

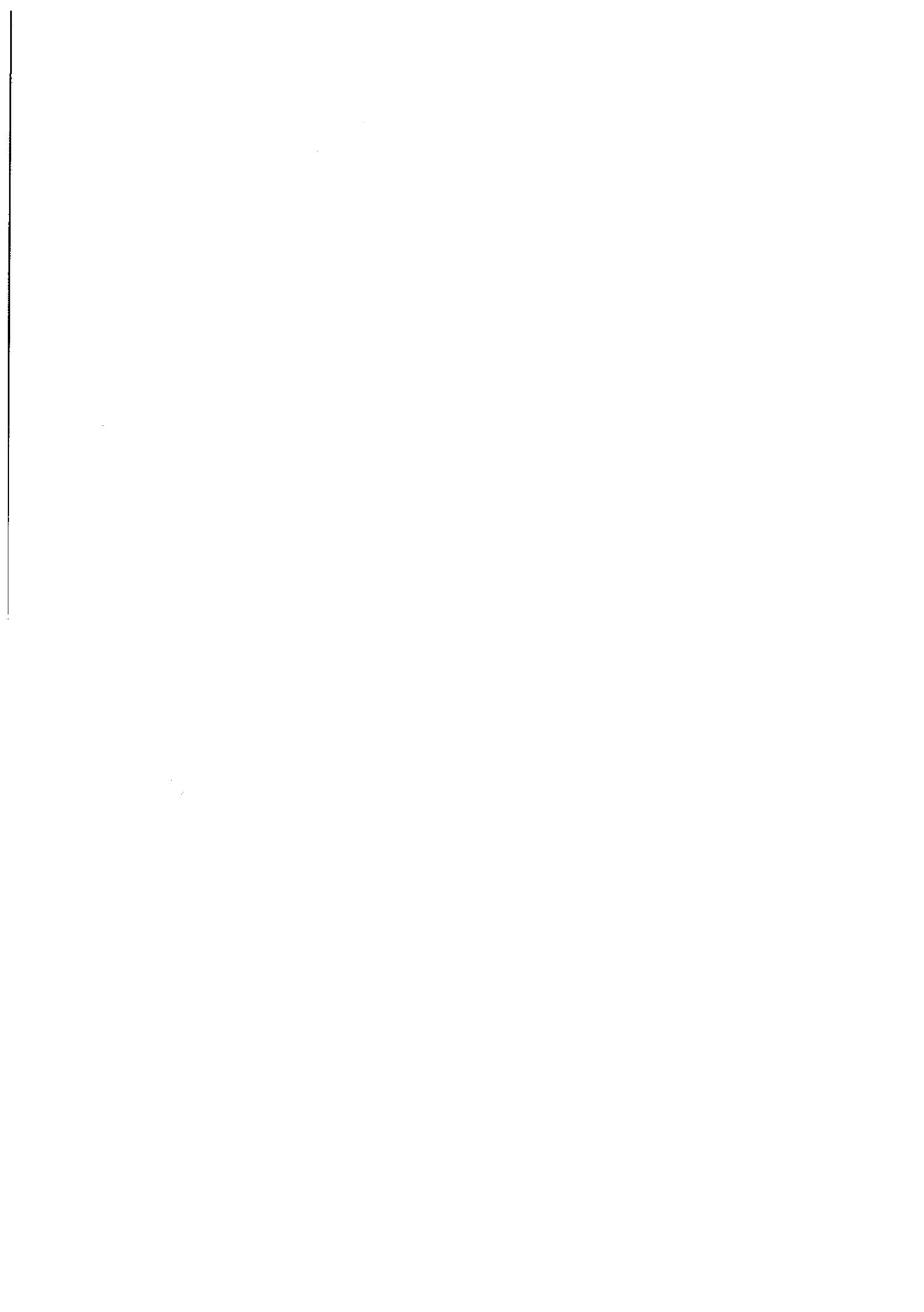
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΥΛΙΚΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΙΣ ΤΟΥ Η.Χ. ΑΫΦΑΝΤΗ

**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**

**ΕΚΔΟΣΗ
ΤΜΗΜΑ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
2007-2008**

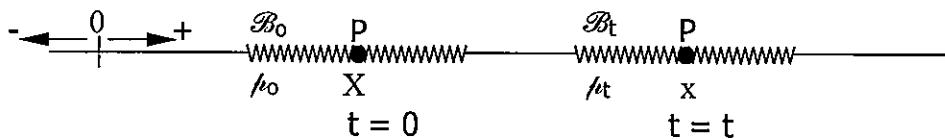


ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. ΧΩΡΟΣ – ΧΡΟΝΟΣ

Έστω σώμα το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ κατέχει τη θέση \mathcal{B}_0 . Θεωρούμε τυχαίτματα του σώματος αυτού το οποίο συμβολίζουμε με \mathcal{P} . Η θέση του σώματος περιγράφεται από τις συντεταγμένες των σημείων P του κάθε τμήματος \mathcal{P} που για τη χρονική στιγμή $t = 0$ συμβολίζεται με X .

Σε μια επομένη τυχαία χρονική στιγμή t το σώμα κατέχει τη θέση \mathcal{B}_t , το τμήμα του σώματος \mathcal{P} κατέχει τη θέση \mathcal{R} και η θέση του υλικού σημείου P καθορίζεται τώρα από τη συντεταγμένη του x .



Σχήμα 1.1

$t=0:$

θέση σώματος: \mathcal{B}_0

τυχαίο τμήμα του σώματος: \mathcal{P}

υλικό σημείο P

διάνυσμα θέσης υλικού σημείου P : X

$t=t:$

θέση σώματος: \mathcal{B}_t

το ίδιο τμήμα του σώματος: \mathcal{P}

υλικό σημείο P

διάνυσμα θέσης υλικού σημείου P : x

Η κίνηση του υλικού σημείου περιγράφεται από την σχέση:

(i) Κίνηση

$$x = \chi(X, t), \text{ όπου } X = \chi(X, 0) \quad (1.1)$$

Μεγέθη που περιγράφουν την κίνηση του υλικού σημείου P :

(ii) Ταχύτητα

$$v = v(X, t) = \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t} = \dot{x} \quad (1.2)$$

(iii) **Επιτάχυνση**

$$a = a(X, t) = \frac{\partial^2 \chi(X, t)}{\partial t^2} = \ddot{v} = \ddot{x} \quad (1.3)$$

(iv) Η κλίση (βαθμίδα) της παραμόρφωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$F = \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial X} \quad (1.4)$$

Η F αποτελεί ένα μέτρο μεταβολής της τοπικής γεωμετρίας του σώματος γύρω από το σημείο P κατά την κίνησή του από το X στο x . Εκφράζει με άλλα λόγια το πόσο η απειροστή υλική ίνα dX επιμηκύνεται ή συρρικνούται στο τελικό μήκος dx .

Για σταθερό t η βαθμίδα παραμόρφωσης γράφεται:

$$F = \left. \frac{dx}{dX} \right|_{t=\text{σταθερό}} \Rightarrow dx = F dX; \quad t = \text{σταθερό} \quad (1.5)$$

(v) **Ανηγμένη Παραμόρφωση ϵ**

$$\epsilon = \left. \frac{dx - dX}{dX} \right|_{t=\text{σταθ}} = \left. \frac{dx}{dX} \right|_{t=\text{σταθ}} - 1 = F - 1 \Rightarrow \epsilon = F - 1 \quad (1.6)$$

$$\epsilon = \left. \frac{\partial(x - X)}{\partial X} \right|_{t=\text{σταθ}} = \left. \frac{\partial u}{\partial X} \right|_{t=\text{σταθ}} \quad (1.7)$$

(vi) **Μετατόπιση u**

$$u = u(X, t) = x - X = \chi(X, t) - X \quad (1.8)$$

(vii) **Σχέση “υλικής” και “χωρικής” παραγώγου ως προς το χρόνο**

Μπορούμε να μελετήσουμε το σώμα εκφράζοντας τα μεγέθη (f) που περιγράφουν την κίνηση (ταχύτητα, επιτάχυνση κτλ.) και άλλες ιδιότητές του (πυκνότητα, θερμοκρασία, τάση κτλ.), είτε συναρτήσει της αρχικής του θέσης X είτε συναρτήσει της θέσης x . Στη πρώτη περίπτωση λέμε ότι έχουμε περιγραφή της κίνησης κατά Lagrange $f = \hat{f}(X, t)$ ενώ στη δεύτερη περίπτωση περιγραφή κατά Euler $f = \bar{f}(x, t)$. Η μετάβαση από τη μια περιγραφή στην άλλη είναι ως εξής:

$$f = \bar{f}(x, t) = \bar{f}(\chi(X, t), t) = \hat{f}(X, t) \quad (1.8)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς το χρόνο λαμβάνουμε:

$$\dot{\hat{f}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \Rightarrow \dots \text{σύνθετη παραγώγιση (chain rule)}$$

όπου:

$$\dot{\hat{f}} = \frac{\partial \hat{f}(X, t)}{\partial t} \equiv \dot{f} : \text{“υλική” παράγωγος Lagrange (ο παρατηρητής παραμένει πάντα στο } X, t = 0)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} : \text{“χωρική” παράγωγος Euler (ο παρατηρητής ταξιδεύει μαζί με το } x, t = t)$$

Έτσι παρήγαμε τη σχέση Euler (ή θεώρημα Euler) που συνδέει την παράγωγο Lagrange ή “υλική” παράγωγο με την παράγωγο Euler ή “χωρική” παράγωγο. Δηλαδή:

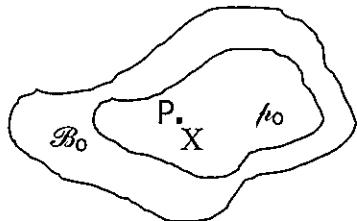
$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{Ταυτότητα ή θεώρημα Euler}) \quad (1.9)$$

που, ουσιαστικά, δεν είναι τίποτε άλλο από τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης του απειροστικού λογισμού που παρήχθηκε για πρώτη φορά από τον Euler.

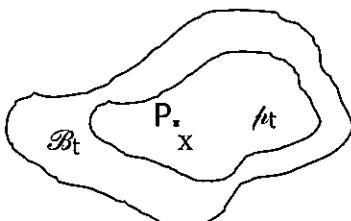
Σημείωση: Γενίκευση σε 3 – Διαστάσεις

Στις τρεις διαστάσεις το σώμα αποκτά όγκο. Το σχήμα του καθώς και η παραμόρφωση κατά την κίνησή του φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:

Αρχική διαμόρφωση ($t = 0$)



Τελική διαμόρφωση ($t = t$)



$t = 0$:

θέση σώματος: \mathcal{B}_0

τυχαίο τμήμα του σώματος: μ_0

υλικό σημείο P

διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου P : X

$t = t$:

θέση σώματος: \mathcal{B}_t

το ίδιο τμήμα του σώματος: μ_t

υλικό σημείο P

διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου P : x

Σχήμα 1.2

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες η εξίσωση της κίνησης και τα μεγέθη που περιγράφουν την κίνηση παίρνουν τη μορφή:

(i) **Εξίσωση της κίνησης**

$$x_i = \chi_i(X_j, t) \text{ όπου } i, j = 1, 2, 3$$

(ii) **Ταχύτητα**

$$v_i = v_i(X_j, t) = \frac{\partial \chi_i(X_j, t)}{\partial t} = \dot{x}_i$$

(iii) **Επιτάχυνση**

$$a_i = a_i(X_j, t) = \frac{\partial^2 \chi_i(X_j, t)}{\partial t^2} = \ddot{x}_i$$

(iv) **Μετατόπιση u**

$$u_i = u_i(X_j, t) = x_i - X_i = \chi_i(X_j, t) - X_i$$

(v) **Κλίση παραμόρφωσης**

$$F_{ij} = \frac{\partial \chi_i(X_m, t)}{\partial X_j}, \text{ όπου } m = 1, 2, 3 \text{ (όπως και τα } i, j)$$

(vi) Ανηγμένη Παραμόρφωση

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{όπου,} \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

(viii) Σχέση μεταξύ των παραγώγων Lagrange και Euler

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \phi_{i,m} v_m$$

όπου:

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial \phi_i(X_j, t)}{\partial t} = \dots = \text{Παράγωγος κατά Lagrange ή "υλική" παράγωγος}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \frac{\partial \phi_i(x_j, t)}{\partial t} = \dots = \text{Παράγωγος κατά Euler ή "χωρική" παράγωγος}$$

(ix) Επιπλέον παρατηρήσεις

Για τον τριδιάστατο χώρο

$$1. F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = x_{i,j}; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{όπου } i, j = 1, 2, 3$$

Δηλαδή

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \quad \text{υποδηλώνουν τις συνιστώσες του τανυστή } \underline{F}$$

Ο παραπάνω συμβολισμός με δείκτες για τανυστές $\underline{F} = F_{ij} \hat{i}_i \otimes \hat{i}_j$, όπου τα \hat{i}_i συμβολίζουν τα μοναδιαία διανύσματα ενός καρτεσιανού συστήματος και το σύμβολο \otimes δυαδικό γινόμενο, χρησιμοποιείται και για διανύσματα. Έτσι για \underline{u} τυχαίο διάνυσμα έχουμε

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \hat{i}_i = u_i \hat{i}_i$$

Όπου το "i" ή ένας άλλος δείκτης επαναλαμβάνεται θεωρούμε ότι υπάρχει άθροισμα από $i=1$ μέχρι $i=3$. Συνήθως παραλείπουμε το Σ , αλλά θεωρούμε ότι είναι άθροισμα, π.χ. $A_{ij} u_j = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3$. Σ' αυτή τη γραφή με δείκτες δεν έχει έννοια ένας δείκτης να επαναλαμβάνεται τρεις φορές (A_{iikk} δεν έχει νόημα).

Το δ_{ij} (σύμβολο του Kronecker/μοναδιαίος τανυστής) ή είναι ίσο με μηδέν ή ίσο με ένα:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{δηλαδή} \quad \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν υπάρχει γινόμενο με δ_{ij} και όμοιους δείκτες σε άλλο όρο, τότε το δ_{ij} παραλείπεται αλλάζοντας τον κοινό δείκτη του άλλου όρου

$$\text{π.χ. } A_{ijkl} \delta_{ij} = A_{ikl}$$

■ $\text{grad}\varphi = \varphi_{,i} \hat{i}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \hat{i}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \hat{i}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \hat{i}_3 \dots$ κλίση βαθμωτού μεγέθους

■ $\text{grad}\underline{u} = u_{i,j} \hat{i}_i \otimes \hat{i}_j$ (άθροισμα 9 όρων) ... κλίση διανύσματος

To grad βαθμωτού μεγέθους είναι διάνυσμα. To grad διανύσματος έιναι τανυστής.

Ίχνος

■ $\text{tr} \underline{T} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \dots$ ίχνος τανυστή

$$\text{tr grad}\underline{u} = \text{div}\underline{u} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Απόκλιση διανύσματος...είναι βαθμωτό μέγεθος

■ $\text{grad}\underline{T} = T_{ij,k} \hat{i}_i \otimes \hat{i}_j \otimes \hat{i}_k \dots$ κλίση τανυστή

■ $\text{div}\underline{T} = T_{ij,j} \hat{i}_i \dots$
$$\begin{bmatrix} T_{11,1} & T_{12,2} & T_{13,3} \\ T_{21,1} & T_{22,2} & T_{23,3} \\ T_{31,1} & T_{32,2} & T_{33,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{bmatrix}$$

Απόκλιση τανυστή ... είναι διάνυσμα

2. MAZA

2.1) 1 – Διάσταση

Η μάζα των τμημάτων p_0 και p_t του σώματος σε χρόνους $t = 0$ και $t = t$ ορίζεται από τις σχέσεις:

$$m(p_0) = \int_{p_0} \rho(X, 0) dX$$

και

$$m(p_t) = \int_{p_t} \rho(x, t) dx$$

όπου $\rho(X, 0)$ η αρχική πυκνότητα του σώματος και $\rho(x, t)$ η πυκνότητα του σώματος σε χρόνο t . Επίσης για τη διευκόλυνση του συμβολισμού στα ολοκληρώματα, κ.λ.π. χρησιμοποιούμε εναλλακτικά $/_0 = p_0$ και $/_t = p_t$

(i) Αρχή διατήρησης μάζας κατά Lagrange

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μάζας, η μάζα του σώματος στις δύο αυτές θέσεις θα πρέπει να είναι η ίδια, δηλαδή:

$$m(p_t) = m(p_0)$$

ή

$$\int_{p_t} \rho(x, t) dx = \int_{p_0} \rho(X, 0) dX \quad (2.1)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $F = \frac{dx}{dX} \Rightarrow dx = F dX$, για σταθερό t .

Σημείωση: Γενικότερα, $dx = \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial X} dX + \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t} dt \Rightarrow dx = F dX$, για $t =$ σταθερό

Επομένως η μάζα του σώματος στη θέση x με αλλαγή του χωρίου ολοκλήρωσης γίνεται:

$$m(p_t) = \int_{p_t} \rho(x, t) dx = \int_{p_0} \rho(X, t) F dX$$

Έτσι η (2.1) γίνεται:

$$\int_{p_0} \rho(X, 0) dX = \int_{p_0} \rho(X, t) F dx \quad (2.2)$$

Εάν με ρ_0 συμβολίσουμε την πυκνότητα του σώματος στη θέση X σε χρόνο $t=0$, δηλαδή $\rho_0 = \rho(X, 0)$, και $\rho = \rho(X, t)$ είναι η πυκνότητα σε τυχαία χρονική στιγμή t τότε η (2.2) γίνεται:

$$\int_{p_0} \rho_0 dX = \int_{p_0} \rho F dx \Rightarrow \int_{p_0} (\rho F - \rho_0) dX = 0 \quad \forall p_0 \in B_0$$

Με την υπόθεση ότι οι ρ , ρ_0 , F είναι συνεχείς συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου συνεπάγεται ότι η ολοκληρωτική ποσότητα είναι εκ ταυτότητος μηδέν:

$$\rho = \frac{\rho_0}{F} \quad \forall (X, t) : \boxed{\text{Αρχή Διατήρησης Μάζας κατά Lagrange}}$$

(2.3)

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως αρχή διατήρησης της μάζας κατά Lagrange και με τη βοήθεια αυτής μπορεί να υπολογίσει κανείς την πυκνότητα ενός σώματος κατά τη χρονική στιγμή t εάν γνωρίζει την αρχική του πυκνότητα και την κίνησή του, δηλαδή την F . Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται κυρίως στα στερεά.

(ii) Αρχή διατήρησης της μάζας κατά Euler

Εάν παραγωγίσουμε τη σχέση (2.3) ως προς το χρόνο παίρνουμε:

$$\dot{\rho} F = \dot{\rho}_0 \Rightarrow \dot{\rho} F = 0 \quad (\rho_0 \text{ ανεξάρτητο του χρόνου}) \Rightarrow \dot{\rho} F + \rho \dot{F} = 0 \quad (2.4)$$

Όμως:

$$F = \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial X} \Rightarrow \dot{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \chi(X, t)}{\partial X} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial X} (v) = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial x} = F \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\dot{F} = F \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας την (2.5) στην (2.4) έχουμε:

$$\dot{\rho} F + \rho F \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

Το F παίρνει τιμές πάντα μεγαλύτερες της μονάδας $F(X, 0) = 1$, $F(X, t) \neq \{0, \infty\} \Rightarrow F > 1$ [], επομένως μπορούμε να το απλοποιήσουμε στην παραπάνω σχέση δηλαδή:

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}(x, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

η (2.7) γίνεται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad \text{δηλαδή } \forall (x, t)$$

Αρχή διατήρησης μάζας κατά Euler

(2.8)

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε είναι η αρχή διατήρησης της μάζας κατά Euler, η οποία χρησιμοποιείται συνήθως στα υγρά.

Σημείωση: Γενίκευση σε 3 – Διαστάσεις

(i) Μάζα

$$m(p_i) = \int_{p_i} \rho(x_i, t) dv \quad \text{δηλαδή} \quad m(p_t) = \iiint_{p_t} \rho(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$m(p_0) = \int_{p_0} \rho_0 dv$$

όπου: dv , dV είναι ο στοιχειώδης όγκος του σώματος κατά τη χρονική στιγμή $t = t$ και $t = 0$ αντίστοιχα.

Η μάζα του σώματος στις δύο χρονικές παραμένει σταθερή:

$$m(p_0) = m(p_t) \Rightarrow \int_{p_t} \rho(x_i, t) dv = \int_{p_0} \rho_0 dv$$

$$\text{Εξ' ορισμού: } \det[\tilde{F}_{ij}] \equiv \frac{dv}{dV} \Rightarrow dv = (\det \tilde{F}) dV$$

$$\text{Άρα } \int_{p_0} \rho(x_i, t) \det \tilde{F} dV = \int_{p_0} \rho_0 dV \Rightarrow \int_{p_0} (\rho \det \tilde{F} - \rho_0) dV = 0$$

Αφού η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι συνεχής (δηλαδή ρ , \tilde{F} , ρ_0 συνεχείς συναρτήσεις) τότε προκύπτει ότι:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\det \tilde{F}}$$

Η Euler μορφή της αρχής διατήρησης της μάζας είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0$$

Αρχή διατήρησης μάζας κατά Euler

$$\text{Σημείωση 2: } \det \tilde{F} = \frac{dv}{dV} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} F_{il} F_{jm} F_{kn}; \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \\ -1, \end{cases}$$

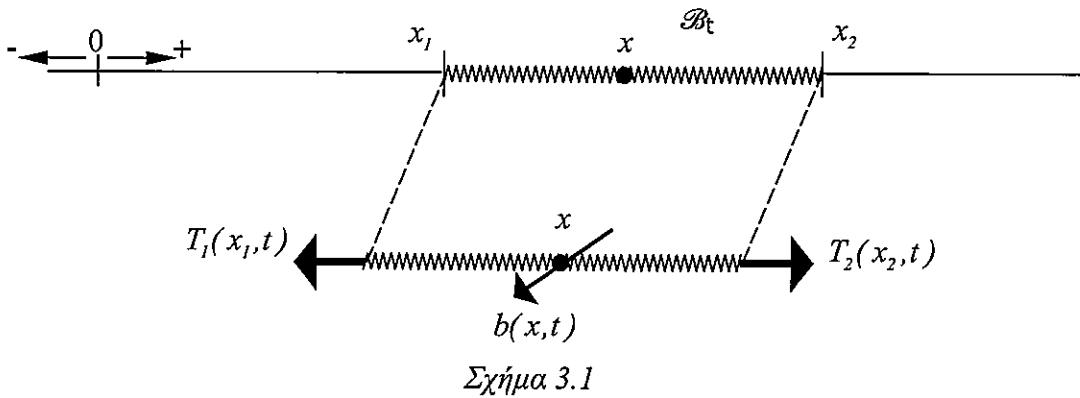


$$\operatorname{div} v = v_{i,j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

3. ΔΥΝΑΜΗ-ΟΡΜΗ

3.1) 1 – Διάσταση

3.1.1) Δύναμη



Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες:

(i) **Δυνάμεις συνοχής** (contact forces) που οφείλονται στη φύση του σώματος και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο συγκρατούνται οι δομικές μονάδες, π.χ. μόρια μέσα στο σώμα. Ορίζονται ως αμοιβαίες δυνάμεις μεταξύ γειτονικών σημείων στο σημείο x του ρ_t. Τέτοιους είδους δυνάμεις ορίζονται γενικά ως δυνάμεις ανά μονάδα επιφανείας και φαινομενολογικά παριστάνουν το μέσο όρο μοριακών δυνάμεων μεταξύ γειτονικών υλικών σημείων. Οι δυνάμεις αυτές συμβολίζονται με $f_c = T_2 - T_1$ και φαίνονται στο σχήμα.

(ii) **Μαζικές δυνάμεις** (body forces). Οι δυνάμεις αυτές, οι οποίες συμβολίζονται με $b(x, t)$, οφείλονται σε εξωτερικά από το σώμα αίτια, όπως βαρυτικό ή ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και όχι στο ίδιο το σώμα. Οι δυνάμεις αυτές εκφράζονται ως δύναμη ανά μονάδα μάζας και φαινομενολογικά παριστάνουν το μέσο όρο των δυνάμεων που ασκούνται στα μόρια της γειτονιάς ενός υλικού σημείου από ένα εξωτερικό πεδίο:

$$b = \frac{f_B}{dm} = \frac{f_B}{\rho dx} \Rightarrow f_B = b \rho dx; \quad b \equiv b(x, t)$$

Η συνολική δύναμη που ασκείται στο τμήμα p_t του σώματος είναι:

$$f(p_t) = f_c(p_t) + f_B(p_t) = (T_2 - T_1) + \int_{x_1}^{x_2} \rho b(x, t) dx \quad (3.1)$$

όπου: x_1, x_2 τα σημεία που οριοθετούν το τμήμα p_t του σώματος. Όμως:

$$T_2 - T_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} dx \quad (3.2)$$

Άρα από τις σχέσεις (3.1) και (3.2) προκύπτει:

$$f(p_t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho b(x, t) dx \Rightarrow f(p_t) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b \right) dx \quad (3.3)$$

3.1.2) Ορμή

Η ορμή του τμήματος p_t του σώματος B_t ορίζεται από τη σχέση:

$$\ell(p_t) = \int_{p_t} \rho v dx \quad (3.4)$$

όπου: ρ είναι η πυκνότητα και v είναι η ταχύτητα.

(i) Αρχή διατήρησης της ορμής κατά Euler

Σε αναλογία με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα όπου $f = m a = \dot{mv}$ ο Euler διατύπωσε ένα αντίστοιχο νόμο διατήρησης της ορμής για τη μηχανική του συνεχούς μέσου γνωστό ως το πρώτο αξίωμα του Euler:

$$f(p_t) = \dot{\ell}(p_t) \quad (3.5)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την ολοκληρωτική μορφή του αξιώματος της αρχής διατήρησης της ορμής. Την εξίσωση αυτή μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε σε διαφορική, η οποία θα μας δώσει τη λεγόμενη διαφορική μορφή της διατήρησης της ορμής ή εξίσωση πεδίου. Από τον ορισμό έχουμε:

$$\int_{p_t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b \right) dx = \overline{\int_{p_t} \dot{\rho} v dx} = \frac{d}{dt} \int_{p_t} \rho v dx$$

Στη παραπάνω σχέση διατήρησης της ορμής, για να περάσουμε τη παραγώγιση μέσα στο ολοκλήρωμα πρέπει να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα στο p_t σε ολοκλήρωμα στο p_0 . Έτσι:

$$\frac{d}{dt} \int_{p_t} \rho v dx = \frac{d}{dt} \int_{p_0} \rho v F dX = \frac{d}{dt} \int_{p_0} \rho_0 v dX = \int_{p_0} \rho_0 \dot{v} dX; \quad (\rho = \rho_0 / F)$$

το οποίο πρέπει επίσης να μετατρέψουμε σε ολοκλήρωμα στο p_t επειδή το αξίωμα διατήρησης της ορμής διατυπώθηκε στο p_t . Όμως: $\rho_0 dX = \rho dx = dm$, οπότε το ολοκλήρωμα της ορμής γίνεται:

$$\dot{\ell}(p_t) = \int_{p_0} \rho_0 \dot{v} dX = \int_{p_t} \rho \dot{v} dx$$

Τελικά η αρχή διατήρησης της ορμής παίρνει τη μορφή:

$$f(p_t) = \dot{\ell}(p_t) \Rightarrow \int_{p_t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b \right) dx = \int_{p_t} \rho \dot{v} dx \Rightarrow \int_{p_t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b - \rho \dot{v} \right) dx = 0, \quad \forall p_t \in B_t \quad (3.6)$$

Υποθέτοντας ότι η ποσότητα μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι συνεχής συνάρτηση προκύπτει:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v}$$

**Αρχή Διατήρησης της Ορμής
κατά Euler**

(3.7)

η οποία αποτελεί τη διαφορική μορφή της αρχής διατήρησης της ορμής κατά Euler.

$$\text{Υπενθυμίζεται ότι στην παραπάνω σχέση } \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

(ii) Αρχή διατήρησης της ορμής κατά Lagrange

Κύριος στόχος μας είναι να εκφράσουμε την έκφραση του πρώτου αξιώματος του Euler συναρτήσει του X . Για το σκοπό αυτό αντικαθιστούμε τον όρο $\frac{\partial T}{\partial x}$ της σχέσης (3.7) με:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial X} \frac{1}{F}$$

$$\text{δηλαδή: } \frac{\partial T}{\partial X} \frac{1}{F} + \rho b - \rho \dot{v} = 0$$

και πολλαπλασιάζουμε με F :

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \rho F b - \rho F \dot{v} = 0$$

Εάν λάβουμε υπόψη τη σχέση $\rho = \frac{\rho_0}{F}$ (αρχή διατήρησης της μάζας κατά Lagrange) και με απαλοιφή του F ($F > 1$) παίρνουμε τελικά:

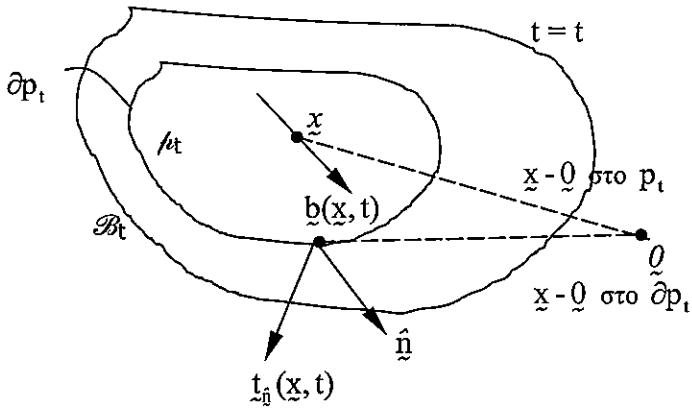
$$\frac{\partial T}{\partial X} + \rho_0 b = \rho_0 \dot{v}$$

**Αρχή διατήρησης της ορμής
κατά Lagrange**

(3.8)

Σημείωση: Γενίκευση σε 3 – Διαστάσεις

Σε τρεις διαστάσεις η συνολική δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα διαμορφώνεται ως εξής:



Σχήμα 3.2

$$f(p_t) = \int_{\partial p_t} t_n(x, t) ds + \int_{p_t} \rho b dv$$

όπου: ds η στοιχειώδης επιφάνεια που περικλείεται στο ∂p_t , dv ο θεωρούμενος στοιχειώδης όγκος, t_n οι δυνάμεις επαφής και $b(x, t)$ οι δυνάμεις πεδίου.

Οι δυνάμεις επαφής σε μια επιφάνεια με κάθετο σε αυτή μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} εκφράζονται με τη βοήθεια του τανυστή της τάσης ως εξής:

$$t_n(x, t) = T^T(x, t)\hat{n}$$

όπου: T ο τανυστής της τάσης και \hat{n} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια. Έτσι η σχέση που δίνει τη συνολική ασκούμενη δύναμη σε ένα στοιχειώδη όγκο dv που περιβάλλεται από μια από μια στοιχειώδη επιφάνεια ds γράφεται ως εξής:

$$\underline{f}(p_t) = \int_{\partial p_t} T^T(x, t)\hat{n} ds + \int_{p_t} \rho b dv$$

και εφαρμογή του Θεωρήματος της Απόκλισης (Divergence Theorem) στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης μας δίνει τελικά:

$$\underline{f}(p_t) = \int_{p_t} \text{div} T^T dv + \int_{p_t} \rho b dv$$

Σημειώνεται εδώ ότι η ισορροπία ροπών (αρχή διατήρησης της στροφορμής) επιβάλλει τη συμμετρία του τανυστή της τάσης, δηλαδή $T = T^T$

Η ορμή δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{\ell}(p_t) = \int_{p_t} \rho \underline{v} dv$$

Όμως: $\underline{f}(p_t) = \underline{\ell}(p_t) ...$

1° αξίωμα Euler; διατήρηση γραμμικής ορμής

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{T} dv + \int_{\Omega} \rho \underline{b} dv = \int_{\Omega} \rho \dot{\underline{v}} dv \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \underline{T} + \rho \underline{b} - \rho \dot{\underline{v}}) dv = 0; \quad \forall p_i \Rightarrow$$

Αρχή διατήρησης της ορμής κατά Euler:

$$\operatorname{div} \underline{T} + \rho \underline{b} = \rho \dot{\underline{v}} \quad \text{ή} \quad T_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad \dots \text{σε γραφή με δείκτες}$$

$$\text{Αν } \dot{\underline{v}} = 0, \quad \underline{b} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \underline{T} = T_{ij,j} = 0 \quad \dots \text{εξισώσεις ισορροπίας}$$

Σημείωση 1:

$$(\operatorname{div} \underline{T})_i = T_{ij,j} \text{ δηλαδή } \eta \operatorname{div} \text{ τανυστή είναι διάνυσμα και η γραφή με δείκτες έχει υιοθετηθεί}$$

Σημείωση 2:

Σε συντεταγμένες Lagrange η διαφορική εξίσωση διατήρησης ορμής γίνεται

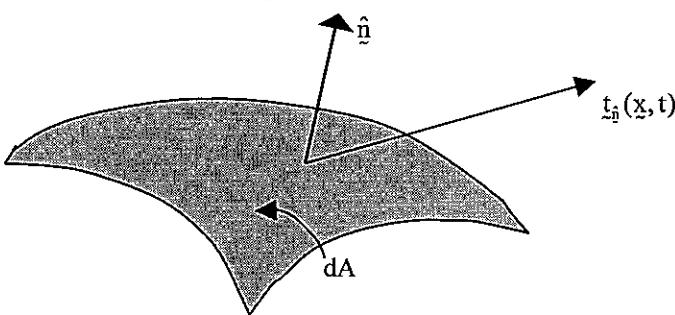
$$\operatorname{div} \underline{T} + \rho_0 \underline{b} = \rho_0 \dot{\underline{v}} \quad \text{ή} \quad T_{ij,j} + \rho_0 b_i = \rho_0 \dot{v}_i$$

Σημείωση 3:

$$T_{ij,j} = 0 \text{ για } i = 1, 2, 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

Σημείωση 4:

Ανάλυση Τάσης (Cauchy)



Μια στοιχειώδης επιφάνεια ορίζεται από το στοιχειώδες εμβαδόν dA και το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε αυτήν \hat{n} . Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις (θεώρημα Cauchy)

$$t_i(\underline{x}, t) = t(\hat{n}, \underline{x}, t) = \underline{T}^T(\underline{x}, t)\hat{n} \quad \underline{T}^T = \underline{T}$$

$$t_i = T_{ij}n_j; \quad T_{ij} = T_{ji}$$

δηλαδή το διάνυσμα τάσης t_i είναι γραμμική συνάρτηση του \hat{n} και ο συντελεστής αναλογίας είναι ο τανυστής της τάσης. Επίσης αποδεικνύεται ότι ο τανυστής της τάσης είναι συμμετρικός

4. ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Για τη περιγραφή λοιπόν της κίνησης ενός σώματος σε μια διάσταση είδαμε ότι πρέπει να γνωρίζουμε τρεις βασικές ποσότητες:

(i) την εξίσωση της κίνησης $x = \chi(X, t)$, από την οποία θα προσδιοριστεί στη συνέχεια η ταχύτητα v , η επιτάχυνση a , η μετατόπιση u και η ανηγμένη παραμόρφωση ϵ του σώματος.

(ii) τη πυκνότητα $\rho = \rho(x, t)$.

(iii) τη δύναμη επαφής $T = T(x, t)$. (οι μαζικές δυνάμεις μπορούν να μετρηθούν πειραματικά και θεωρούνται δεδομένες). Για το προσδιορισμό των τριών αγνώστων έχουμε στη διάθεση μας δύο αξιώματα:

(1) Το αξίωμα διατήρησης της μάζας:

$$\rho = \rho_0 / F \quad (\text{μορφή Lagrange}) \quad \dot{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (\text{μορφή Euler})$$

(2) Το αξίωμα διατήρησης της ορμής:

$$\frac{\partial T}{\partial X} + \rho_0 b = \rho_0 \dot{v} \quad (\text{μορφή Lagrange}) \quad \dot{T}$$

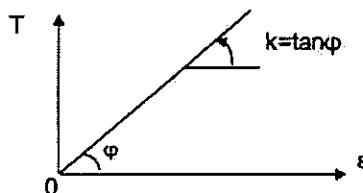
$$\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v} \quad (\text{μορφή Euler})$$

Η ύπαρξη τριών αγνώστων και δύο μόνο εξισώσεων επιβάλλει (μαθηματική αναγκαιότητα) την διατύπωση μιας τρίτης εξίσωσης. Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να είναι τόσο γενική όσο οι προηγούμενες (οι οποίες ισχύουν για όλα τα υλικά) αλλά αντιπροσωπεύει το υλικό στο οποίο αναφερόμαστε. Με αυτόν τον τρόπο θα καταλήγουμε κάθε φορά σε λύσεις συγκεκριμένες (και για γραμμικά συστήματα μοναδικές) που χαρακτηρίζουν την κίνηση του κάθε υλικού σημείου ενός συγκεκριμένου σώματος και το διαχωρίζουν από τα υπόλοιπα. Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως καταστατικές εξισώσεις. Συσχετίζουν, τη τάση (δύναμη επαφής) με τη παραμόρφωση και υποδεικνύουν πως τα υλικά διαφέρουν μεταξύ τους (φυσική αναγκαιότητα). Χωρίς τις καταστατικές εξισώσεις δεν είναι δυνατόν να διαχωρισθούν τα διάφορα υλικά μεταξύ τους, καθώς οι υπόλοιπες εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής ισχύουν για όλα τα υλικά ανεξαρτήτως της φύσης τους. Οι καταστατικές εξισώσεις συνδέουν την απόκριση (αποτέλεσμα) με τα αίτια, π.χ. τη κίνηση ή τη παραμόρφωση με τη δύναμη ή τη τάση που τα προκαλεί. Στη συνέχεια θα εξεταστούν μερικές κατηγορίες υλικών και θα παρουσιαστούν οι καταστατικές εξισώσεις που τις περιγράφουν.

5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

5.1) Γραμμικό ελαστικό στερεό

Κύριο χαρακτηριστικό των στερεών αυτών είναι ότι η τάση μεταβάλλεται γραμμικά με την ανηγμένη παραμόρφωση ϵ . Με άλλα λόγια τα στερεά αυτά περιγράφονται από καταστατικές εξισώσεις της μορφής:



$$T = k \epsilon$$

όπου $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$ και
k το μέτρο ελαστικότητας

Σχήμα 5.1

Στη περίπτωση αυτή το σύστημα των εξισώσεων που έχουμε να λύσουμε για να περιγράψουμε την κίνηση του σώματος διαμορφώνεται ως εξής:

$$T = k \epsilon \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X} + \rho_0 b = \rho_0 \dot{v} \quad (5.2)$$

$$\rho = \rho_0 / F \quad (5.3)$$

Από (5.2), (5.3) παίρνουμε:

$$\frac{\partial(k\epsilon)}{\partial X} + \rho_0 b = \rho_0 \ddot{v}$$

$$\text{Όμως: } \epsilon = \frac{\partial u}{\partial X}; \quad v = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = \frac{\partial}{\partial t}(x - X) = \dot{u} \quad (X \text{ ανεξάρτητο του χρόνου})$$

$$\text{Άρα: } \frac{\partial}{\partial X} \left(k \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \rho_0 b = \rho_0 \ddot{u}$$

Αν $k = \text{σταθερό τότε:}$

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \rho_0 b = \rho_0 \ddot{u} \quad (5.4)$$

Η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης θα μας δώσει το u και συνεπώς το ϵ και το F , ενώ ακολούθως από τις (5.2) και (5.3) θα υπολογίσουμε τα T και ρ .

Εάν θεωρήσουμε τα εξωτερικά πεδία ως αμελητέα ($b \equiv 0$) και θέσουμε $c^2 = \frac{k}{\rho_0}$ (όπου c η ταχύτητα του ήχου στα στερεά) η διαφορική εξίσωση (5.4) διαμορφώνεται σε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0 \quad (5.5)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γνωστή ως εξίσωση κύματος μιας διάστασης ή ως εξίσωση D' Alembert, και η γενική λύση της προσδιορίζεται παρακάτω.

Ο D' Alembert πρώτος διαπίστωσε οτι κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x - ct)$ είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης. Συγκεκριμένα, αν η f είναι συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x - ct) &= -c f'(x - ct), & \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x - ct) &= c^2 f''(x - ct) \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x - ct) &= f'(x - ct), & \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x - ct) &= f''(x - ct). \end{aligned}$$

Επιομένως είναι προφανές οτι για κάθε $u = f(x - ct)$ η εξίσωση κύματος μιας διάστασης ικανοποιείται. Το ίδιο αποδεικνύεται εύκολα και για κάθε $u = g(x + ct)$. Αφού όμως η εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, συνεπάγεται οτι η γενική της λύση θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο παραπάνω ειδικών λύσεων, και έτσι καταλήγουμε στη λύση του D' Alembert

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

όπου οι συναρτήσεις f και g προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

5.2) Εξίσωση ελαστικότητας σε τρεις διαστάσεις

Σε τρεις διαστάσεις η καταστατική εξίσωση του γραμμικού ελαστικού μέσου είναι:

$$T = \tilde{C} \varepsilon \Leftrightarrow T_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.6)$$

Στη περίπτωση που το υλικό είναι ισότροπο, τότε και ο τανυστής C_{ijkl} είναι ισότροπος και μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$C_{ijkl} = \alpha_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + \alpha_3 \delta_{il} \delta_{jk}$$

Ο τανυστής C_{ijkl} είναι συμμετρικός ως προς i, j (επειδή ο T_{ij} είναι συμμετρικός) και ως προς k, l (γιατί το ε_{kl} είναι συμμετρικό).

Μαθηματικό επακόλουθο της συμμετρίας αυτής είναι:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.7)$$

Αντικαθιστώντας την (5.7) στην (5.6) παίρνονται:

$$T_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \varepsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{kl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \varepsilon_{kl} \quad (5.8)$$

Ισχύει όμως: $A_{ijk} \delta_{im} = A_{mjk}$, $A_i \delta_{ij} = A_j$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Άρα η (5.8) απλοποιείται και γίνεται ως εξής:

$$T_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji})$$

και επειδή ο τανυστής ε είναι συμμετρικός προκύπτει τελικά:

$$T_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \boxed{\text{Νόμος του Hooke}} \quad (5.9)$$

Εάν τη μορφή αυτή του τανυστή της τάσης την αντικαταστήσουμε στη διαφορική εξίσωση της διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + \rho_o b_i &= \rho_o \ddot{u}_i \Rightarrow (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij})_{,j} + \rho_o b_i = \rho_o \ddot{u}_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda \varepsilon_{kk,j} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \rho_o b_i = \rho_o \ddot{u}_i \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lambda \varepsilon_{kk,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \rho_o b_i = \rho_o \ddot{u}_i \quad (5.10)$$

Ομως:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2}(u_{k,k} + u_{k,k}) \Rightarrow \varepsilon_{kk,i} = \frac{1}{2}(u_{k,k} + u_{k,k}),_i = u_{k,ki}$$

και

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \Rightarrow \varepsilon_{ij,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),_j = \frac{1}{2}(u_{i,ji} + u_{j,ji}) = \frac{1}{2}(u_{i,ji} + u_{j,ji})$$

Οι δείκτες k, j που εμφανίζονται επαναλαμβανόμενοι στους παραπάνω όρους, είναι αυθαίρετοι και επιλέγονται κάθε φορά κατά βούληση χωρίς να έχουν ιδιαίτερη φυσική σημασία, αφού ένας δείκτης επαναλαμβανόμενος δύο φορές υποδηλώνει άθροισμα δηλαδή: $A_{kk} = A_{jj} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ (k, j are dummy indices). Έτσι στη περίπτωση μας τα $u_{k,ki}$ και $u_{j,ji}$ στα οποία καταλήξαμε αντιπροσωπεύουν ακριβώς την ίδια ποσότητα. Για διευκόλυνση των πράξεων θα γράφουμε $u_{j,ji}$ αντί για $u_{k,ki}$. Άρα:

$$T_{ij,j} = \lambda \varepsilon_{kk,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} = \lambda u_{j,ji} + 2\mu \left(\frac{1}{2}u_{i,ji} + \frac{1}{2}u_{j,ji} \right) = \lambda u_{j,ji} + \mu u_{i,ji} + \mu u_{j,ji} \Rightarrow \\ T_{ij,j} = \mu u_{i,ji} + (\lambda + \mu) u_{j,ji}$$

Τελικά η (5.10) γίνεται:

$$\mu u_{i,ji} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho_o b_i = \rho_o \ddot{u}_i \Rightarrow \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} \underline{u}),_i + \rho_o b_i = \rho_o \ddot{u}_i \Rightarrow$$

Σημείωση: $\nabla^2 \varphi = \varphi_{,ii}$ και $\operatorname{div} \underline{u} = u_{j,j}$

οπότε τελικά:

$$\mu \nabla^2 \underline{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{u}) + \rho_o \underline{b} = \rho_o \ddot{\underline{u}} \quad \boxed{\text{Εξίσωση ελαστικότητας σε 3 διαστάσεις}} \quad (5.11)$$

που επίσης είναι γνωστές και ως εξισώσεις του Lame.

Σημείωση

Μια εξίσωση ανάλογη της (5.11) ισχύει για τη ρευστομηχανική. Συγκεκριμένα η καταστατική εξίσωση Neutonikou υγρού είναι

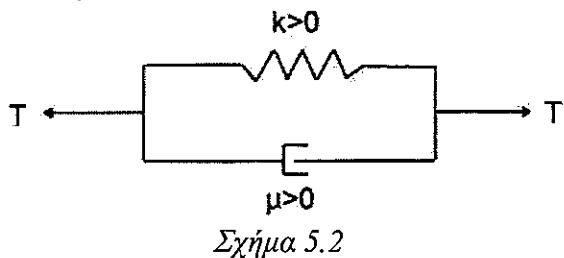
$$\underline{T} = -p\underline{I} + \lambda(\operatorname{tr} \underline{D})\underline{I} + 2\mu \underline{D} \quad \text{ή} \quad T_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{mm}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \quad \text{όπου} \quad D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση κίνησης κατά Euler, δηλαδή $\operatorname{div} \underline{T} + \rho \underline{b} = \rho \ddot{\underline{u}}$ ή $T_{ij,j} + \rho b_i = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j \right)$

$$-\operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{u}) = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j \right) \quad \text{οι οποίες είναι οι αντίστοιχες εξισώσεις Navier-Stokes της ρευστομηχανικής.}$$

5.3) Μοντέλο Kelvin – Voigt (K-V)

Στο μοντέλο αυτό, σε αντίθεση με το γραμμικό ελαστικό στερεό, θεωρούμε ότι η τάση που ασκείται σε ένα σημείο του σώματος εξαρτάται όχι μόνο από την παραμόρφωση F και την ανηγμένη παραμόρφωση ε αλλά και από την ιστορία της παραμόρφωσης (ρυθμός παραμόρφωσης). Μπορούμε επιπλέον, να φανταστούμε ότι η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται από το μηχανικό μοντέλο:



Αυτό αποτελείται από ελατήριο σταθεράς k σε παράλληλη διάταξη με έναν αποσβεστήρα μ . Οι καταστατικές εξισώσεις που ισχύουν για το ελατήριο και τον αποσβεστήρα είναι:

$$(i) \quad \text{Ελατήριο:} \quad T_k = k \varepsilon_k \quad (5.11)$$

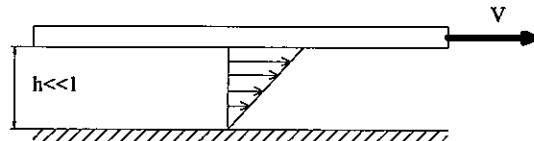
$$(ii) \quad \text{Αποσβεστήρας:} \quad T_\mu = \mu \dot{\varepsilon}_\mu \quad (5.12)$$

Σημείωση

Είναι γνωστό ότι για τα Νευτωνικά υγρά ισχύει ότι η διατμητική τάση μεταξύ του υγρού και μιας πλάκας που κινείται με σταθερή ταχύτητα

$$\text{είναι ίση με: } T_\mu = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

Όπου μ = ιξώδες του υγρού



$$\text{Εύκολα επίσης αποδεικνύεται ότι } \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{\varepsilon} \text{ αφού}$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \text{ δηλαδή } \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \dot{\varepsilon}$$

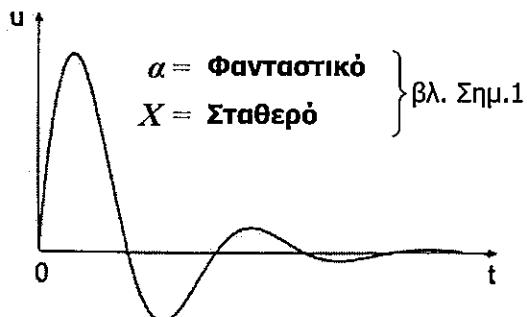
Η παραμόρφωση ε_k του ελατηρίου (λόγω της τάσης T) είναι ίση με την αντίστοιχη παραμόρφωση ε_μ του αποσβεστήρα, λόγω της παράλληλης διάταξής τους, δηλαδή $\varepsilon_k = \varepsilon_\mu = \varepsilon$ και η συνολική τάση που ασκείται σε ένα υλικό σημείο θα προκύψει από το άθροισμα των επιμέρους ασκούμενων σε αυτό τάσεων T_k και T_μ , δηλαδή:

$$T = T_k + T_\mu = k \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} \Rightarrow T = k \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} \quad (5.13)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\frac{\partial T}{\partial X} + \rho_0 b = \rho_0 \dot{v} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X} \left(k \frac{\partial u}{\partial X} + \mu \frac{\partial \dot{u}}{\partial X} \right) = \rho_0 \ddot{u} \Rightarrow k u_{XX} + \mu \dot{u}_{XX} = \rho_0 \ddot{u} \quad (5.14)$$

Η διαφορική εξίσωση στην οποία καταλήξαμε είναι η εξίσωση κύματος με έναν επιπλέον όρο, αυτόν της απόσβεσης και είναι γνωστή ως εξίσωση κύματος με απόσβεση. Η γραφική παράσταση ενός τέτοιου κύματος δίνεται στα ακόλουθα σχήματα 5.3 και 5.4 και περίληψη της σχετικής ανάλυσης περιέχεται στη Σημείωση 1



Σχήμα 5.3

Εάν η απόσβεση μ είναι αρκετά μεγάλη το σωματίδιο δεν θα προλάβει καν να ταλαντωθεί όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 5.4

Σημείωση 1

Οι γραφικές παραστάσεις στα Σχήματα 5.3 και 5.4 αποτελούν λύση της κυματικής εξίσωσης με απόσβεση για ένα ελατήριο μήκους L , ($0 \leq X \leq L$) με μηδενικές οριακές συνθήκες στα δύο άκρα του $u(0,t) = u(L,t) = 0$, μηδενική αρχική μετατόπιση $u(0,X) = 0$ και αρχική ταχύτητα $v_0 = \dot{u}(X,0) = \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right)$. Οι λεπτομέρειες δίνονται παρακάτω.

Συνοριακές συνθήκες : για $0 < X < L$

Αρχικές συνθήκες

$$(\text{συναρτηση του } X) \quad u(X,0) = 0 \quad , \quad \dot{u}(X,0) = \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right)$$

$$\text{Οριακές συνθήκες} \quad u(0,t) = 0 \quad , \quad u(L,t) = 0$$

(συναρτηση του t)

Αναναζητείται μια λύση χωριζόμενων μεταβλητών η οποία να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.
Έτσι επιλέγεται μια λύση της μορφής :

$$u(X, t) = U(t) \sin \frac{\pi X}{L} \quad (*)$$

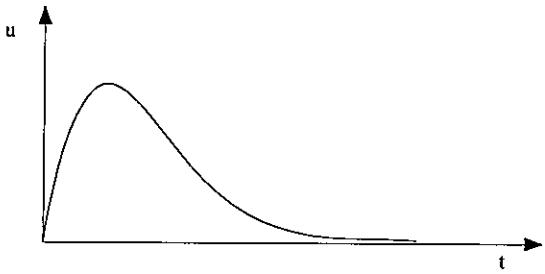
Αντικαθιστώντας τη πιο πάνω λύση (*) στην αρχική εξίσωση:

$$ku_{xx} + \mu u_{xx} = \rho_0 \ddot{u} \quad \longrightarrow \quad k \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 U + \mu \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \dot{U} + \rho_0 \ddot{U} = 0$$

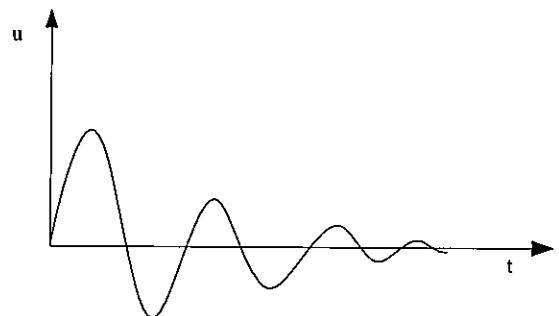
Η πιο πάνω εξίσωση για $U(0) = 0$ και $\dot{U}(0) = 1$ έχει λύσεις της μορφής :

$$u(X, t) = \sin\left(\frac{\pi X}{L}\right) e^{-\omega t} \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha t) & \text{(i) Για } \alpha \text{ πραγματικό } (\alpha \in \mathbb{R}) \\ \frac{1}{|\alpha|} \sinh(|\alpha|t) & \text{(ii) Για } \alpha \text{ φανταστικό } (\alpha \in \text{Im}) \end{cases}$$

$$\text{Όπου } \omega = \frac{\mu}{2\rho_0} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2, \quad \alpha = \omega \sqrt{1 - \frac{4\rho_0 K}{\mu^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}}$$



Η λύση (i) της εξίσωσης



Η λύση (ii) της εξίσωσης

Σημείωση 2: Φαινόμενο Ερπυσμού στο Μοντέλο K-V

Υπάρχει άμεση συσχέτιση του μοντέλου K-V με το φαινόμενο ερπυσμού. Διατηρώντας σταθερή την τάση $T = T_0$, δηλαδή αν η ιστορία φόρτισης είναι της μορφής

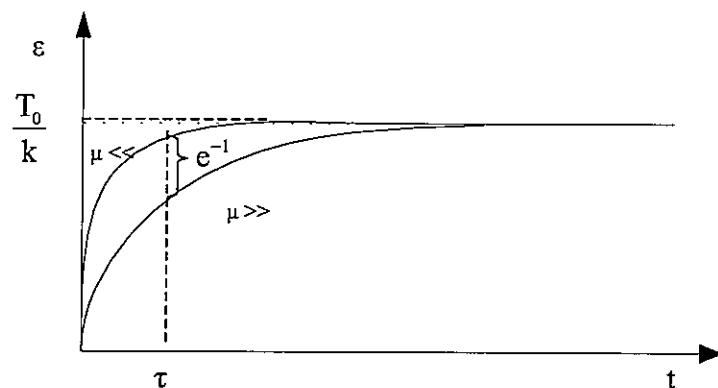


αποδεικνύεται ότι η ανηγμένη παραμόρφωση αυξάνει με το χρόνο.

$$\left. \begin{array}{l} T = T_0 = \mu \dot{\varepsilon} + k \varepsilon \Rightarrow \dot{\varepsilon} + \frac{k}{\mu} \varepsilon = \frac{T_0}{\mu} \\ \varepsilon(t=0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{T_0}{k} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

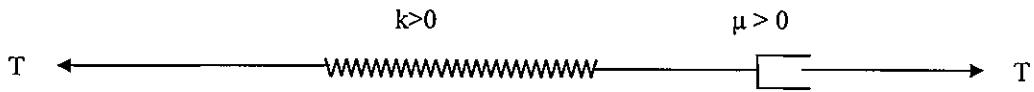
$$\tau = \mu/k \quad (\text{χαρακτηριστικός χρόνος ερπυσμού})$$

Η γραφική παράσταση της πιο πάνω λύσης της διαφορικής εξίσωσης έχει τη μορφή του σχήματος και αναπαριστά το γνωστό φαινόμενο του ερπυσμού



5.4) Μοντέλο Maxwell

Είναι ένα μοντέλο με μεγάλο εύρος εξάρτησης από την ιστορία της παραμόρφωσης (ολοκληρωτικό μοντέλο). Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ότι κάθε σωματίδιο X λειτουργεί σαν ένας μηχανισμός από ένα ελατήριο και ένα αποσβεστήρα σε σειρά.



Στην περίπτωση αυτή έχουμε :

$$T_k = k \varepsilon_k, \quad T_\mu = \mu \dot{\varepsilon}_\mu \quad (5.15)$$

Λόγω της εν σειρά διάταξης έχουμε:

$$T_k = T_\mu = T \quad \text{και} \quad \varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_\mu \quad (5.16)$$

Εποιητική εξίσωση για το συγκεκριμένο υλικό δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_k + \dot{\varepsilon}_\mu = \dot{T}_k / k + T_\mu / \mu \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{T} / k + T_\mu / \mu \quad (5.17)$$

$$\dot{T} + \frac{1}{\tau} T = k \dot{\varepsilon}$$

$$\tau \equiv \mu/k > 0$$

(5.18)

Τώρα προχωρούμε στη λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Κατ' αρχήν μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{e^{\nu t} T} = e^{\nu t} k \dot{\varepsilon} \quad (5.19)$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε: $\int_{-\infty}^t \overline{e^{\nu \xi} T(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^t k e^{\nu \xi} \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi$ (5.20)

Επίσης παρατηρούμε ότι:

$$e^{\nu t} T(\xi) \Big|_{-\infty}^t = e^{\nu t} T(t) - e^{-\nu t} T(-\infty) = e^{\nu t} T(t) \quad (5.21)$$

Εποιητική

$$T(t) = \int_{-\infty}^t k e^{-(t-\xi)\nu} \dot{\varepsilon}(\xi) d\xi \rightarrow T(t) = \int_{\xi=-\infty}^t [e(\xi)] \quad (5.22)$$

Όπου το σύμβολο \mathcal{F} παριστάνει συναρτησιακό (δηλαδή συνάρτηση της καμπύλης $\varepsilon(\xi)$; $-\infty < \xi < t$ αντί απλώς της κλασσικής μεταβλητής t). Θέτοντας τώρα: $t - \xi = s$ ($s = \text{παρελθόν}$), η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$T(t) = \int_0^\infty k e^{-s/\tau} \dot{\varepsilon}(t-s) ds \quad (5.23)$$

Μια άλλη χρήσιμη μορφή της καταστατικής εξίσωσης λαμβάνεται με ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης δίνοντας:

$$T(t) = -k e^{-s/\tau} \varepsilon(t-s) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (k/\tau) e^{-s/\tau} \dot{\varepsilon}(t-s) ds \quad (5.24)$$

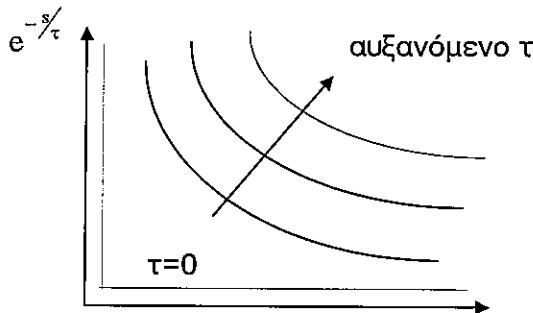
Τελικά (με την υπόθεση ότι $\varepsilon(-\infty)$ δεν απειρίζεται) λαμβάνουμε

$$T(t) = k\varepsilon(t) - \int_0^\infty k \left(\frac{1}{\tau} \right) e^{-s/\tau} \dot{\varepsilon}(t-s) ds \rightarrow T(t) = \mathcal{F}_{s=0}^\infty [\varepsilon(t-s)] \quad (5.25)$$

Ορίζοντας τώρα τη συνάρτηση χαλάρωσης του μοντέλου Maxwell:

$$G(s) = k e^{-\frac{s}{\tau}} \quad (5.26)$$

παρατηρούμε ότι $G(s) > 0$, $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$, και η γραφική της παράσταση δίνεται από το παρακάτω σχήμα



Έτσι η τελική μορφή της εξίσωσης του μοντέλου Maxwell είναι:

$$T(t) = G(0) \varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s) \varepsilon(t-s) ds \quad (5.27)$$

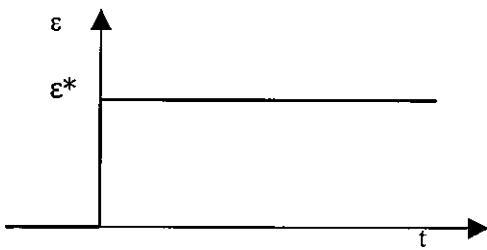
όπου $G(s) = k e^{-\frac{s}{\tau}}$ είναι η συνάρτηση χαλάρωσης.

Σημείωση 1

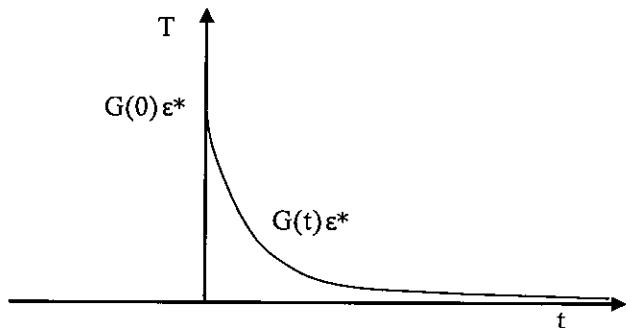
Για το μοντέλο Maxwell δεν υπάρχει κατύσταση “μακροχρόνιας” ισορροπίας (long-range equilibrium), όπως στη γενική περίπτωση [ο όρος $k_\infty \varepsilon$ είναι μηδέν, δηλαδή δεν υπάρχει παραμένουσα ελαστικότητα] της γραμμικής ιξωελαστικότητας η οποία μπορεί να εξαχθεί από την σχέση (5.25) με γραμμικοποίηση του συναρτησιακού $\tilde{F}_{s=0} [\varepsilon(t-s)]$ δηλαδή $T(t) = k\varepsilon + G(0)\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)ds$. Αυτή είναι η γενική σχέση γραμμικής ιξωελαστικότητας όπως παρήχθη μαθηματικά από τον Volterra το 1900 και πιο ανατηρά από τους Coleman-Noll 1963.

Σημείωση 2: Φαινόμενο Χαλάρωσης στο Μοντέλο Maxwell

Το μοντέλο Maxwell επιδεικνύει το φαινόμενο της χαλάρωσης το οποίο αντικατοπτρίζει τη μείωση των τάσεων με το χρόνο για σταθερή παραμόρφωση $\varepsilon = \varepsilon^*$, δηλαδή αν η ιστορία της παραμόρφωσης είναι της μορφής



Αν αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη καταστατική εξίσωση για το Μοντέλο Maxwell $\varepsilon = \varepsilon^*$, καταλήγουμε στην γραφική παράσταση που διέπει το φαινόμενο της χαλάρωσης:



Όπως προαναφέρθηκε για την γενική καταστατική εξίσωση υλικών με «μνήμη» έχουμε ότι η τάση είναι ένα συναρτησιακό της παραμόρφωσης δηλαδή

$$T(t) = \tilde{F}_{\tau=-\infty}^{t=\tau} [\varepsilon(\tau)] \Rightarrow$$

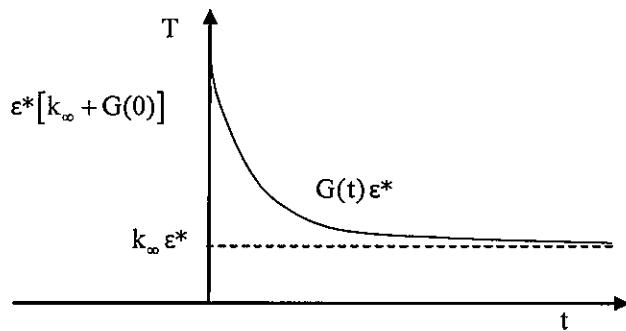
$$T(t) = \tilde{F}_0^\infty [\varepsilon(t-s)]$$

Ανάπτυξη κατά Frechet (που είναι ανάλογη της ανάπτυξης κατά Taylor για συναρτήσεις) συνεπάγεται την παρακάτω σχέση της γενικευμένης γραμμικής ιξωελαστικότητας (Coleman-Noll 1963).

$$T(t) = k_\infty \varepsilon + G(0)\varepsilon + \int_0^\infty \dot{G}(s)\varepsilon(t-s)ds + \dots$$

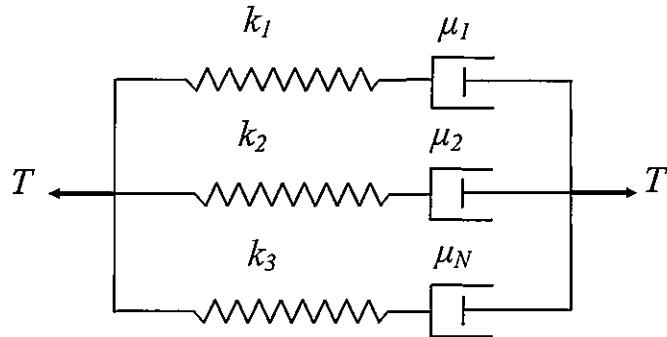
$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \rightarrow 0$$

Το φαινόμενο χαλάρωσης της τάσης για σταθερή παραμόρφωση δηλαδή για την ιστορία παραμόρφωσης ($\varepsilon \equiv 0$, $t \leq 0$ q $\varepsilon = \varepsilon^*$, $t > 0$) δείχνεται γραφικά στο ακόλουθο σχήμα



$k_\infty \varepsilon^* = \text{παραμένουσα ελαστικότητα του υλικού}$

5.5 Μοντέλο 3 στοιχείων συνδεδεμένων παράλληλα (Three Element Model)



$$\text{Ισχύει: } T = T_1 + T_2 + T_3$$

Οπότε για το στοιχείο 1:

$$\left. \begin{array}{l} T_{k_1} = k_1 \varepsilon \\ T_{\mu_1} = \mu_1 \dot{\varepsilon}_{\mu_1} \\ T_{k_1} = T_{\mu_1} = T \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{\mu_1} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\dot{T}_1}{K_1} + \frac{T_1}{\mu_1}} \quad (1)$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\dot{T}_2}{K_2} + \frac{T_2}{\mu_2} \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{\dot{T}_3}{K_3} + \frac{T_3}{\mu_3} \quad (3)$$

Από την ολοκλήρωση της (1) προκύπτει :

$$T_1(t) = k_1 \varepsilon_1(t) - \int_0^\infty k_1 e^{-\frac{s}{\tau_1}} \varepsilon_1(t-s) ds \quad \text{Θέτω} \quad G_1(s) = k_1 e^{-\frac{s}{\tau_1}}$$

Με τον ίδιο τρόπο εργάζομαι και για τις (2) και (3)

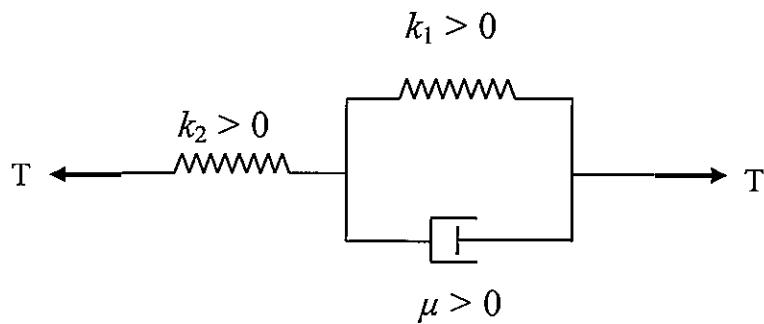
$$\text{Οπότε: } G(s) = G_1(s) + G_2(s) + G_3(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \sum_{i=1}^3 k_i e^{-\frac{s}{\tau_i}}$$

Για όλο το μοντέλο προκύπτει:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \longrightarrow \boxed{T = \sum_{i=1}^3 k_i \varepsilon(t) + \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{k_i}{\tau_i} e^{-\frac{s}{\tau_i}} \right) \varepsilon(t-s) ds}$$

5.6 Πρότυπο Ιξωελαστικό Μοντέλο



Ισχύει: $\varepsilon_{k_1} = \varepsilon_\mu \equiv \varepsilon_{k_1, \mu}$

Οπότε λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\left. \begin{array}{l} T_{k_2} = k\varepsilon_{k_2}, \quad T_{k_1} = k_1\varepsilon_{k_1, \mu}, \quad T_\mu = \mu\dot{\varepsilon}_{k_1, \mu} \\ \varepsilon = \varepsilon_{k_2} + \varepsilon_{k_1, \mu} \\ T = T_{k_2} = T_{k_1} + T_\mu \\ T(-\infty), \varepsilon(-\infty) < \infty \end{array} \right\} (\#)$$

Με την ολοκλήρωση των (#), που αντιστοιχούν στο στάνταρτ ιξωελαστικό μοντέλο (εν σειρά σύνδεση Kelvin-Voigt στερεού με «ελατήριο»), προκύπτει η ακόλουθη καταστατική εξίσωση

$$T(t) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \varepsilon(t) + \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} \varepsilon(t) + \int_0^\infty -\frac{k_2^2}{\mu} e^{-\frac{k_1+k_2}{\mu}s} \varepsilon(t-s) ds$$

Η συνάρτηση $G(s) = \frac{k_2^2}{k_1 + k_2} e^{-\frac{k_1+k_2}{\mu}s}$ είναι μια συνάρτηση επιρροής (weight function) που αποτελεί μέτρο της εξάρτησης της συμπεριφοράς του υλικού από το παρελθόν του.

$$k_\infty = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \dots \text{ ελαστική σταθερά ισορροπίας του υλικού}$$

$$k_\infty + G(0) \dots \text{ αρχική ελαστική σταθερά του υλικού}$$

Βάσει αυτών των παραπάνω η καταστατική εξίσωση για το πρότυπο ιξωελαστικό μοντέλο γράφεται

$$T(t) = [k_\infty + G(0)]\varepsilon(t) + \int_0^\infty G(s)\varepsilon(t-s) ds$$

5.7) Ελαστικά Ρευστά

Σαν ελαστικό ρευστό (βαροτροπικό ρευστό) ορίζουμε εκείνο για το οποίο η τάση εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα δηλαδή:

$$T = -p(\rho), \quad p'(\rho) \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho} > 0 \quad (5.28)$$

(όπως θα δούμε παρακάτω, η σταθερά $c \equiv \sqrt{p'(\rho_0)}$ είναι η ταχύτητα του ήχου στο ρευστό αυτό).

Έχουμε δηλαδή να λύσουμε το σύστημα των παρακάτω μερικών διαφορικών εξισώσεων, αφού στα ισοζύγια μάζας (εξίσωση συνέχειας) και ορμής προσθέσουμε και τη χαρακτηριστική εξίσωση του υλικού:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \rho b &= \rho \dot{v} \\ T &= -p(\rho) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Με συνδυασμό των εξισώσεων αυτών, οδηγούμαστε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} -p'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho b &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Το σύστημα (5.30) είναι το σύστημα των εξισώσεων της **αεροδυναμικής (gas dynamics)**. Παίρνοντας $b=0$ και θεωρώντας κατάσταση ισορροπίας που ορίζεται από τη συνθήκη $v=0$ έχουμε:

$$(5.30)_2 \quad \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 \quad (5.31)$$

Θεωρούμε καταστάσεις κοντά στην ισορροπία ($v=0, \rho=\rho_0$) δηλαδή

$$(i) \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t) \quad \tilde{\rho}/\rho_0 \ll 1 \quad (5.32)$$

$$(ii) \quad v = \tilde{v}(x, t) \quad (5.33)$$

Όπου $\tilde{\rho} = O(\epsilon)$ και $\tilde{v} = O(\epsilon)$ με $\epsilon \ll 1$. Το σύμβολο $O(\epsilon)$ σημαίνει $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{O(\epsilon)}{\epsilon} = 0$

Με αντικατάσταση στο αρχικό σύστημα λαμβάνουμε (προσεγγιστικά) το σύστημα των εξής εξισώσεων:

$$(5.30)_1 \quad \frac{-p'(\rho_0)}{\rho_0(1+\tilde{\rho}/\rho_0)} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \tilde{v} \quad (5.34)$$

$$(5.30)_2 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (5.35)$$

Αμελούμε όλους τους όρους τάξης $O(\varepsilon^2)$ (δηλαδή τους $\tilde{v} \frac{\partial v}{\partial x}$ και $\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v})}{\partial x}$) και έτσι παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \\ -\rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Το παραπάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων είναι συζευγμένο, δηλαδή οι εξισώσεις πρέπει να λυθούν παράλληλα. Κάνουμε λοιπόν αποσύζευξη του συστήματος, προσπαθούμε δηλαδή από τις εξισώσεις του συστήματος να πάρουμε κάποιες άλλες οι οποίες να έχουν σαν άγνωστο μόνο το $\tilde{\rho}$ η μία και το \tilde{v} η άλλη. Για να το κάνουμε αντό παραγωγίζουμε κάθε εξίσωση ως προς το χρόνο και ως προς το διάστημα.

$$\begin{aligned} (5.36)_1 \text{ και } \frac{-p'(\rho_0)}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \\ -\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} (5.36)_1 \text{ και } \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x \partial t} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Από τις (5.37) και (5.38) μπορούμε τελικά να πάρουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} p'(\rho_0) \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} \\ p'(\rho_0) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Δηλαδή ξαναπήραμε την εξίσωση διάδοσης του κύματος (εξίσωση D' Alembert) για την πυκνότητα και για την ταχύτητα του ρευστού. Συνεπώς η γενική λύση για το ρ και το v δίνεται από την

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \end{cases} = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (5.40)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι $c \equiv \sqrt{p'(\rho_0)}$ είναι η ταχύτητα του ήχου μέσα στο ρευστό.

6. ΔΙΑΧΥΣΗ

Με τον όρο διάχυση εννοούμε τη διείσδυση σωματιδίων μιας ουσίας μέσα σε ένα διαφορετικό πορώδες στερεό. Η διάχυση μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας τη βασική αρχή της διατήρησης της ορμής. Στην περίπτωση αυτή θεωρείται η διαφορική εξίσωση που εκφράζει τη διατήρηση της ορμής των διαχεόμενων σωματιδίων. Έτσι, είναι λογική η ύπαρξη ενός πεδίου τάσης που οφείλεται μόνο στα σωματίδια της διαχεόμενης ουσίας. Επίσης, είναι λογικό να θεωρηθεί η ύπαρξη και μίας δύναμης υπεύθυνης για τη διάχυση, που περιγράφει τοπικές ανταλλαγές ορμής μεταξύ των διαχεόμενων σωματιδίων και του στερεού μέσα από το οποίο γίνεται η διάχυση. Αυτή η δύναμη είναι δύναμη όγκου και για αυτό υπεισέρχεται ως εσωτερική δύναμη πεδίου (internal body force) στην εξίσωση της ορμής.

Θα ασχοληθούμε με την αργή διάχυση αραιής ουσίας σε στερεή μήτρα με άτομα πολύ μεγαλύτερα και βαρύτερα, ώστε η μήτρα να παραμένει μακροσκοπικά άκαμπτη. Δυναμικά φαινόμενα λόγω του στερεού πλέγματος θεωρούνται αμελητέα. Φαινόμενα όπως ανομοιογένεια, ανισοτροπία, μη γραμμικότητα και αδράνεια αγνοούνται.

Συνοψίζοντας θα μελετήσουμε την ομοιογενή, ισοτροπική, γραμμική και αργή διάχυση που συμβαίνει σε ένα χημικά αδρανές στερεό πλέγμα το οποίο παραμένει μακροσκοπικά άκαμπτο, αλλά μπορεί να υποστεί μια εξωτερικά επαγόμενη στατική παραμόρφωση.

Θεωρούμε ότι η διαχεόμενη ουσία είναι συνεχώς κατανεμημένη και υπακούει στις αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής. Η διαχεόμενη ουσία χαρακτηρίζεται από ένα πεδίο πυκνότητας ρ , ένα πεδίο ταχυτήτων v , και έναν τανυστή τάσης T , δύον ρ είναι η μάζα της διαχεόμενης ουσίας ανά μονάδα συνολικού όγκου (δηλαδή αυτού που καταλαμβάνεται από τη διαχεόμενη ουσία και τη μήτρα), το v εκφράζει τη μέση ευκινησία (mobility) της διαχεόμενης ουσίας μέσα στον μοναδιαίο όγκο και το T δηλώνει την τάση της διαχεόμενης ουσίας πάνω στον εαυτό της (μερική τάση). Είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε αυτή για την πυκνότητα ρ τη συγκέντρωση c της διαχεόμενης ουσίας, γιατί έχουμε μικτό όγκο. Στη διαχεόμενη ουσία ασκείται μια εξωτερική δύναμη όγκου b (εξαιτίας, παραδείγματος χάρη, της βαρύτητας) την οποία και αμελούμε εδώ. Η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ διαχεόμενης ουσίας και στερεού συμβολίζεται με f και είναι επίσης μια εσωτερική δύναμη όγκου ή δύναμη πεδίου, για την οποία πρέπει να διατυπωθούν κατάλληλες καταστατικές εξισώσεις.

6.1) 1 – Διάσταση

6.1.1) Διάχυση τέλειου αερίου σε στερεό

Θεωρούμε άτομα υδρογόνου που διαχέονται ανάμεσα σε άτομα σιδήρου. Ορίζουμε το διάνυσμα j που περιγράφει τη ροή της διαχεόμενης ουσίας (flux) σύμφωνα με τη σχέση: $j = \rho v$ (μάζα ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου). Η αρχή διατήρησης της μάζας, αν λάβουμε υπόψη μας τη παραπάνω σχέση και την αντικατάσταση $\rho \rightarrow c$ (για να υποδηλώσουμε συγκέντρωση αντί πυκνότητα) γίνεται:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας για την ουσία που διαχέεται (το υδρογόνο).

Τα άτομα του υδρογόνου προσκρούουν σε άτομα σιδήρου και αυτή η αλληλεπίδραση εκφράζεται με τις εσωτερικές δυνάμεις πεδίου f (internal body forces) για το σύστημα σιδήρου – υδρογόνου.

Η αρχή διατήρησης της ορμής επομένως για μονοφασικά συνεχή μέσα γίνεται:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \rho b = \rho \dot{v} \Rightarrow \text{γράφεται φορμαλιστικά όπως παρακάτω:}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho(\dot{v} - b)$$

Για τη διαχεόμενη ουσία αντικαθιστούμε το δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης με f δηλαδή τη προαναφερθείσα εσωτερική δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ διαχεόμενης ουσίας και στερεάς μήτρας και αμελούμε την αδράνεια ($\dot{v} = 0$) και την εξωτερική δύναμη πεδίου ($b = 0$)

Έτσι οι αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (\text{μάζα}) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = f \quad (\text{ορμή}) \quad (6.3)$$

Το T είναι η μερική τάση της διαχεόμενης ουσίας. Η πιο απλή περίπτωση είναι να θεωρήσουμε ότι (όπως η πίεση ενός τέλειου αερίου είναι ανάλογη της πυκνότητας του) για μια αραιά διαχεόμενη ουσία, το T είναι ανάλογο του c . Επίσης, η εσωτερική δύναμη

αλληλεπίδρασης f είναι ανάλογη της τοπικής μεταβολής της ορμής ($\sim j$). Έτσι παίρνουμε τις ακόλουθες καταστατικές εξισώσεις.

$$T = -\pi c \quad (6.4)$$

$$f = \alpha j \quad (6.5)$$

Επομένως η (6.3) γίνεται:

$$-\pi \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha j \Rightarrow j = -\frac{\pi}{\alpha} \frac{\partial c}{\partial x}; \text{ Θέτοντας } D = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow$$

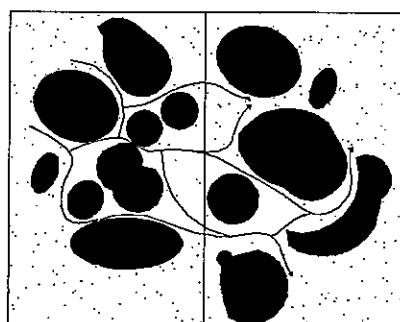
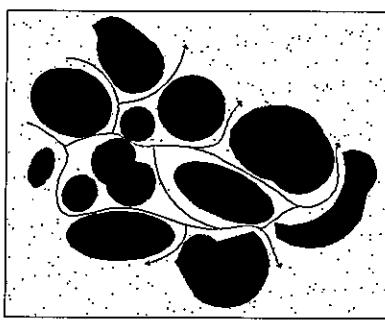
$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad \boxed{\text{1ος Νόμος του Fick για τη διάχυση}} \quad (6.6)$$

$$\text{και } \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \text{ αφού } j = -D \frac{\partial c}{\partial x}. \text{ Άρα:}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \boxed{\text{2ος Νόμος του Fick για τη διάχυση}} \quad (6.7)$$

Σημείωση

Ο 1ος και 2ος Νόμος του Fick είναι η πιο απλή ποσοτικοποίηση φαινομένων μεταφοράς (μεταφορά μάζας). Ανάλογοι νόμοι υπάρχουν για ροή υγρών σε πορώδη υλικά, για τη μεταφορά θερμότητας κ.λ.π. Για παράδειγμα η σχέση $h = -\frac{k \frac{\partial p}{\partial x}}{\mu}$ είναι ο νόμος του Darcy όπου h είναι η ροή του υγρού, k είναι η διαπερατότητα του πετρώματος ή εδάφους, μ το ιξώδες του υγρού και p η υδροστατική πίεση του υγρού στους πόρους (βλ. Σχήμα 6.1). Επίσης η σχέση $q = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}$ είναι ο νόμος μετάδοσης θερμότητας του Fourier όπου q είναι η ροή θερμότητας, k είναι η θερμική αγωγιμότητα και θ είναι η θερμοκρασία.



Σχήμα 6.1

6.1.2) Διάχυση αερίου / υγρού με ιξώδες σε στερεό

Μελετήσαμε την περίπτωση στην οποία η διαχεόμενη ουσία συμπεριφέρεται σαν τέλειο αέριο. Τώρα θα θεωρήσουμε ότι η διαχεόμενη ουσία εμφανίζει ιξώδες, συμπεριφέρεται δηλαδή ως ένα γραμμικό ρευστό με ιξώδες. Γενικεύοντας τη καταστατική εξίσωση:

$T = -\pi\rho + \mu \frac{\partial v}{\partial x}$, για μονοφασικά υγρά στη περίπτωση της διάχυσης προκύπτει η ακόλουθη καταστατική εξίσωση:

$$T = -\pi c + \bar{\pi} \frac{\partial j}{\partial x} \quad (6.8)$$

ενώ για τη δύναμη διάχυσης f ισχύει πάλι:

$$f = \alpha j.$$

$$\text{Άρα, } \frac{\partial T}{\partial x} = f \Rightarrow -\pi \frac{\partial c}{\partial x} + \bar{\pi} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \alpha j \quad (6.9)$$

$$\text{Όμως, } \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}, \text{ συνεπώς:}$$

$$\bar{\pi} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \bar{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right) = \bar{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial c}{\partial t} \right) = -\bar{\pi} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t}.$$

Άρα η (6.9) γίνεται:

$$\begin{aligned} -\pi \frac{\partial c}{\partial x} + \bar{\pi} \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} &= \alpha j \Rightarrow -\pi \frac{\partial c}{\partial x} - \bar{\pi} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} = \alpha j \Rightarrow \\ j &= -D \frac{\partial c}{\partial x} - \bar{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\text{όπου: } D = \frac{\pi}{\alpha}, \bar{D} = \frac{\bar{\pi}}{\alpha}$$

Αντικαθιστώντας την (6.10) στην εξίσωση διατήρησης της μάζας προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial c}{\partial x} - \bar{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \bar{D} \frac{\partial^3 c}{\partial x^2 \partial t} \Rightarrow \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \bar{D} \frac{\partial^2 \dot{c}}{\partial x^2}, \quad \dot{c} \equiv \frac{\partial c}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.1.3) Μη τοπική συμπεριφορά (non locality)

Για να περιγράψουμε μη τοπική συμπεριφορά πρέπει να εισάγουμε τη δεύτερη παράγωγο της συγκέντρωσης ως προς x στην εξίσωση $T = -\pi c$ η οποία τώρα γίνεται:

$$T = -\pi c + \pi^* \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = f \quad \text{και} \quad f = \alpha j \\ \text{Άρα: } \frac{\partial T}{\partial x} &= -\pi \frac{\partial c}{\partial x} + \pi^* \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} = \alpha j \Rightarrow , j = -D \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{όπου: } D = \frac{\pi}{\alpha}, \quad E = \frac{\pi^*}{\alpha}$$

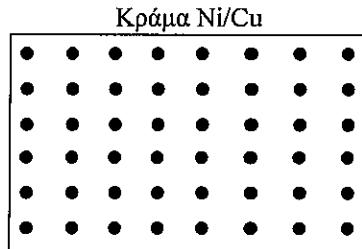
Αντικαθιστώντας την (6.12) στην εξίσωση διατήρησης της μάζας προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - E \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (6.13)$$

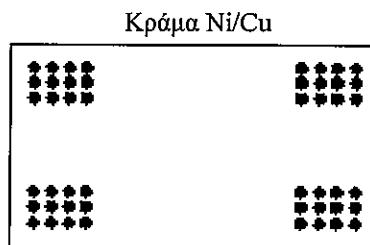
Η εξίσωση (6.13) περιγράφει ένα φαινόμενο αντίστροφο της διάχυσης, όπου η διαχεόμενη ουσία δημιουργεί συνονθυλεύματα μέσα στο στερεό διαχωριζόμενη απ' αυτό (spinodal decomposition).

Σημείωση 1

Παράδειγμα του φαινομένου Spinodal Decomposition



Έστω ένα δείγμα Νικελίου (Ni) με πρόσμιξη ατόμων Χαλκού (Cu) διαλυμένων σ' αυτό. Σε υψηλές θερμοκρασίες, ο Χαλκός θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα στην μήτρα Νικελίου.



Όταν ψύχουμε απότομα το δείγμα σε μια συγκεκριμένη περιοχή θερμοκρασιών (περιοχή Spinodal) ο χαλκός συγκεντρώνεται σε κάποιες περιοχές όπου η συγκέντρωση ατόμων Cu εμφανίζεται λίαν αυξημένη. Δηλαδή εμφανίζεται ότι έχουμε αρνητικό συντελεστή διάχυσης (μετάβαση ατόμων Cu από περιοχές μικρής συγκέντρωσης σε περιοχές μεγάλης συγκέντρωσης). Όμως η εξίσωση διάχυσης του Fick με αρνητικό συντελεστή διάχυσης δίνει παθολογική συμπεριφορά στη μαθηματική ανάλυση (εκθετική αύξηση της συγκέντρωσης). Ετσι επινοήθηκε η εξίσωση Cahn-Hilliard όπου ο συντελεστής διάχυσης D μπορεί να είναι αρνητικός χωρίς την εμφάνιση παθολογική συμπεριφοράς λόγω ύπαρξης του μη-τοπικού όρου με την τέταρτη χωρική παράγωγο και θετικό συντελεστή $E > 0$.

Σημείωση 2

Η γενικότερη μορφή μη τοπικής συμπεριφοράς δίνεται από τη σχέση $T = \int \pi(x - x')\rho(x')dx'$ και μετά από ανάπτυξη κατά σειρά Taylor προκύπτει ο όρος $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ (η πρώτη παράγωγος δεν υφίσταται λόγω συμμετρίας και οι υπόλοιποι όροι αμελούνται). Η καταστατική αυτή εξίσωση για το T οδηγεί σε μια διαφορικο-ολοκληρωτική εξίσωση για τη συγκέντρωση c .

Σημείωση 3

Το φαινόμενο Spinodal Decomposition ποιοτικά περιγράφτηκε αρχικά με αρνητικό συντελεστή διάχυσης και με βάση την εξίσωση του Fick.

6.1.4) Διάχυση σε πολυκρυσταλλικά μέταλλα

Θεωρούμε ένα πολυκρυσταλλικό μέταλλο με συνεχή κατανομή κρυσταλλιτών (grains) και διεπιφανειών κρυσταλλιτών/ορίων κόκκων (grain boundaries) και επίσης ότι η διάχυση μιας αραιής ουσίας συμβαίνει ταυτόχρονα μέσα στον όγκο του μετάλλου (bulk) και μέσα στις διεπιφάνειες. (grain boundaries). Θεωρούμε τον όγκο του υλικού (bulk) και τις διεπιφάνειες (grain boundaries) σαν δύο διαφορετικές φάσεις και για αυτό το λόγο εισάγουμε δύο διαφορετικές συγκεντρώσεις για την διαχεόμενη ουσία, μια για τη φάση των grain boundaries c_1 και μια για την φάση του bulk c_2 . Θεωρούμε αργή, γραμμική διάχυση, αραιής ουσίας χωρίς ιξώδες μέσα σε ένα αδιατάρακτο μηχανικά στερεό πλέγμα. Η αδράνεια αγνοείται. Οι αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής γίνονται:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = g; \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = -g \quad (6.14)$$

Το g εκφράζει τη μεταφορά μάζας που συμβαίνει μεταξύ της φάσης του bulk και της φάσης των grain boundaries. Το μείον δηλώνει πως αύξηση της μάζας στη μια φάση οδηγεί σε μείωσή της στην άλλη φάση, δηλαδή όση μάζα χάνει η μια φάση, τόση κερδίζει η άλλη και η συνολική μάζα παραμένει σταθερή. Θα έχουμε επίσης δύο διαφορετικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης f_1 και f_2 . Έτσι θα είναι:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = f_1; \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = f_2 \quad (6.15)$$

Υποθέτουμε ότι:

$$T_1 = -\pi c_1; \quad T_2 = -\pi c_2 \quad (6.16)$$

$$f_1 = a_1 j_1; \quad f_2 = a_2 j_2 \quad (6.17)$$

$$\text{Άρα: } j_1 = -D \frac{\partial c_1}{\partial x}; \quad j_2 = -D \frac{\partial c_2}{\partial x} \quad (6.18)$$

Αν υποθέσουμε επίσης ότι το g είναι γραμμική συνάρτηση των c_1 και c_2 δηλαδή:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2; \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} - \kappa_1 c_1 - \kappa_2 c_2 \quad (6.19)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι πεπλεγμένες, καθεμιά τους δηλαδή περιέχει και τις δύο άγνωστες ποσότητες c_1 και c_2 . Αν αποπλέξουμε τις εξισώσεις αυτές, βρίσκουμε ότι για την ολική συγκέντρωση $c = c_1 + c_2$ ισχύει:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \bar{D} \frac{\partial^2 \dot{c}}{\partial x^2} - E \frac{\partial^4 c}{\partial x^4} \quad (6.20)$$

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται οι όροι $\bar{D} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$; $E \frac{\partial^4 c}{\partial x^4}$, που περιγράφουν διάχυση ουσίας με ιξώδες και spinodal decomposition αντίστοιχα.

Σημείωση: Γενίκευση σε 3 - Διαστάσεις

(i) Διάχυση τέλειου αερίου σε στερεό

Οι αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής σε τρεις διαστάσεις για μια μονοφασική ουσία είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \dot{\mathbf{y}}) = 0 \quad (\text{μάζα})$$

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} + \rho \dot{\underline{\mathbf{b}}} = \rho \dot{\underline{\mathbf{y}}} \Rightarrow \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} = \rho (\dot{\underline{\mathbf{y}}} - \dot{\underline{\mathbf{b}}}) \Rightarrow \operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (\text{ορμή})$$

Οι παραπάνω εξισώσεις στη περίπτωση της διάχυσης γίνονται:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{j}} = 0$$

και

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{f}}$$

όπου $\underline{\mathbf{f}}$ η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ διαχεόμενης ουσίας και στερεού, για την οποία πρέπει να διατυπώσουμε μια κατάλληλη καταστατική εξισωση και δεν δίνεται πλέον από τη σχέση:

$$\underline{\mathbf{f}} = \rho(\dot{\underline{\mathbf{y}}} - \dot{\underline{\mathbf{b}}}), \text{ αφού } \eta \text{ αδράνεια } \dot{\underline{\mathbf{y}}} \text{ και } \eta \text{ εξωτερική δύναμη πεδίου } \dot{\underline{\mathbf{b}}} \text{ αμελούνται εδώ.}$$

Ο τανυστής της τάσης δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{\mathbf{T}} = -\pi \underline{\mathbf{c}} \underline{\mathbf{l}}, \text{ όπου } \underline{\mathbf{l}} \text{ είναι ο μοναδιαίος τανυστής.}$$

Με τη βοήθεια δεικτών η τελευταία εξισωση γράφεται:

$$T_{ij} = -\pi c \delta_{ij}$$

όπου: δ_{ij} το Kronecker δέλτα.

Ισχύει ακόμα:

$$\underline{\mathbf{f}} = \alpha \underline{\mathbf{j}} \Rightarrow f_i = \alpha j_i$$

Επειδή $T_{ij} = -\pi c \delta_{ij}$ η εξισωση $\operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{f}}$ γίνεται:

$$T_{ij,j} = (-\pi c \delta_{ij})_{,j} = \alpha j_i \Rightarrow -\pi c_{,j} \delta_{ij} = \alpha j_i \Rightarrow -\pi c_{,i} = \alpha j_i \Rightarrow j_i = -\frac{\pi}{\alpha} c_{,i} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{j}} = -D \operatorname{grad} c$$

**1ος Νόμος του Fick
σε 3 διαστάσεις**

$$\text{όπου: } D = \frac{\pi}{\alpha}$$

Αντικαθιστώντας το 1^ο Νόμο του Fick που είδαμε παραπάνω, στην εξίσωση διατήρησης της μάζας προκύπτει:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(-D \operatorname{grad} c) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c$$

**2^{ος} Νόμος του Fick
σε 3 διαστάσεις**

Σημείωση

Για την εξαγωγή του 2^{ου} Νόμου του Fick κάναμε χρήση της ταυτότητας:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} c) = (c_{,i})_{,i} = c_{,ii} = \nabla^2 c$$

(ii) Διάχυση ρευστού με ιξώδες σε στερεό

Αν θεωρήσουμε ότι η διαχεόμενη ουσία έχει ιξώδες τότε ο τανυστής της τάσης γράφεται:

$$\underline{T} = -\pi c \underline{l} + \lambda (\operatorname{tr} \underline{D}) \underline{l} + 2\mu \underline{D}$$

και ισχύει:

$$\underline{f} = \alpha \underline{j}$$

όπου \underline{D} είναι το συμμετρικό μέρος του $\operatorname{grad} \underline{j}$, δηλαδή:

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{grad} \underline{j} + \operatorname{grad} \underline{j}^T \right)$$

$$\text{Επίσης: } \operatorname{div} \underline{T} = \underline{f}$$

Συνδυάζοντας τις τρεις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει για τη ροή της ορμής ότι:

$$\underline{j} = -D \operatorname{grad} c + \underbrace{F_1 \operatorname{grad} (\operatorname{tr} \underline{D})}_{1^{ος}} + \underbrace{2F_2 \operatorname{div} \underline{D}}_{2^{ος}}$$

όπου:

$$D = \frac{\pi}{\alpha}; \quad F_1 = \frac{\lambda}{\alpha}; \quad F_2 = \frac{\mu}{\alpha}$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους της διανυσματικής ανάλυσης προκύπτει για τους δύο υπογραμμισμένους όρους υπογραμμισμένους με κόκκινο ότι:

$$1^{ος} \quad \operatorname{grad} (\operatorname{tr} \underline{D}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{j} = -\operatorname{grad} c$$

$$2^{ος} \quad \operatorname{div} \underline{D} = \frac{1}{2} [\nabla^2 \underline{j} - \operatorname{grad} c] \quad \text{και συμπληρωματικά}$$

$$\nabla^2 \underline{j} = -\text{curlcurl} \underline{j} - \text{grad} \dot{c}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στο τύπο της ροής της ορμής που προσδιορίσαμε παραπάνω προκύπτει:

$$\underline{j} + F_2 \text{curlcurl} \underline{j} = -D \text{grad} \dot{c} - (F_1 + 2F_2) \text{grad} \dot{c}$$

όπου: $D = \frac{\pi}{\alpha}$, $\bar{D} = F_1 + 2F_2$, με D, F_1, F_2 σταθερές.

Παίρνουμε το div της τελευταίας σχέσης και χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της μάζας και έχοντας υπόψη την ταντότητα $\text{divcurl} \underline{w} = 0$, που ισχύει για κάθε διάνυσμα \underline{w} , προκύπτει:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c + \bar{D} \nabla^2 \dot{c}$$

**Ψευδοπαραβολική Εξίσωση
Διάχυσης
(Barenblatt)**

(iii) Μη τοπική συμπεριφορά

Για να μελετήσουμε μια μη τοπική συμπεριφορά εισάγοντας μια δεύτερη παράγωγο της συγκέντρωσης, την $\text{grad}^2 c$. Άρα:

$$T_{ij} = -\pi c \delta_{ij} + \pi^* c_{ij}$$

Από τη διατήρηση της ορμής είναι:

$$\text{div} \underline{T} = \underline{f} \Rightarrow -\pi \text{grad} \dot{c} + \pi^* \text{grad}(\nabla^2 c) = \alpha \underline{j}.$$

Σημείωση

$$(c_{ij})_{,j} = c_{,ij} = (c_{,jj})_{,i} = (\nabla^2 c)_{,i} = \text{grad}(\nabla^2 c)$$

Άρα:

$$\underline{j} = -D \text{grad} \dot{c} + E \text{grad}(\nabla^2 c)$$

όπου: $D = \frac{\pi}{\alpha}$, $E = \frac{\pi^*}{\alpha}$

Αντικαθιστώντας τη τελευταία σχέση στην εξίσωση διατήρησης της μάζας προκύπτει:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \underline{j} = 0$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\text{div} \underline{j} = -D \text{div}(\text{grad} \dot{c}) + E \text{div}[\text{grad}(\nabla^2 c)] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c + E \nabla^4 c$$

**Εξίσωση Διάχυσης Spinodal Decomposition
Cahn-Hilliard**

(iv) Διάχυση σε πολυκρυσταλλικό μέταλλο

Θεωρούμε δύο συγκεντρώσεις για τη διαχεόμενη ουσία, μια για τη φάση των διεπιφανειών c_1 και μία για τη φάση του bulk c_2 .

$$\text{Είναι: } \frac{\partial c_1}{\partial t} + \text{div} j_1 = g; \quad \frac{\partial c_2}{\partial t} + \text{div} j_2 = -g, \text{ όπου } g = -\kappa_1 c_1 - \kappa_2 c_2$$

$$1) \text{div} T_1 = f_1; \quad \text{div} T_2 = f_2$$

$$2) T_1 = -\pi_{11} c_1 \mathbf{i} - \pi_{12} c_2 \mathbf{i}; \quad T_2 = -\pi_{21} c_1 \mathbf{j} - \pi_{22} c_2 \mathbf{j}$$

$$3) f_1 = \alpha_{11} j_1 + \alpha_{12} j_2 + \beta_{11} \text{grad} c_1 + \beta_{12} \text{grad} c_2; \quad f_2 = \alpha_{21} j_1 + \alpha_{22} j_2 + \beta_{21} \text{grad} c_1 + \beta_{22} \text{grad} c_2$$

Από τα 3 τελευταία ζεύγη εξισώσεων ορίζουμε νέους συντελεστές:

$$\gamma_{11} = \pi_{11} + \beta_{11}$$

$$\gamma_{12} = \pi_{12} + \beta_{12}$$

$$\gamma_{21} = \pi_{21} + \beta_{21}$$

$$\gamma_{22} = \pi_{22} + \beta_{22}$$

Προκύπτει ότι:

$$\alpha_{11} j_1 + \alpha_{12} j_2 = -\gamma_{11} \text{grad} c_1 - \gamma_{12} \text{grad} c_2$$

$$\alpha_{21} j_1 + \alpha_{22} j_2 = -\gamma_{21} \text{grad} c_1 - \gamma_{22} \text{grad} c_2$$

Έστω:

$$\Delta = \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12} \gamma_{21} \neq 0$$

και

$$\Gamma_{11} = (\gamma_{12} \alpha_{21} - \gamma_{22} \alpha_{11}) / \Delta; \quad \Gamma_{12} = (\gamma_{12} \alpha_{22} - \gamma_{22} \alpha_{12}) / \Delta$$

$$\Gamma_{21} = (\gamma_{21} \alpha_{11} - \gamma_{11} \alpha_{21}) / \Delta; \quad \Gamma_{22} = (\gamma_{21} \alpha_{12} - \gamma_{11} \alpha_{22}) / \Delta$$

Έτσι προκύπτει ότι:

$$\text{grad} c_1 = \Gamma_{11} j_1 + \Gamma_{12} j_2; \quad \text{grad} c_2 = \Gamma_{21} j_1 + \Gamma_{22} j_2$$

Αν πάρουμε την απόκλιση των δύο τελευταίων σχέσεων και χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μάζας καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\mu_1 \nabla^2 c_1 + \lambda_{11} \frac{\partial c_1}{\partial t} + \lambda_{12} \frac{\partial c_2}{\partial t} + \kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_2 = 0$$

$$\mu_2 \nabla^2 c_2 + \lambda_{21} \frac{\partial c_1}{\partial t} + \lambda_{22} \frac{\partial c_2}{\partial t} - \kappa_1 c_1 - \kappa_2 c_2 = 0$$

όπου:

$$\mu_1 = \frac{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}}{\gamma_{12}(\alpha_{21} - \alpha_{22}) - \gamma_{22}(\alpha_{11} - \alpha_{12})}$$

$$\mu_2 = \frac{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}}{\gamma_{21}(\alpha_{12} - \alpha_{11}) - \gamma_{11}(\alpha_{22} - \alpha_{21})}$$

$$\lambda_{11} = \frac{\gamma_{12}\alpha_{21} - \gamma_{22}\alpha_{11}}{\gamma_{12}(\alpha_{21} - \alpha_{22}) - \gamma_{22}(\alpha_{11} - \alpha_{12})}$$

$$\lambda_{12} = \frac{\gamma_{12}\alpha_{22} - \gamma_{22}\alpha_{12}}{\gamma_{12}(\alpha_{21} - \alpha_{22}) - \gamma_{22}(\alpha_{11} - \alpha_{12})}$$

$$\lambda_{21} = \frac{\gamma_{21}\alpha_{11} - \gamma_{11}\alpha_{21}}{\gamma_{21}(\alpha_{12} - \alpha_{11}) - \gamma_{11}(\alpha_{22} - \alpha_{21})}$$

$$\lambda_{22} = \frac{\gamma_{21}\alpha_{12} - \gamma_{11}\alpha_{22}}{\gamma_{21}(\alpha_{11} - \alpha_{12}) - \gamma_{11}(\alpha_{21} - \alpha_{22})}$$

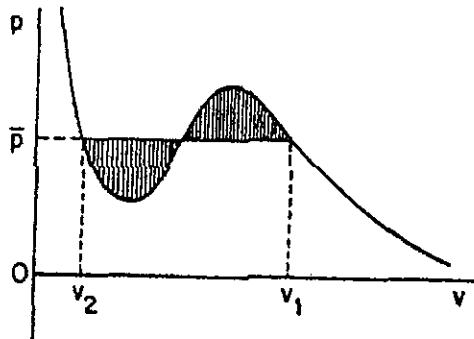
Αν λύσουμε το τελευταίο σύστημα εξισώσεων αποπλέκοντας αυτές, προκύπτει για τη συνολική συγκέντρωση $c = c_1 + c_2$ ότι:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c + \bar{D} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 c - E \nabla^4 c$$

όπου: $D = \frac{-(\kappa_1\mu_2 - \kappa_2\mu_1)}{(\kappa_1 - \kappa_2)}$; $\bar{D} = \frac{-(\mu_1 + \mu_2)}{(\kappa_1 - \kappa_2)}$; $E = \frac{\mu_1\mu_2}{(\kappa_1 - \kappa_2)}$

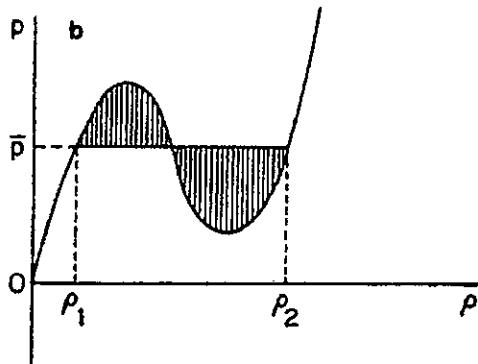
7. ΑΛΛΑΓΗ ΦΑΣΗΣ

Για τη περιγραφή ενός μετασχηματισμού υγρού-αερίου σε ισορροπία χρησιμοποιείται συνήθως ο κανόνας του Maxwell. Η πίεση συμπύκνωσης θεωρείται ως η σταθερή πίεση που σε ένα διάγραμμα $p - V$ (πίεσης - ειδικού όγκου) κόβει ίσα εμβαδά πάνω και κάτω, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 7.1*



Σχήμα 7.1

Ο κανόνας του Maxwell εκφράζει επίσης την ισότητα των εμβαδών σε ένα διάγραμμα $p - \rho$ (πίεσης - πυκνότητας, με $\rho = \frac{1}{V}$), όπως φαίνεται στο *Σχήμα 7.2*.



Σχήμα 7.2

Οι γραμμοσκιασμένες περιοχές στα *Σχήματα 7.1 και 7.2* παριστάνονται από τα ολοκληρώματα $\int_{V_2}^{V_1} (p - \bar{p}) dV$ και $\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) \frac{1}{\rho^2} d\rho$. Έτσι ο κανόνας του Maxwell σε διάγραμμα $p - \rho$ είναι:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) \frac{1}{\rho^2} d\rho = 0 \quad (7.1)$$

Η ισχύς του κανόνα του Maxwell προϋποθέτει την ισχύ των αρχών της θερμοδυναμικής μέσα στην spinodal περιοχή (περιοχή όπου $p'(\rho) < 0$) και ότι οι δύο φάσεις (υγρή-αέρια) έχουν την ίδια πίεση και το ίδιο χημικό δυναμικό.

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι η μοριακή, η οποία επιτρέπει τη θεώρηση της ύπαρξης μιας διεπιφάνειας μεταξύ των δύο φάσεων.

Η μηχανική θεωρία, η οποία είναι επίσης μια μοριακή θεωρία, καταλήγει στην εξαγωγή μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει τη δομή της διεπιφάνειας, χωρίς να λαμβάνει υπόψη της θερμοδυναμικά δυναμικά και θερμοδυναμικές σχέσεις για την spinodal περιοχή.

Για να υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης αυτής ο κανόνας του Maxwell δεν ισχύει και πρέπει επαναδιατυπωθεί ως εξής:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) E(\rho) d\rho = 0 \quad (7.2)$$

Η συνάρτηση $E(\rho)$ εξαρτάται από μοριακές παραμέτρους, που καθορίζουν τη τάση στη διεπιφάνεια. Έτσι ο κανόνας του Maxwell δεν ισχύει πάντα, αλλά μόνο αν ικανοποιούνται συγκεκριμένες μοριακές συνθήκες, δηλαδή αν η τάση στη διεπιφάνεια έχει συγκεκριμένη μορφή.

Στη μηχανική θεωρία για τις διεπιφάνειες μεταξύ ρευστών η διεπιφάνεια θεωρείται σαν ένα συνεχές μέσο για το οποίο ισχύουν οι αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής.

Η τάση στη διεπιφάνεια δίνεται από τη σχέση:

$$T = (-p + \alpha \nabla^2 \rho + \beta |\text{grad} \rho|^2) \mathbb{I} + \gamma \text{grad}^2 \rho + \delta \text{grad} \rho \otimes \text{grad} \rho \quad (7.3)$$

$$T_{ij} = (-p + \alpha \rho_{mm} + \beta \rho_m \rho_m) \delta_{ij} + \gamma \rho_{ij} + \delta \rho_{ij} \rho_{jj}$$

Οι συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι συναρτήσεις της πυκνότητας ρ και εξαρτώνται από τη δομή του υλικού.

Για επίπεδες διεπιφάνειες η τάση και η πυκνότητα είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής, έστω της x . Έτσι η (7.3) γράφεται:

$$T = -p + a \rho_{xx} + b \rho_x^2 \quad (7.4)$$

$$\text{όπου: } a = \alpha + \gamma; \quad b = \beta + \delta \quad (7.5)$$

Ισχύει:

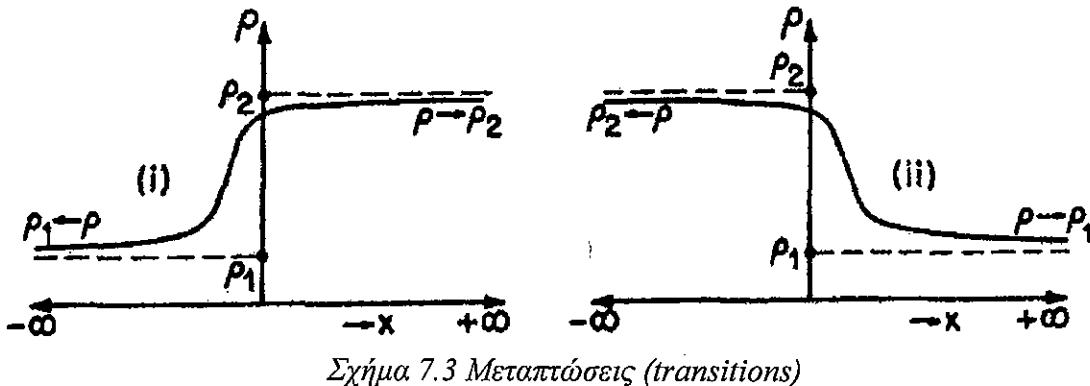
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow T = \text{constant} = -\bar{p} \Rightarrow$$

$$a\rho_{xx} + b\rho_x^2 = p - \bar{p} \quad (7.6)$$

Η εξίσωση (7.6) έχει τρεις τύπους λύσεων, οι οποίοι δίδονται παρακάτω.

7.1) Μεταπτώσεις (transitions)

Έστω $\rho_x \neq 0$. Τότε η λύση είναι μονότονη, αύξουσα ή φθίνουσα, ανάλογα με το αν είναι $\rho_x > 0$ ή $\rho_x < 0$. Η $\rho(x)$ έχει μια από τις μορφές του Σχήματος 7.3. Αυτός ο τύπος λύσεων ονομάζεται μετάπτωση (transition).



Σχήμα 7.3 Μεταπτώσεις (transitions)

Για τη λύση αυτή ισχύουν τα εξής:

$$\rho \rightarrow \rho_1, \text{ για } x \rightarrow -\infty \text{ και } \rho \rightarrow \rho_2, \text{ για } x \rightarrow +\infty \quad (7.7)$$

όταν η ρ έχει τη μορφή του Σχήματος 7.3

Επίσης: $\rho_x > 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho_x > 0 = 0$

Ορίζουμε το πολλαπλασιαστικό παράγοντα:

$$E(\rho) = \frac{1}{a} \exp\left(2 \int_a^b d\rho\right) \quad (7.8)$$

και πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (7.6) με $E\rho_x$, οπότε παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} G\rho_x^2 = (p - \bar{p}) E\rho_x \quad (7.9)$$

όπου: $G(\rho) = aE(\rho)$

Με ολοκλήρωση της (7.8) από x_0 έως x :

$$\frac{1}{2}Gp_x^2 - \text{const} = \int_{\rho(x_0)}^{\rho(x)} (p - \bar{p})E(\rho)d\rho \quad (7.10)$$

όπου: η σταθερά της ολοκλήρωσης είναι η τιμή του $\frac{1}{2}Gp_x^2$ σε κάποιο τυχαίο, αλλά σταθερό σημείο x_0 .

Από την (7.9) με ολοκλήρωση από $-\infty$ ως x και με βάση τα προηγούμενα προκύπτει:

$$\frac{1}{2}Gp_x^2 = \int_{\rho_1}^{\rho} (p - \bar{p})E(\rho)d\rho \quad (7.11)$$

και

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p})E(\rho)d\rho = 0 \quad (7.12)$$

Επίσης προκύπτει ότι:

$$p(\rho_1) = p(\rho_2) = \bar{p} \quad (7.13)$$

Αν αντί για τις (7.7) έχουμε τις εξής οριακές συνθήκες :

$$\rho \rightarrow \rho_1, \text{ για } x \rightarrow +\infty \text{ και, } \rho \rightarrow \rho_2, \text{ για } x \rightarrow -\infty \quad (7.14)$$

όταν δηλαδή η ρ έχει τη μορφή του Σχήματος 7.3 (ii), τότε $p_x < 0$ και η ρ είναι φθίνουσα.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια μοναδική τριάδα χαρακτηριστικών αριθμών $(\bar{p}, \rho_1, \rho_2)$ για τους οποίους η (7.6) έχει λύση με τις οριακές συνθήκες (7.7) ή (7.14). Αντοί οι αριθμοί προσδιορίζονται από τις συνθήκες:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p})E(\rho)d\rho = 0$$

$$\text{όπου: } E(\rho) = \frac{1}{a} \exp(2 \int_a^b d\rho)$$

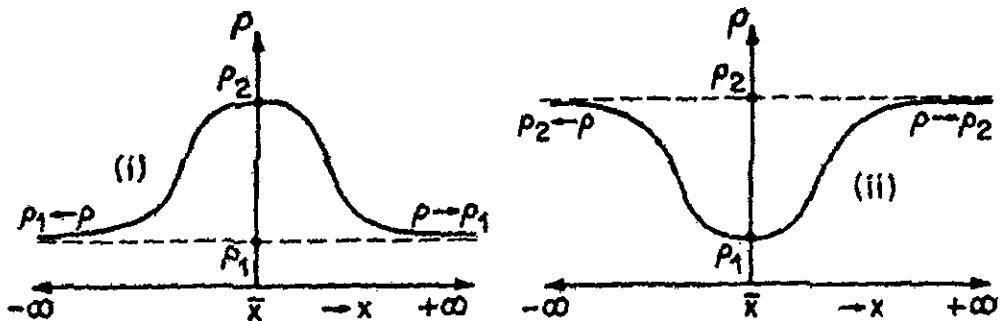
και

$$p(\rho_1) = p(\rho_2) = \bar{p}$$

Η λύση $\rho(x)$ είναι μοναδική και μονότονη. Αύξουσα για τις οριακές συνθήκες (7.7) και φθίνουσα για τις οριακές συνθήκες (7.14).

7.2) Αναστροφές (reversals)

Έστω $\rho_x = 0$ σε ένα σημείο \bar{x} . Τότε η λύση είναι συμμετρική γύρω από το \bar{x} και μονότονη σε κάθε πλευρά. Έχει μια από τις μορφές που φαίνονται στο Σχήμα 7.4. Η λύση αυτή ονομάζεται αναστροφή.



Σχήμα 7.4 Αναστροφές (reversals)

Για τη λύση αυτή ισχύουν:

$$\rho \rightarrow \rho_1, x \rightarrow \pm\infty \quad (7.15)$$

$$\rho_x(\bar{x}) = 0 \quad (7.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho_x = 0 \quad (7.17)$$

Η $\rho(x)$ έχει μέγιστο στο σημείο \bar{x} που είναι:

$$\rho_2 = \rho(\bar{x}) = \max \rho(x) > \rho_1 \quad (7.18)$$

Επειδή η $\rho(\bar{x})$ είναι συμμετρική θεωρούμε μόνο την περιοχή $-\infty < x \leq \bar{x}$, όπου η $\rho(\bar{x})$ είναι μονότονα αύξουσα ($\rho_x > 0, x \neq \bar{x}$) με $\rho_1 < \rho < \rho_2$. Ολοκληρώνοντας την (7.9) από x ως x_0 ($-\infty < x < x_0 < \bar{x}$) παίρνουμε:

$$\text{const} - \frac{1}{2} G \rho_x^2 = \int_{\rho(x_0)}^{\rho(x)} (p - \bar{p}) E(p) dp \quad (7.19)$$

Με ολοκλήρωση της (7.9) από $-\infty$ ως x ($-\infty < x \leq \bar{x}$) και με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{1}{2} G \rho_x^2 = \int_{\rho_1}^{\rho} (p - \bar{p}) E(p) dp, \quad -\infty < x \leq \bar{x} \quad (7.20)$$

Αν $x = \bar{x}$, τότε:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) E(\rho) d\rho = 0 \quad (7.21)$$

Επίσης προκύπτει:

$$p(\rho_1) = \bar{p}; \quad p(\rho_2) < \bar{p} \quad (7.22)$$

Αν έχουμε τις οριακές συνθήκες

$$\rho \rightarrow \rho_2, \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (7.23)$$

τότε,

$$\rho_1 = \rho(\bar{x}) = \min \rho(x) < \rho_2 \quad (7.24)$$

Σε αυτήν τη περίπτωση ισχύει:

$$p(\rho_2) = \bar{p}, \quad p(\rho_1) > \bar{p} \quad (7.25)$$

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια χαρακτηριστικών αριθμών $(\bar{p}, \rho_1, \rho_2)$ για τους οποίους η (7.6) έχει λύση με τις οριακές συνθήκες (7.15) ή (7.23). Αυτές οι λύσεις προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) E(p) d\rho = 0$$

με

$$E(p) = \frac{1}{a} \exp(2 \int_a^b d\rho)$$

και

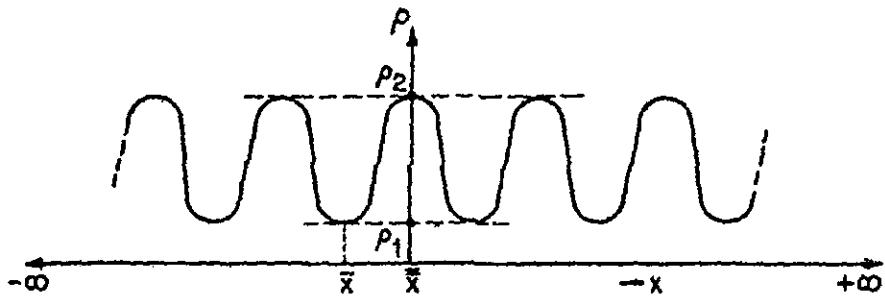
$$p(\rho_1) = \bar{p}, \quad p(\rho_2) < \bar{p} \text{ αν ισχύουν οι οριακές συνθήκες (7.15)}$$

ή

$$p(\rho_2) = \bar{p}, \quad p(\rho_1) > \bar{p}, \text{ αν ισχύουν οι οριακές συνθήκες (7.23).}$$

7.3) Ταλαντώσεις (oscillations)

Εστω $\rho_x = 0$ σε δύο σημεία \bar{x} και $\bar{\bar{x}}$. Τότε η λύση της (7.6) είναι μια ταλάντωση (oscillation). Η λύση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 7.5 και είναι συμμετρική γύρω από τα \bar{x} και $\bar{\bar{x}}$.



Σχήμα 7.5 Ταλαντώσεις (oscillations)

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho_x(\bar{x}) = 0, \rho_{xx}(\bar{x}) > 0 \quad (7.26)$$

$$\rho_x(\bar{\bar{x}}) = 0, \rho_{xx}(\bar{\bar{x}}) < 0 \quad (7.27)$$

$$\rho_1 = \rho(\bar{x}) = \min \rho(x) \quad (7.28)$$

$$\rho_2 = \rho(\bar{\bar{x}}) = \max \rho(x) \quad (7.29)$$

Λόγω της συμμετρίας θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της $\rho = \rho(x)$ μόνο στη περιοχή $\bar{x} \leq x \leq \bar{\bar{x}}$. Τα \bar{x} και $\bar{\bar{x}}$ είναι συνεχή ελάχιστα και μέγιστα της ρ με $\rho(\bar{x}) = \rho_1$ και $\rho(\bar{\bar{x}}) = \rho_2$.

Είναι:

$$\frac{1}{2} G \rho_x^2 = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) E(p) dp \quad (7.30)$$

σχέση που προκύπτει με ολοκλήρωση της (7.9) από \bar{x} ως x ($\bar{x} < x < \bar{\bar{x}}$) και με τη βοήθεια των προηγούμενων σχέσεων:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) E(p) dp = 0 \quad (7.31)$$

που προκύπτει αν θέσουμε $\bar{x} = x$.

Επίσης προκύπτει:

$$p(\rho_1) > \bar{p}, p(\rho_2) < \bar{p} \quad (7.32)$$

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια διπαραμετρική οικογένεια χαρακτηριστικών αριθμών $(\bar{p}, \rho_1, \rho_2)$ για τους οποίους η (7.6) έχει λύση με οριακές συνθήκες διαφορετικές από τις (7.7) ή (7.14) και (7.15) ή (7.23). Αυτοί οι αριθμοί προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (p - \bar{p}) E(\rho) d\rho = 0,$$

με

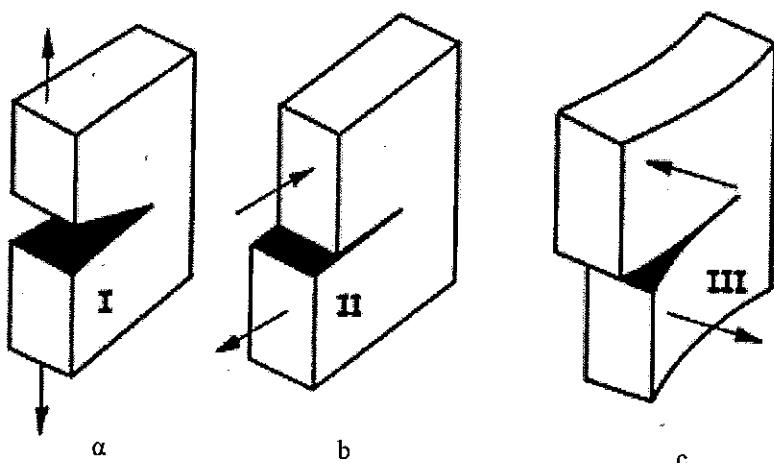
$$E(\rho) = \frac{1}{a} \exp(2 \int_a^b d\rho) \quad \text{και} \quad p(\rho_1) > \bar{p} > p(\rho_2)$$

8. Στοιχεία Θεωρίας Θραύσης

8.1) Εισαγωγή

Το φαινόμενο της θραύσης είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό φαινόμενο που εμφανίζεται στις κατασκευές του Μηχανικού. Η μηχανική της θραύσης ουσιαστικά ξεκίνησε το 1920 με τα πειράματα του Griffith πάνω σε δοκίμια γυαλιού. Μελετά τη δημιουργία και μετάδοση των ρηγμάτων που επιφέρει αστοχία σ' ένα στερεό σώμα.

Υπάρχουν τρεις χαρακτηριστικοί τύποι θραύσης (opening, sliding και tearing mode) που μπορούν να μελετηθούν τόσο μακροσκοπικά, όσο και μικροσκοπικά. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι 3 τύποι θραύσης.

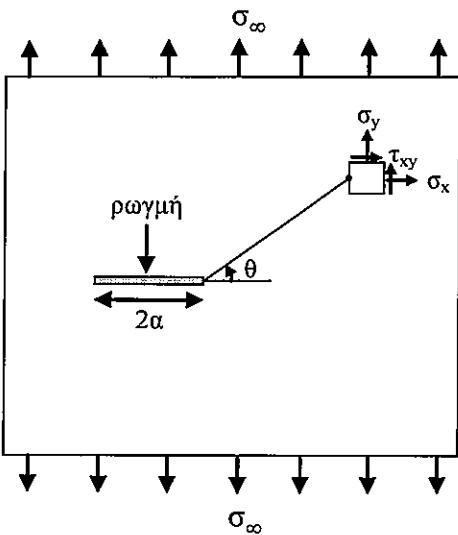


Οι τρεις τύποι θραύσης: (a) Τύπος I: Τύπος ανοίγματος (b) Τύπος II: Τύπος ολίσθησης
(c) Τύπος III: Τύπος διάσχισης

Οι θεωρητικοί υπολογισμοί με βάση τις ατομικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μορίων και ατόμων των υλικών δίνουν πολύ μεγάλες τιμές για την αντοχή σε εφελκυσμό των υλικών της τάξης του μέτρου ελαστικότητας. Στην πραγματικότητα, η αντοχή των υλικών σε εφελκυσμό είναι πολύ μικρότερη από 500 έως 1000 φορές. Αυτή η μειωμένη αντοχή σε εφελκυσμό εξηγείται με τη Μηχανική της Θραύσης (Fracture Mechanics), και την υπόθεση ότι προϋπάρχει ή δημιουργείται στα υλικά μια ρωγμή στα άκρα της οποίας οι τάσεις είναι πολύ αυξημένες (θεωρητικά απειρίζονται στο άκρο της ρωγμής).

8.2) Ανάλυση Τάσης

Αν η τάση σ_∞ εφαρμόζεται στα όρια μιας άπειρης πλάκας και δεν υπήρχε η ρωγμή τότε σ' όλο το σώμα η τάση θα ήταν σ_∞ . Τώρα που υφίσταται μια ρωγμή μήκους $2a$, μεγαλύτερες τάσεις θα εμφανιστούν στα άκρα της ρωγμής.



Κοντά στα άκρα της ρωγμής για τύπο I ισχύει:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{όπου} \quad K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

$$\text{και } f_{ij}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & 0 \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για τύπους II και III.

Για τύπο II ισχύει

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{όπου} \quad K_{II} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

$$\text{και } f_{ij}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) & \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & 0 \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

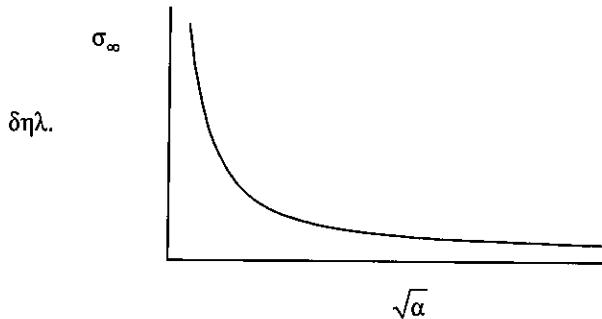
Για τύπο III ισχύει

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{όπου} \quad K_{III} = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

και $f_{ij}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Για τον τύπο I, για } \theta=0 \text{ και } f_{ij}(\theta)=1 \Rightarrow \sigma_{yy}|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \Rightarrow \sigma = \sigma^*|_{r=r^*} \Rightarrow \sigma^* = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$$

Υποθέτοντας ότι θραύση συμβαίνει όταν $\sigma_{yy} = \sigma^*|_{r=r^*}$. όπου σ^*, r^* είναι ιδιότητες του υλικού, έχουμε $K_I = \sigma^* \sqrt{2\pi r^*} = \sigma \tau a \theta \Rightarrow \sigma_\infty \sqrt{a} = \sigma \tau a \theta$.



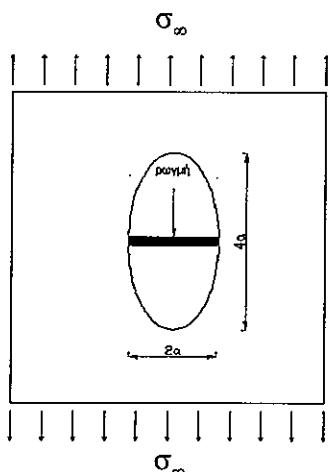
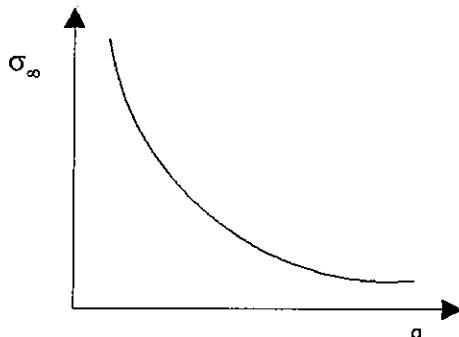
μια σχέση πειραματικά αποδειγμένη για σωλήνες μεταφοράς με ρωγματώσεις. Σε μια ανάλογη συμπεριφορά καταλήγει και το κριτήριο του Griffith που θα αναλύσουμε παρακάτω.

Σημείωση 1: Οι παραπάνω σχέσεις για την κατανομή της τάσης προβλέπουν απειρισμό των τάσεων στο άκρο της ρωγμής ($r \rightarrow 0$). Συνήθως όμως οι υψηλές τάσεις στα άκρα της ρωγμής προκαλούν πλαστικοποίηση του υλικού και οι τάσεις στην πλαστική αυτή ζώνη που περικλείει το άκρο της ρωγμής δίνονται από τη θεωρία της πλαστικότητας.

Σημείωση 2: Το παραπάνω πρόβλημα της κατανομής της τάσης στα άκρα της ρωγμής είναι ανάλογο με το πρόβλημα της μελέτης της συγκέντρωσης της τάσης σε άλλες γεωμετρικές ατέλειες. Είναι γνωστό πως όλα τα υλικά περιέχουν ατέλειες (defects) π.χ. κενά (voids) ή εγκλείσματα (inclusions). Στη γειτονιά των ατελειών αυτών, παρατηρείται συγκέντρωση τάσεων. Με τη θεωρία ελαστικότητας προκύπτει για παράδειγμα ότι σε μονοαξονικά εφελκυόμενο δίσκο στη γειτονιά μιας κυκλικής οπής οποιουδήποτε μεγέθους, παρατηρούνται ακριβώς δίπλα στην οπή τάσεις διπλάσιες (για διδιάστατο πρόβλημα) απ' ότι θα ήταν αν δεν υπήρχε οπή. Έτσι μειώνεται η αντοχή του δίσκου σε εφελκυσμό, αν σαν κριτήριο αντοχής υιοθετηθεί μια σχέση που να δηλώνει ότι το υλικό αστοχεί όταν η τάση δίπλα στην οπή αποκτήσει μία κρίσιμη τιμή. Στην πραγματικότητα, όμως, αν αυξηθεί βαθμιαία το εφελκυστικό φορτίο του δίσκου, στον οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως, αρχίζει να πλαστικοποιείται το υλικό δίπλα στην οπή (πλαστική ζώνη).

8.3) Κριτήριο θραύσης του Griffith

Και το κριτήριο αυτό καταλήγει σε μια σχέση της μορφής $\sigma_{\infty} \sqrt{a} = \text{σταθ}$. Όπου όμως τώρα η σταθερά προσδιορίζεται συναρτήσει φυσικών παραμέτρων του υλικού.



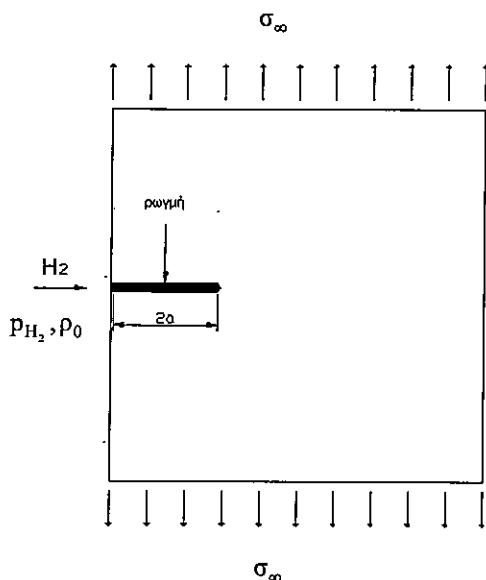
Η παρακάτω ανάλυση υποθέτει ότι λόγω της ύπαρξης της ρωγμής υπάρχει ελάττωση της ελαστικής ενέργειας σε μια περιοχή που ορίζεται από την έλλειψη του σχήματος

- Ελαστική Ενέργεια $= \frac{1}{2} \sigma_{\infty}^2 E = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\infty}^2}{E}$
- Εμβαδόν Έλλειψης $= \pi(\alpha)(2\alpha) = 2\pi\alpha^2$
- Συνολική ελάττωση ελαστικής ενέργειας: $2\pi\alpha^2 \frac{\sigma_{\infty}^2}{E} = \frac{\pi\alpha^2\sigma_{\infty}^2}{E}$

Η παραπάνω ελαστική ενέργεια που χρησιμοποιήθηκε για να δημιουργηθεί η ρωγμή είναι ίση με την επιφανειακή ενέργεια γ επί το εμβαδόν της νέας επιφάνειας που δημιουργείται λόγω της ρωγμής.

- Συνολική επιφανειακή ενέργεια $2(2\alpha)\gamma$ όπου ο παράγων 2 υποδηλώνει ότι σχηματίζονται δύο επιφάνειες (άνω και κάτω) κατά την δημιουργία της ρωγμής.
- Εξισώνοντας τις δύο ενέργειες έχουμε $\frac{\pi\alpha^2\sigma_{\infty}^2}{E} = 4\alpha\gamma \Rightarrow \sigma_{\infty} = \sqrt{\frac{4E\gamma}{\pi\alpha}}$ που είναι το κριτήριο του Griffith.

8.4) Θραύση σε Παρουσία Η (Ψαθυροποίηση υδρογόνου)



Οι εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο ψαθυροποίησης υδρογόνου σε μια πλάκα με ρωγμή υπό φόρτιση με ταυτόχρονη διάχυση ιόντων Η είναι οι παρακάτω:

$$\rho_t + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = f \quad \text{ή αντίστοιχα σε τρεις διαστάσεις}$$

Αντίστοιχα :

$$\rho_t + \operatorname{div} j = 0 \quad \operatorname{div} \underline{T} = \underline{f} \quad (1)$$

με τις ακόλουθες καταστατικές εξισώσεις

$$\underline{T} = -\pi \rho \underline{1} - \pi^* \rho \sigma \underline{1}; \quad \sigma = \operatorname{tr} \underline{\sigma} = \sigma_{mm} \quad (2)$$

$$\underline{f} = a \underline{j} - a^* \rho \nabla \sigma \quad (3)$$

$$\text{Αντικαθιστώντας την (2) και (3) στην (1)} \rightarrow \underline{j} = -(D + N\sigma) \nabla \rho + M\rho \nabla \sigma$$

$$\text{όπου } D = \frac{\pi}{\alpha}, \quad N = \frac{\pi^*}{\alpha}, \quad M = \frac{(\alpha^* + \pi^*)}{\alpha}$$

Θα εξετάσουμε την περίπτωση ισορροπίας $j=0$ (δεν υπάρχει ροή)

$$j=0 \rightarrow \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{N}{D} \sigma \right)$$

Η γενική έκφραση για τον ταυνστή της τάσης στην κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) ; \quad K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

$$\Rightarrow \sigma = A \frac{K_I}{\sqrt{r}} \text{ όπου } A \text{ είναι μια σταθερά}$$

Η συγκέντρωση υδρογόνου στα χείλη της ρωγμής δίνεται από τη σχέση του Sieverts
 $\rho_0 = \text{σταθ} \sqrt{P_{H_2}}$ όπου P_{H_2} πίεση υδρογόνου στον υποδοχέα που λαμβάνει χώρα το πείραμα.
 Έτσι οι τελικές μας σχέσεις είναι οι εξής

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{N}{D} \sigma\right)$$

$$\sigma = A \frac{K_I}{\sqrt{r}}$$

$$\rho_0 = \text{σταθ} \sqrt{P_{H_2}}$$

Οι 3 παραπάνω σχέσεις συνδέουν το ρ , το P_{H_2} και το σ , δηλαδή τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του δοκιμίου και τις εξωτερικές φορτίσεις.

$$\text{Κριτήριο θραύσης (Crack failure): } \rho|_{r=r_c} = \rho_c \Rightarrow P = P_0 K_I^{-2\alpha} \text{ όπου } \alpha = \frac{M}{N}$$

$$\text{Ταχύτητα ρωγμής: } V = \text{const}(\rho)|_{r=r_c} \Rightarrow V = V_0 K_I^\alpha$$

Δηλαδή σ' αυτή την περίπτωση έχουμε μια εκθετική σχέση της κρίσιμης πίεσης του υδρογόνου P_{H_2} με το συντελεστή συγκέντρωσης της τάσης K_I . Επίσης μια εκθετική σχέση της ταχύτητας της ρωγμής με το συντελεστή συγκέντρωσης της τάσης K_I .

