Αρχές Απαρίθμησης

- Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης
- Αρχή Συμπερίληψης – Εξαίρεσης
- Αρχή Περιστερώνα

Αρχές Απαρίθμησης

- Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$$

- Προσθετική Αρχή Απαρίθμησης

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

- Αρχή Συμπερίληψης – Εξαίρεσης

$$N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \ldots \text{ή } \alpha_n) = \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i \alpha_j) + \sum N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k) - \ldots$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ είναι ιδιότητες

- Αρχή Περιστερώνα

Αν έχουμε n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον k·n+1 περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με k+1 ή περισσότερα περιστέρια

Μεταθέσεις

- Πλήθος τρόπων τοποθέτησης σε γραμμή n αντικειμένων:
$$M_n = n!\ ,$$
- Πλήθος τρόπων τοποθέτησης σε κύκλο n αντικειμένων:
$$K_n = (n-1)!\ ,$$
- Πλήθος τρόπων τοποθέτησης σε γραμμή n αντικειμένων εκ των οποίων τα k_1 είναι όμοια μεταξύ τους, k_2 είναι όμοια μεταξύ τους διαφορετικά από τα προηγούμενα, και τελικά k_λ είναι όμοια μεταξύ τους διαφορετικά από όλα τα προηγούμενα, όπου ισχύει $k_1 + k_2 + \cdots + k_\lambda = n$, είναι:
$$M_n^{k_1,k_2,\ldots,k_\lambda} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots k_\lambda!}$$

Παράδειγμα

Οι πινακίδες των ιδιωτικών αυτοκινήτων στην Ελλάδα σχηματίζονται από τρία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου που έχουν αντίστοιχά τους στο Λατινικό και από 4 αριθμητικά ψηφία που σχηματίζουν τετραψήφιο αριθμό. Πόσα το πολύ ιδιωτικά αυτοκίνητα μπορούν να κυκλοφορούν στην Ελλάδα; Πόσα το πολύ από αυτά θα έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσα το πολύ θα έχουν όλα τα σύμβολα διαφορετικά; Πόσα το πολύ αρχίζουν από Μ ή Ν;

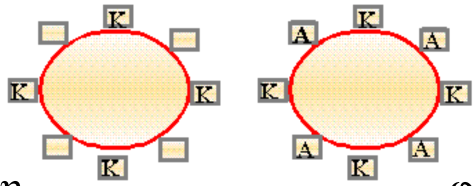
1ο γράμμα	2ο γράμμα	3ο γράμμα	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο	ΘΑΑ
14	14	14	9	10	10	10	24 696 000
14	14	14	9	9	8	7	12 446 784
14	13	12	9	9	8	7	9 906 624
2	14	14	9	10	10	10	3 528 000

- Άν οι πινακίδες είχαν 2 μόνο γράμματα, τότε θα υπήρχαν το πολύ 1764000 πινακίδες.

Παραδείγματα

Με πόσους τρόπους 4 αγόρια και 4 κορίτσια μπορούν να καθίσουν
(1) εναλλάξ σε κυκλικό τραπέζι οκτώ θέσεων; (2) εναλλάξ σε «ουρά»;

(1)



1η φάση 2η φάση

Με ΘΑΑ
3!·4!=144 τρόποι

(2) A K A K A K A K 4!·4!
K A K A K A K A 4!·4!

Με ΠΑΑ
2·4!·4!=1152 τρόποι

Πόσες λέξεις, έστω και χωρίς νόημα, σχηματίζονται με τις διάφορες αναδιατάξεις των γραμμάτων της λέξης ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ;

Τ Τ Τ Τ Α Α Υ Ο Η: $M_9^{4,3,1,1,1} = \frac{4!}{4!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 7560$

Η οδομετρική αρχή

Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται ως ακολουθία ψηφίων
$x_{n-1}x_{n-2}x_{n-3}\ldots x_1x_0$ ως προς βάση b, όπου $0 \le x_k < b$

Η εύρεση του επόμενου φυσικού αριθμού ως προς βάση b πετυχαίνεται με τον αλγόριθμο (odometer principle):

Αρχίζουμε από το δεξιότερο ψηφίο έως ότου εξαντληθούν.

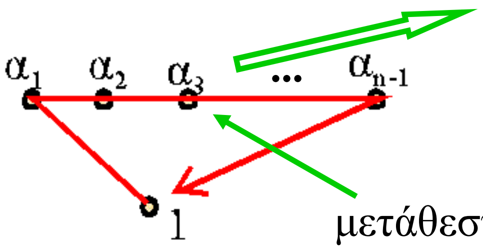
a. Αν το θεωρούμενο ψηφίο δεν είναι το b-1, τότε το αντικαθιστούμε με το επόμενό του και σταματούμε.
b. Αν θεωρούμε μία άδεια θέση (αριστερά από όλα τα ψηφία) τότε γράφουμε στη θέση αυτή το ψηφίο 1 και σταματούμε.
c. Αν δεν ισχύουν τα παραπάνω τότε το θεωρούμενο ψηφίο είναι το b-1. Το αντικαθιστούμε με το 0 μεταφερόμαστε μία θέση αριστερά και επιστρέφουμε στο (a).

Για b=2 παίρνουμε διαδοχικά (ξεκινώντας από το 1) 10,11,100, 101, 110,…

Να κατασκευαστεί πρόγραμμα αρίθμησης με διάφορα b

Το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή

Ένας περιοδεύων πωλητής πρόκειται να επισκεφθεί n πόλεις για δειγματισμό. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε σειρά επίσκεψης των πόλεων είναι εφικτή με διαφορετικό βέβαια κόστος. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να γίνει η επίσκεψη των n πόλεων όταν ο πωλητής μένει σε μία από αυτές; Ποιο το ελάχιστο κόστος της επίσκεψης, όταν είναι γνωστό το κόστος c_{ij} μεταξύ των πόλεων i και j;



(n-1)! ⟹ NP-complete πρόβλημα

Για n=26, $(n-1)!=1.55\cdot 10^{25}$

μετάθεση των 2, 3, 4, …, n

Η/Υ με ένα δισεκατομμύριο πράξεις το δευτερόλεπτο, χρειάζεται σχεδόν μισό δισεκατομμύριο χρόνια για να κάνει κάνει 25! πράξεις.

Άσκηση (Αγροτικός Ρωσικός πολ/μός)

Για να πολ/σουμε m×n, σχηματίζουμε δύο στήλες με επικεφαλής τα m και n.
Επαναλαμβάνουμε:

a. Ημιδιπλασιάζουμε τον τελευταίο αριθμό της α΄ στήλης αγνοώντας τα υπόλοιπα και το γράφουμε από κάτω.
b. Διπλασιάζουμε τον τελευταίο αριθμό της β΄ στήλης και τον γράφουμε από κάτω.

Συνεχίζουμε έως ότου στην α΄ στήλη να φθάσουμε στο 1.
Διαγράφουμε τους αριθμούς της β΄ στήλης που αντιστοιχούν σε άρτιους της α΄ στήλης και τους άλλους τους αθροίζουμε.

Π.χ. για 18×57:

18	~~57~~
9	114
4	~~228~~
2	~~456~~
1	912

1026

1. Δείξτε ότι η μέθοδος είναι σωστή
2. Συγκρίνετε με το γνωστό πολ.
3. Αλλάξτε τον αλγόριθμο τετραγωνίζοντας (αντί να διπλασιάζετε) τους αριθ. της β΄ στήλης, και, στο τέλος πολλαπλασιάζοντας (αντί να προσθέτετε) τους μη διαγραμμένους αριθμούς. Δείξτε ότι προκύπτει το n^m. Πόσοι πολλαπλασιασμοί απαιτούνται;

Πως πολλαπλασιάζουν οι Κινέζοι!!

Διατάξεις - Συνδυασμοί

- Διατάξεις n αντικειμένων ανά k, $(k \leq n)$:

$$\Delta_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ ,}$$

- Διατάξεις με επανάληψη n αντικειμένων ανά k :

$$A_n^k = n^k \text{ ,}$$

- Συνδυασμοί n αντικειμένων ανά k, $(k \leq n)$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ ,}$$

- Συνδυασμοί με επανάληψη n αντικειμένων ανά k:

$$\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

- Διαταράξεις n αντικειμένων (πλήθος μεταθέσεων με κανένα στοιχείο να μην παραμένει στη θέση του:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Απόδειξη τύπου επαναληπτικών συνδυασμών

Γράφουμε πρώτον τους συνδυασμούς με αύξουσα φυσική σειρά, π.χ.
αν **n=4, k=5**, α β β γ γ, β β β γ δ, α β γ δ δ

Χωρίζουμε με (n-1) κάθετες γραμμές τα n διαφορετικά γράμματα, π.χ.

α | β β | γ γ | , | β β β | γ | δ, α | β | γ | δ δ

Αντικαθιστούμε τα k γράμματα με αστεράκια (*), π.χ.

* | * * | * * | , | * * * | * | * , * | * | * | * *

n-1 κάθετες

k αστεράκια

Η αντιστοίχηση είναι 1-1, άρα υπάρχουν ενγένει $\dfrac{(n-1+k)!}{k! \cdot (n-1)!}$ διαφορετικοί επαναληπτικοί συνδυασμοί.

Β΄ τρόπος

α β γ δ ….

1 2 3 4 ….

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ επαν.συνδ.

$1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k \leq n$

$\mathbf{1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k \leq n+k-1}$

Ορίζουμε

$\beta_1 = \alpha_1 + 0,\ \beta_2 = \alpha_2 + 1, \ldots, \beta_k = \alpha_k + k-1$

$$\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Παραδείγματα

(1) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία σχηματίζονται με τα ψηφία {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; (2) Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι; (3) Ποιες οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα αν επιτρέπεται επανάληψη;

(1) $\Delta_7^4 - \Delta_6^3 = \dfrac{7!}{(7-4)!} - \dfrac{6!}{(6-3)!} = 720$ (3) $A_7^4 - A_6^3 = 7^4 - 7^3 = 2058$

(2) $3(\Delta_6^3 - \Delta_5^2) + \Delta_6^3 = 420$ $4(A_7^3 - A_7^2) = 1176$

Πενταμελής επιτροπή εκλέγεται από σύνολο τεσσάρων καθηγητών και 80 φοιτητών. Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί η επιτροπή αν πρέπει να περιέχει: α) 2 καθηγητές και 3 φοιτητές; β) τουλάχιστον 2 καθηγητές;

(α) Με ΘΑΑ: $\binom{4}{2}\cdot\binom{30}{3} = 6\cdot\dfrac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3} = 24360$

(β) Με ΠΑΑ και ΘΑΑ: $\binom{4}{2}\cdot\binom{30}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{30}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{30}{1} = 24360+1740+30 = 26130$

Διωνυμικοί Συντελεστές

Ισχύουν: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ και $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, οπότε

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$ Διώνυμο Νεύτωνα

που για $\alpha = x$ και $\beta = 1$, γράφεται:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n$$

Θέτοντας $x = 1$ έχουμε:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ενώ για $x = -1$ έχουμε:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$$

Γενικευμένοι διωνυμικοί συντελεστές

Θέτοντας $\binom{t}{k} = \frac{t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-k+1)}{k!}$ για $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^k$$

Γενικευμένο Διώνυμο Νεύτωνα

Για $t = -n$ (αρνητικό διώνυμο) έχουμε:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

διότι: $\binom{-n}{k} \cdot (-1)^k = \frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$

Για $t = -\frac{1}{2}$ έχουμε:

$$(1-x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^k}{2^{2k}}$$

διότι:

$$\binom{-1/2}{k} \cdot (-1)^k = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(2k-1)\cdots 3\cdot 1}{2^k k!} \cdot \frac{(2k)\cdots 4\cdot 2}{2^k k!} = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$$

Παραδείγματα

Πενταμελής επιτροπή εκλέγεται από σύνολο τεσσάρων καθηγητών και 80 φοιτητών. Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί η επιτροπή αν πρέπει να περιέχει: α) 2 καθηγητές και 3 φοιτητές; β)τουλάχιστον 2 καθηγητές;

(α) Με ΘΑΑ: $\binom{4}{2}\cdot\binom{30}{3} = 6\cdot\frac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3} = 24360$

(β) Με ΠΑΑ και ΘΑΑ: $\binom{4}{2}\cdot\binom{30}{3} + \binom{4}{3}\cdot\binom{30}{2} + \binom{4}{4}\cdot\binom{30}{1} = 24360+1740+30 = 26130$

Έχουμε 10 καραμέλες τις οποίες θέλουμε να μοιράσουμε σε τρία παιδιά. Χρησιμοποιούμε 3 διαφορετικά κουτιά που χωρούν μέχρι και όλες τις καραμέλες, και τις μοιράζω τυχαία σ' αυτά. (1) Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν; (2) Σε πόσους κάθε παιδί παίρνει μία τουλάχιστον καραμέλα;

(1) Υπάρχουν $\mathcal{E}_3^{10} = \binom{3+10-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$ τρόποι.

διότι: $\boxed{x_1}$ $\boxed{x_2}$ $\boxed{x_3}$ και $x_1+x_2+x_3=10$, $x_i \geq 0$

(2) Αρκεί να μοιράσουμε τις 7 καραμέλες, άρα: $\mathcal{E}_3^{7} = \binom{3+7-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$ τρόποι.

Καταγραφή διανομών για (1)

```
install.packages("combinat")
require(combinat)

comb=combn(12, 2)
d=dim(comb);d

a=rep(0,(d[1]+1)*d[2])
dim(a)=c(d[2],d[1]+1)
dimnames(a) <- list(NULL,
paste(1:3,"o παιδί",
      sep=""))

for (i in 1:d[2]){
  x=comb[,i]
  a[i,1]=x[1]-1
  a[i,2]=x[2]-x[1]-1
  a[i,3]=10-a[i,1]-a[i,2]
}
a
```

```
      1o παιδί 2o παιδί 3o παιδί
 [1,]        0        0       10
 [2,]        0        1        9
 [3,]        0        2        8
 [4,]        0        3        7
 [5,]        0        4        6
 [6,]        0        5        5
 [7,]        0        6        4
 [8,]        0        7        3
 [9,]        0        8        2
[10,]        0        9        1
..................................................................
[57,]        7        0        3
[58,]        7        1        2
[59,]        7        2        1
[60,]        7        3        0
[61,]        8        0        2
[62,]        8        1        1
[63,]        8        2        0
[64,]        9        0        1
[65,]        9        1        0
[66,]       10        0        0
```


Καταγραφή διανομών για (2)

```
comb=combn(9, 2)
d=dim(comb);d

a=rep(1,(d[1]+1)*d[2])
dim(a)=c(d[2],d[1]+1)
dimnames(a) <-
list(NULL, paste(1:3,
   "o παιδί",sep=""))

for (i in 1:d[2]){
 x=comb[,i]
 a[i,1]=1+x[1]-1
 a[i,2]=1+x[2]-x[1]-1
 a[i,3]=10-a[i,1]-a[i,2]
}
a
```

```
      1o παιδί 2o παιδί 3o παιδί
 [1,]        1        1        8
 [2,]        1        2        7
 [3,]        1        3        6
 [4,]        1        4        5
 [5,]        1        5        4
 [6,]        1        6        3
 [7,]        1        7        2
 [8,]        1        8        1
 [9,]        2        1        7
[10,]        2        2        6
..................................................................[27,
]        5        1        4
[28,]        5        2        3
[29,]        5        3        2
[30,]        5        4        1
[31,]        6        1        3
[32,]        6        2        2
[33,]        6        3        1
[34,]        7        1        2
[35,]        7        2        1
[36,]        8        1        1
```

Διαίρεση στοιχήματος

Πως να μοιραστεί στοίχημα σε παιχνίδι που διακόπηκε όταν ο παίκτης Α θέλει m παρτίδες να κερδίσει και ο Β θέλει n παρτίδες

Για παράδειγμα σε παιχνίδι τάβλι που τελειώνει σε 7 παρτίδες, και έχουν στοιχηματίσει α δρχ., αναγκάζονται να σταματήσουν όταν το σκορ είναι 4-5 (ο Α θέλει m=3 παρτίδες και ο Β θέλει n=2 παρτίδες).

A	A	A	A	B	A	A	A	B	B	B	A	B	B	B	B
A	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	B	B	B
A	A	B	A	A	B	A	B	A	B	A	B	B	A	B	B
A	B	A	A	A	B	B	A	B	A	A	B	B	B	A	B

1 4   6 4 1

Γενικά   P(A) : P(B)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k} : \sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}$$

Ανάλογα 5:11, δηλ.
ο Α τα 5α/16, ο Β τα 11α/16

Τρίγωνο Pascal

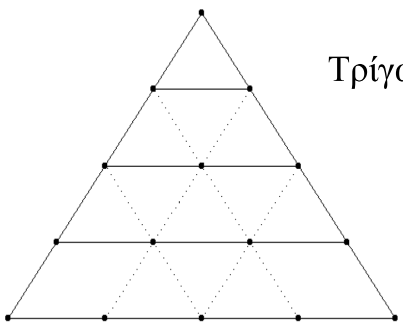
Οριζόντια:
Συντελεστές Διωνύμου Νεύτωνα,
π.χ. $(\alpha+\beta)^4$: 1, 4, 6, 4, 1
1η Διαγώνιος: Φυσικοί αριθμοί:
1, 2, 3, 4, 5, ….
2η Διαγώνιος: Τρίγωνοι αριθμοί:
1, 3, 6, 10, ...
3η Διαγώνιος: Τετραεδρικοί αριθμοί:
1, 4, 10, 20, 35, ...

Ημιδιαγώνιος: Αριθμοί Fibonacci:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

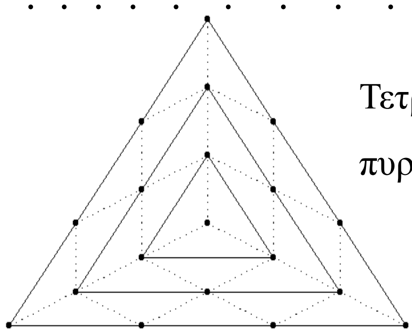
Τριγωνική ιδιότητα Pascal $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . .

1
1
2
3
5
⋮



Τρίγωνοι



Τετράεδροι

πυραμιδοειδείς

Αριθμοί Fibonacci

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πληθυσμό κουνελιών κάθε ενήλικο ζευγάρι γεννά κάθε μήνα από ένα ζευγάρι κουνέλια. Τα νεογέννητα ενηλικιώνονται το δεύτερο μήνα οπότε και γεννούν το πρώτο ζευγάρι τους. Υποθέτουμε ακόμη ότι τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ. Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα υπάρχουν στην αρχή του n-στού μήνα, όταν αρχικά είχαμε ένα ενήλικο ζευγάρι;.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1 + 1	2 + 1	3 + 2	5 + 3	8 + 5	13 + 8
	1	2	3	5	8	13	21

Τον n+2 μήνα υπάρχουν όσοι ήταν τον προηγούμενο μήνα και όσοι γεννιούνται τότε. Αυτοί είναι ίσοι με όσους υπήρχαν τον n-στό μήνα που ενηλικιώθηκαν τώρα ή ήταν ενήλικα από πριν

$$\boxed{\begin{array}{c} F_0=1,\ F_1=1, \\ F_{n+2}= F_{n+1} + F_n \end{array}}$$

Παρατηρήστε ότι το 4 μπορεί να γραφεί με 5 τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, δηλ. 4=1+1+1+1=2+1+1=1+2+1=1+1+2=2+2. Δείξτε ότι ο φυσικός αριθμός n γράφεται με F_n τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, όπου F_n οι αριθμοί Fibonacci.

Διοφαντικές εξισώσεις

Συμβολίζοντας x_1 το πλήθος των α, x_2 το πλήθος των β, …, x_n το πλήθος των εμφανίσεων του τελευταίου γράμματος, τότε θα είναι $x_1+x_2+_{\dots}+x_n=k$. Οι διάφοροι επαναληπτικοί συνδυασμοί αντιστοιχούν σε διαφορετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης. Ώστε:

Θεώρημα. Οι μη-αρνητικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \qquad \text{είναι} \qquad \mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Θεώρημα. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r, \ \ \mu\varepsilon\ x_1 > \alpha_1,\ x_2 > \alpha_2, \dots, x_n > \alpha_n}$$

δίνονται από τον τύπο:
$$\boxed{\binom{r-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_n-1}{n-1}}$$

Για την απόδειξη παρατηρήστε ότι η αντικατάσταση των x_i με $y_i+\alpha_i+1$ μετασχηματίζει ως προς y_i τη δοθείσα εξίσωση και οι ζητούμενες λύσεις είναι οι μη-αρνητικές λύσεις της νέας

Ιδιότητες επαναληπτικών συνδυασμών

Αν $\mathcal{E}_n^{\,k} = \binom{n+k-1}{k}$ ισχύει

$$\mathcal{E}_{n+1}^{\,k+1} = \mathcal{E}_{n}^{\,k+1} + \mathcal{E}_{n+1}^{\,k}$$ τριγωνική αναγωγική ιδιότητα

ή $$\binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k}$$

Απόδειξη

1) αλγεβρικά
2) με τριγωνική Pascal
3) με διπλή απαρίθμηση

$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$
Επιλέγοντας k+1 έχουμε
ακριβώς δύο δυνατότητες:
α) ω_{n+1} επιλέγεται
(Τα k θα είναι από τα n+1
διότι επιτρέπεται επανάλ.) $\mathcal{E}_{n+1}^{\,k}$
β) ω_{n+1} δεν επιλέγεται
(Τα k+1 θα είναι από τα n) $\mathcal{E}_{n}^{\,k+1}$

Ιδιότητες επαναληπτικών συνδυασμών (2)

$$\sum_{k=0}^{r} \mathcal{E}_n^{\,k} \cdot \mathcal{E}_m^{\,r-k} = \mathcal{E}_{n+m}^{\,r}$$

ή $$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{k} \cdot \binom{m+r-k-1}{r-k} = \binom{n+m+r-1}{r}$$

Απόδειξη

Η διοφαντική εξίσωση

$$\boxed{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_{n+m} = r}$$

Έχει πλήθος λύσεων $\mathcal{E}_{n+m}^{\,r}$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ $\quad \mathcal{E}_n^{\,k}$

$x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_{n+m} = r-k$ $\quad \mathcal{E}_m^{\,r-k}$

k=0, 1, …, r

για m=1 $$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+r}{r}$$

Ασκήσεις

1. Για n σταθερό βρέστε πότε μεγιστοποιείται το $\binom{n}{k}$

2. Δείξτε ότι ισχύει: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ (-1)^m\binom{2m}{m}, & \alpha\nu\ n=2m \end{cases}$

3. Αν το n είναι πολλαπλάσιο του 8, τότε το πλήθος των υποσυνόλων ενός n-συνόλου με πληθικούς αριθμούς που διαιρούνται με 4 είναι $2^{n-2}+2^{(n-2)/2}$. (Υπόδειξη: Αναπτύξτε το διώνυμο $(1+i)^n$, όπου i η φανταστική μονάδα).

4. Ένας υπολογιστής πρόκειται να υπολογίσει διωνυμικούς συντελεστές. Ο μεγαλύτερος ακέραιος που μπορεί να χειριστεί είναι το 32767. Το πρόγραμμα μπορεί να βασιστεί σε 4 μεθόδους. (1) $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$
(2) $\binom{n}{k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k!$ (3) $\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$, $k>0$ και $\binom{n}{0}=1$
(4) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}$, $0<k<n$ και $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ Για ποιες τιμές των n και k μπορεί το $\binom{n}{k}$ να υπολογιστεί με κάθε μέθοδο; Τι μπορείτε να πείτε για τη σχετική ταχύτητα κάθε μεθόδου;

Αρχή Συμπερίληψης - Εξαίρεσης (ΑΣΕ)

Έστω N άτομα και

n ιδιότητες $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ που χαρακτηρίζουν τα N άτομα

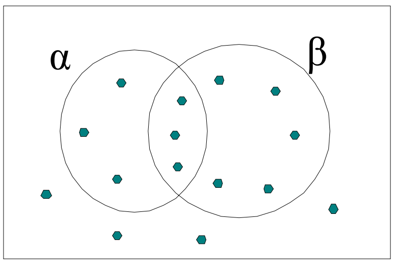
Συμβολίζουμε

$N(\alpha_k)$ πλήθος ατόμων που έχουν την ιδιότητα α_k

$N(\alpha'_k)$ πλήθος ατόμων που δεν έχουν την ιδιότητα α_k

Γενικά

$N(\alpha_1\alpha_2\ldots\beta'_1\beta'_2\ldots)$ πλήθος ατόμων που έχουν τις ιδιότητες α_1, α_2, … και δεν έχουν τις ιδιότητες β_1, β_2, …



Για n=2 βρίσκουμε

$$\boxed{\begin{aligned} N(\alpha'_1\,\alpha'_2) &= N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_2) = \\ &= 15-8-6+3=4 \end{aligned}}$$

Θεώρημα (ΑΣΕ)

$$N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \dots \text{ή } \alpha_n) = \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i\alpha_j) + \dots + (-1)^{s+1}\sum N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_s}) \pm \dots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$$

$$N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \dots \text{ή } \alpha_n) + N(\alpha_1' \, \alpha_2' \dots \alpha_n') = N$$

Αν A_k το σύνολο των ατόμων που έχουν την ιδιότητα α_k και $|A_k|$ συμβολίζει τον πληθικό αριθμό του συνόλου A_k, τότε η ΑΣΕ γράφεται επίσης :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n+1} S_n$$

όπου:

$$S_k = \sum_{1 \le t_1 < t_2 < \dots < t_k \le n} |A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_n}|, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

που δείχνεται επαγωγικά

Απόδειξη (συνδυαστική)

$$N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \dots \text{ή } \alpha_n) = \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i\alpha_j) + \sum N(\alpha_i\alpha_j\alpha_k) - \dots$$

Θα δείξουμε ότι κάθε άτομο που έχει τουλάχιστον μία ιδιότητα προσφέρει ακριβώς μία 1-δα στο άθροισμα του β΄μέλους, ενώ είναι προφανές ότι προσφέρει μία 1-δα στο α΄μέλος.

Έστω ότι το x έχει ακριβώς k, (k=1 έως n), από τις ιδιότητες. Τότε:

Το x προσφέρει $\binom{k}{1}$ μονάδες στο $\sum N(\alpha_i)$

Το x προσφέρει $\binom{k}{2}$ μονάδες στο $\sum N(\alpha_i\alpha_j)$

....

Το x προσφέρει $\binom{k}{k}$ μονάδες στο $\sum N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_s})$

Τελικά το x προσφέρει μονάδες στο (*) $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} + 0 + 0 + \dots + 0$
που είναι πάντα 1. (Διώνυμο Νεύτωνα για a = -b = 1).

Απόδειξη τύπου Διαταράξεων

Έτσι λέγονται οι αναδιατάξεις ενός διατεταγμένου συνόλου που δεν αφήνουν κανένα στοιχείο στην αρχική του θέση.
Συμβολίζουμε D_n το πλήθος των διαταράξεων συνόλου n στοιχείων, τότε ισχύει:

$$\boxed{D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)}$$

Απόδειξη
Έστω, $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ μία από τις N=n! μεταθέσεις της n-άδας (1,2,...,n).
Συμβολίζουμε α_i την ιδιότητα ότι στη μετάθεση αυτή το μ_i είναι i, i=1,2,...n. Εφαρμόζουμε ΑΣΕ.

$$D_n = N(\alpha_1'\,\alpha_2'\ldots\alpha_n') = N-\sum N(\alpha_i)+\sum N(\alpha_i\alpha_j)-\ldots=$$
$$= n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\ldots$$

Β΄ τρόπος (με διπλή απαρίθμηση)

1	2	...	k	...	n
k			;		

Το k επιτρέπεται να πάρει μία από τις (n-1) τιμές 2, …,n

Για k δοθέν. Στο κελί με το ; τοποθετείται

(1) το 1, ή (2) Διάφορο του 1

D_{n-2} + D_{n-1}

Άρα ισχύει ο αναδρομικός τύπος $\boxed{D_n = (n-1)\left(D_{n-1}+D_{n-2}\right)}$

Θέτουμε

$$d_n = D_n - nD_{n-1}$$
$$\Rightarrow d_n = -d_{n-1}$$
$$\Rightarrow d_n = (-1)^n$$

$$\boxed{D_n = n\,D_{n-1}+(-1)^n}$$

που δίνει και πάλι τον προηγούμενο τύπο με τηλεσκοπική άθροιση

Παραδείγματα

Πόσες από τις μεταθέσεις των αριθμών 1,2, ..., 11:

α. αφήνουν κάθε άρτιο στη φυσική του θέση και κανένα περιττό στη θέση του; Απ. $D_6 = \cdots = 265$

β. αφήνουν όλους τους άρτιους σε άρτιες θέσεις, τους περιττούς σε περιττές θέσεις, αλλά κανέναν στη φυσική του θέση; Απ. $D_6 \cdot D_5 = \cdots = 11660$

γ. ακριβώς τέσσερις αριθμούς στη θέση τους;

Απ. $\binom{11}{4} D_7 = 330 \cdot 1854 = 611820$

Τα γράμματα Δ, Γ, Υ, Ε, Σ, Ω, τοποθετούνται τυχαία σε σειρά. Ποια η πιθανότητα να μην εμφανιστούν οι λέξεις ΕΓΩ και ΣΥ;

A = εμφανίζ. ΕΓΩ B = εμφανίζ. ΣΥ

$$P(A'B') = \frac{N_{A'B'}}{N} = \frac{N - N_A - N_B + N_{AB}}{N} =$$

$$= \frac{6! - 4! - 5! + 3!}{6!} = \frac{582}{720} = 0.808$$

Εφαρμογή

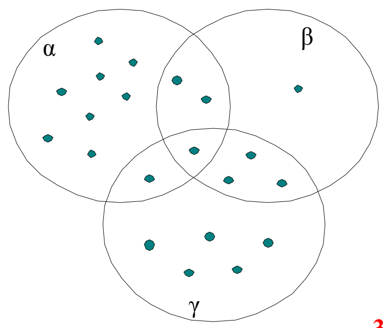
Από τους μουσικούς μιας ορχήστρας οι 12 παίζουν έγχορδο όργανο, 7 παίζουν πνευστό και 10 παίζουν κρουστό. Γνωρίζουμε επίσης ότι τρεις παίζουν και έγχορδο και πνευστό, τέσσερις παίζουν και πνευστό και κρουστό όργανο, 2 παίζουν έγχορδο και κρουστό ενώ υπάρχει ένας που παίζει και τα τρία είδη οργάνων. Πόσοι είναι οι μουσικοί;

α έγχορδο
β πνευστό
γ κρουστό

N; N(α)=12, N(β)=7, N(γ)=10, N(αβ)=3, N(αγ)=2, N(βγ)=4, N(αβγ)=1.

$$N = N(\alpha\, ή\, \beta\, ή\, \gamma) = N(\alpha) + N(\beta) + N(\gamma) - N(\alpha\beta) - N(\alpha\gamma) - N(\beta\gamma) + N(\alpha\beta\gamma)$$

$\Rightarrow$ **N=21**



Ασκήσεις

Πόσοι από τους ακεραίους από το 1 έως το 1000000, συμπεριλαμβανομένων δεν είναι ούτε τέλεια τετράγωνα, ούτε τέλειοι κύβοι, ούτε τέλειες δυνάμεις του 4;

Ένας έχει στο πορτοφόλι του 8 κέρματα του 1 λεπτού, 7 των 2 λεπτών, 4 των 5 λεπτών και 3 των 10 λεπτών. Υποθέτοντας ότι κέρματα ίδιας αξίας είναι ταυτόσημα, και ότι τα κέρματα επιλέγονται τυχαία, με πόσους τρόπους μπορεί ο άνθρωπος αυτός να επιλέξει 10 κέρματα και να τα δώσει σ' έναν ανιψιό του;

Κόσκινο του Ερατοσθένη

Πόσοι από τους n=70 αριθμούς, δεν διαιρούνται ούτε με 2 ούτε με 3 ούτε με 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

1		5	7	
	13		17	19
	23	25		29
31		35	37	
41	43		47	49
	53			59
61		65	67	

α πολ.(2)

β πολ.(3)

γ πολ.(11)

$$N(\alpha'\beta'\gamma') = N - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) + $$
$$+ N(\alpha\beta) + N(\alpha\gamma) + N(\beta\gamma) - N(\alpha\beta\gamma) =$$
$$= 70 - 35 - 23 - 6 + 11 + 3 + 2 - 1 = \mathbf{21}$$

Γενίκευση
Συνάρτηση Euler

$$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_r^{\pi_r}$$

φ(n): μικρότεροι του n πρώτοι προς τον n

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Νόμος Ολικών Πιθανοτήτων

Αν $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι γεγονότα, τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \ldots$$

Ισοδύναμη με ΑΣΕ αν ο πιθανοχώρος είναι πεπερασμένος και εφαρμόσουμε τον κλασικό ορισμό $P(A)=N_A/N$

Τα γράμματα Δ, Γ, Υ, Ε, Σ, Ω, τοποθετούνται τυχαία σε σειρά. Ποια η πιθανότητα να μην εμφανιστούν οι λέξεις ΕΓΩ και ΣΥ;

Α εμφανίζ. ΕΓΩ

Β εμφανίζ. ΣΥ

$$P(A'B') = \frac{N_{A'B'}}{N} = \frac{N - N_A - N_B + N_{AB}}{N} = \frac{6! - 4! - 5! + 3!}{6!} = \frac{582}{720} = 0.808$$

Ασκήσεις

Πόσες από τις μεταθέσεις των αριθμών 1,2, ..., 11:

α. αφήνουν κάθε άρτιο στη φυσική του θέση και κανένα περιττό στη θέση του

β. αφήνουν όλους τους άρτιους σε άρτιες θέσεις, τους περιττούς σε περιττές θέσεις, αλλά κανέναν στη φυσική του θέση

γ. ακριβώς τέσσερις αριθμούς στη θέση τους;

Κάποιος επιδιορθώνοντας το αυτοκίνητό του έβγαλε τα 8 μπουζί της μηχανής με σκοπό να τα ξαναβάλει στις ίδιες θέσεις που ήταν αρχικά. Μπερδεύτηκε όμως και έτσι τα ανακάτωσε και τα έβαλε στην τύχη. Ποια η πιθανότητα (α) ένα τουλάχιστον μπουζί να μπεί στην αρχική του θέση; (β) δύο τουλάχιστον;

Για την απόδειξη του τύπου των διαταράξεων, θέσατε g_n όπως δίπλα και δείξτε ότι τα g_n ικανοποιούν την ίδια αναδρομική σχέση (και οπωσδήποτε τις ίδιες αρχικές συνθήκες)

$$g_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Δείξτε στη συνέχεια ότι το D_n είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στον αριθμό $n!/e$, για $n \geq 1$. (αρκεί να δείξετε ότι η διαφορά τους είναι <1/2)

Αρχή Περιστερώνα (Pigeonhole principle)

n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον n+1 περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με 2 ή περισσότερα περιστέρια.
Γενίκευση.
n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον k·n+1 περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με k+1 ή περισσότερα περιστέρια.

Δείξτε ότι μεταξύ n+1 αριθμών τυχαία επιλεγμένων από τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, ..., 2n, υπάρχουν πάντοτε τουλάχιστον δύο, τέτοιοι ώστε ο ένας από αυτούς:

α) να είναι μεγαλύτερος του άλλου κατά n,
β) να είναι διαδοχικός του άλλου,
γ) να έχει με τον άλλο άθροισμα 2n+1,
δ) να διαιρεί τον άλλο.

πηλίκα διά της μεγαλ. δύναμης του 2 (περιστ.)

$\{1, n+1\}, \{2, n+2\}, ..., \{n, 2n\}$
n φωλιές

$1 \bmod 2n, 3 \bmod 2n, ..., (2n-1) \bmod 2n$
n φωλιές

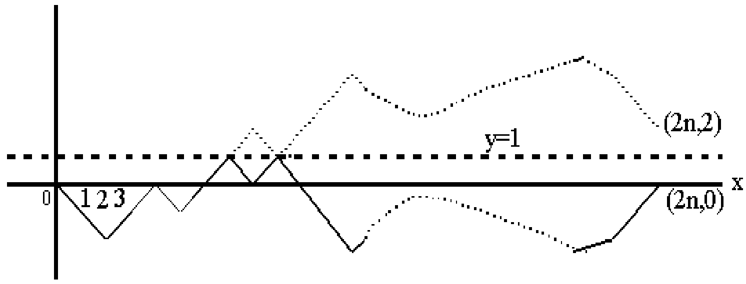
Ασκήσεις

Υποθέστε ότι τουλάχιστον ένας από τους α_1, β_1, γ_1 έχει μια ιδιότητα P, και το ίδιο ισχύει για τους α_2, β_2, γ_2 κοκ .... και για τους α_{10}, β_{10}, γ_{10}. Ποιος είναι ο μέγιστος k για τον οποίο είναι αληθής η πρόταση: Τουλάχιστον k από τους $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{10}$ ή τουλάχιστον k από τους $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{10}$ ή τουλάχιστον k από τους $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{10}$ έχουν την ιδιότητα P.

Ένας επιπλοποιός κατασκεύαζε για μια περίοδο 30 ημερών τουλάχιστον ένα τραπέζι κάθε μέρα και κατά μέσο όρο λιγότερο από 1.5 τραπέζι την ημέρα. Έστω α_i το πλήθος των τραπεζιών που έχουν ολοκληρωθεί μέχρι το βράδυ της i-στής μέρας. Παρατηρείστε πρώτα ότι όλα τα α_i και όλα τα α_i+14 είναι αριθμοί μικρότεροι ή ίσοι του 59. Δείξτε στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την αρχή του περιστερώνα, ότι υπάρχουν διαδοχικές μέρες στη διάρκεια των οποίων ο επιπλοποιός κατασκεύασε ακριβώς 14 τραπέζια.

Αρχή Αντανάκλασης

Στο ταμείο ενός θεάτρου υπάρχει μια ουρά 2n ατόμων. Τα μισά άτομα έχουν μόνο χιλιάρικα ενώ τα άλλα μισά έχουν και από ένα 500-ρικο. Τα εισιτήρια κάνουν 2500 και 3500 δρχ. και στην αρχή ο ταμίας δεν έχει καθόλου ρέστα. Είναι φανερό ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των ατόμων αυτών στην ουρά. Σε πόσους από τους τρόπους αυτούς υπάρχουν πάντα 500-ρικα στο ταμείο του θεάτρου ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα;



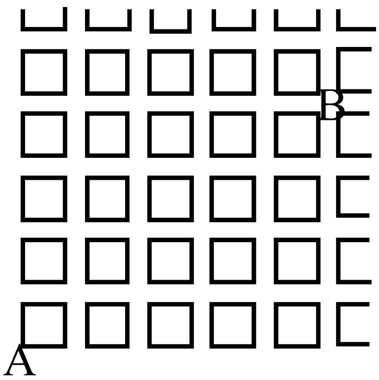
$$N_A = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

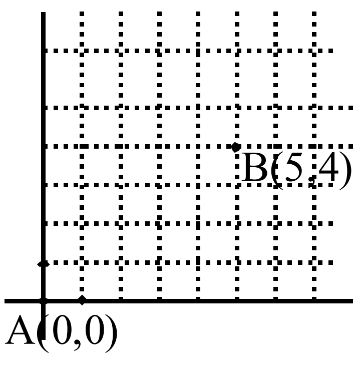
Πιθανότητα να μην υπάρξει πρόβλημα

1/(n+1)

Κίνηση σε δικτύωμα

Ένας διαβάτης κινείται σε ένα δίκτυο οικοδομικών τετραγώνων (σχήμα), από το σημείο A στο σημείο B. Αν του επιτρέπεται να κινείται μόνο προς τα Ανατολικά ή προς τα Βόρεια, να βρεθεί πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορεί να ακολουθήσει;





Συμβολίζοντας το δίκτυο των οικοδομικών τετραγώνων με το δικτύωμα του διπλανού σχήματος. Ονομάζουμε **βήμα** τη μετακίνηση σε μια πλευρά τετραγώνου λέγεται. Τότε $M(x_0+x, y_0+y)$ συμβολίζει σημείο που βρίσκεται x βήματα ανατολικά και y βήματα βόρεια, από το αρχικό σημείο A (x_0, y_0). Στο σχήμα το B είναι 5 βήματα ανατολικά και 4 βήματα βόρεια από το A.

Λύση

Έστω f(x,y) το πλήθος των διαφορετικών δρόμων από το $A(x_0, y_0)$ στο $M(x_0+x, y_0+y)$. Η f(x,y) ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$f(x+1,y+1) = f(x+1,y) + f(x,y+1),$$

διότι το τελευταίο βήμα στο $M(x_0+x, y_0+y)$ είναι
ή από $M(x_0+x-1, y_0+y)$, είτε από $M(x_0+x, y_0+y-1)$.

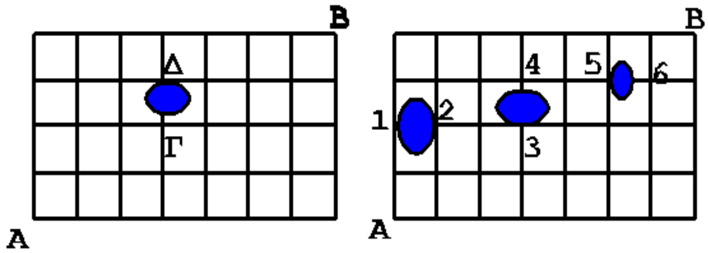
Συνδυαστική λύση (με χρήση διπλής απαρίθμησης):
Για να βρεθεί κάποιος από το σημείο Α (x_0, y_0) στο σημείο $M(x_0+x, y_0+y)$ χρειάζεται να κάνει x+y διαδοχικά βήματα, κάποια προς τα ανατολικά (Α) και κάποια προς τα βόρεια (Β). Άρα, κάθε διαδρομή είναι μία διαδοχή από
x το πλήθος Α και y το πλήθος Β.
Επομένως το πλήθος των διαφορετικών δρόμων θα ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων x+y γραμμάτων, από τα οποία τα x είναι Α και τα y είναι Β, δηλ.:

$$\boxed{f(x,y) = M_{x+y}^{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}}$$

Για το παράδειγμα
$$f(5,4) = \binom{9}{4} = 126$$

Πιο πολύπλοκο δικτύωμα

Στα σχήματα δίπλα υπάρχουν βήματα μη εφικτά, όπως μεταξύ των σημείων Γ, Δ στο πρώτο σχήμα, ή μεταξύ των σημείων 1,2 ή 3,4 ή 5,6 στο δεύτερο. Με πόσους τρόπους πάμε από το Α στο Β; Να δοθεί γενική λύση για το πρώτο σχήμα.



(1) Πρέπει από όλες τις διαδρομές που συνδέουν τα Α, Β, να αφαιρέσουμε όλες τις διαδρομές που περιέχουν το βήμα "ΓΔ". Αυτές οι τελευταίες αποτελούνται από τους συνδυασμούς των διαδρομών από το Α στο Γ, και αυτών από το Δ στο Β (πολλαπλασιαστική αρχή).

Λύση για Α(0, 0), Β(x, y), Γ(κ, λ), Δ(κ, λ+1),

$$\binom{x+y}{x} - \binom{\kappa+\lambda}{\kappa}\cdot\binom{x+y-\kappa-\lambda-1}{x-\kappa}$$

Εδώ: $\binom{11}{7} - \binom{5}{3}\cdot\binom{5}{4} = 280$

(2) Στο δεύτερο σχήμα θέτουμε α την ιδιότητα «η διαδρομή δεν περιέχει το βήμα 12», και αντίστοιχα β και γ, για τις διαδρομές που δεν περιέχουν τα 34 ή 56. Το ζητούμενο ισοδυναμεί με το πλήθος N(α΄β΄γ΄) των διαδρομών που δεν ικανοποιούν καμία από τις τρεις ιδιότητες. Με ΑΣΕ βρίσκουμε 173 διαδρομές.

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους σχηματίζεται η λέξη ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ από το διπλανό σχήμα;

```
          Π
         Ι Ι
        Θ Θ Θ
       Α Α Α Α
      Ν Ν Ν Ν Ν
     Ο Ο Ο Ο Ο Ο
      Τ Τ Τ Τ Τ
       Η Η Η Η
        Τ Τ Τ
         Ε Ε
          Σ
```

Ένας τρόπος

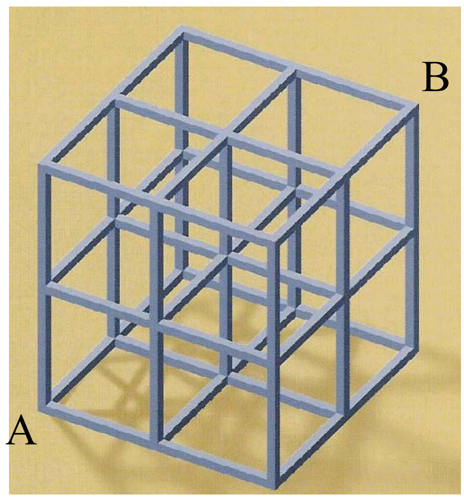
```
          *
         1 1
        1 2 1
       1 3 3 1
      1 4 6 4 1
   1 5 10 10 5 1
   6 15 20 15 6
    21 35 35 21
     56 70 56
     126 126
       252
```

Άλλος τρόπος

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

Ένα τριδιάστατο δικτύωμα

Στο διπλανό δικτύωμα ένα κινητό μπορεί να κινηθεί μόνο δεξιά ή πίσω ή άνω. Σε κάθε κόμβο μπορεί να αποφασίσει μία από τις εφικτές διαδρομές. Πόσες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν;



Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οποιαδήποτε διαδρομή από το Α στο Β θα περιέχει οπωσδήποτε δύο «βήματα» Δ(εξιά), δύο Π(ίσω) και δύο Ά(νω). Άρα θα είναι μια αναδιάταξη των 6 γραμμάτων

Δ Δ Π Π Α Α

και υπάρχουν

$$M_6^{2,2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

διαφορετικές διαδρομές

Ασκήσεις

- Να υπολογισθεί το πλήθος των τρόπων που n ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν σε (α) ευθύγραμμο ή (β) σε κυκλικό τραπέζι, έτσι ώστε σε k συγκεκριμένα ανδρόγυνα οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

k ζευγάρια που είναι μαζί				n-k άνδρες				n-k γυναίκες			
(α, γ)	**(α, γ)**	**…**	**(α, γ)**	**α**	**α**	**…**	**α**	**γ**	**γ**	**…**	**γ**

$2^k\,(2n-k)!$
$2^k\,(2n-k-1)!$.

- Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε σειρά έξι άτομα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ, έτσι ώστε
  - α) ο Β να μην προηγείται του Ζ, 360
  - β) ο Β να είναι ακριβώς μπροστά από τον Ζ, 120
  - γ) ο Ζ να είναι ακριβώς μπροστά από τον Β, 120
  - δ) ο Β και ο Ζ να είναι μαζί; 240
- Κατά πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε ένα ράφι 3 βιβλία Γαλλικά, 5 Ελληνικά και 6 Γερμανικά αν α) είναι διαφορετικών συγγραφέων β) τα βιβλία κάθε γλώσσας είναι του ίδιου συγγραφέα; 14!=87.178.291.200, 14!/(3!5!6!)=168.168
- Πόσες είναι οι 9-ψήφιες δυαδικές ψηφιολέξεις (με ψηφία 0 και 1), που έχουν 4 μηδενικά και 5 μονάδες; 9!/(4!5!)=126

  Πόσες από αυτές αρχίζουν από 1 και τελειώνουν σε 0; 7!/(3!4!)=35

Ασκήσεις

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε πέντε χαρτιά από μία τράπουλα σε έναν παίκτη (α) όταν τα μοιράζουμε ένα-ένα ή (β) όταν η σειρά τους δεν μας ενδιαφέρει; $\left(\Delta_{52}^{5} = \frac{52!}{47!} = 311875200,\ \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\cdot 47!} = 2598960\right)$
- Πόσες διαφορετικές απεικονίσεις από ένα σύνολο $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_k\}$ εντός ενός συνόλου $Y=\{y_1, y_2,\ldots, y_n\}$, με n>k, υπάρχουν όταν δεν επιτρέπεται διαφορετικά πρότυπα να έχουν ίσες εικόνες; Πόσες αν δεν υπάρχει περιορισμός; $(\Delta_n^k\ ,\ n^k)$
- Ένα υποσύνολο k στοιχείων κάποιου συνόλου S, λέγεται k-υποσύνολο. Πόσα k-υποσύνολα του S υπάρχουν, αν το S έχει n στοιχεία. Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα αυτό και τη διπλή απαρίθμηση δείξτε τη σχέση:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

- Αυτοκίνητο σταθμεύει σε ένα δρόμο, στον οποίο υπάρχουν (εκείνη τη στιγμή) άλλες 10 θέσεις ελεύθερες, έτσι ώστε οι δύο θέσεις μπροστά και πίσω από το αυτοκίνητο να είναι ελεύθερες. Αν υποθέσουμε ότι οι θέσεις καλύπτονται τυχαία, ποια η πιθανότητα όταν επιστρέψει να είναι πάλι οι δύο θέσεις μπροστά και πίσω από το αυτοκίνητο, αν τη στιγμή της επιστροφής υπάρχουν 4 άδειες θέσεις;

$$\left(p = \binom{8}{6} / \binom{10}{6} = 0.1333\ldots\right)$$