Σειρά Ασκήσεων στην Αντοχή των Υλικών

Άσκηση 1η

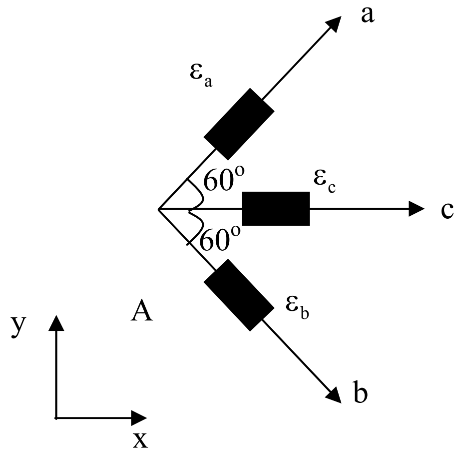
Στο σημείο A μιας επίπεδης μεταλλικής επιφάνειας με μέτρο ελαστικότητας $E = 200$ GPa και λόγο Poisson $\nu = 0.25$ μετρήθηκαν οι επιμηκύνσεις στις κατευθύνσεις a, b και c με τη διάταξη των επιμηκυνσιομέτρων του σχήματος, ως $\varepsilon_a = 900\,\mu$, $\varepsilon_b = -500\,\mu$ και $\varepsilon_c = 600\,\mu$. Να βρεθούν **(i)** οι κύριες ορθές τάσεις, και **(ii)** η μέγιστη διατμητική τάση.

[Δίνονται: $\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2\theta_n + \varepsilon_y \sin^2\theta_n + \gamma_{xy}\cos\theta_n \sin\theta_n$

$$\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right), \sigma_y = \ldots, \sigma_z = \ldots$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)$$]



Λύση

Έστω ότι οι ζητούμενες συνιστώσες είναι $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ και γ_{xy} στο σύστημα αναφοράς xy που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Παρατηρούμε ότι ο άξονας x συμπίπτει με τη διεύθυνση c, οπότε οι κατευθύνσεις των τριών ανωτέρω επιμηκύνσεων δίνονται από τις γωνίες $\theta_c = 0^o$, $\theta_a = 60^o$ και $\theta_b = \text{-}60^o$.

Ισχύει ότι

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2(60) + \varepsilon_y \sin^2(60) + \gamma_{xy}\cos(60)\sin(60)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2(\text{-}60) + \varepsilon_y \sin^2(\text{-}60) + \gamma_{xy}\cos(\text{-}60)\sin(\text{-}60)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x$$

Από την επίλυση του συστήματος των τριών ανωτέρω εξισώσεων με τρεις αγνώστους, προκύπτει $\varepsilon_x = \varepsilon_c = 600\mu$, $\varepsilon_y = 66{,}7\mu$, $\gamma_{xy} = 1616{,}6\mu$

Οι κύριες παραμορφώσεις δίνονται από τη σχέση

$$\varepsilon_{p1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{p1} = 1184{,}5\mu \\ \varepsilon_{p2} = \text{-}517{,}8\mu \end{cases}$$

Οι κύριες ορθές τάσεις και η μέγιστη διατμητική τάση δίνονται από τις σχέσεις

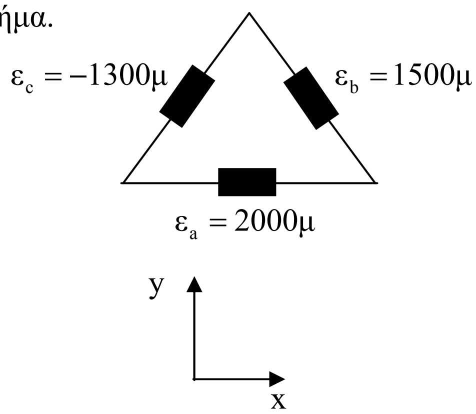
$$\sigma_{p1} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{p1} + \nu\varepsilon_{p2}\right) = 225 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_{p2} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{p2} + \nu\varepsilon_{p1}\right) = \text{-}47{,}3 \text{ MPa} \quad ,$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{225 - 0}{2}\text{MPa} = 112{,}5 \text{ MPa}$$

Άσκηση 2η

Στο σημείο P μιας επίπεδης επιφάνειας με E = 70 GPa και ν=0.3, μετρήθηκαν οι ορθές παραμορφώσεις σε τρεις διευθύνσεις όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογισθούν οι ορθές συνιστώσες του τανυστή τάσης, οι κύριες τάσεις και η μέγιστη διατμητική τάση.



Δίνονται: $\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2\theta_n + \varepsilon_y \sin^2\theta_n + \gamma_{xy}\cos\theta_n \sin\theta_n$

$$\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right), \sigma_y = \ldots, \sigma_z = \ldots$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{max} - \sigma_{min}\right)$$

Λύση

Έστω οι ζητούμενες συνιστώσες είναι $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ και γ_{xy} σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Αν υποθέσουμε ότι ο άξονας x συμπίπτει με τη διεύθυνση a, οι κατευθύνσεις των τριών ανωτέρω επιμηκύνσεων δίνονται από τις γωνίες $\theta_a = 0^o$, $\theta_b = 120^o$ και $\theta_c = 60^o$.

Ισχύει ότι

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x$$
$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2(120) + \varepsilon_y \sin^2(120) + \gamma_{xy}\cos(120)\sin(120)$$
$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2(60) + \varepsilon_y \sin^2(60) + \gamma_{xy}\cos(60)\sin(60)$$

Δηλαδή έχουμε ένα σύστημα 3 εξισώσεων με τρεις αγνώστους, από την επίλυση του οποίου παίρνουμε

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = 2000\mu, \ \varepsilon_y = \frac{1}{3}\left(2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a\right) = -533\mu, \ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon_c - \varepsilon_b\right) = -3234\mu$$

Οι τάσεις στους άξονες x, y δίνονται από τις καταστατικές εξισώσεις ως εξής

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) = 141{,}5 \text{ MPa}, \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) = 5{,}1 \text{ MPa}, \tau_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy} = -87 \text{ MPa}$$

Οι κύριες παραμορφώσεις δίνονται από τη σχέση

$$\varepsilon_{p1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{p1} = 733{,}5 + 2054 = 2787{,}5\mu \\ \varepsilon_{p2} = 733{,}5 - 2054 = -1320{,}5\mu \end{cases}$$

ενώ οι κύριες τάσεις και η μέγιστη διατμητική τάση δίνονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{p1} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{p1} + \nu\varepsilon_{p2}\right) = 184 \text{ MPa}, \quad \sigma_{p2} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{p2} + \nu\varepsilon_{p1}\right) = -37{,}25 \text{ MPa},$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{184 - 0}{2} \text{ MPa} = 92 \text{ MPa}$$

Άσκηση 3η

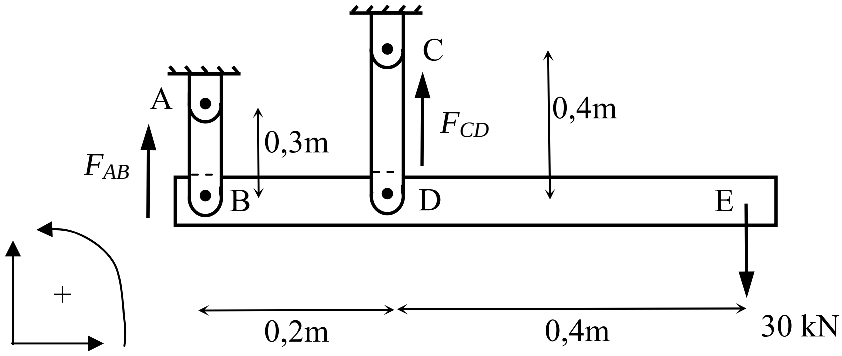
Η άκαμπτη ράβδος ΒΕ του σχήματος είναι συνδεδεμένη με δύο παραμορφώσιμες ράβδους ΑΒ και CD. Να προσδιορισθούν οι επιμηκύνσεις των ράβδων ΑΒ και CD, η μετακίνηση του σημείου Ε, καθώς και οι τάσεις σ_{AB}, σ_{BC} .

<u>Δεδομένα</u>

$$\delta = \frac{PL}{EA},\ \sigma = \frac{P}{A},\ \delta = \varepsilon L,\ \sigma = E\varepsilon$$

E_{AB}= 70GPa, E_{CD}= 200 GPa

A_{AB}= 500 mm^2, A_{CD}= 600 mm^2



Λύση

Έστω F_{AB}, F_{BC} είναι οι δυνάμεις που ασκούν οι ράβδοι ΑΒ και BC στη ράβδο ΒΕ, αντίστοιχα, και έχουν τις φορές που φαίνονται στο σχήμα. Ισορροπία ροπών γύρω από το σημείο Β δίνει

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow F_{CD} \cdot 0,2 - 30 \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow F_{CD} = 90\,\text{kN} .$$

Ομοίως, ισορροπία ροπών γύρω από το σημείο D δίνει

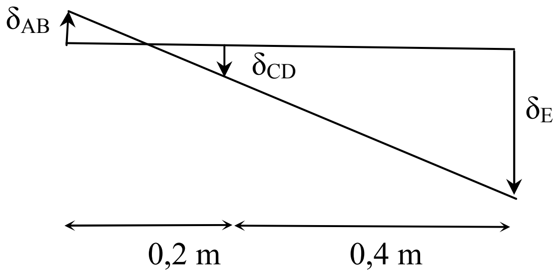
$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow -F_{AB} \cdot 0,2 - 30 \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow F_{AB} = -60\,\text{kN} .$$

Επομένως οι επιμηκύνσεις των ράβδων ΑΒ και BC μπορούν να υπολογισθούν ως εξής:

$$\delta_{AB} = \frac{F_{AB}L_{AB}}{E_{AB}A_{AB}} \Rightarrow \delta_{AB} = \frac{-60\,\text{kN} \cdot 0,3\,\text{m}}{70\,\text{GPa} \cdot 500 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} \Rightarrow \delta_{AB} = -0,5148 \cdot 10^{-3}\,\text{m} ,$$

$$\delta_{CD} = \frac{F_{CD}L_{CD}}{E_{CD}A_{CD}} \Rightarrow \delta_{CD} = \frac{90\,\text{kN} \cdot 0,4\,\text{m}}{200\,\text{GPa} \cdot 600 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} \Rightarrow \delta_{CD} = 0,3 \cdot 10^{-3}\,\text{m} .$$

Το ακόλουθο σχήμα απεικονίζει την αρχική (οριζόντια) και τελική (επικλινή) θέση της άκαμπτης ράβδου ΒΕ.



Από τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται στο σχήμα αυτό προκύπτει ότι

$$\frac{\delta_{CD} + \delta_{AB}}{\delta_E + \delta_{AB}} = \frac{0,2}{0,6} \Rightarrow \delta_E = 1.928 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

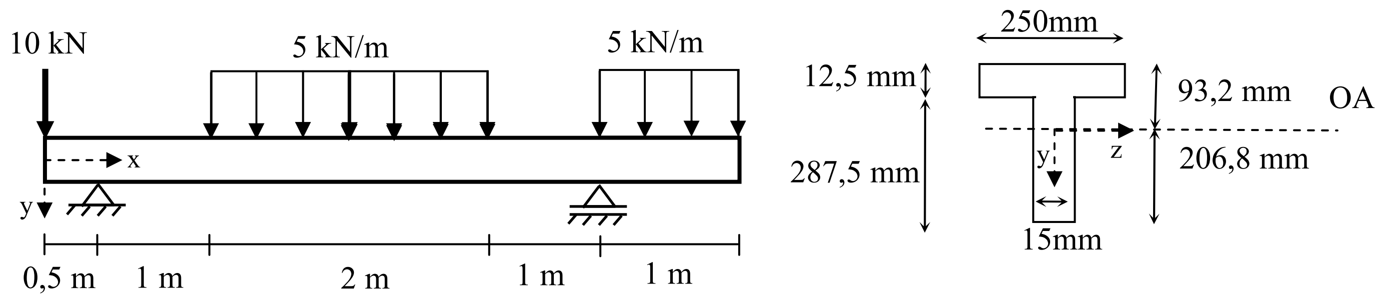
Οι τάσεις στις ράβδους ΑΒ και BC υπολογίζονται ως εξής:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} \Rightarrow \sigma_{AB} = 120\,\text{MPa} \qquad \text{και} \qquad \sigma_{CD} = \frac{F_{CD}}{A_{CD}} \Rightarrow \sigma_{CD} = 150\,\text{MPa}$$

Άσκηση 4η

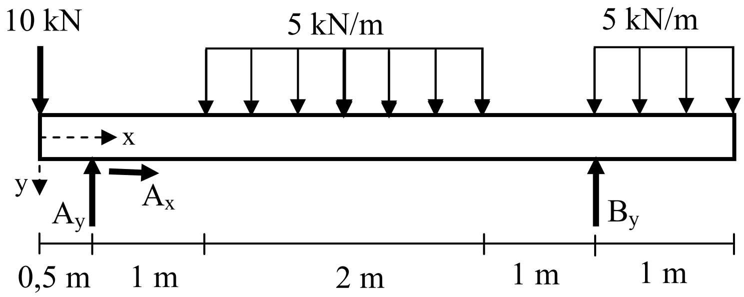
Για τη δοκό του σχήματος με $I_{OA} = 222\ 10^6 mm^4$: α) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων (V) και ροπών (M), β) Να προσδιορισθεί η μέγιστη ορθή τάση και η θέση ενέργειάς της.

$$\left[\quad \text{Δίνεται:}\ \ \sigma = \frac{M\,y}{I} \quad\right]$$



Λύση

α) Από στατική επίλυση του φορέα έχουμε



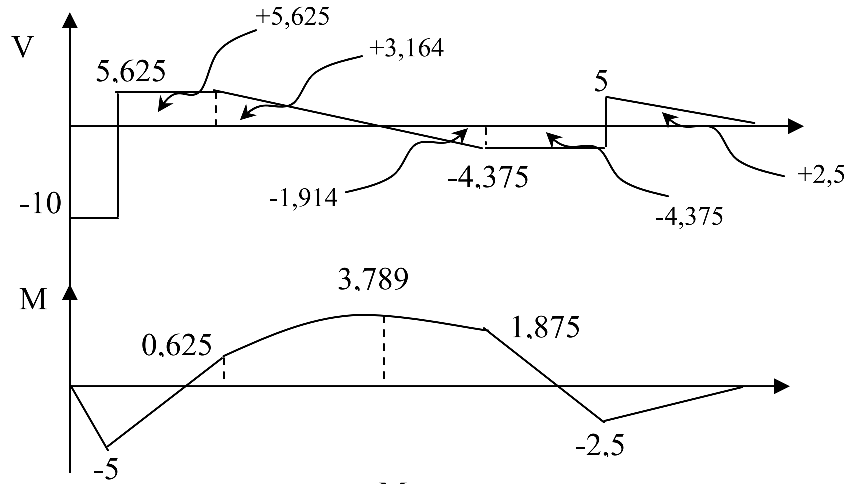
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 5\cdot 2 - 5\cdot 1 = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 25\,kN \qquad (1)$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -10\cdot 0{,}5 + 5\cdot 2\cdot 2 + B_y\cdot 4 - 5\cdot 1\cdot 4{,}5 = 0 \Rightarrow B_y = 9{,}375\,kN \qquad (2)$

$(1),(2) \rightarrow\ A_y = 15{,}625\,kN$

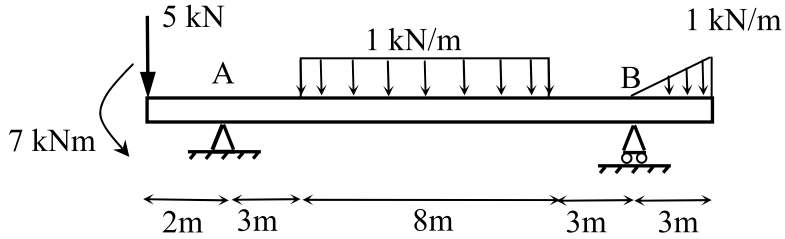
Με επισκόπηση τα διαγράμματα V, M βρίσκονται ως εξής

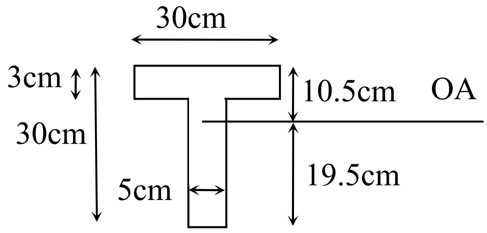


β) Η ορθή τάση δίνεται από τον τύπο $\sigma = \dfrac{M\,y}{I}$,ενώ παίρνει τη μέγιστη τιμή της κατ’ απόλυτη τιμή στη διατομή που η ροπή M είναι μέγιστη, και στη μέγιστη απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα. Δηλαδή η μέγιστη τιμή της ορθής τάσης είναι: $\left|\sigma_{max}\right| = \dfrac{5\,kNm\ 0{,}2068\,m}{222\,10^{-6}\ m^4} = 4{,}657\ MPa$ και ενεργεί στην κάτω ίνα στη διατομή στο A.

Άσκηση 5η

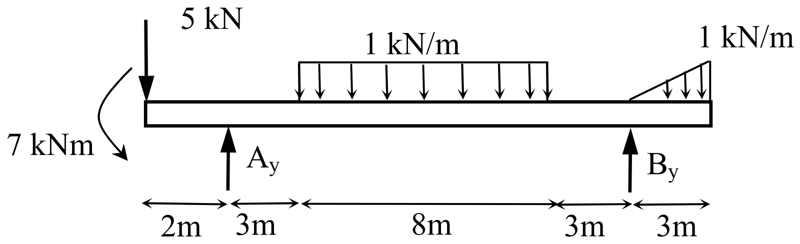
Δίνεται ο φορέας του σχήματος. Ζητούνται: α) Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα V,M, β) Να υπολογισθεί κατά θέση και μέγεθος η μέγιστη ορθή τάση.

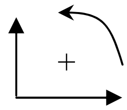




Λύση

α) Από στατική επίλυση του φορέα έχουμε



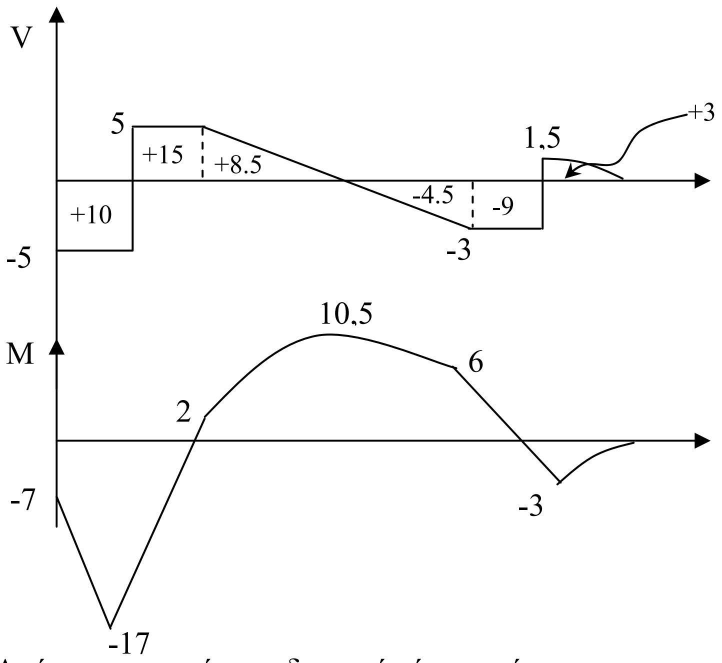


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 5 - 1\cdot 8 - 1\cdot 3\cdot 0.5 = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 14.5\,\text{kN} \qquad (1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 7 + 5\cdot 2 - 1\cdot 8\cdot(3+4) - 1\cdot 3\cdot 0.5\cdot(3+3+8+2) + B_y\cdot 14 = 0 \Rightarrow B_y = 4.5\,\text{kN} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow A_y = 10\,\text{kN}$$

Με επισκόπηση τα διαγράμματα V, M βρίσκονται ως εξής



β) Από τη γεωμετρία της διατομής έχουμε ότι

$$I = 30\frac{3^3}{12} + 30\cdot 3\cdot(28.5-19.5)^2 + 5\frac{27^3}{12} + 5\cdot 27\cdot(19.5-13.5)^2 = 20419\ \text{cm}^4$$

Η ορθή τάση δίνεται από τον τύπο $\sigma = \frac{M\,y}{I}$, ενώ παίρνει τη μέγιστη τιμή της κατ' απόλυτη τιμή στη διατομή που η ροπή M είναι μέγιστη, και στη μέγιστη απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα. Δηλαδή η μέγιστη τιμή της ορθής τάσης είναι: $\left|\sigma_{max}\right| = \frac{17\ \text{kNm}\ 0.195\ \text{m}}{20419\,10^{-8}\ \text{m}^4} = 16.23\ \text{MPa}$ και εφαρμόζεται στην κάτω ίνα στη διατομή στο Α.