Χρονικές σειρές

8^{ο} μάθημα: Μοντέλα κινητού μέσου

Εαρινό εξάμηνο 2018-2019
Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διδάσκουσα: **Αγγελική Παπάνα**

Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια

Πολυτεχνική σχολή, Α.Π.Θ. & Οικονομικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

http://users.auth.gr/~agpapana/

Γενική μορφή μοντέλου κινητού μέσου

$$\boxed{\Upsilon_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}}$$

Η τάξη q αναφέρεται στο μήκος της υστέρησης της μεταβλητής ε για την οποία υποθέτουμε ότι είναι λευκός θόρυβος.

Ο όρος κινητός μέσος αναφέρεται στο γεγονός ότι η Υ_t εμφανίζεται ως ένα σταθμισμένο άθροισμα των τιμών της ε_t.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση μιας MA(1) διαδικασίας.

Μοντέλο κινητού μέσου πρώτης τάξης MA(1)

Για $q = 1$:

$$\boxed{\Upsilon_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}}$$

ή

$$\boxed{\Upsilon_t - \mu = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}}$$

ή με τον συμβολισμό του τελεστή υστερήσεως L:

$$y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\boxed{y_t = (1 + \theta_1 \mathrm{L})\varepsilon_t}$$

Για $\boxed{|\theta_1| < 1}$ η σχέση

$$\boxed{y_t = (1 + \theta_1 L)\varepsilon_t}$$

μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\boxed{(1 + \theta_1 L)^{-1} y_t = \varepsilon_t}$$

$$\boxed{(1 - \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 - \theta_1^3 L^3 + \cdots) y_t = \varepsilon_t}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μια AR(∞) διαδικασία που προέκυψε από μια MA(1) διαδικασία αντιστρέφοντας τον όρο $(1 + \theta_1 L)$. Όταν αυτό είναι δυνατό, τότε η MA(1) διαδικασία είναι **αντιστρέψιμη**.

Δηλαδή, μια MA(1) διαδικασία είναι **αντιστρέψιμη** αν μπορεί να διατυπωθεί ως μια AR (∞) διαδικασία.

Για μια MA(1) διαδικασία ισχύουν τα παρακάτω:

- $\mathrm{E}(\Upsilon_t) = \mu$
- $\gamma_0 = \mathrm{Var}(\mathrm{Y}_t) = (1 + \theta_1^2)\sigma^2$
- $\gamma_1 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-1}) = \theta_1\sigma^2$
- $\gamma_s = 0$ για $s > 1$
- $\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}$
- $\gamma_s = 0$ για $s > 1$

Μόνο η αυτοσυνδιασπορά και η αυτοσυσχέτιση πρώτης τάξης είναι διάφορες του μηδενός. Αυτό σημαίνει ότι η «μνήμη» της διαδικασίας δεν υπερβαίνει τη μια περίοδο. Δηλαδή, μια οποιαδήποτε παρατήρηση της μεταβλητής Υ, συσχετίζεται μόνο με τις διαδοχικές παρατηρήσεις.

Μοντέλο κινητού μέσου δεύτερης τάξης MA(2)

Για μια MA(2) διαδικασία ισχύουν τα παρακάτω:

- $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_t) = \mu$
- $\gamma_0 = \mathrm{Var}(\mathrm{Y}_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$
- $\gamma_1 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-1}) = (\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma^2$
- $\gamma_2 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-2}) = \theta_2\sigma^2$
- $\gamma_s = 0$ για $s > 2$
- $\rho_1 = \frac{\theta_1+\theta_2\theta_1}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$
- $\rho_2 = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$
- $\rho_s = 0$ για $s > 2$

Για να είναι **αντιστρέψιμη** μια MA(2) διαδικασία θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

$$\boxed{\theta_1 + \theta_2 < 1} \qquad \boxed{-\theta_1 + \theta_2 < 1} \qquad \boxed{-1 < \theta_2 < 1}$$

Δηλαδή πρέπει να ισχύουν συνθήκες ανάλογες με αυτές που συνεπάγεται η στασιμότητα μιας AR(2) διαδικασίας.

Μοντέλο κινητού μέσου q τάξης, MA(q)

$$\boxed{\Upsilon_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}}$$

Για μια MA(q) διαδικασία ισχύουν τα παρακάτω:

- $\mathrm{E}(\Upsilon_t) = \mu$
- $\gamma_0 = \mathrm{Var}(\mathrm{Y}_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$
- $\gamma_s = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-s}) = (\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-s})\sigma^2$ για $s = 1,2\ldots,q$
- $\gamma_s = 0$ για $s > q$
- $\rho_s = \dfrac{\theta_s+\theta_{s+1}\theta_1+\cdots+\theta_q\theta_{q-s}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2}$ για $s = 1,2\ldots,q$
- $\rho_s = 0$ για $s > q$

MA(q)

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μοντέλου MA(q)

$$\boxed{1 - \theta_1 \lambda - \theta_2 \lambda^2 - \cdots - \theta_q \lambda^q = 0}$$

Αντιστρεψιμότητα

Πρέπει οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου να είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Στασιμότητα

Πάντα στάσιμο.

Γενικά, οι αυτοσυνδιακυμάνσεις και επομένως η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας MA διαδικασίας προσομοιάζουν με αυτές μιας AR διαδικασίας.

Ενώ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας AR διαδικασίας μπορεί να εκτείνεται στο άπειρο, **η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας MA διαδικασίας τερματίζεται (μηδενίζεται) μετά από q υστερήσεις**. Δηλαδή η «μνήμη» της εξαντλείται μετά από q περιόδους.

Αντίθετα, η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης μιας AR(p) διαδικασίας τερματίζεται μετά από p υστερήσεις, ενώ **η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης μιας MA(q) διαδικασίας επεκτείνεται στο άπειρο**.

Οι μερικές αυτοσυσχετίσεις (ρ_{ss}) μιας MA διαδικασίας μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των αυτοσυσχετίσεων (ρ_s) με τον ίδιο τρόπο όπως και για τις AR διαδικασίες, με βάση τη σχέση

$$\boxed{\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{R}}$$

ή

$$\boxed{\rho_{ss} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & .. & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & .. & \rho_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ \rho_{s-1} & \rho_{s-2} & .. & \rho_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & .. & \rho_{s-1} \\ \rho_1 & 1 & .. & \rho_{s-2} \\ .. & .. & .. & .. \\ \rho_{s-1} & \rho_{s-2} & .. & 1 \end{vmatrix}}}$$

Για την **MA(1) διαδικασία** ισχύουν τα παρακάτω:

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}}$$

$$\boxed{\rho_2 = 0}$$

$$\boxed{\rho_{11} = \rho_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}}$$

$$\boxed{\rho_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\theta_1^2}{1+\theta_1^2+\theta_1^4}}$$

$$\boxed{\rho_{33} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2}}$$

κ.ο.κ.

Παράδειγμα Έστω μια MA(1) διαδικασίας $Y_t = 5 + \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1}$, $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$

Με απευθείας αντικατάσταση στους τύπους έχουμε:

$\gamma_0 = \mathrm{Var}(\mathrm{Y}_t) = (1 + \theta_1^2)\sigma^2 = (1 + (-0.9)^2) = 1.81$

$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-1}) = \theta_1\sigma^2 = -0.9$

$\gamma_s = 0$ για $s > 1$

$\rho_1 = \rho_{11} = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = \frac{-0.9}{1.81} = -0.5,\ \rho_2 = 0$

$$\rho_{22} = \frac{-\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = -0.33$$

$\rho_{33} = \frac{\rho_1^3}{1-2\rho_1^2} = -0.25$ κ.ο.κ

Παράδειγμα Έστω μια MA(2) διαδικασίας $Y_t = 10 + \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$, $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$. Είναι:

$\gamma_0 = \mathrm{Var}(\mathrm{Y}_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 = (1 + (-0.7)^2 + (0.2)^2) = 1.53$

$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-1}) = (\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma^2 = -0.84$

$\gamma_2 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-2}) = \theta_2\sigma^2 = 0.2$

$\gamma_s = 0$ για $s > 2$

$\rho_1 = \frac{\theta_1+\theta_2\theta_1}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = -0.55$

$\rho_2 = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = 0.13$

$\rho_s = 0$, για $s > 2$

$\rho_{11} = \rho_1 = -0.55$

$\rho_{22} = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = -0.25$

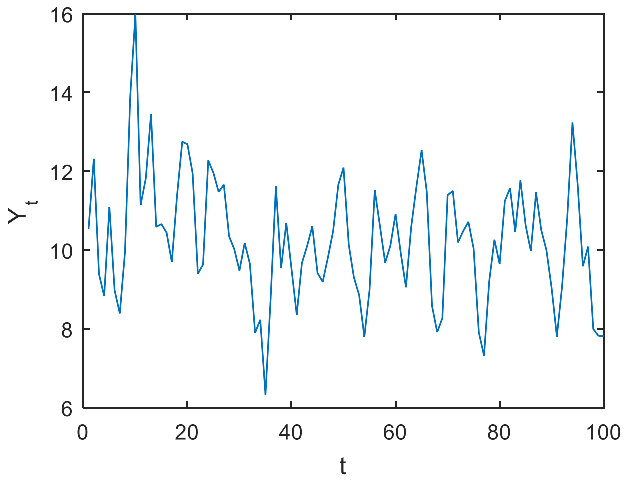
$\rho_{22} = \frac{\rho_1^3-2\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_2^2}{1-2\rho_1^2-\rho_2^2} = 0.39$

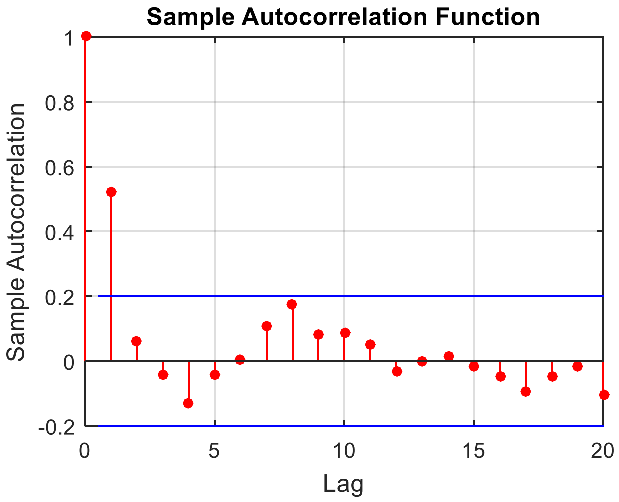
Κ.Ο.Κ

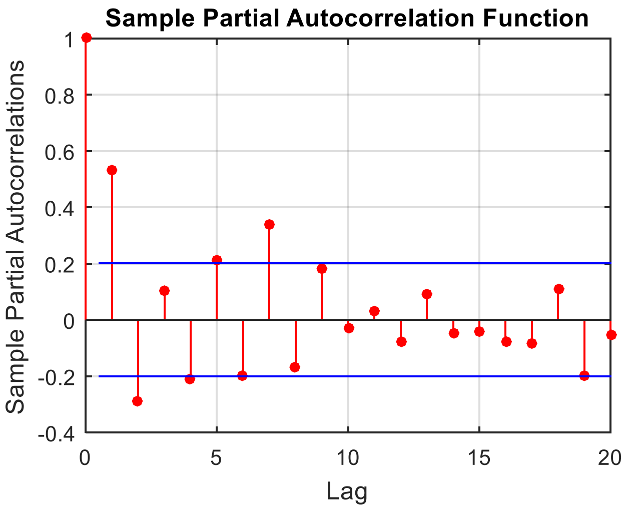
Παράδειγμα Μια πραγματοποίηση της MA(1) διαδικασίας

$$Y_t = 10 + \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1}$$

```
>> model=arima('Constant',10,'MA',{0.9},'MALags',[1],'variance',1);
>> [Y,E] = simulate(model,100);
>> plot(Y)
>> autocorr(Y)
>> parcorr(Y)
```







Εκτίμηση υποδειγμάτων MA

Όπως και στις αυτοπαλίνδρομες διαδικασίες, έτσι και για διαδικασίες κινητού μέσου, η τάξη του υποδείγματος (q) μπορεί να καθοριστεί από την συμπεριφορά της δειγματικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτιση μιας MA(q) διαδικασίας μηδενίζεται μετά από q υστερήσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι αυτοσυσχετίσεις για $s \leq q$ θα είναι σημαντικές, ενώ για $s > q$ δεν θα είναι σημαντικές.

Ο έλεγχος σημαντικότητας των αυτοσυσχετίσεων μπορεί να γίνει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που εξηγήσαμε προηγουμένως για διαδικασίες AR. Όταν έχει καθοριστεί η τάξη της MA διαδικασίας, οι παράμετροι του υποδείγματος μπορούν να καθοριστούν από τις σχέσεις Yule-Walker ($\mathbf{R} = \mathbf{\Pi A}$), οι οποίες συνδέουν τις αυτοσυσχετίσεις με τους συντελεστές αυτοπαλινδρομήσεως. Στην θέση των συντελεστών αυτοσυσχέτισης, αντικαθιστώνται οι εκτιμήσεις τους από το δείγμα.

Παρατήρηση

Η χρησιμοποίηση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων δεν είναι εφικτή, όπως στην περίπτωση των αυτοπαλίνδρομων διαδικασιών, γιατί η προς ελαχιστοποίηση συνάρτηση:

$$\sum_{t=1}^{\mathrm{T}} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{\mathrm{T}} (\Upsilon_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})^2$$

δεν είναι γραμμική ως προς τις παραμέτρους.

Για παράδειγμα, για $q = 1$, η MA(1) διαδικασία μπορεί να γραφεί ως μια AR(∞) διαδικασία:

$$\varepsilon_t = \mathrm{y}_t - \theta_1 \mathrm{y}_{t-1} + \theta_1^2 \mathrm{y}_{t-2} - \theta_1^3 \mathrm{y}_{t-3} + \cdots$$

οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\sum_{t=1}^{\mathrm{T}} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{\mathrm{T}} (\mathrm{y}_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 = \sum_{t=1}^{\mathrm{T}} (\mathrm{y}_t - \theta_1 \mathrm{y}_{t-1} + \theta_1^2 \mathrm{y}_{t-2} - \theta_1^3 \mathrm{y}_{t-3} + ..)^2$$

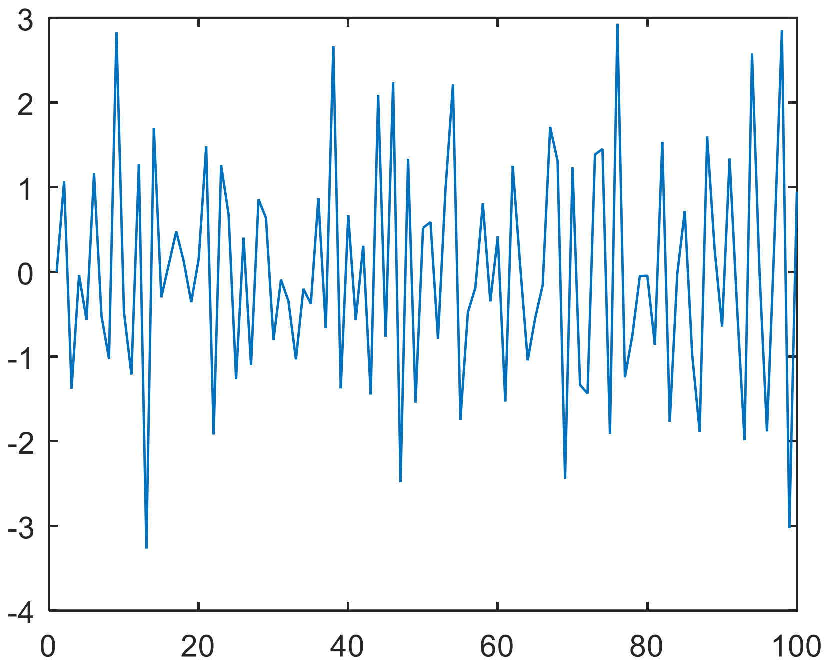
Άρα δεν είναι γραμμική ως προς τις παραμέτρους και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Σε αυτήν την περίπτωση, για την εκτίμηση της παραμέτρου θ_1 απαιτείται η χρήση μη γραμμικών μεθόδων.

Παράδειγμα

Θέλουμε να εκτιμήσουμε ένα MA(1) μοντέλο με βάση ένα δοσμένο δείγμα 100 παρατηρήσεων. Τα δεδομένα κατασκευάστηκαν με βάση το μοντέλο

$$Y_t = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1}.$$

```
>> load c:\bin\yVLec8.dat
>> yV = yVLec8;
>> plot(yV)
```



>> autocorr(yV)

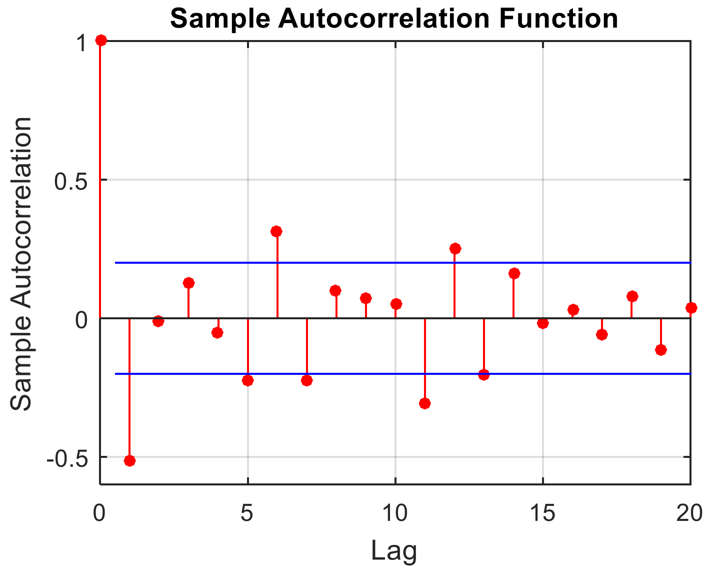
>> parcorr(yV)

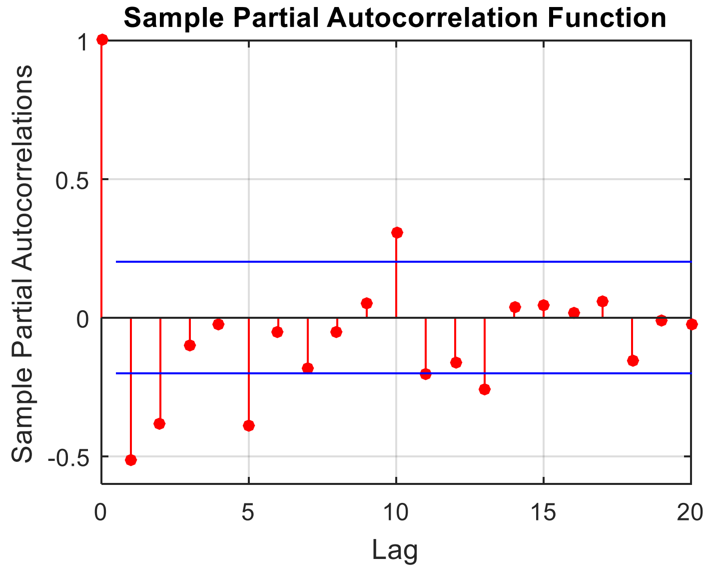
Bounds for autocorrelation [-0.2000, 0.2000]

Bounds for partial autocorrelation [-0.2010, 0.2010]

Lag	autocorrelation	Significant
1	**-0.4353**	**Yes**
2	-0.0835	No
3	0.0951	No

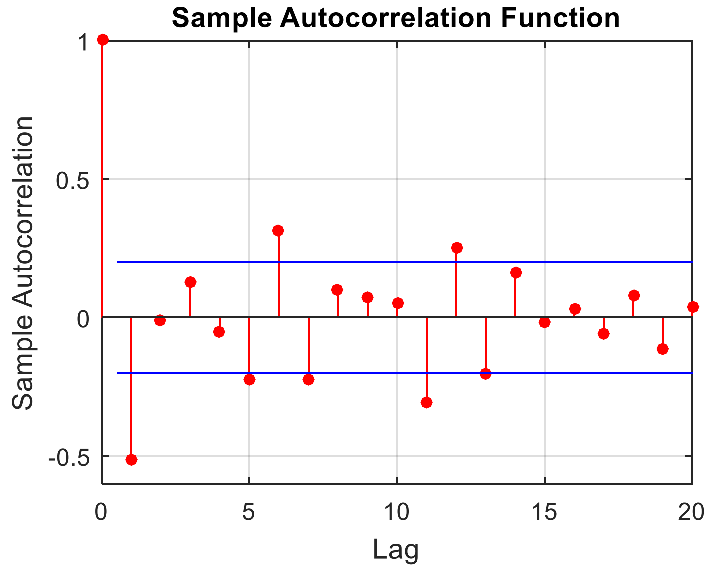
Lag	autocorrelation	Significant
1	**-0.4376**	**Yes**
2	**-0.3391**	**Yes**
3	-0.1434	No





Μια σημαντική αυτοσυσχέτιση άρα η τάξη του MA μοντέλου είναι 1.

```
>> [nrmseV,~,thetaV,SDz,~,~,armamodel]=fitARMA(xV,0,1,1)
nrmseV = 0.7707
thetaV = 0.8118
SDz = 1.0409
armamodel =
Discrete-time MA model:  y(t) = C(z)e(t)
  C(z) = 1 - 0.8118 z^-1
Parameterization:
   Polynomial orders:   nc=1
   Number of free coefficients: 1
Fit to estimation data: 22.92% (prediction focus)
FPE: 1.106, MSE: 1.062
```



Άσκηση 1

Έστω η ακόλουθη στοχαστική διαδικασία $Y_t = 4.8 + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$, όπου ε_t λευκός θόρυβος με διακύμανση 1.

α) Να διατυπωθεί το μοντέλο με τον συμβολισμό του τελεστή υστερήσεως.

β) Είναι η διαδικασία στάσιμη;

γ) Είναι η διαδικασία αντιστρέψιμη;

δ) Να βρεθούν ο μέσος, η διακύμανση και οι αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2 και ρ_{22}.

ε) Να γίνει το διάγραμμα αυτοσυσχετίσεων.

Λύση

α) Η διαδικασία $Y_t = 4.8 + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$ είναι μια διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης 1, MA(1), και μπορεί να διατυπωθεί ως

$$Y_t = 4.8 + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} \quad \text{(Θέτω } y_t = Y_t - \mu\text{)}$$

$$y_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$$

$$y_t = (1 - 0.6\mathrm{L})\varepsilon_t$$

β) Για να είναι στάσιμη μια στοχαστική διαδικασία που έχει διατυπωθεί ως γραμμικό φίλτρο

$$Y_t - \mu = \varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{t-2} + \cdots$$

πρέπει να ισχύει $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$, όπου ψ_i οι συντελεστές στάθμισης.

Εφόσον η συνθήκη αυτή ικανοποιείται για την δοσμένη διαδικασία, άρα είναι στάσιμη.

γ) Μια MA(1) είναι αντιστρέψιμη αν μπορεί να διατυπωθεί ως μια AR(∞) διαδικασία. Για να συμβεί αυτό, πρέπει ο συντελεστής του ε_{t-1}, δηλαδή το θ_1 πρέπει να είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερος του 1.

Επειδή $\theta_1 = -0.6 < 1$, άρα η διαδικασία είναι αντιστρέψιμη.

Ως AR(∞) διαδικασία διατυπώνεται ως εξής:

Θέτω $y_t = Y_t - \mu$

$$y_t = \theta_1 y_{t-1} - {\theta_1}^2 y_{t-2} + {\theta_1}^3 y_{t-3} - \cdots + \varepsilon_t$$

$$y_t = -0.6 y_{t-1} - (-0.6)^2 y_{t-2} + (-0.6)^3 y_{t-3} - \cdots + \varepsilon_t$$

$$y_t = -0.6 y_{t-1} - 0.6^2 y_{t-2} - 0.6^3 y_{t-3} - \cdots + \varepsilon_t$$

δ) Μέσος: $\mu = EY_t = E(4.8 + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}) = 4.8$

Διακύμανση: $Var(Y_t) = (1 + \theta_1^2)\sigma^2 = 1.36$

Αυτοσυσχετίσεις:

$\hat{\rho}_1 = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = -0.44$

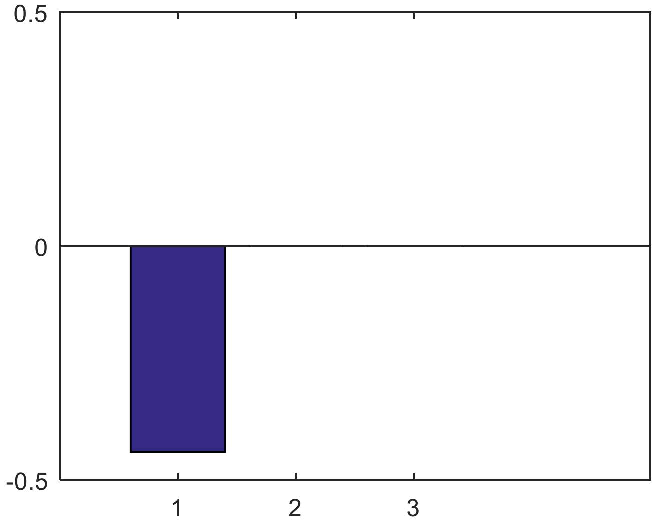
Οι υπόλοιπες αυτοσυσχετίσεις είναι μηδέν.

Μερικές αυτοσυσχετίσεις:

$\hat{\rho}_{11} = \hat{\rho}_1 = -0.44$

$$\hat{\rho}_{22} = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4} = -0.25$$

ε) Διάγραμμα αυτοσυσχέτισης



Άσκηση 2

Έστω η ακόλουθη στοχαστική διαδικασία $Y_t = -2 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$, όπου ε_t λευκός θόρυβος με διακύμανση 4.

α) Να διατυπωθεί με τον συμβολισμό του τελεστή υστερήσεως.

β) Είναι η διαδικασία στάσιμη;

γ) Είναι η διαδικασία αντιστρέψιμη;

δ) Να βρεθούν ο μέσος, η διακύμανση και οι αυτοσυσχετίσεις ρ_1, ρ_2 και ρ_{22}.

Λύση

α) Η στοχαστική διαδικασία $Y_t = -2 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$ μπορεί να διατυπωθεί με τον συμβολισμό του τελεστή υστερήσεως ως εξής:

$$Y_t = -2 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}\ (y_t = Y_t - \mu)$$

$$y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$$

$$y_t = (1 - 0.5\mathrm{L} + 0.2L^2)\varepsilon_t$$

β) Η διαδικασία είναι στάσιμη αφού το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης είναι μικρότερο του άπειρο ($\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$).

γ) Μια MA(2) διαδικασία είναι αντιστρέψιμη αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$1 - (-0.5)\lambda - 0.2\lambda^2 = 0$$

είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερες από την μονάδα.

$$1 + 0.5\lambda - 0.2\lambda^2 = 0$$

$$0.2\lambda^2 - 0.5\lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 1.05, \lambda = 20,5 \text{ ή } 4,5$$

Εφόσον οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι κατά απόλυτη τιμή μεγαλύτερες από την μονάδα, άρα η διαδικασία είναι αντιστρέψιμη.

δ) Μέσος: $\mathrm{E}Y_t = \mathrm{E}(-2 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}) = -2$

Διακύμανση: $\mathrm{Var}(Y_t) = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2 = 5.16$

Αυτοσυνδιακυμάνσεις: $\gamma_1 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-1}) = (\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma^2 = -2.4$

$\gamma_2 = \mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-2}) = \theta_2\sigma^2 = 0.8$

$\gamma_s = 0$ για $s > 2$

Αυτοσυσχετίσεις:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = 0.46$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = 0.16$$

$\rho_s = 0$ για $s > 2$

Μερικές αυτοσυσχετίσεις:

$$\hat{\rho}_{11} = \hat{\rho}_1 = 0.46$$

$$\hat{\rho}_{22} = \frac{\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2} = -0.05$$

$$\hat{\rho}_{33} = \frac{\hat{\rho}_1^3 - 2\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2 - \hat{\rho}_1\hat{\rho}_2^2}{1 - 2\hat{\rho}_1^2 - \hat{\rho}_2^2} = 0.47$$

Άσκηση 3

Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις που ισχύουν :

α) $\mathrm{E}(Y_t) = \mu$

β) $\mathrm{Var}(Y_t) = \gamma_0 = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2\right)\sigma^2$

γ) $\gamma_s = \begin{cases} \left(\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \theta_{s+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-s}\right)\sigma^2 & \text{για } s = 1, \dots, q \\ 0 & \text{για } s > q \end{cases}$

Λύση

Έστω μια διαδικασία κινούμενου μέσου τάξης q

$$\boxed{\Upsilon_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}}$$

όπου ε_t λευκός θόρυβος.

α) $\mathrm{E}(\Upsilon_t) = \mathrm{E}\left(\mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\right) = \mu$

β) $\mathrm{Var}(\Upsilon_t) = \gamma_0 = \mathrm{E}(\Upsilon_t - \mathrm{E}\Upsilon_t)^2 =$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q})^2 =$$

$$= \mathrm{E}[\varepsilon_t^2 + \theta_1^2\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \theta_q^2\varepsilon_{t-q}^2$$

$$+2\varepsilon_t\left(\theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\right) + \cdots + 2\varepsilon_{t-q-1}\varepsilon_{t-q}] =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t^2 + \theta_1^2\varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \theta_q^2\varepsilon_{t-q}^2) =$$ (οι υπόλοιποι όροι είναι μηδέν)

$$= \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 + \cdots + \theta_q^2\sigma^2 = (\theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$$

γ) $\gamma_s = Cov(\Upsilon_t, \Upsilon_{t-s}) = \mathrm{E}(\Upsilon_t - \mathrm{E}\Upsilon_t)(\Upsilon_{t-s} - \mathrm{E}\Upsilon_{t-s}) =$

$$= \mathrm{E}\left(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}\right)\left(\varepsilon_{t-s} + \theta_1\varepsilon_{t-1-s} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q-s}\right) =$$

$$= \mathrm{E}\varepsilon_t\left(\varepsilon_{t-s} + \theta_1\varepsilon_{t-s-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q-s}\right) +$$

$$\mathrm{E}\theta_1\varepsilon_{t-1}\left(\varepsilon_{t-s} + \theta_1\varepsilon_{t-1-s} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q-s}\right) + \cdots +$$

$$\mathrm{E}\theta_q\varepsilon_{t-q-s}\left(\varepsilon_{t-s} + \theta_1\varepsilon_{t-1-s} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q-s}\right)$$

Για $s = 1$:

$$\gamma_1 = \mathrm{E}\varepsilon_t\left(\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q-1}\right) +$$

$$\mathrm{E}\theta_1\varepsilon_{t-1}\left(\varepsilon_{t-s} + \theta_1\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q-1}\right) + \cdots +$$

$$\mathrm{E}\theta_q\varepsilon_{t-q-1}\left(\varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q-1}\right) =$$

$= \theta_1\mathrm{E}\varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1\theta_2\mathrm{E}\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-1}\mathrm{E}\varepsilon_{t-q}^2$ (οι υπόλοιποι όροι είναι μηδέν)

$= (\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-1})\sigma^2$ Ομοίως προκύπτει το γ_s για $s = 2, .., q$.

Άσκηση 4

Από 100 παρατηρήσεις μιας χρονικής σειράς βρήκαμε τις 10 πρώτες αυτοσυσχετίσεις και είναι: $\hat{\rho}_1$=0.61, $\hat{\rho}_2$=0.47, $\hat{\rho}_3$=-0.05, $\hat{\rho}_4$=0.06, $\hat{\rho}_5$=-0.21, $\hat{\rho}_6$=0.11, $\hat{\rho}_7$=0.08, $\hat{\rho}_8$=0.05, $\hat{\rho}_9$=0.12, $\hat{\rho}_{10}$=-0.01

Θέλουμε να εξετάσουμε από ποια διαδικασία προέκυψε.

Λύση

Πρέπει να ελέξγουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

Δηλαδή να βρούμε ποιες είναι οι σημαντικές αυτοσυσχετίσεις, δηλαδή ελέγχουμε την υπόθεση
H_0: $\rho_S = 0$, H_1: $\rho_S \neq 0$

Είναι: $\hat{\rho}_S$~$N(0, \frac{1}{T})$, δηλαδή η H_0 απορρίπτεται αν $|\hat{\rho}_S| > 2\frac{1}{\sqrt{\mathrm{T}}} = 0.2$

Εφόσον υπάρχουν μόνο δύο σημαντικές αυτοσυσχετίσεις (> 0.2), άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι προέρχεται από διαδικασία MA(2).

Άσκηση 5

Να ελέξγετε ως προς την στατικότητα την σειρά (MA(∞))

$$\Upsilon_t = \varepsilon_t + c(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots)$$

όπου c: σταθερά και ε_t λευκός θόρυβος με διακύμανση σ^2.

Λύση

Για να ελέξγουμε την στατικότητα (ή στασιμότητα) της παραπάνω διαδικασίας, πρέπει να ελέγξουμε αν είναι σταθερά τα παρακάτω:

- $\mathrm{E}\Upsilon_t = \mathrm{E}(\varepsilon_t + c(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots) = \mathrm{E}(\varepsilon_t) + \mathrm{cE}(\varepsilon_{t-1}) + \cdots = 0$
- $\mathrm{Var}(\Upsilon_t) = \mathrm{E}(\Upsilon_t - \mathrm{E}\Upsilon_t)^2 = \mathrm{E}(\Upsilon_t)^2 = \mathrm{E}(\Upsilon_t\Upsilon_t) =$

$$= E\big[\big(\varepsilon_t + c(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots)\big)\big(\varepsilon_t + c(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots)\big)\big]$$

$$= E(\varepsilon_t^2 + c^2\varepsilon_{t-1}^2 + c^2\varepsilon_{t-2}^2 + \cdots) = \sigma^2(1 + c^2 + c^2 + \cdots)$$

Μη πεπερασμένη διακύμανση, άρα η σειρά δεν είναι στάσιμη.

Άσκηση 6

Να ελέγξετε ως προς την στατικότητα την σειρά των πρώτων διαφορών της (MA(∞)): $\Upsilon_t = \varepsilon_t + c(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots)$

όπου c: σταθερά και ε_t λευκός θόρυβος με διακύμανση σ^2.

Λύση

Έστω η σειρά των πρώτων διαφορών:

$$
\begin{aligned}
X_t = \Upsilon_t - \Upsilon_{t-1} &= [\varepsilon_t + c(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots)] - [\varepsilon_{t-1} + c(\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + \cdots)] \\
&= (\varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + \cdots) - (\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3} + \cdots) \\
&= \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-1} = \varepsilon_t + (c-1)\varepsilon_{t-1}
\end{aligned}
$$

Η σειρά που προκύπτει $X_t = \varepsilon_t + (c-1)\varepsilon_{t-1}$ είναι μια MA(1) διαδικασία με $\theta_1 = c - 1$. Επομένως η X_t είναι στάσιμη, αφου το άθροισμα των συντελεστών στάθμισης είναι μικρότερο του άπειρο.

Βιβλιογραφία

1. Ε. Μπόρα – Σέντα, Χ. Μωυσιάδης. Εφαρμοσμένη στατιστική, Β’ έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.
2. Γ. Κ. Χρήστου. Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Β τόμος (Γ’ έκδοση), Εκδόσεις Gutenberg, 2007.
3. Δ. Κουγιουμτζής. Σημειώσεις μαθήματος Χρονοσειρών. Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, ΑΠΘ.
4. Γ.Ε. Κοκολάκης. Σημειώσεις ανάλυσης Χρονοσειρών. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών, Αθήνα.