# ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
# και
# ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Μωυσιάδης Χρόνης
Πιθανοθεωρητική Προσομοίωση και Γραφήματα

# Ορισμοί

Έστω $\alpha_k$, k=0, 1, 2,… πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

| | | |
|---|---|---|
| Η ως προς t συνάρτηση (που ορίζεται σε διάστημα όπου συγκλίνει η σειρά) | $A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k$ | λέγεται γεννήτρια συνάρτηση |
| ενώ, η | $E(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \frac{t^k}{k!}$ | λέγεται εκθετική γεννήτρια |

**Συνέλιξη (convolution)** δύο ακολουθιών $(\alpha_n)$ και $(\beta_n)$, συμβολισμός $(\alpha_n)*(\beta_n)$, λέγεται η ακολουθία $(\gamma_n)$, για την οποία ισχύει:

$$\gamma_n=\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\ldots+\alpha_n\beta_0 \qquad \boxed{\gamma_n=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\beta_{n-i}}$$

# Ιδιότητες

Έστω $A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k$ | $B(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k t^k$ | $\Gamma(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k t^k$

**Άθροισμα**

των γεννητριών A(t) και B(t), με ακολουθίες $(\alpha_n)$, $(\beta_n)$ είναι η γεννήτρια Γ(t) με ακολουθία $(\gamma_n)$ που είναι το άθροισμα $(\alpha_n)+(\beta_n)$, των αντίστοιχων ακολουθιών

$$\Gamma(t)=A(t)+B(t) \Leftrightarrow \gamma_k=\alpha_k+\beta_k, \quad k=0, 1, 2,\ldots$$

**Γινόμενο**

των γεννητριών A(t) και B(t), με ακολουθίες $(\alpha_n)$, $(\beta_n)$ είναι η γεννήτρια Γ(t) με ακολουθία $(\gamma_n)$ που είναι η συνέλιξη $(\alpha_n)*(\beta_n)$, των αντίστοιχων ακολουθιών

$$\Gamma(t)=A(t)\cdot B(t) \Leftrightarrow \gamma_k=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\beta_{k-i}, \quad k=0, 1, 2,\ldots$$



# Παραδείγματα

**i.** $\frac{1}{1-t}, |t|<1$

Γεννήτρια της 1,1,1,1,….,1,…

Εκθ. γεννήτρια της 1,1,2,6,24,….,n!,…

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}n!\cdot\frac{t^n}{n!}=1+t+t^2+t^3+\ldots, \quad |t|\le 1$$

**ii.** $e^t$

Γεννήτρια της 1,1,1/2,1/6,….,1/n!,…

Εκθ. γεννήτρια της 1,1,1,1,….,1,…

$$e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots, \quad t\in\mathbb{R}$$

**iii.** $\ln(1+t), |t|<1$

Γεννήτρια της $\alpha_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$$\ln(1+t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}t^k=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{4}t^4+\ldots, \quad |t|\le 1$$

# Παραδείγματα (2)

**iv.** Πολ/ζοντας i. και ii. $\dfrac{e^t}{1-t}, |t|<1$ Γεννήτρια της $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$

$$\frac{e^t}{1-t} = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 + t + t^2 + t^3 + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)t^n =$$
$$= 1 + 2t + (5/2)t^2 + (8/3)t^3 + \ldots$$

**v.** Παραγ/ζοντας την i. $\dfrac{1}{(1-t)^2}, |t|<1$ Γεννήτρια της $\alpha_n = n$

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right)' = 1+2t+3t^2+4t^3+\ldots,\ |t| \le 1$$



# Παραδείγματα (3)

**vi.** $(1+t)^r$, $r$ *πραγμ.* Γεννήτρια της $\alpha_k = \binom{r}{k}, k = 0,1,\ldots$

**vii.** $(1+t)^n$, $n$ *φυσικός* Γεννήτρια της $\alpha_k = \binom{n}{k}, k = 0,1,\ldots,n$

Εκθετική γεννήτρια της $\alpha_k = \Delta_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}, k = 0,1,\ldots,n$

**viii.** $(1+t)^{-n}$, $n$ *φυσικός*

Γεννήτρια της $\alpha_k = \mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}, k = 0,1,\ldots,n,\ldots$

# Γραμμικές αναδρομικές σχέσεις

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_n = c_1\alpha_{n\text{-}1} + c_2\alpha_{n\text{-}2} + c_3\alpha_{n\text{-}3} + \ldots + c_k\alpha_{n\text{-}k}, \quad n \geq k \\ \alpha_0, \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \ \textit{γνωστά}, \ \ c_i \ \textit{σταθ. ή γν. συναρτ. του } n \end{array}}$$

Επίλυση με τη βοήθεια γεννητριών. Διαδικασία:

Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση A(t) της ακολουθίας $\alpha_n$. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την αναδρομική σχέση με $t^n$ ή με $t^{n-1}$ και αθροίζουμε για όλες τις επιτρεπτές τιμές $n \geq k$. Στην παράσταση που σχηματίζεται εκφράζουμε τις σειρές που εμφανίζονται με τη βοήθεια της A(t), ή, αν είναι γνωστές, με το γνωστό άθροισμά τους. Λύνοντας ως προς A(t), υπολογίζουμε τη γεννήτρια ως συνάρτηση του t. Τέλος, αναπτύσσουμε τη συνάρτηση που βρήκαμε σε σειρά Taylor και ταυτοποιούμε τους συντελεστές με τις ζητούμενες ποσότητες.



# Μία απλή αναδρομική σχέση

Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} + 1, n = 0,1,2,\ldots \ \alpha_0 = 0$

Με καταγραφή

0, 1, 3, 7, 15, 31, …

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_n = 2^n - 1 \qquad \text{διότι} \\ 2\alpha_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1 = \alpha_n \end{array}}$$

με τηλεσκοπική άθροιση

$$\begin{array}{ll} \alpha_n = 2\alpha_{n-1} + 1 & \alpha_n = \cancel{2\alpha_{n-1}} + 1 \\ \alpha_{n-1} = 2\alpha_{n-2} + 1 & \cancel{2\alpha_{n-1}} = \cancel{2^2\alpha_{n-2}} + 2 \\ \alpha_{n-2} = 2\alpha_{n-3} + 1 & \cancel{2^2\alpha_{n-2}} = 2^3\alpha_{n-3} + 2^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 = 2\alpha_0 + 1 & \cancel{2^{n-1}\alpha_1} = 2^n\alpha_0 + 2^{n-1} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_n = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = \\ = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = \\ = 2^n - 1 \end{array}}$$

# Με γεννήτρια

$$A(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n t^n$$ η γεννήτρια των $\alpha_n$

$$\alpha_n t^n = 2\alpha_{n-1} t^n + t^n,\ n\ge 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n t^n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n-1} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} t^n$$

$$\Longrightarrow A(t)-0 = 2\cdot t\cdot A(t)+\frac{t}{1-t} \Longrightarrow A(t)=\frac{t}{(1-t)(1-2t)}$$

$$\Longrightarrow A(t) = t\left(\frac{2}{1-2t}-\frac{1}{1-t}\right)=$$

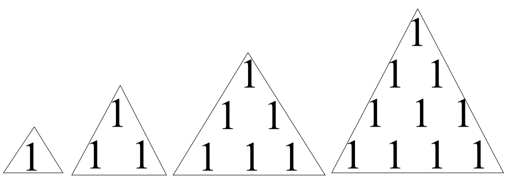
$$=(2t+2^2t^2+2^3t^3+\ldots)-(t+t^2+t^3+\ldots)=$$

$$=(2-1)t+(2^2-1)t^2+(2^3-1)t^3+\ldots$$

$$\Longrightarrow \alpha_n = 2^n-1$$



# Τρίγωνοι αριθμοί




τετρακτύς

$$\alpha_n = n+\alpha_{n-1},\ n=2,3,\ldots\quad \alpha_1=1$$

με τηλεσκοπική άθροιση $\alpha_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$A(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n t^n$$ η γεννήτρια των $\alpha_n$

$$\alpha_n t^n = n t^n + \alpha_{n-1}t^n,\ n\ge 2 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n t^n = \sum_{n=2}^{\infty} n t^n + \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-1}t^n$$

$$A(t)-t = -t + t\cdot\frac{1}{(1-t)^2}+t\cdot A(t) \Longrightarrow A(t)=\frac{t}{(1-t)^3}$$

$$A(t)=t\cdot(1-t)^{-3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{3+k-1}{k}t^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+1}{2}t^k$$

# Αριθμοί Fibonacci

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πληθυσμό κουνελιών κάθε ενήλικο ζευγάρι γεννά κάθε μήνα από ένα ζευγάρι κουνέλια. Τα νεογέννητα ενηλικιώνονται το δεύτερο μήνα οπότε και γεννούν το πρώτο ζευγάρι τους. Υποθέτουμε ακόμη ότι τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ. Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα υπάρχουν στην αρχή του n-στού μήνα, όταν αρχικά είχαμε ένα ενήλικο ζευγάρι;.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 1+1 | 2+1 | 3+2 | 5+3 | 8+5 | 13+8 | 21+13 |
| | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |

**Στην αρχή του n-ού μήνα υπάρχουν: όσα κουνέλια ήταν τον προηγούμενο μήνα ($F_{n-1}$) και όσα γεννήθηκαν τότε. Αυτά είναι όσα ενηλικιώνονται στην αρχή του n-ού μήνα δηλαδή όσα υπήρχαν δύο μήνες πριν ($F_{n-2}$)**

$$\boxed{F_0=1,\ F_1=1,\quad F_n= F_{n-1}+F_{n-2}\ ,\ n\geq 2}$$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 |



# Αριθμοί Fibonacci (γεννήτρια)

Για τους αριθμούς Fibonacci $F_n$ ισχύει:

$$\boxed{\begin{aligned} &F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2 \\ &F_0 = 1,\ \ F_1 = 1 \end{aligned}}$$

Θέτουμε $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n$ τη γεννήτρια των $F_n$

Πολλαπλασιάζοντας την αναγωγική σχέση με $t^n$ και αθροίζοντας για όλα τα $n\geq 2$, έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n t^n = t\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} t^{n-1} + t^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} t^{n-2}$$

$$\Rightarrow F(t) - 1 - t = t\left(F(t) - 1\right) + t^2 F(t)$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{1}{1-t-t^2} = \frac{1}{(1-\kappa t)(1-\lambda t)} = \frac{1}{\kappa - \lambda}\left(\frac{\kappa}{1-\kappa t} - \frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)$$

τελικά:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\kappa \sum_{j=0}^{\infty} (\kappa t)^j - \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda t)^j\right)$$

όπου: $\boxed{\kappa = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$$\boxed{F_n = \frac{\kappa^{n+1} - \lambda^{n+1}}{\kappa - \lambda} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},\ n \in \mathbb{N}}$$

# Ρυθμός αύξησης της $F_n$

$$G_k = \frac{F_k}{F_{k-1}}$$

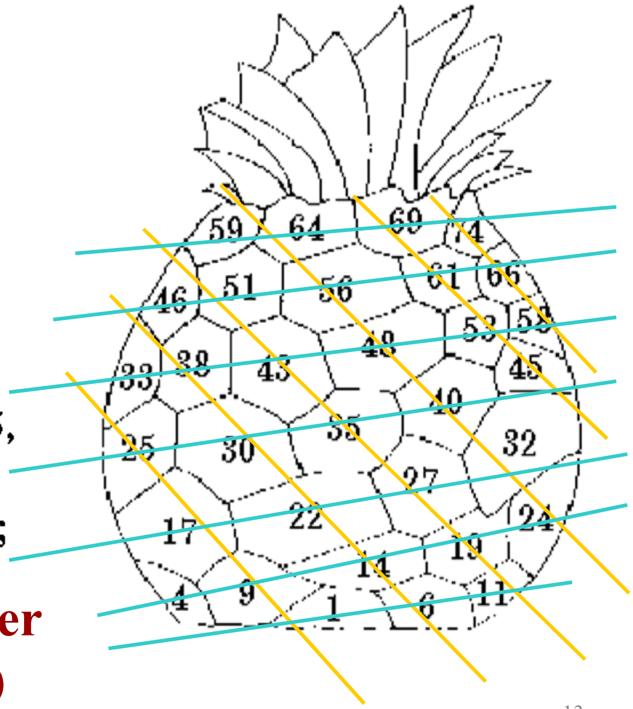
οπότε

$$G_1=1,\quad G_2=\frac{2}{1}=2,\quad G_3=\frac{3}{2}=1.5,$$

$$G_4=\frac{5}{3}=1.67,\quad G_5=\frac{8}{5}=1.60,$$

$$G_6=\frac{13}{8}=1.625,\quad G_7=\frac{21}{13}=1.615,$$

$$G_8=\frac{34}{21}=1.619,\ldots \text{χρυσός λόγος}$$




**Coxeter (1961)**



# Παραδείγματα

Παρατηρήστε ότι το 4 μπορεί να γραφεί με 5 τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, δηλ. 4=1+1+1+1=2+1+1=1+2+1=1+1+2=2+2. Δείξτε ότι ο φυσικός αριθμός n γράφεται με $F_n$ τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, όπου $F_n$ οι αριθμοί Fibonacci.

Έστω $\alpha_n$ το ζητούμενο πλήθος. Η ανάλυση του n με προσθετέους 1 ή 2 είναι δύο ειδών: (1) λήγει σε 1. Άρα το υπόλοιπο είναι n-1 που αναλύεται με $\alpha_{n-1}$ τρόπους. (2) λήγει σε 2. Άρα, ……έχουμε $\alpha_{n-2}$ τρόπους. Το $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$ (διότι 2=2, ή 2=1+1). Άρα $\alpha_n=F_n$.

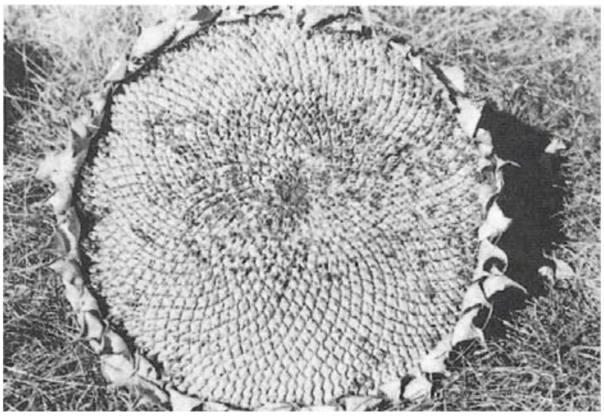
---

Έστω n άτομα (γυναίκες και άντρες). Με πόσους τρόπους τοποθετούνται σε γραμμή ώστε να μην είναι ούτε δύο γυναίκες σε γειτονικές θέσεις;

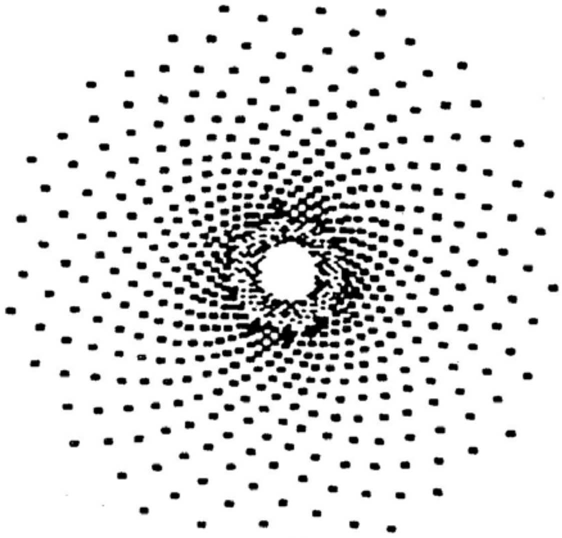
Έστω $\beta_n$ το ζητούμενο πλήθος. Ο τελευταίος στη σειρά έχει δύο δυνατότητες: (1) είναι άντρας. Πριν από αυτόν είναι n-1 άτομα που τοποθετούνται με $\beta_{n-1}$ τρόπους. (2) είναι γυναίκα. Τότε στην προτελευταία θέση είναι υποχρεωτικά άνδρας. Πριν από αυτούς είναι n-2 άτομα που τοποθετούνται με $\beta_{n-2}$ τρόπους. Το $\beta_1=2$ (Α, Γ), $\beta_2=3$ (ΑΑ,ΑΓ,ΓΑ). Άρα $\beta_n=F_{n+1}$.

# Ηλιοτρόπιον

Φωτογραφία ηλιοτρόπιου που οι σπείρες του είναι 55 προς τη μία πλευρά και 89 προς την άλλη

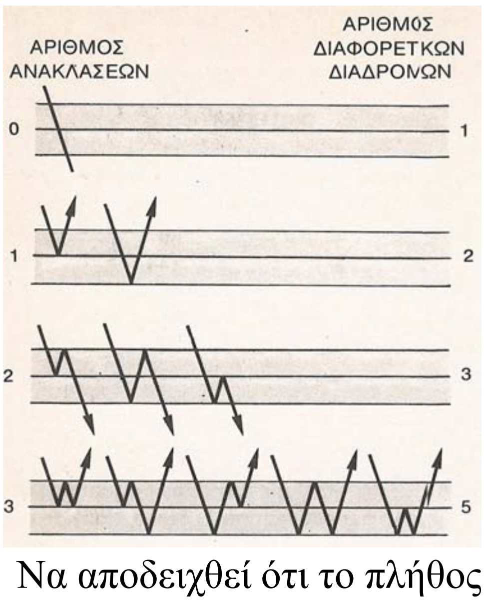


παρατηρούμε ότι
$F_9=55$, $F_{10}=89$



Προσομοίωση ηλιοτρόπιου από υπολογιστή. Μετρήστε τις σπείρες του προς τις δύο κατευθύνσεις. Τι παρατηρείτε;

# Άλλες εφαρμογές των αριθμών $F_n$




Να αποδειχθεί ότι το πλήθος διαφορετικών τροχιών με n ανακλάσεις ακτίνων σε δύο πλήρως εφαπτόμενα τζάμια είναι $F_{n+1}$


Η μέλισσα μπαίνει στην κερήθρα από αριστερά και μπορεί να κινηθεί μόνο δεξιά. Δείξτε ότι μπορεί να φθάσει στο κελί n με $F_{n+1}$ διαφορετικούς τρόπους.

**Παιχνίδι Fibonacci-Nim.** Υπάρχουν n μάρκες και δύο παίκτες Α και Β που παίζουν εναλλάξ. Ο Α στην πρώτη κίνηση παίρνει όσες μάρκες θέλει από 1 έως και n-1. Στις επόμενες κινήσεις οι παίκτες πρέπει να παίρνουν τουλάχιστον 1 μάρκα αλλά όχι περισσότερες από διπλάσιες απ’ όσες πήρε ο αντίπαλος την τελευταία φορά.Αυτός που παίρνει την τελευταία μάρκα κερδίζει. Αποδεικνύεται, ότι αν το n είναι αριθμός Fibonacci, ο Β κερδίζει στα σίγουρα με κατάλληλη στρατηγική. Αν δεν είναι, τότε κερδίζει ο Α με ανάλογη στρατηγική

# Από Θέματα

- Βρέστε με αναλυτική μορφή τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(a_n)$

$$a_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

- Σημειώστε n τελείες σε ίσες αποστάσεις σε μία ευθεία, με τρόπο ώστε τα πιόνια του ντόμινο να σκεπάζουν δύο μόνο από αυτές. Υπολογίστε με πόσους τρόπους μη υπερκαλυπτόμενα ντόμινο μπορούν να τοποθετηθούν στις n τελείες; Δίνεται για διευκρίνιση ότι για 4 τελείες έχουμε τους εξής 5 τρόπους.

$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \qquad \boxed{\bullet\ \bullet}\ \bullet\ \bullet \qquad \bullet\ \boxed{\bullet\ \bullet}\ \bullet \qquad \bullet\ \bullet\ \boxed{\bullet\ \bullet} \qquad \boxed{\bullet\ \bullet}\boxed{\bullet\ \bullet}$

- Λέξεις που δημιουργούνται από το αλφάβητο {0,1,2,3} θα λέγονται γνήσιες αν έχουν άρτιο πλήθος 0-κών. Θέτοντας $a_k$ το πλήθος των γνήσιων λέξεων μήκους $k$

α) Δείξτε την αναδρομική σχέση $a_{k+1} = 2\cdot a_k + 4^k,\ k = 1,2,3,\ldots$ με $a_1 = 3$ και δείξτε ότι μπορούμε να την επεκτείνουμε με $a_0 = 1$

(Υπόδειξη: Θεωρήστε το πρώτο στοιχείο της λέξεως με μήκος να είναι είτε 0 είτε 1,2,3).

β) Θέτοντας τη γεννήτρια $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ των $a_k$ δείξτε ότι $G(x) = \frac{1/2}{1-2x} + \frac{1/2}{1-4x}$ και από την τελευταία βρέστε το $a_k$ για κάθε $k$



# Τοποθετήσεις δύο συμβόλων υπό περιορισμούς

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | − | − |
| + | + | + | + | − | + | − |
| + | + | + | + | − | − | + |
| + | + | + | − | + | + | − |
| + | + | + | − | + | − | + |
| + | + | + | − | − | + | + |
| + | + | − | + | + | + | − |
| + | + | − | + | + | − | + |
| + | + | − | + | − | + | + |
| + | + | − | − | + | + | + |
| + | − | + | + | + | + | − |
| + | − | + | + | + | − | + |
| + | − | + | + | − | + | + |
| + | − | + | − | + | + | + |
| + | − | − | + | + | + | + |
| − | + | + | + | + | + | − |
| − | + | + | + | + | − | + |
| − | + | + | + | − | + | + |
| − | + | + | − | + | + | + |
| − | + | − | + | + | + | + |
| − | − | + | + | + | + | + |

(1) Με πόσους τρόπους τοποθετούνται 5 (+) και 2 (−) σε ευθεία;

(2) Σε πόσους από αυτούς δεν υπάρχουν γειτονικά (−);

(1) $$M_7^{5,2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$$

(2) ↑ + ↑ + ↑ + ↑ + ↑ + ↑

Άρα $$\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$$

$$\binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} = 1+7+15+10+1 = 34 = F_8$$

0 (−), 1 (−) έως 4 (−)

# Θεώρημα

α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, n συμβόλων από τα {+, –}, εκ των οποίων τα k, (k=0, 1, 2, …, ≤ [(n+1)/2]), είναι – και τα υπόλοιπα n-k είναι +, έτσι ώστε ούτε δύο από τα – να είναι διαδοχικά, ισούται με:

$$Q_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$$

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, n συμβόλων από τα {+, –}, έτσι ώστε ούτε δύο από τα – να είναι διαδοχικά, ισούται με $F_{n+1}$, δηλαδή με τον αριθμό Fibonacci τάξης n+1.

α)

| | | 1η | | 2η | | 3η | | … | | n-kστή | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Θέσεις των “+” | | + | | + | | + | | … | | + | |
| Επιτρεπτές θέσεις | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | … | n-k | | n-k+1 |

β) Αθροίζοντας για όλα τα k

$$Q_n = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} Q_{n,k} = Q_{n-1} + Q_{n-2} \ldots = F_{n+1}$$

**Β΄ τρόπος (για το β).** Οι $Q_n$ τοποθετήσεις των n συμβόλων +, – χωρίς ούτε δύο – διαδοχικά διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:
(1) αυτές που τελειώνουν σε + , (2) αυτές που τελειώνουν σε –.
(τότε τελειώνουν σε + –)

$Q_{n-1}$ + $Q_{n-2}$



# Πόρισμα 1

α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, (k=0, 1, …, [(n+1)/2]), έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, ισούται με

$$Q_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$$

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία οσωνδήποτε από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, ισούται με $F_{n+1}$.

Απόδειξη με αναγωγή στο Θεώρημα

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| + | – | + | + | – | + |

Άλλη διατύπωση:
«Το πλήθος των συνδυασμών k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν δια-δοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, είναι ...»

# Πόρισμα 2

α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε κύκλο, k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, (k=0, 1, 2, …, [n/2]), έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, (1 και n θεωρούνται διαδοχικά), ισούται με

$$\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

(1)Αρχίζει με (–). Πρώτο +, τελευταίο +, άρα $Q_{n-3,k-1}=\binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1}$

(2)Αρχίζει με (+). Πρώτο, τελευταίο είναι οτιδήποτε, άρα $Q_{n-1,k}=\binom{(n-1)-k+1}{k}$

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε κύκλο οσονδήποτε από τους n≥2 πρώτους φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, όπου το 1 και n θεωρούνται διαδοχικά, ισούται με $F_n+F_{n-2}$.

(1)Αρχίζει με (–). Πρώτο +, τελευταίο +, άρα $F_{(n-3)+1}$

(2)Αρχίζει με (+). Πρώτο, τελευταίο είναι οτιδήποτε, άρα $F_{(n-1)+1}$

Άλλη διατύπωση είναι: «Το πλήθος των συνδυασμών k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, όταν 1 και n θεωρούνται διαδοχικοί, είναι ...»



# Αριθμοί Loucas

$g_n=F_n+F_{n-2}$, n≥2

$g_n= g_{n-1} +g_{n-2}$, $n\geq 2$

με $g_2=F_2+F_0=3$ και $g_3=F_3+F_1=4$

*Αν* $g_2= g_1 +g_0$ και $g_3= g_2 +g_1$ *τότε:*

$\boxed{g_n= g_{n-1} +g_{n-2},\ n\geq 2,\ g_0=2,\ g_1=1}$

$g_n$, n≥0, λέγονται αρ. Loucas

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_n$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 |

Πόρισμα

Το πλήθος των συνδυασμών (ανά οσουσδήποτε) από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, είναι ίσο με τον αριθμό Fibonacci $F_{n+1}$.

Το πλήθος των συνδυασμών (ανά οσουσδήποτε) από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, όταν 1 και n θεωρούνται διαδοχικοί, είναι ίσο με τον αριθμό Lucas $g_n$.

# Ασκήσεις

•Με πόσους τρόπους 10 άντρες και 6 γυναίκες μπαίνουν σε ουρά αναμονής ώστε να μην έχουμε γυναίκες σε γειτονικές θέσεις;

$$\binom{16-6+1}{6} = 462$$

---

•Υπάρχουν n καθίσματα τοποθετημένα σε μία σειρά. Βρέστε το πλήθος των τρόπων να διαλέξουμε οσαδήποτε από τα καθίσματα (έστω και κανένα) με τρόπο ώστε να μην έχουμε διαλέξει διαδοχικά καθίσματα.

---

•Υπάρχουν $n \geq 2$ καθίσματα τοποθετημένα σε κυκλικό τραπέζι. Βρέστε το πλήθος των τρόπων να διαλέξουμε οσαδήποτε από τα καθίσματα (έστω και κανένα) με τρόπο ώστε να μην έχουμε διαλέξει διαδοχικά καθίσματα (εδώ το 1 και το n είναι διαδοχικά).



# Διαμερίσεις συνόλων - Αριθμοί Bell

Οι αριθμοί $B_n$ που δίνουν το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου n στοιχείων, λέγονται αριθμοί Bell.

n=1 : $B_1=1$.

n=2 : $B_2=2$, ( {{1,2}}, {{1}, {2}} )

n=3 : $B_3= 5$,

{{1,2,3}}, {{1,2},{3}}, {{1,3},{2}}, {{2,3},{1}}, {{1},{2},{3}}

Έστω *B(n,k)* = "πλήθος διαμερίσεων συνόλου n στοιχείων σε k υποσύνολα"

f(n,k)= πλήθος τοποθετήσεων n διακεκριμένων σφαιριδίων (στοιχεία) σε k διακεκριμένα κελιά (υποσύνολα), με τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί

$$\boxed{B(n,k) = \frac{f(n,k)}{k!} = \frac{1}{k!}\left[k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - ... + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n\right]}$$

άρα $B_n=B(n,1)+B(n,2)+\ldots+B(n,n)$

**Παράδειγμα**:

$B_4$= g(4,1)+g(4,2)+g(4,3)+g(4,4)= $\frac{24}{24}+\frac{36}{6}+\frac{14}{2}+\frac{1}{1}=15$

# Αριθμοί Stirling

$$k^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1) = S_1^{(n)}k + S_2^{(n)}k^2 + \dots + S_n^{(n)}k^n \qquad (*)$$

Ισχύει: $S_i^{(n+1)} = S_{i-1}^{(n)} - nS_i^{(n)}, \;\; S_0^{(0)} = S_1^{(1)} = 1$ α΄ είδους

| n \ i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | -1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 2 | -3 | 1 | | | | | |
| 4 | -6 | 11 | -6 | 1 | | | | |
| 5 | $\boxed{24}$ | $\boxed{-50}$ | 35 | -10 | 1 | | | |
| 6 | -120 | 274 | -225 | 85 | -15 | 1 | | |
| 7 | 720 | -1764 | 1624 | -735 | 175 | -21 | 1 | |
| 8 | -5040 | 13068 | -13132 | 6769 | -1960 | 322 | -28 | 1 |

24-5 ·(-50)

(*) $$k^n = s_1^{(n)}k^{(1)} + s_2^{(n)}k^{(2)} + \dots + s_n^{(n)}k^{(n)}$$

Ισχύει: $s_i^{(n+1)} = s_{i-1}^{(n)} + is_i^{(n)}, \;\; s_0^{(0)} = s_1^{(1)} = 1$ β΄ είδους

# Αριθμοί Stirling β΄ είδους

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | |
| 6 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | |
| 7 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | |
| 8 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 |

| n | $B_n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 5 |
| 4 | 15 |
| 5 | 52 |
| 6 | 204 |
| 7 | 877 |
| 8 | 4140 |

B(6,2)

π.χ. $31=1+2\cdot 15, \;\; 90=15+3\cdot 25, \;\; 65=25+4\cdot 10$

και $r^6 = r^{(1)}+31\,r^{(2)}+90\,r^{(3)}+65\,r^{(4)}+15\,r^{(5)}+r^{(6)}$

**Αριθμοί Bell**: $B_5=1+15+25+10+1=52$

$B_6=1+31+90+65+15+1=203$

# Αριθμοί Bell (γεννήτρια)

Για τους αριθμούς Bell $B_n$ ισχύει:

$$\boxed{B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \;, \; B_0 = 1}$$

**Απόδειξη:**
Αν X={1,2,...,n} και έστω μια διαμέριση του X. Υπάρχει μοναδικό τμήμα T της διαμέρισης που περιέχει το n και έστω |T|=k.
Αν $T=\{n\}\cup Y$, τότε το σύνολο Y περιέχει k–1 στοιχεία από τα {1,2,...,n –1} που για σταθερό k επιλέγονται με $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους.
Το υπόλοιπο τμήμα της διαμέρισης, αποτελεί διαμέριση του συνόλου των υπολοίπων n–k στοιχείων του συνόλου X-T και επιλέγεται με $B_{n-k}$ τρόπους. Από τη θεμελιώδη αρχή προκύπτει το $\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}$ και η προσθετική αρχή δίνει το ζητούμενο (αφού k=1,2,…, n)



# Αριθμοί Bell (γεννήτρια)

Θέτουμε $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ την εκθετική γεννήτρια των $B_n$

Πολλαπλασιάζοντας την αναγωγική σχέση με $t^{n-1}/(n-1)!$ και αθροίζοντας για όλα τα $n\geq 1$, βρίσκουμε:

$$B'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}\right)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{B_{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{B_{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{B_{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!} = e^t\cdot B(t)\,,$$

ή $\frac{dB(t)}{B(t)} = e^t dt$ απ’ όπου $\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t-1}$

δηλαδή $$\boxed{B_n = \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{e^t-1}\right)\Big|_{t=0}}$$

# Αριθμοί Catalan

Έστω $y = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ ένα γινόμενο. Το πλήθος των τρόπων υπολογισμού του γινομένου με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς δύο όρων κάθε φορά χωρίς αλλαγή της σειράς των αριθμών, συμβολίζεται $C_n$. Βρίσκουμε εύκολα:

$C_2=1$ διότι το $\mathbf{y = x_1 \cdot x_2}$ υπολογίζεται με μονδικό τρόπο

$C_3=2$ διότι $\mathbf{y = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3}$ ή $\mathbf{y = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)}$

$C_4=5$ διότι $\mathbf{y = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4}$ ή $\mathbf{y = (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4}$
$\mathbf{y = x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))}$ ή $\mathbf{y = x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)}$
ή $\mathbf{y = ((x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4))}$

Οι αριθμοί $C_n$, n=1, 2, 3, λέγονται αριθμοί Catalan



# Αριθμοί Catalan (γεννήτρια)

$$y = \underbrace{x_1 x_2 \ldots x_n}_{C_n} \Rightarrow y = \underbrace{(x_1)}_{C_1}\underbrace{(x_2 \ldots x_n)}_{C_{n-1}} \text{ ή } y = \underbrace{(x_1 x_2)}_{C_2}\underbrace{(x_3 \ldots x_n)}_{C_{n-2}} \text{ ή} \ldots \text{ή } y = \underbrace{(x_1 \ldots x_{n-1})}_{C_{n-1}}\underbrace{(x_n)}_{C_1}$$

Με διπλή απαρίθμηση, έχουμε:

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1 \,,\; n \geq 2 \quad \mu\varepsilon \quad C_1 = 1$$

Θέτουμε $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ τη γεννήτρια των $C_n$

Πολλαπλασιάζοντας την αναγωγική σχέση με $t^n$ και αθροίζοντας για όλα τα n□1, βρίσκουμε:

$$\left(C(t)\right)^2 - C(t) + t = 0$$

$$C(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4t}\right)$$

Η άλλη ρίζα απορρίπτεται αφού πρέπει C(0)=0

απ' όπου

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \binom{1/2}{k} t^k$$

ή

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}}$$

π.χ. $C_{10}=4862$

# Πόρισμα

Από την αναγωγική σχέση

$$C_n = C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1 , \quad n \geq 2$$

και το αποτέλεσμα $\quad C_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1} \quad$ προκύπτει η ταυτότητα

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \binom{2k-2}{k-1}\binom{2n-2k-2}{n-k-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n \geq 2}$$

Οι πρώτοι 10 αριθμοί Catalan είναι

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_n$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1430 | 4862 |

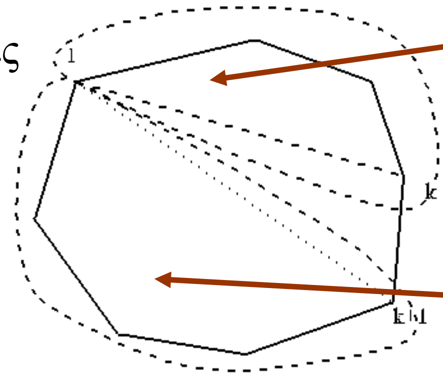


# Άσκηση

Πόσο είναι το πλήθος $\nu_n$ ($n \geq 3$) των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπο-ρούμε να χωρίσουμε σε τρίγωνα ένα κυρτό n-γωνο με μη-τεμνόμενες διαγωνίους

n+1 κορυφές

$\nu_{n+1}$




k κορυφές

$\nu_k$

n+2-k κορυφές

$\nu_{n+2-k}$

$$\boxed{\nu_{n+1} = \nu_2 \cdot \nu_n + \nu_3 \cdot \nu_{n-1} + \ldots + \nu_n \cdot \nu_2 , \, n \geq 2}$$

Θέτοντας: $\nu_{n+1} = \mu_n$

$$\boxed{\mu_n = \mu_1 \cdot \mu_{n-1} + \mu_2 \cdot \mu_{n-2} + \ldots + \mu_{n-1} \cdot \mu_1 , \, n \geq 2 \quad \mu\varepsilon \quad \mu_1 = \nu_2 = 1}$$

Άρα $\mu_n = C_n$ $\qquad$ επομένως $\qquad \boxed{\nu_n = \dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}}$

# Άσκηση

Σε μία εκλογή 2n εκλέκτορες ψηφίζουν δύο υποψήφιους Α και Β. Μετά την καταμέτρηση των ψήφων βρέθηκε ότι οι υποψήφιοι πήραν από ίσους ψήφους. Δείξτε ότι:

(α). Το πλήθος των δυνατών τρόπων καταμέτρησης των ψήφων ώστε σε όλη τη διαδικασία να προηγείται ο Α ισούται με $C_n$.

(β). Το πλήθος των δυνατών τρόπων καταμέτρησης των ψήφων ώστε σε όλη τη διαδικασία ο Α να έχει τουλάχιστον τόσους ψήφους όσους και ο Β ισούται με $C_{n+1}$

Συμβολίζουμε $x_n$ το πλήθος στο (α) και $y_n$ το πλήθος στο (β)

**Πρέπει η α΄ ψήφος να είναι του Α και η τελευταία του Β.**

| 1 | 2 | 3 | | … | … | | 2n-2 | 2n-1 | 2n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | | | | | | | B | B |

Τα Α είναι ≥. από τα Β

$$x_n = y_{n-1}$$



# Ισοδυναμία με αριθμούς Catalan

$y_n$

| 1 | 2 | 3 | | | 2k | 2k+1 | | | | 2n-1 | 2n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | | | B |

Για πρώτη φορά ισοπαλία

Μέχρι τότε τα Α είναι > από τα Β

Τα Α είναι ≥. από τα Β

$x_k$

k=1,…,n-1

$y_{n-k}$

Αρχικές τιμές

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$$
$$y_1 = 1, y_2 = 2 \Rightarrow y_0 = 1$$

$$y_n = x_1 \cdot y_{n-1} + x_2 \cdot y_{n-2} + \ldots + x_{n-1} \cdot y_1 + x_n \cdot y_0 \,,\, n \geq 2$$

$$y_n = x_{n+1}, n \geq 1$$

$$x_{n+1} = x_1 \cdot x_n + x_2 \cdot x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} \cdot x_2 + x_n \cdot x_1 \,,\, n \geq 1$$

Άρα

$$x_n = C_n, \quad y_n = C_{n+1},$$

# Καταγραφή των $x_4$ , $y_4$

$x_4$

AAAABBBB
AAABABBB
AABAABBB
AABABABB
AAABBABB

$y_4$

| | | |
|---|---|---|
| ABAAABBB | AABBAABB | AAAABBBB |
| ABAABABB | AABBABAB | AAABABBB |
| ABAABBAB | | AABAABBB |
| ABABAABB | AAABBBAB | AABABABB |
| ABABABAB | AABABBAB | AAABBABB |



# Άσκηση

Στο ταμείο ενός θεάτρου υπάρχει μια ουρά 2n ατόμων. n από αυτούς έχουν από ένα 5-ευρω, ενώ οι υπόλοιποι έχουν μόνο 10-ευρα. Τα εισιτήρια κάνουν 15 και 25 ευρώ και στην αρχή ο ταμίας δεν έχει καθόλου ρέστα. Είναι φανερό ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των ατόμων αυτών στην ουρά.

Σε πόσους από τους τρόπους αυτούς υπάρχουν πάντα 5-ευρα στο ταμείο του θεάτρου ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα; α) Ποια η πιθανότητα να μην υπάρξει πρόβλημα στο ταμείο; β) Ποια η πιθανότητα να μηδενιστεί ακριβώς μία φορά το πλήθος των 5-ευρων στο ταμείο και μάλιστα στο (2k)-στό άτομο; γ) Ποια να μηδενιστεί ακριβώς μία φορά (εκτός του πρώτου και τελευταίου).

Ας συμβολίσουμε με A αυτούς που έχουν 5-ευρα και με B αυτούς που δεν έχουν και ας τους καταγράψουμε σε μία σειρά.
Για να συμβαίνει το ζητούμενο θα πρέπει, μετρώντας από την αρχή της λίστας προς το τέλος τα A να είναι πάντα περισσότερα ή το πολύ ίσα με τα B. Άρα σύμφωνα με το (β) της προηγούμενης άσκησης υπάρχουν $C_{n+1}$ τρόποι, για να μην υπάρξει πρόβλημα. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

α)

$$p = C_{n+1} / \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} / \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}$$

β) $C_k C_{n-k}$

γ) $$\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} = C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

# Πολυώνυμα Rook

Έστω $r_k(B)$ συμβολίζει το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε k πύργους στη σκακιέρα B που έχει n τετράγωνα, με τρόπο ώστε κανένας πύργος να μην «παίρνει» οποιονδήποτε άλλο. Η γεννήτρια συνάρτηση

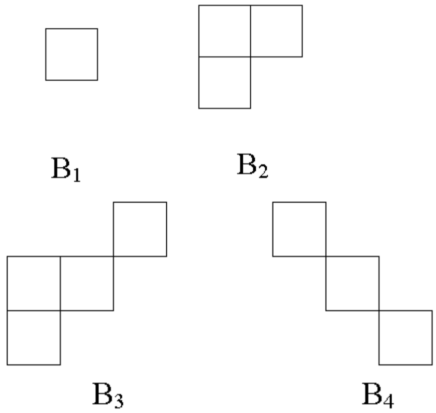
$$R(x,B) = \sum_{k=0}^{n} r_k(B)\, x^k$$

είναι πολυώνυμο και λέγεται **rook** πολυώνυμο, από τη λέξη rook=πύργος

Σε n´m με n≤m, σκακιέρα χωρίς απαγορευμένα είναι

$$r_k(B) = \binom{n}{k} \Delta_m^k = \binom{n}{k}\binom{m}{k} \cdot k!$$

παράδειγμα




$$R(x,B_1) = 1 + x$$

$$R(x,B_2) = 1 + 3x + x^2$$

$$R(x,B_3) = 1 + 4x + 4x^2 + x^3$$

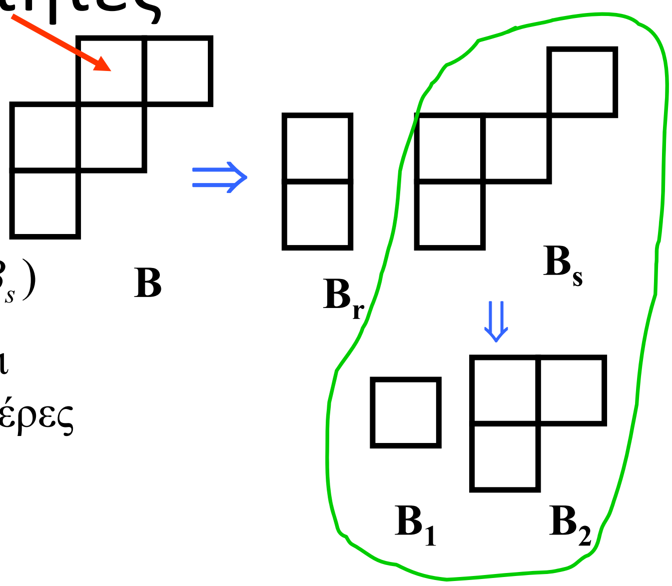
$$R(x,B_4) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$



# Ιδιότητες

**Θ.** B σκακιέρα,
$B_r$ διαγραφή γραμ./στήλ
$B_s$ διαγραφή τετραγ.

$$R(x,B) = x \cdot R(x,B_r) + R(x,B_s)$$




**Θ.** B σκακιέρα που χωρίζεται σε ανεξάρτητες υπο-σκακιέρες $B_1$ και $B_2$.

$$R(x,B) = R(x,B_1) \cdot R(x,B_2)$$

Στο παράδειγμα

$$R(x,B) = x \cdot R(x,B_r) + R(x,B_s) = x \cdot (1+2x) + R(x,B_1) \cdot R(x,B_2) =$$

$$= x \cdot (1+2x) + (1+x) \cdot (1+3x+x^2) =$$

$$= 1 + 5x + 6x^2 + x^3$$

# Θεώρημα

Β σκακιέρα Β΄ συμπληρωματική (συμπληρώνουν ορθογώνια σκακιέρα). Τότε:

$$\boxed{\begin{aligned} r_n(B) = \Delta_m^n - r_1(B')\Delta_{m-1}^{n-1} + r_2(B')\Delta_{m-2}^{n-2} - \ldots + \\ +(-1)^t r_t(B')\Delta_{m-t}^{n-t} + \ldots + (-1)^n r_n(B')\Delta_{m-n}^{0} \end{aligned}}$$

Θέτουμε $\alpha_i$ την ιδιότητα μία από τις τοποθετήσεις των n πύργων στη σκακιέρα Β, να έχει τον i πύργο, (i=1,2,…,n), σε απαγορευμένη θέση

Με ΑΣΕ $\qquad \sum N(\beta_1\beta_2\ldots\beta_k) = r_k(B')\Delta_{m-k}^{n-k}$

όπου $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, k από τις ιδιότητες $\alpha_i$, (i=1,2,…,n) διότι k πύργοι σε απαγορευμένες (άρα στη Β΄), οι υπόλοιποι στην ορθογώνια σκακιέρα (n-k)΄(m-k) που απομένει

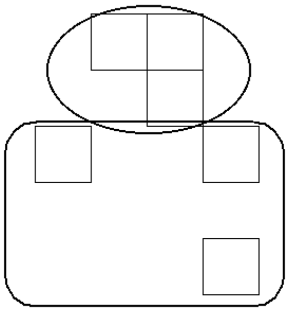
$$r_n(B) = \mathrm{N}(\alpha_1'\alpha_2'\ldots\alpha_n') = N - \sum N(\alpha_i) + \sum N(\alpha_i\alpha_j) - \ldots$$



# Εφαρμογή

**Ανάθεση εργασιών.** Μία επιχείρηση διαθέτει 5 υπαλλήλους, τους Α, Β, Γ, Δ και Ε, στους οποίους πρόκειται να αναθέσει πέντε εργασίες, τις α, β, γ, δ, και ε, από μία στον καθένα. Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να γίνει η ανάθεση των εργασιών, όταν είναι γνωστό ότι ο Α δεν μπορεί (ή δεν θέλει) τις εργασίες γ και δ, ο Β δεν μπορεί την δ, ο Γ δεν μπορεί τις β και ε και ο Ε δεν μπορεί την ε.

| | α | β | γ | δ | ε |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | * | | | | |
| Β | | * | | | |
| Γ | | | * | | |
| Δ | | | | | * |
| Ε | | | | * | |



Β΄

Συμβολίζουμε Β τη δοθείσα σκακιέρα και Β΄ τη συμπληρωματική της.

$$R(x,B') = \left(R(x,B_2)\right)^2 = \left(1+3x+x^2\right)^2 = \\ = 1+6x+11x^2+6x^3+x^4$$

$$r_5(B) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k r_k(B')\Delta_{5-k}^{5-k} = \\ = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k r_k(B')(5-k)! \\ = 5! - 6(5-1)! + 11(5-2)! - \\ - 6(5-3)! + (5-4)! = 31\,.$$

# Πιθανογεννήτριες - Ροπογεννήτριες

Η πιθανογεννήτρια $\Pi_X(t) = Et^X = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, t^k$

μιας διακριτής κατανομής με τιμές 0, 1, 2, … είναι απλά η γεννήτρια των πιθανοτήτων $p_k$=P(X=k)
Οι ιδιότητές της μελετώνται σε ειδικευμένα βιβλία.

Η ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)e^{tk} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, e^{tk} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tk)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} p_k k^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} EX^j$$

μιας διακριτής κατανομής με τιμές 0, 1, 2, … είναι η εκθετική γεννήτρια των ροπών $E(X^k)$ της τ.μ. X.