Χρονικές σειρές

9^{o} μάθημα: Μεικτά μοντέλα ARMA

Εαρινό εξάμηνο 2018-2019
Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διδάσκουσα: **Αγγελική Παπάνα**

Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια

Πολυτεχνική σχολή, Α.Π.Θ. & Οικονομικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

http://users.auth.gr/~agpapana/

Μεικτά μοντέλα ARMA(p, q)

Το μοντέλο:

$$\boxed{\Upsilon_t = \delta + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \cdots \alpha_p \Upsilon_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}}$$

είναι συνδυασμός **p αυτοπαλίνδρομων όρων** και **q όρων κινητού μέσου**, για αυτό και ονομάζεται μεικτό αυτοπαλίνδρομο-κινητού μέσου μοντέλο τάξης (p, q) (Mixed autoregressive – Moving average model ARMA(p, q)).

Επομένως, μια καθαρά αυτοπαλίνδρομη μορφή ή μια καθαρά μορφή κινητού μέσου μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις μιας ARMA διαδικασίας.

Δηλαδή AR(p) = ARMA(p, 0) και MA(q) = ARMA(0, q).

Μοντέλο ARMA(1,1)

Η απλούστερη μορφή μιας ARMA διαδικασίας είναι το μοντέλο ARMA(1,1):

$$\boxed{Y_t = \delta + \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}} \qquad (1)$$

ή

$$\boxed{y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}}$$

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να γραφεί ως μια καθαρά MA διαδικασία.

Υστερώντας διαδοχικά την σχέση (1) και αντικαθιστώντας τα Y_{t-1}, Y_{t-2},… έχουμε:

$$Y_t = \delta + \alpha_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$= \delta + \alpha_1(\delta + \alpha_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-2}) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$= (\delta + \alpha_1\delta) + \alpha_1^2 Y_{t-2} + \varepsilon_t + (\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1} + \alpha_1\theta_1\varepsilon_{t-2}$$

$$= (\delta + \alpha_1\delta) + \alpha_1^2(\delta + \alpha_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3})$$

$$+\varepsilon_t + (\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1} + \alpha_1\theta_1\varepsilon_{t-2}$$

$$= (\delta + \alpha_1\delta + \alpha_1^2\delta) + \alpha_1^3 Y_{t-3}$$

$$+\varepsilon_t + (\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1} + \alpha_1(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-2} + \alpha_1^2\theta_1\varepsilon_{t-3}$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$= \delta \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i + \varepsilon_t + \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}$$

$$\boxed{Y_t = \delta \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}}$$

Στασιμότητα

Για να είναι η σειρά στάσιμη, θα πρέπει το άθροισμα $\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)$ να συγκλίνει, πράγμα που σημαίνει ότι

$$\boxed{|\alpha_1| < 1}$$

όπως και στην περίπτωση της αυτοπαλίνδρομης AR(1).

Αν η σειρά είναι στάσιμη, γράφεται:

$$\boxed{\Upsilon_t = \frac{\delta}{1 - \alpha_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}}$$

Είναι: $\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i = \frac{1}{1-\alpha_1}$ διότι είναι άθροισμα όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.

Η σχέση

$$\boxed{\Upsilon_t = \frac{\delta}{1-\alpha_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}}$$

είναι μια MA διαδικασία με άπειρους όρους, που θα μπορούσε να προσεγγιστεί με έναν περιορισμένο αριθμό όρων δεδομένου ότι η σημασία των συντελεστών βαίνει μειούμενη. Δηλαδή, μετά από κάποιο σημείο θα μπορούσαν να παραλειφθούν οι επόμενοι όροι.

Παράδειγμα

Έστω η στοχαστική διαδικασία $\Upsilon_t = \delta + 0.8\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t + 0.8\ \varepsilon_{t-1}$

Έστω επίσης ότι $\Psi_i = a_1^i\ (\alpha_1 + \theta_1)$, οπότε: $\Psi_i = 0.8^i \times 1.6$

$\Psi_0 = 0.8^0 \times 1.6 = 1.6$

$\Psi_1 = 0.8^1 \times 1.6 = 1.28$

$\Psi_2 = 0.8^2 \times 1.6 = 1.02$

$\Psi_3 = 0.8^3 \times 1.6 = 0.82$

$\Psi_4 = 0.8^4 \times 1.6 = 0.65$ κ.ο.κ.

Επομένως $\Upsilon_t = \frac{\delta}{1-0.8} + \varepsilon_t + 1.6\varepsilon_{t-1} + 1.28\varepsilon_{t-2} + 1.02\varepsilon_{t-3} + \cdots$

Που σημαίνει ότι απαιτείται υψηλής τάξεως MA διαδικασία προκειμένου να προσεγγιστεί η ARMA(1,1).

Αντιστρεψιμότητα

Το μοντέλο ARMA(1,1)

$$\boxed{\Upsilon_t = \delta + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}} \quad (1)$$

μπορεί να διατυπωθεί και ως AR(∞).

Αντικαθιστώντας διαδοχικά τα ε_{t-1}, ε_{t-2},… έχουμε:

$$\boxed{\Upsilon_t = \frac{\delta}{1-\theta_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} (-\theta_1)^i (\alpha_1 + \theta_1) \Upsilon_{t-1-i}}$$

όπου $\boxed{|\theta_1| < 1}$ για να είναι η σειρά αντιστρέψιμη.

Όπως στην περίπτωση της MA(∞), έτσι και για την περίπτωση της AR(∞), χρειάζονται πολύ περισσότεροι συντελεστές σε σύγκριση με την ARMA(1,1) διαδικασία.

Ουσιαστικά θεωρώντας μεικτά μοντέλα ARMA αντί για καθαρά AR ή καθαρά MA, επιτυγχάνεται «οικονομία» στο πλήθος των συντελεστών που πρέπει να εκτιμηθούν.

Για μια ARMA(1,1) διαδικασία ισχύουν τα παρακάτω:

- $E(Y_t) = \mu = \frac{\delta}{1-\alpha_1}$
- $\gamma_0 = \frac{1+\theta_1^2+2\alpha_1\theta_1}{1-\alpha_1^2}\sigma^2$
- $\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2$
- $\gamma_s = \alpha_1\gamma_{s-1}$ για $s > 1$
- $\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\theta_1}{\gamma_0}\sigma^2$
- $\rho_s = \alpha_1\rho_{s-1}$ για $s > 1$

- $\boxed{\mathrm{E}(\Upsilon_t) = \mu = \frac{\delta}{1-\alpha_1}}$

<u>Απόδειξη</u>

Η ARMA(1,1) διαδικασία γράφεται ως:

$$\Upsilon_t = \frac{\delta}{1-\alpha_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}$$

$$\mathrm{E}(\Upsilon_t) = \mathrm{E}\left(\frac{\delta}{1-\alpha_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}\right) = \frac{\delta}{1-\alpha_1}$$

αφού $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{1+\theta_1^2+2\alpha_1\theta_1}{1-\alpha_1^2}\sigma^2}$$

Απόδειξη

$$\gamma_0 = \mathrm{Var}(\Upsilon_t) = \mathrm{E}(\Upsilon_t - \mathrm{E}(\Upsilon_t))^2 = \mathrm{E}(\varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i})^2 =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \mathrm{E}[\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}]^2 + \underbrace{2\mathrm{E}[(\varepsilon_t)\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_1^i\,(\alpha_1 + \theta_1)\varepsilon_{t-1-i}\right)]}_{0} =$$

$$= \sigma^2 + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_1^{2i}\,(\alpha_1 + \theta_1)^2\sigma^2}_{\text{Άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με 1ο όρο } (\alpha_1+\theta_1)^2 \text{ και λόγο } a_1^2} = \sigma^2 + \frac{(\alpha_1 + \theta_1)^2}{1 - \alpha_1^2}\sigma^2 = \frac{1 + \theta_1^2 + 2\alpha_1\theta_1}{1 - \alpha_1^2}\sigma^2$$

- $\boxed{\gamma_0 = \alpha_1\gamma_1 + \sigma^2 + \theta_1(\alpha_1 + \theta_1)\sigma^2}$

Ισχύουν:
- $E(y_t, \varepsilon_t) = \sigma^2$
- $E(y_{t-s}, \varepsilon_t) = 0$
- $E(y_t, \varepsilon_{t-1}) = (\alpha_1 + \theta_1)\sigma^2$
- $E(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2$
- $E(y_{t-s}, \varepsilon_{t-1}) = 0, s \geq 2$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ARMA(1,1) διαδικασία:

$\Upsilon_t = \delta + \alpha_1\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$ ή

$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$ όπου $y_t = \Upsilon_t - E(\Upsilon_t)$

$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$ Πολλαπλασιάζουμε με y_{t-s}

$y_t y_{t-s} = \alpha_1 y_{t-1} y_{t-s} + \varepsilon_t y_{t-s} + \theta_1\varepsilon_{t-1} y_{t-s}$ Παίρνουμε μέσες τιμές

$E(y_t y_{t-s}) = \alpha_1 E(y_{t-1} y_{t-s}) + E(\varepsilon_t y_{t-s}) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} y_{t-s})$ (2)

Για $s = 0$: $\gamma_0 = \alpha_1 E(y_{t-1} y_t) + E(\varepsilon_t y_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} y_t) =$

$= \alpha_1\gamma_1 + \sigma^2 + \theta_1(\alpha_1 + \theta_1)\sigma^2$

- $\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2$
- $\gamma_s = \alpha_1\gamma_{s-1}$ για $s > 1$

- $\mathrm{E}(y_t, \varepsilon_t) = \sigma^2$
- $\mathrm{E}(y_{t-s}, \varepsilon_t) = 0$
- $\mathrm{E}(y_t, \varepsilon_{t-1}) = (\alpha_1 + \theta_1)\sigma^2$
- $\mathrm{E}(y_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2$
- $\mathrm{E}(y_{t-s}, \varepsilon_{t-1}) = 0,\ s \geq 2$

$$\mathrm{E}(y_t y_{t-s}) = \alpha_1 \mathrm{E}(y_{t-1} y_{t-s}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t y_{t-s}) + \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-s}) \quad (2)$$

Για $s = 1$: $\gamma_1 = \alpha_1 \mathrm{E}(y_{t-1} y_{t-1}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t y_{t-1}) + \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-1}) =$

$$= \alpha_1\gamma_0 + 0 + \theta_1\sigma^2 = \alpha_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2$$

Για $s \geq 2$: $\gamma_s = \alpha_1 \mathrm{E}(y_{t-1} y_{t-s}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t y_{t-s}) + \theta_1 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1} y_{t-s})$

$$= \alpha_1\gamma_{s-1} + 0 + 0$$

$$= \alpha_1\gamma_{s-1}$$

Οι αυτοσυσχετίσεις προκύπτουν από την σχέση

$$\boxed{\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}}$$

Οι αυτοσυσχετίσεις σε συνδυασμό με τις συνθήκες αντιστρεψιμότητας και στασιμότητας είναι:

$$|\rho_2| < |\rho_1|$$

$$\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 + 1),\ \rho_1 < 0$$

$$\rho_2 > \rho_1(2\rho_1 - 1),\ \rho_1 > 0$$

Στη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας ARMA(1,1) διαδικασίας υπεισέρχεται ο συντελεστής από την MA(1) διαδικασία, αλλά μόνο για την αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης (ρ_1).

Οι υπόλοιπες αυτοσυσχετίσεις εξαρτώνται μόνο από το αυτοπαλίνδρομο μέρος.

Η **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** για μια **ARMA(1,1)** διαδικασία **φθίνει γεωμετρικά** καθώς αυξάνεται η υστέρηση s.

Η **μείωση** της **συνάρτησης αυτοσυσχέτισης** μιας **ARMA(1,1)** διαδικασίας αρχίζει όμως από το $\boldsymbol{\rho_1}$ και όχι από την μονάδα ($\rho_0 = 1$) όπως στην περίπτωση της AR(1) διαδικασίας.

Η **συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης** συμπεριφέρεται όπως στην περίπτωση της MA(1) διαδικασίας, δηλαδή **φθίνει γεωμετρικά**.

Οι μερικές αυτοσυσχετίσεις προσδιορίζονται από τις ίδιες σχέσεις όπως και στην περίπτωση ενός AR(p) μοντέλου.

π.χ.

$\rho_{11} = \rho_1$

$\rho_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\alpha_1 \rho_1 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα

Έστω η διαδικασία ARMA(1, 1): $\Upsilon_t = \delta + 0.5\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1}$ και $\varepsilon_t \sim (0,1)$

Είναι:

- $\gamma_0 = \frac{1+\theta_1^2+2\alpha_1\theta_1}{1-\alpha_1^2}\sigma^2 = 3.61$
- $\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2 = 2.71$
- $\gamma_s = \alpha_1\gamma_{s-1} = \alpha_1^{s-1}\gamma_1 = 0.5^{s-1} \times 2.71$ για $s = 2,3,\dots$
- $\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\theta_1}{\gamma_0}\sigma^2 = 0.75$
- $\rho_s = \alpha_1\rho_{s-1} = \alpha_1^{s-1}\rho_1 = 0.5^{s-1} \times 0.75$ για $s = 2,3,\dots$
- $\rho_{11} = \rho_1 = 0.75$
- $\rho_{22} = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -0.43$

Παράδειγμα στο MATLAB

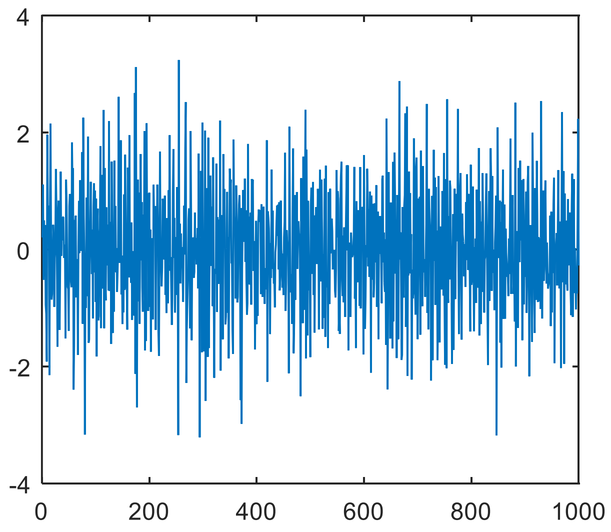
Δημιουργώ μια πραγματοποίηση της διαδικασίας ARMA(1, 1):

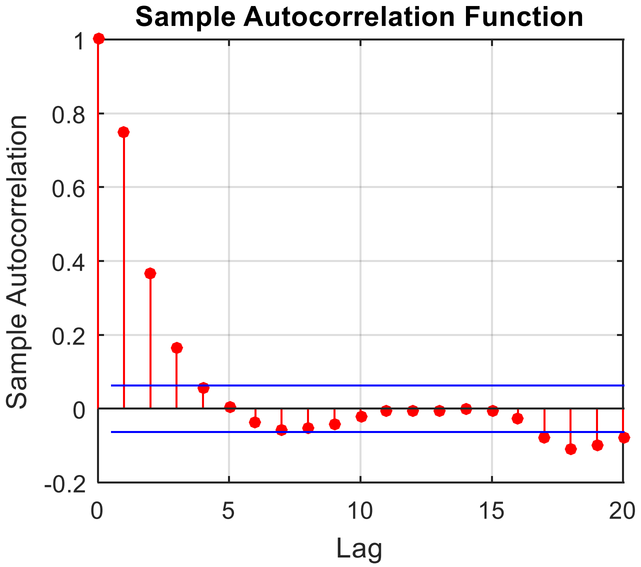
$\Upsilon_t = \delta + 0.5\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1}$ και $\varepsilon_t \sim (0,1)$.

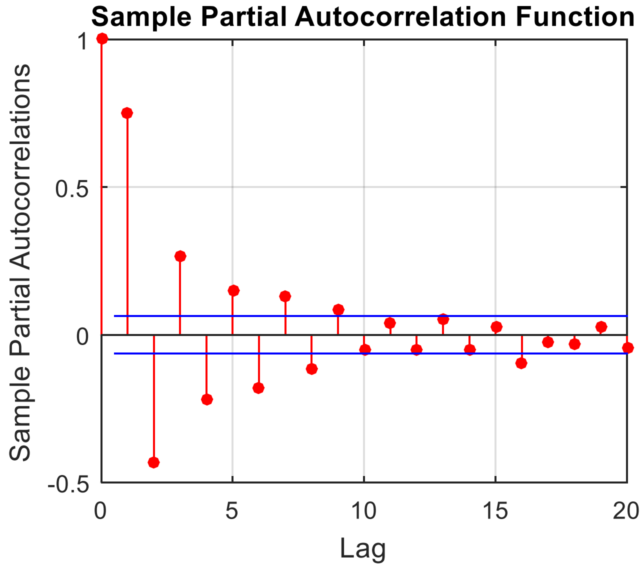
Η συνάρτηση για να δημιουργήσω μια πραγματοποίηση μιας διαδικασίας ARMA(1, 1):

```
% xV = generateARMAts(phiV,thetaV,n,sdnoise)
% n: length
% phiV = [phi(0) phi(1) ... phi(p)]' and phi(0) is the constant term
% thetaV = [theta(1) ... theta(q)]'.
% sdnoise is the SD of the Gaussian input noise
>> xV = generateARMAts([0 0.5],[0.9],1000,1);
```

```
>> plot(xV)
>> autocorr(xV)
>> parcorr(xV)
```





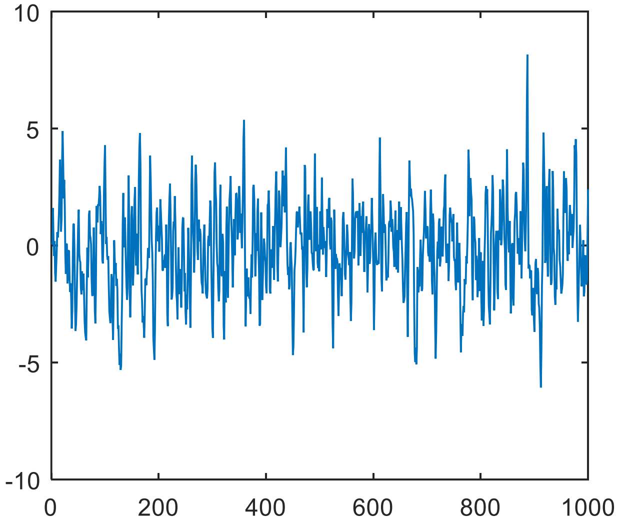


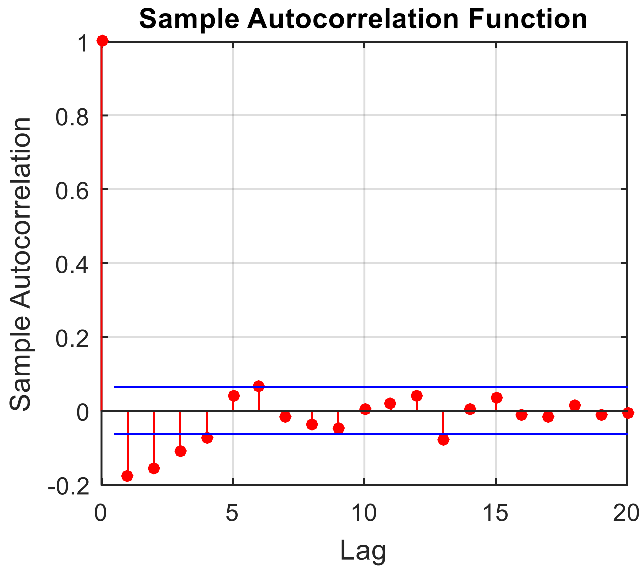
Παράδειγμα στο MATLAB

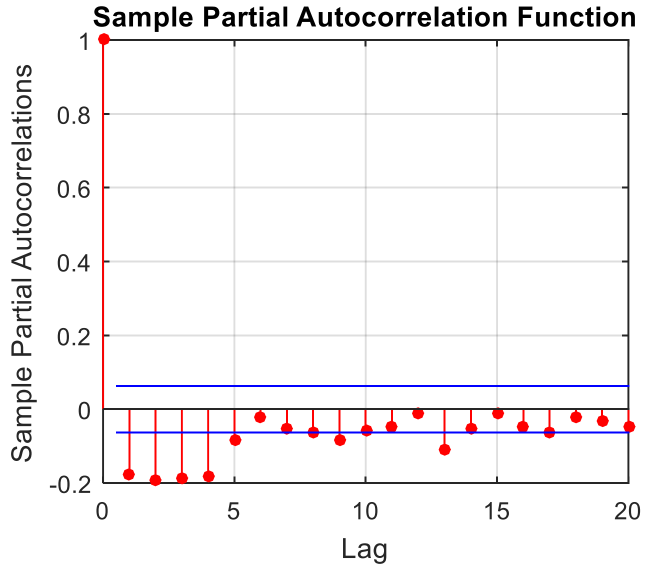
Δημιουργώ μια πραγματοποίηση της διαδικασίας ARMA(1, 1):

$\Upsilon_t = \delta + 0.5\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1}$ και $\varepsilon_t \sim (0,1)$.

```
>> xV = generateARMAts([0 0.5],[-0.9],1000,1);
```







Μοντέλο ARMA(p, q)

Το γενικό μοντέλο μιας ARMA(p, q) διαδικασίας είναι:

$$\boxed{\Upsilon_t = \delta + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \cdots + \alpha_p \Upsilon_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}}$$

Με τον συμβολισμό του τελεστή υστερήσεως, γράφεται ως εξής:

$$\left(1 - \alpha_1 \mathrm{L} - \alpha_2 L^2 \ldots - \alpha_p L^p\right)\Upsilon_t = \delta + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t$$

$$\boxed{\mathrm{A}(L)\Upsilon_t = \delta + \Theta(\mathrm{L})\varepsilon_t}$$

όπου $\mathrm{A}(L) = 1 - \alpha_1 \mathrm{L} - \alpha_2 L^2 \ldots - \alpha_p L^p$

και $\Theta(\mathrm{L}) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$

Στασιμότητα

Μια σειρά που προέρχεται από μια διαδικασία ARMA(p, q) είναι **στάσιμη** αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\boxed{1 - \alpha_1 \lambda - \alpha_2 \lambda^2 \ldots - \alpha_p \lambda^p = 0}$$

είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερες από την μονάδα.

Αντιστρεψιμότητα

Μια σειρά είναι **αντιστρέψιμη** αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\boxed{1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \cdots - \theta_q z^q = 0}$$

είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερες από την μονάδα.

Όταν η σειρά είναι **στάσιμη**:

$$\boxed{\Upsilon_t = \frac{\delta}{\mathrm{A(L)}} + \frac{\Theta(\mathrm{L})}{\mathrm{A(L)}} \varepsilon_t}$$

και

$$\boxed{\mu = \frac{\delta}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_p}}$$

Οι πρώτες q αυτοσυσχετίσεις (για $s \leq q$) εξαρτώνται τόσο από τους συντελεστές α_i του αυτοπαλίνδρομου τμήματος, όσο και από τους συντελεστές του τμήματος του κινητού μέσου.

Για τιμές όμως της υστέρησης s μεγαλύτερες από το q, οι αυτοσυνδιακυμάνσεις και οι αυτοσυσχετίσεις είναι ακριβώς ίδιες με αυτές μιας AR(p) διαδικασίας, δηλαδή δίνονται από τις σχέσεις:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_s &= \alpha_1 \gamma_{s-1} + \cdots + \alpha_p \gamma_{s-p} \ \text{ για } s > q \\ \rho_s &= \alpha_1 \rho_{s-1} + \cdots + \alpha_p \rho_{s-p} \ \text{ για } s > q \end{aligned}}$$

Γενικά, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας ARMA(p, q) διαδικασίας θα συμπεριφέρεται όπως αυτή μιας AR(p) διαδικασίας, ενώ η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης όπως μιας MA(q) διαδικασίας για $s > q - p$.

Η μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας στοχαστικής διαδικασίας

Διαδικασία	Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης	Συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης
Λευκός θόρυβος	Μηδέν	Μηδέν
AR(p)	Φθίνει γεωμετρικά ή φθίνει ακολουθώντας ημιτονοειδή συμπεριφορά	Μηδενίζεται μετά απόpυστερήσεις
MA(q)	Μηδενίζεται μετά από q υστερήσεις	Φθίνει γεωμετρικά
ARMA(p, q)	Φθίνει γεωμετρικά	Φθίνει γεωμετρικά

Εκτίμηση μοντέλων ARMA

Για την εκτίμηση ενός AR(p) μοντέλου, χρησιμοποιούμε την μέθοδο Yule – Walker (ή μέθοδος των ροπών) ή την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Για την εκτίμηση ενός MA(q) μοντέλου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που συνδέουν τις αυτοσυσχετίσεις και τις παραμέτρους τους υποδείγματος. Διαφορετικά πρέπει να χρησιμοποιηθούν μη γραμμικές τεχνικές, αφού το μοντέλο αν γραφεί σε αυτοπαλίνδρομη μορφή δεν είναι γραμμικό ως προς τις παραμέτρους του.

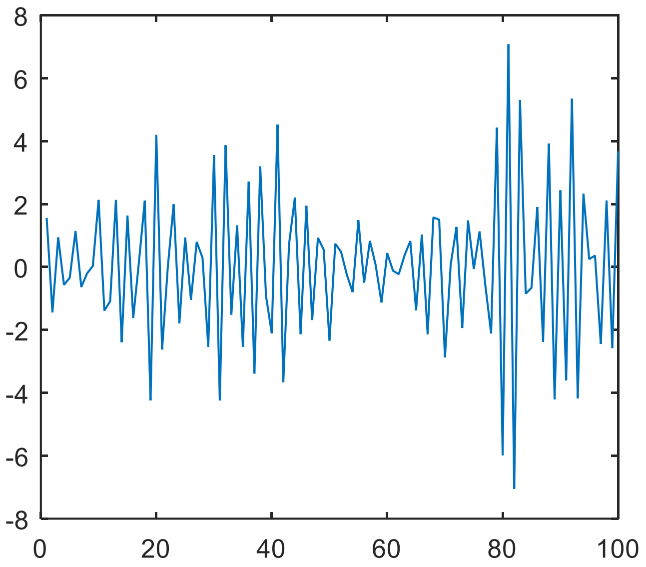
Με τις ίδιες τεχνικές μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους ενός ARMA(p, q) μοντέλου, όπου συνδυάζονται οι μέθοδοι εκτίμησης των δυο προηγούμενων περιπτώσεων.

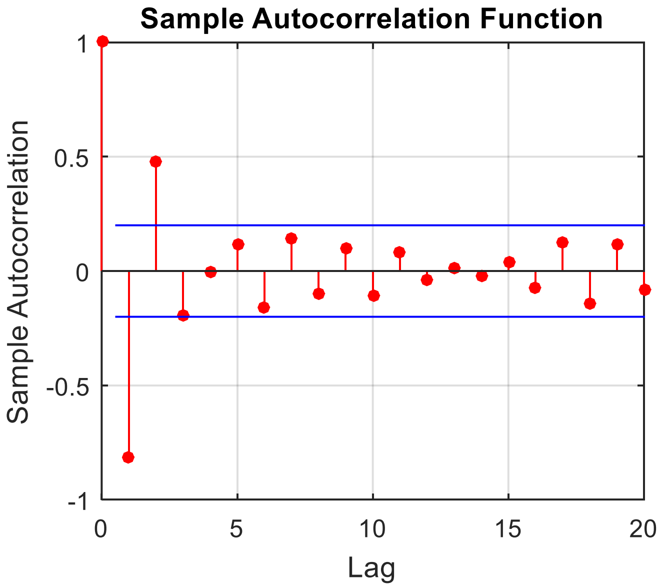
Παράδειγμα

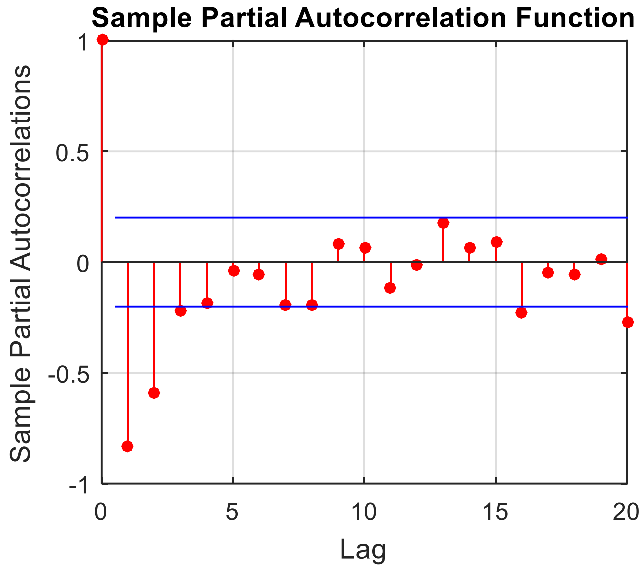
Δημιουργώ μια πραγματοποίηση της διαδικασίας ARMA(1, 1):

$\Upsilon_t = -0.7\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}$ και $\varepsilon_t \sim WN(0,1)$.

```
>> xV = generateARMAts([0 -0.7],[-0.7],100,1);
```

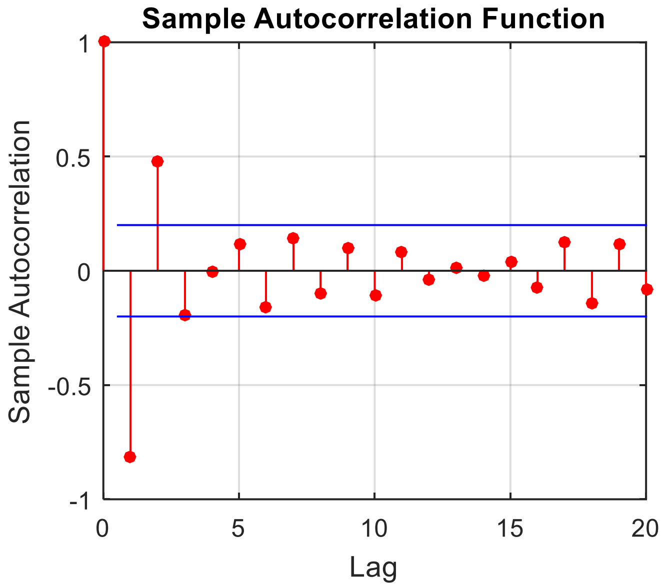


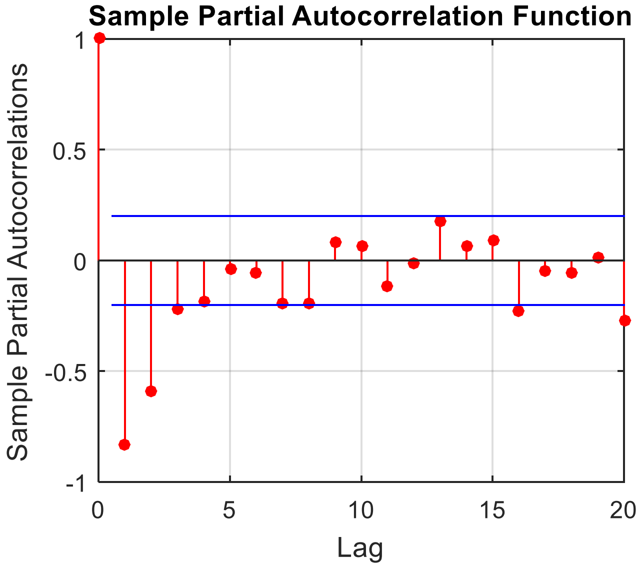




Lags	Autocorrelation	Partial autocorrelation
1	**-0.8148***	**-0.8331***
2	**0.4821***	**-0.5892***
3	-0.1965	**-0.2162***
4	-0.0052	-0.1877
5	0.1138	-0.0390

***statistically significant**





Εκτίμηση παραμέτρων μοντέλου

>> [nrmseV,~,thetaV,SDz,~,~,armamodel]=fitARMA(xV,1,1,1)

armamodel =

Discrete-time ARMA model: A(z)y(t) = C(z)e(t)

A(z) = 1 + **0.7035** z^-1

C(z) = 1 - **0.7174** z^-1

Sample time: 1 seconds

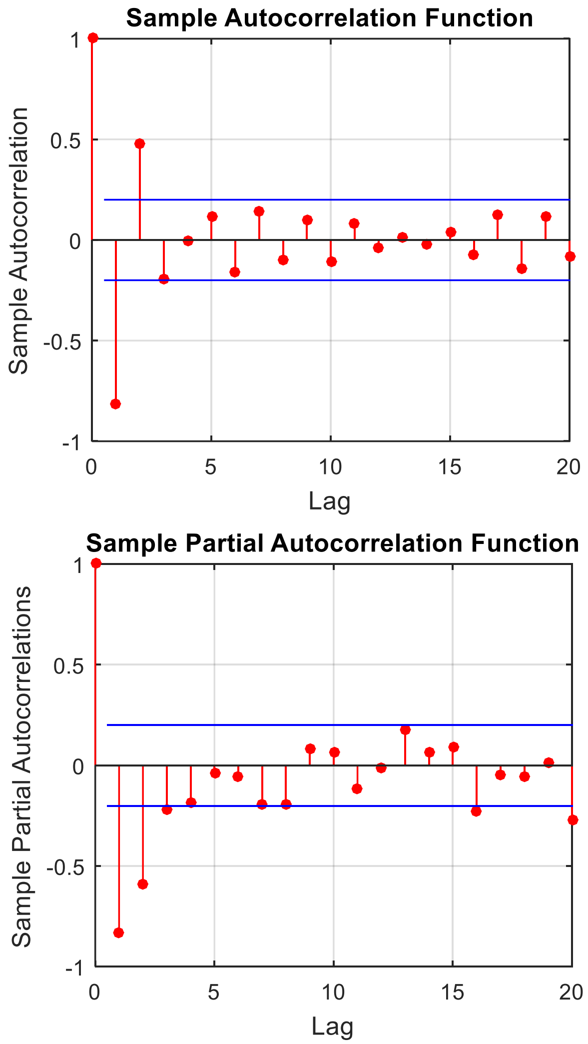
Parameterization:

Polynomial orders: na=1 nc=1

Number of free coefficients: 2

Fit to estimation data: 54.59% (prediction focus)

FPE: 1.352, **MSE**: 1.259



<u>Άσκηση 1</u>

Δίνεται η στοχαστική διαδικασία $\Upsilon_t = 0.4\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$ και $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,1)$.

α) Είναι η διαδικασία στάσιμη;

β) Να διατυπωθεί ως καθαρά αυτοπαλίνδρομη ή MA διαδικασία.

γ) Να υπολογίσετε: $\mathrm{E}(\Upsilon_t)$, γ_0, γ_1, γ_2, ρ_1, ρ_2, ρ_{11}, ρ_{22}.

<u>Λύση</u>

α) Η διαδικασία είναι στάσιμη αφού $|\alpha_1| = 0.4 < 1, |\theta_1| = 0.5 < 1.$

β) Η MA διατύπωση είναι:

$$\Upsilon_t = \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} 0.4^i \,(-0.1)\varepsilon_{t-1-i}$$

Η AR διατύπωση είναι:

$$\Upsilon_t = \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} (-0.5)^i \,(-0.1)\Upsilon_{t-1-i}$$

γ) $\mathrm{E}(\Upsilon_t) = \frac{\delta}{1-\alpha_1} = \frac{0}{1-0.4} = 0$

$$\gamma_0 = \frac{1+\theta_1^2+2\alpha_1\theta_1}{1-\alpha_1^2}\sigma^2 = \frac{1+(-0.5)^2+2\times 0.4\times(-0.5)}{1-0.4^2}\times 1 = 1.01$$

Αυτοσυνδιασπορές

$$\gamma_0 = 1.01$$

$$\gamma_1 = \alpha_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2 = 0.4 \times 1.01 + (-0.5) \times 1 = -0.096$$

$$\gamma_2 = \alpha_1\gamma_1 = 0.4 \times (-0.096) = -0.0384$$

Αυτοσυσχετίσεις

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-0.096}{1.01} = -0.095$$

$$\rho_2 = \alpha_1\rho_1 = 0.4 \times (-0.095\ ) = -0.038$$

Μερικές αυτοσυσχετίσεις

$$\rho_{11} = \rho_1 = -0.095$$

$$\rho_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-0.038 - (-0.095)^2}{1 - (-0.095)^2} = -0.047$$

Άσκηση 2

Υποθέτοντας ότι ένα δείγμα παρατηρήσεων προέρχεται από μια AR(6) στοχαστική διαδικασία, με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων εκτιμήθηκαν οι παράμετροι του υποδείγματος. Οι εκτιμήσεις είναι οι εξής:

$\hat{\beta}_1 = -0.50$, $\hat{\beta}_2 = 0.42$, $\hat{\beta}_3 = -0.35$, $\hat{\beta}_4 = 0.32$, $\hat{\beta}_5 = 0.28$, $\hat{\beta}_6 = 0.21$.

α) Ποιας ARMA διαδικασίας μπορεί να θεωρηθεί η παραπάνω AR(6) στοχαστική διαδικασία ως προσέγγιση; Ποιες είναι οι παράμετροι της ARMA διαδικασίας;

β) Να γίνει το διάγραμμα αυτοσυσχέτισης της ARMA διαδικασίας που προέκυψε;

Λύση

α) Μια ARMA(1,1) διαδικασία μπορεί να διατυπωθεί ως μια AR(∞) στοχαστική διαδικασία ως εξής:

$$\Upsilon_t = \frac{\delta}{1-\alpha_1} + \varepsilon_t + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i \,(\alpha_1 + \theta_1)\Upsilon_{t-1-i}$$

Μπορούμε να βρούμε τις παραμέτρους της ARMA(1,1) διαδικασίας από τις ακόλουθες σχέσεις:

$\hat{\beta}_1 = \alpha_1 + \theta_1 = -0.5$ ($\hat{\beta}_1$ είναι η εκτίμηση του $\alpha_1 + \theta_1$)

$\hat{\beta}_2 = \theta_1(\alpha_1 + \theta_1) = 0.42$

$\hat{\beta}_3 = \theta_1^2\,(\alpha_1 + \theta_1) = -0.35$

$\hat{\beta}_4 = \theta_1^3\,(\alpha_1 + \theta_1) = 0.32$

$\hat{\beta}_5 = \theta_1^4\,(\alpha_1 + \theta_1) = 0.28$

$\hat{\beta}_6 = \theta_1^5\,(\alpha_1 + \theta_1) = 0.21$

Επομένως

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_1} = -0.84 \quad \text{και}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1 - \hat{\theta}_1 = -0.50 - (-0.84) = 0.34$$

Άρα η ARMA(1,1) διαδικασία είναι:

$$\Upsilon_t = \delta + 0.34\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t - 0.84\varepsilon_{t-1}$$

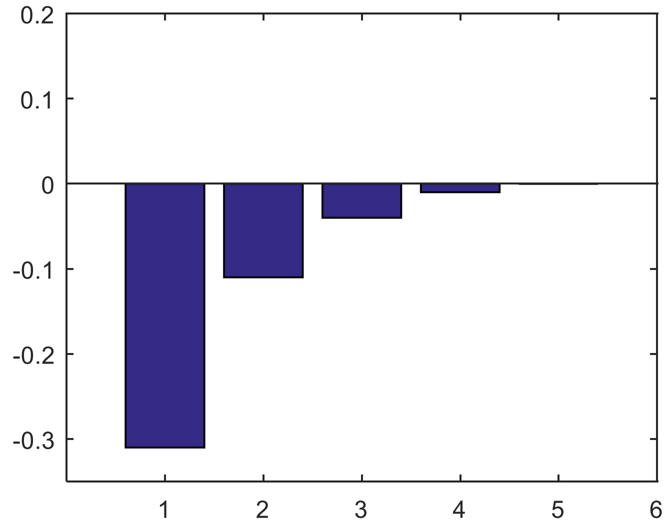
β) Υπολογίζουμε τις αυτοσυσχέτισης της ARMA διαδικασίας από τις σχέσεις:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{(1+\alpha_1\theta_1)(\alpha_1+\theta_1)}{1+\theta_1^2+2\alpha_1\theta_1} = -0.31$$

$$\hat{\rho}_2 = \hat{\alpha}_1\hat{\rho}_1 = 0.34 \times (-0.31) = -0.11$$

$$\hat{\rho}_3 = \hat{\alpha}_1\hat{\rho}_2 = 0.34 \times (-0.11) = -0.04$$

$$\hat{\rho}_4 = \hat{\alpha}_1\hat{\rho}_3 = 0.34 \times (-0.04) = -0.01$$



Εύρεση τάξης ενός γραμμικού στατικού μοντέλου

Υπάρχουν διάφορα κριτήρια για τον προσδιορισμό της τάξης ενός γραμμικού μοντέλου, όπου ως τάξη εννοούμε το **πλήθος των παραμέτρων** του μοντέλου που πρέπει να εκτιμηθούν για να προσδιοριστεί πλήρως το μοντέλο.

Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στην **πιθανοφάνεια** [likelihood] των δεδομένων με βάση το μοντέλο.

Ως δείκτης πιθανοφάνειας μπορεί να θεωρηθεί η **διασπορά των υπολοίπων** (**σφάλματα προσαρμογής**) από την προσαρμογή του μοντέλου.

Τα κριτήρια προσπαθούν να ισορροπήσουν τη μείωση του σφάλματος που επιτυγχάνεται με ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο (με περισσότερους όρους και άρα παραμέτρους) βάζοντας ποινή στην πολυπλοκότητα του μοντέλου.

Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται με μια συνάρτηση κόστους της τάξης του μοντέλου που θα πρέπει να ελαχιστοποιείται στην σωστή τάξη του μοντέλου, και περιέχει το σφάλμα προσαρμογής και κάποιον όρο ποινής για την πολυπλοκότητα του μοντέλου (δηλαδή της τάξης).

Παρατίθενται παρακάτω τρία από τα πιο γνωστά κριτήρια που κάνουν χρήση του σφάλματος προσαρμογής, όπου στις μαθηματικές εκφράσεις των κριτηρίων, ο όρος $\boldsymbol{\sigma_{\varepsilon}^{2}}$ είναι **η εκτιμώμενη διασπορά των σφαλμάτων** και $\boldsymbol{k}$ είναι η τάξη του μοντέλου για την οποία υπολογίζεται η τιμή του κριτηρίου:

1. **Κριτήριο πληροφορίας του Akaike (Akaike information criterion)**

$$\boxed{\mathrm{AIC}(k) = ln(\sigma_{\varepsilon}^{2}) + \frac{2k}{\mathrm{T}}}$$

2. Κριτήριο Μπεϋζιανής πληροφορίας (Scwartz)

(Bayesian information criterion (BIC))

$$\boxed{\mathrm{BIC}(k) = ln(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{k\ ln(T)}{\mathrm{T}}}$$

3. Κριτήριο τελικού σφάλματος πρόβλεψης

(Final prediction error (FPE))

$$\boxed{\mathrm{FPE}(k) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\mathrm{T} + k}{\mathrm{T} - k}}$$

Για κάθε ένα από τα παραπάνω κριτήρια, **η τάξη του μοντέλου είναι η τιμή $\boldsymbol{k}$ για την οποία η συνάρτηση του κριτηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή**.

Όσο μεγαλώνει η τάξη k του μοντέλου, τα σφάλματα προσαρμογής γίνονται μικρότερα (το σ_ε^2 μικραίνει) και για πολύ μεγάλες τάξεις το μοντέλο προσαρμόζεται σε διακυμάνσεις που δεν αντανακλούν πραγματικές συσχετίσεις αλλά περισσότερο το λευκό θόρυβο.

Για αυτό, για παράδειγμα στη σχέση για το κριτήριο AIC, υπάρχει ο δεύτερος όρος ποινής (penalty term), ο οποίος δρα αρνητικά και αυξάνει τη συνάρτηση AIC όταν η τάξη του μοντέλου αυξάνει. Υπολογίζοντας το κριτήριο AIC για ικανά μεγάλο αριθμό τάξεων μοντέλου επιλέγουμε εκείνη την τάξη k που δίνει την ελάχιστη τιμή του AIC.

Το k μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε. Συνήθως το μέγιστο $k = 10$ είναι ικανοποιητικό.

Για το γενικό γραμμικό μοντέλο **ARMA(p, q)**, η τάξη του μοντέλου είναι

$$\boxed{k = p + q + 1}$$

(+1 άγνωστη παράμετρος για τον σταθερό όρο)

Υπολογίζουμε την τιμή του κριτηρίου, π.χ. του AIC, για κάθε συνδυασμό των p και q, και τελικά θεωρούμε ως τάξη του μοντέλου μας εκείνα τα p και q που ελαχιστοποιούν την ποσότητα AIC.

Έλεγχος μοντέλου

Εφόσον έχουμε εκτιμήσει σωστά το μοντέλο, εκτιμώμενα κατάλοιπα (ή σφάλματα) $\hat{\varepsilon}_t$:

$$\boxed{\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t}$$

Y_t: δοθείσες τιμές από το δείγμα

$\hat{Y}_t$: εκτιμώμενες τιμές από το γραμμικό μοντέλο

θα πρέπει να ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και σταθερή διασπορά $\sigma^2_{\hat{\varepsilon}}$ ή να αποτελούν μια τελείως τυχαία σειρά.

Ο έλεγχος του μοντέλου, ανάγεται στον έλεγχο τυχαιότητας των καταλοίπων $\hat{\varepsilon}_t$, και γίνεται με την βοήθεια των αυτοσυσχετίσεων της σειράς των $\hat{\varepsilon}_t$.

Θεωρούμε ότι οι αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων ($r_s(\hat{\varepsilon}_t)$) ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\frac{1}{\mathrm{T}}$, επομένως το $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{T}}}$ είναι το τυπικό σφάλμα των αυτοσυσχετίσεων και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο σημαντικότητας των αυτοσυσχετίσεων των καταλοίπων.

Έλεγχος Portmanteau

Μπορούμε αντί να ελέγχουμε αν είναι σημαντική, κάθε μια υστέρηση χωριστά, να θεωρήσουμε την ποσότητα:

$$\boxed{Q = T \sum_{s=1}^{K} r_s^2(\hat{\varepsilon}_t)}$$

Με την προϋπόθεση ότι τα δεδομένα μας ακολουθούν ένα **ARMA($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$)** μοντέλο, ακολουθεί $\boldsymbol{X^2_{K-p-q}}$ **κατανομή**. Αν $\boxed{Q < X^2_{K-p-q;\alpha}}$ δεχόμαστε ότι το μοντέλο είναι ικανοποιητικό.

>> help fitARMA

[nrmseV,phiV,thetaV,SDz,aicS,fpeS,armamodel]=fitARMA(xV,p,q,Tmax)

fitARMA fits an autoregressive moving average (ARMA) model and computes the fitting error (normalized root mean square error) for a given number of steps ahead.

- INPUTS:

xV : vector of the scalar time series

p : the order of the AR part of the model.

q : the order of the MA part of the model.

Tmax : the prediction horizon, the fit error is computed for T=1...Tmax steps ahead.

- OUTPUT:

nrmseV : vector of length Tmax, the nrmse of the fit for T-mappings, T=1...Tmax.

phiV : the coefficients of the estimated AR part (of length (p+1) with phi(0) as first component.

thetaV : the coefficients of the estimated MA part (of length q)

SDz : the standard deviation of the noise term.

aicS : the AIC value for the model.

fpeS : the FPE value for the model.

Βιβλιογραφία

1. Ε. Μπόρα – Σέντα, Χ. Μωυσιάδης. Εφαρμοσμένη στατιστική, Β’ έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.
2. Γ. Κ. Χρήστου. Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Β τόμος (Γ’ έκδοση), Εκδόσεις Gutenberg, 2007.
3. Δ. Κουγιουμτζής. Σημειώσεις μαθήματος Χρονοσειρών. Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, ΑΠΘ.