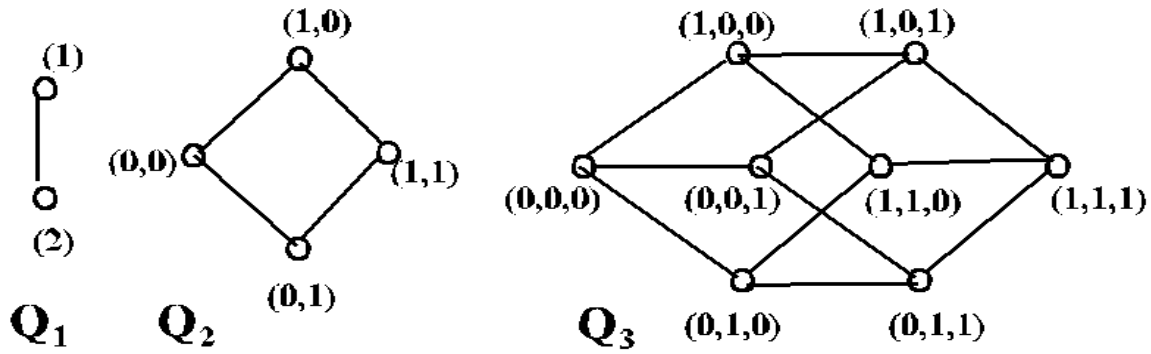
| 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100 |
|---|

00010111

# n-κύβοι

$Q_n$ : $V(Q_n)=\{(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0) : x_i=0 \text{ ή } 1\}$

$E(Q_n)$ περιέχει ζεύγη στοιχείων που διαφέρουν σε ακριβώς 1 θέση.




**Θ.** Κάθε n-κύβος $Q_n$ είναι γράφημα Hamilton.

*(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (0,1,0), (1,1,0), (1,1,1), (1,0,1), (1,0,0), (0,0,0)*



# Κώδικες Gray (Gray codes)

| Δεκαδικοί | |
|---|---|
| 001 | 1 |
| 002 | 1 |
| ….. | … |
| 009 | 2 |
| 010 | 1 |
| 011 | 1 |
| ….. | … |
| 099 | 3 |
| 100 | 1 |
| 101 | |

| Δυαδικοί | |
|---|---|
| 0001 | 2 |
| 0010 | 1 |
| 0011 | 3 |
| 0100 | 1 |
| 0101 | 2 |
| 0110 | 1 |
| 0111 | 4 |
| 1000 | 1 |
| 1001 | 2 |
| 1010 | … |

$N= x_{n-1}\ldots x_0$

| Κώδ. Gray | |
|---|---|
| 0001 | 1 |
| 0011 | 1 |
| 0010 | 1 |
| 0110 | 1 |
| 0111 | 1 |
| 0101 | 1 |
| 0100 | 1 |
| 1100 | 1 |
| 1101 | 1 |
| 1111 | … |

$M= y_{n-1}\ldots y_0$

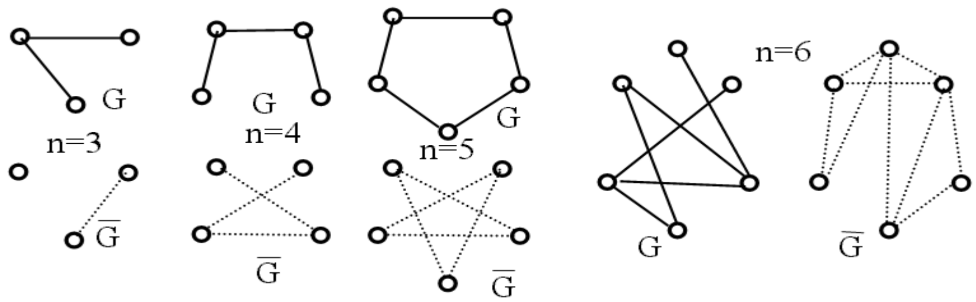
κύκλος Hamilton στον 4-κύβο

**Αποδεικνύεται:**

$x_i$ γνωστά, τότε: $y_i/x_i+x_{i+1}$(mod2), $i=0,1,\ldots,n-1$ $(x_n=0)$

$y_i$ γνωστά, τότε: $x_i/y_i+y_{i+1}+\ldots+y_{n-1}$ (mod2), $i=0,1,\ldots,n-1$

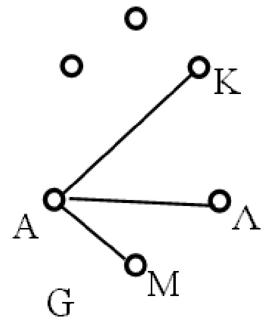
# Αριθμοί Ramsey




**Θ.** Αν G είναι γράφημα με 6 κορυφές τότε είτε το G είτε το $\overline{G}$ περιέχει τρίγωνο

(α) Η κορυφή Α έχει βαθμό ≥3

(β) Η κορυφή Α έχει βαθμό <3




**Π.** Σε οποιαδήποτε συντροφιά 6 ατόμων, τα οποία μπορούν να μιλούν οποιεσδήποτε γλώσσες, **υπάρχουν** είτε τρία άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα είτε τρία άτομα που ανά δύο δε μιλούν την ίδια γλώσσα.



# (p, q)-ιδιότητα του Ramsey

**Ορ.** Έστω ένα σύνολο S με N στοιχεία και δύο φυσικοί αριθμοί p και q, με p, q≥2. Σχηματίζουμε όλα τα 2-υποσύνολα του S και τα κατανέμουμε με οποιονδήποτε τρόπο σε δύο σύνολα X και Y. Αν για οποιαδήποτε τέτοια κατανομή ισχύει ένα από τα παρακάτω,

(α) ∃ p-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ∈ X, $2 \to r$

(b) ∃ q-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ∈ Y, $2 \to r$

$(p,q) \to (p,q,r)$

τότε θα λέμε ότι ο αριθμός N έχει την *(p, q)-ιδιότητα του Ramsey*.

**Θ.** (Ramsey). Έστω p, q ≥ 2 φυσικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός N, που έχει την (p, q)-ιδιότητα του Ramsey. Ο αριθμός αυτός λέγεται αριθμός Ramsey των p, q και συμβολίζεται R(p,q). Γενίκευση

**Ισοδύναμα.** Έστω p, q ≥ 2 δύο οποιοιδήποτε φυσικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει φυσικός N, τέτοιος ώστε αν σχηματίσουμε το πλήρες γράφημα $K_N$, και χρωματίσουμε με οποιονδήποτε τρόπο με δύο χρώματα τις ακμές του γραφήματος, τότε θα συμβαίνει είτε να έχουμε χρωματίσει ένα πλήρες $K_p$ με το πρώτο χρώμα, είτε να έχουμε χρωματίσει ένα πλήρες $K_q$ με το δεύτερο χρώμα.

# Γνωστοί αριθμοί Ramsey

Εύκολα αποδεικνύεται ότι R(p,2)=p και R(2,q)=q.

Για τις άλλες περιπτώσεις έχουν αποδειχθεί ελάχιστα. Ένα άνω φράγμα για τον αριθμό R(p, q) είναι το:

$$\binom{p+q-2}{p-1}$$

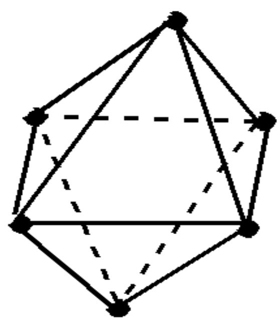
Οι μέχρι σήμερα γνωστοί αριθμοί Ramsey είναι οι:

| | |
|---|---|
| R(3,3)=6 | Greenwood και Gleason (1955) |
| R(3,4)=R(4,3)=9 | |
| R(3,5)=R(5,3)=14 | |
| R(3,6)=R(6,3)=18 | Kalbfleisch(1966), Kèry(1964) |
| R(3,7)=R(7,3)=23 | Graver και Yackel (1968) |
| R(3,8)=R(8,3)=28 ή 29 | Grinstead και Roberts (1982) |
| R(3,9)=R(9,3)=36 | |
| R(4,4)=18 | Greenwood και Gleason (1955) |

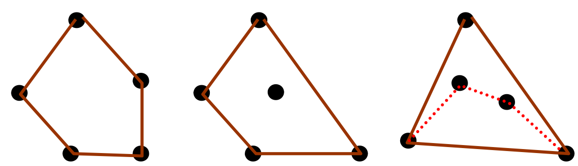


# Προβλήματα

Σ' ένα οκτάεδρο χρωματίζουμε με τυχαίο τρόπο τις ακμές του και τις διαγώνιές του, χρησιμοποιώντας δύο χρώματα. Να δειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε τρίγωνο με πλευρές ίδιου χρώματος.
Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι 12 ακμές μαζί με τις 3 διαγώνιες συμπληρώνουν το πλήρες γράφημα 6 κορυφών, και να εφαρμόσουμε το θεώρημα Ramsey



Αν 5 σημεία του επιπέδου είναι σε «γενική» τοποθέτηση τότε 4 από αυτά σχηματίζουν κυρτό τετρακόρυφο.



Αν m≥4, υπάρχει ένας αριθμός N(m) τέτοιος ώστε αν n σημεία είναι σε «γενική» τοποθέτηση και n ≥ N(m), τότε m από αυτά σχηματίζουν κυρτό m-κόρυφο. (Erdös και Szekeres 1935)

Για την απόδειξη παίρνουμε ως N(m) τον αριθμό Ramsey R(5,m;4) που σύμφωνα με το Θ. Ramsey υπάρχει. Χωρίζουμε, μετά, τα 4-υποσύνολα κορυφών σε δύο σύνολα X, Y που περιέχουν τα μη-κυρτά και κυρτά 4-κόρυφα. (Αποδεικνύεται ότι αν όλα τα 4-κόρυφα που σχηματίζουν m σημεία είναι κυρτά, τότε τα m σημεία αποτελούν κυρτό m-κόρυφο)

# Βιβλιογραφία


- Diestel Reinhard: Graph Theory, Electronic Edition 2005

  http://diestel-graph-theory.com/GrTh.html
- Bondy J.A. & Murty U.S.R.: Graph Theory, 2008
- Χρόνη Μωυσιάδη: Συνδυαστική Απαρίθμηση, 2002
- Παπαϊωάννου: Θεωρία Γραφημάτων, 2004
- Bronshtein I.N., K.A. Semendyayev, G. Musiol, H. Muehlig: Handbook of Mathematics, 2007