Χρονικές σειρές

$5^{ο}$ μάθημα: Γραμμικά στοχαστικά μοντέλα
(1) Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα

Εαρινό εξάμηνο 2018-2019
Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διδάσκουσα: **Αγγελική Παπάνα**

Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια

Πολυτεχνική σχολή, Α.Π.Θ. & Οικονομικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

http://users.auth.gr/~agpapana/

Υπενθύμιση: Θεώρημα διαχωρισμού του Wold

Κάθε στάσιμη στοχαστική διαδικασία γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός μιας ακολουθίας άπειρων ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών ως:

$$\boxed{Y_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots}$$

Σημειώνεται ότι στη μελέτη γραμμικών χρονοσειρών, μας ενδιαφέρουν οι (γραμμικές) συσχετίσεις και όχι η εξάρτηση, που είναι ισχυρότερη έννοια και εμπλέκει ενδεχομένως και μη γραμμικότητα. Για αυτό οι τυχαίες μεταβλητές ε_t δεν χρειάζεται να είναι iid αλλά απλά λευκός θόρυβος.

Για να είναι η χρονοσειρά **στάσιμη**, θα πρέπει το άθροισμα των συντελεστών Ψ_i να μην απειρίζεται, δηλαδή

$$\boxed{\sum |\Psi_i| < \infty}$$

Η στοχαστική διαδικασία

$$\boxed{\Upsilon_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots}$$

γράφεται με την χρήση τελεστών, ως

$$\boxed{(1 - \Psi_1 L - \Psi_2 \mathrm{L}^2 - \cdots)\mathrm{y}_t = \varepsilon_t}$$

όπου $\mathrm{y}_t = \Upsilon_t - \mu$

$$\boxed{\Psi(\mathrm{L})\mathrm{y}_t = \varepsilon_t, \Psi(\mathrm{L}) = \sum \Psi_i L^i}$$

Ο τελεστής του πολυωνύμου $\Psi(\mathrm{L})$ μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικό φίλτρο με είσοδο το λευκό θόρυβο και έξοδο τη γραμμική χρονοσειρά.

Για τα γραμμικά φίλτρα είναι γνωστό ότι αν η είσοδος είναι στάσιμη χρονοσειρά, τότε και η έξοδος είναι στάσιμη. Η έκφραση αυτή της χρονοσειράς είναι αυτή της **διαδικασίας κινητού μέσου** άπειρης τάξης.

Η τυχαία μεταβλητή της γραμμικής χρονοσειράς για κάθε χρόνο t μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων τυχαίων μεταβλητών της χρονοσειράς

$$\boxed{y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t}$$

και η έκφραση αυτή είναι της αυτοπαλινδρομούμενης διαδικασίας άπειρης τάξης.

Η συνθήκη $\boxed{\sum |\alpha_i| < \infty}$ επιτρέπει η ε_t να μπορεί να εκφραστεί ως (άπειρο) άθροισμα της παρούσας τυχαίας μεταβλητής και προηγούμενων τυχαίων μεταβλητών της χρονοσειράς. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αντιστρεψιμότητα** (reversibility) και δηλώνει την ισοδυναμία των δύο εκφράσεων της γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας, ως **αυτοπαλινδρομούμενης διαδικασίας** και ως **διαδικασίας κινητού μέσου**.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

(1) ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο τάξης p (autoregressive model of order p) ή AR(p) διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\Upsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \cdots + \alpha_p \Upsilon_{t-p} + \varepsilon_t}$$

Η τάξης p αναφέρεται στο μήκος της υστέρησης, ενώ ο όρος αυτοπαλίνδρομο προέρχεται από το γεγονός ότι η παραπάνω σχέση είναι στην ουσία ένα μοντέλο παλινδρόμησης, όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές ή παλινδρομητές (regressors) είναι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Υ_t με χρονική υστέρηση.

Η μεταβλητή ε_t είναι λευκός θόρυβος, δηλ.:

$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$

$\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$

$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0$

ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΑ ΜΟΝΤΕΛΑ πρώτης τάξης AR(1)

Ένα αυτοπαλίνδρομο μοντέλο 1ης τάξης διατυπώνεται ως εξής:

$$\boxed{\Upsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t}$$

Όπως είπαμε, κάθε στάσιμη στοχαστική διαδικασία γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός μιας ακολουθίας ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών ως:

$$\boxed{\Upsilon_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots}$$

Αν θέσουμε $\Psi_i = a^i$, τότε προκύπτει το μοντέλο AR(1) ως εξής:

$$\Upsilon_t - \mu = \varepsilon_t + a\varepsilon_{t-1} + a^2\varepsilon_{t-2} + \cdots$$

$$\Upsilon_t - \mu = \varepsilon_t + a(\varepsilon_{t-1} + a\varepsilon_{t-2} + \cdots)$$

$$\Upsilon_t - \mu = \varepsilon_t + a(\Upsilon_{t-1} - \mu)$$

$$\Upsilon_t - \mu = \varepsilon_t + a\Upsilon_{t-1} - a\mu$$

$$\Upsilon_t = \mu - a\mu + a\Upsilon_{t-1}\varepsilon_t$$

$$\boxed{\Upsilon_t = \mu(1 - \alpha) + \alpha\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t}$$

Χάριν ευκολίας, υποθέτουμε ότι ο μέσος της χρονοσειράς είναι **μηδέν** ($\mu = 0$) ή ότι οι μεταβλητές εκφράζονται ως αποκλίσεις από τους μέσους, οπότε η σχέση

$$\boxed{\Upsilon_t = \mu(1-\alpha) + \alpha\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t}$$

γράφεται:

$$\boxed{y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t}$$

όπου $y_t = \Upsilon_t - \mathrm{E}\Upsilon_t = \Upsilon_t - \mu$.

Όπως είδαμε και προηγουμένως

$$\alpha_0 = (1-\alpha_1)\mu$$

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$$

Για το γραμμικό αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο AR(1), με εξίσωση

$$\boxed{y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t}$$

ισχύουν τα εξής:

- $\gamma_0 = \mathrm{Var}(y_t) = \sigma^2 \frac{1}{1-\alpha_1^2}$
- $\gamma_s = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-s}) = \alpha_1^s \gamma_0$
- $\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \alpha_1^s$

- $\boxed{\gamma_0 = \mathrm{Var}(\mathrm{y}_t) = \sigma^2 \frac{1}{1-\alpha_1^2}}$

Απόδειξη

$\mathrm{y}_t = \alpha_1 \mathrm{y}_{t-1} + \varepsilon_t$ Υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη και παίρνουμε τις προσδοκώμενες τιμές

$\mathrm{E}y_t^2 = a_1^2 E y_{t-1}^2 + 2\alpha_1 E\mathrm{y}_{t-1}\varepsilon_t + E\varepsilon_t^2$

- $E\mathrm{y}_{t-1}\varepsilon_t = 0$, αφού το y_{t-1} εξαρτάται μόνο από το ε_{t-1} που είναι λευκός θόρυβος και
- $\mathrm{E}y_t^2 = \mathrm{E}y_{t-1}^2 = \mathrm{Var}(\mathrm{y}_t)$ αφού y_t στάσιμη

$\mathrm{Var}(\mathrm{y}_t) = a_1^2 \mathrm{Var}(\mathrm{y}_t) + \sigma^2$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{y}_t) = \sigma^2 \frac{1}{1-\alpha_1^2}$$

- $\boxed{\gamma_s = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-s}) = \alpha_1^s \gamma_0}$

<u>Απόδειξη</u>

$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί y_{t-s} και παίρνουμε τις προσδοκώμενες τιμές

$\mathrm{E}y_t y_{t-s} = \alpha_1 E y_{t-1} y_{t-s} + E\varepsilon_t y_{t-s}$ $(E(\varepsilon_t y_{t-s}) = 0)$

$\gamma_s = \alpha_1 \gamma_{s-1}$ για $s > 0$

Οπότε $\gamma_1 = \alpha_1 \gamma_0$

$\gamma_2 = \alpha_1 \gamma_1 = a_1^2 \gamma_0$

$\gamma_3 = \alpha_1 \gamma_2 = a_1^3 \gamma_0$ κ.ο.κ και άρα

$\gamma_s = a_1^s \gamma_0$

- $\boxed{\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \alpha_1^s}$

<u>Απόδειξη</u>

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \frac{\alpha_1^s \gamma_0}{\gamma_0} = \alpha_1^s$$

Στασιμότητα

Για να είναι στάσιμο το γραμμικό αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο AR(1), πρέπει:

$$\boxed{|\alpha_1| < 1}$$

Για $\alpha_1 > 0$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, αρχίζοντας από την μονάδα $(\rho_0 = 1)$, φθίνει γεωμετρικά και τείνει προς το μηδέν καθώς η υστέρηση s αυξάνει.

Για $\alpha_1 < 0$, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, αρχίζοντας από την μονάδα $(\rho_0 = 1)$, πάλι φθίνει γεωμετρικά και τείνει προς το μηδέν, αλλά με εναλλασσόμενο πρόσημο.

Παρατηρήσεις

- Για $\boxed{|\alpha_1| = 1}$, η διαδικασία είναι αυτή του τυχαίου περιπάτου.
- Η ε_t δεν συσχετίζεται με οποιοδήποτε y_s με $s < t$.

Συμβολισμός με τελεστή υστέρησης

Με τον συμβολισμό του τελεστή υστερήσεως L (ή B ανάλογα με την βιβλιογραφία), το AR(1), γράφεται:

$$\mathrm{y}_t = \alpha_1 \mathrm{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\mathrm{y}_t = \alpha_1 \mathrm{L} \mathrm{y}_t + \varepsilon_t$$

$$\mathrm{y}_t - \alpha_1 \mathrm{L} \mathrm{y}_t = \varepsilon_t$$

$$(1 - \alpha_1 \mathrm{L}) \mathrm{y}_t = \varepsilon_t$$

$$\mathrm{A(L)} = \varepsilon_t$$

Διατύπωση του στάσιμου μοντέλου AR(1) ως γραμμικού φίλτρου

Η διατύπωση του AR(1),

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ως γραμμικού φίλτρου, δηλαδή ως σειρά άπειρων όρων

$$\boxed{y_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots}$$

(το οποίο είναι μια **διαδικασία κινητού μέσου**), είναι δυνατή μόνο αν η σειρά είναι **στάσιμη**, δηλαδή αν

$$\boxed{|\alpha_1| < 1}$$

Πράγματι:

Για $\boxed{|\alpha_1| < 1}$ η σχέση $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ γράφεται με διαδοχικές αντικαταστάσεις ως εξής:

$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

$y_t = \alpha_1(\alpha_1 y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$

$y_t = \alpha_1^2 y_{t-2} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

$y_t = \alpha_1^2(\alpha_1 y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

$y_t = \alpha_1^3 y_{t-3} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

$y_t = \alpha_1^3(\alpha_1 y_{t-4} + \varepsilon_{t-3}) + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ κ.ο.κ

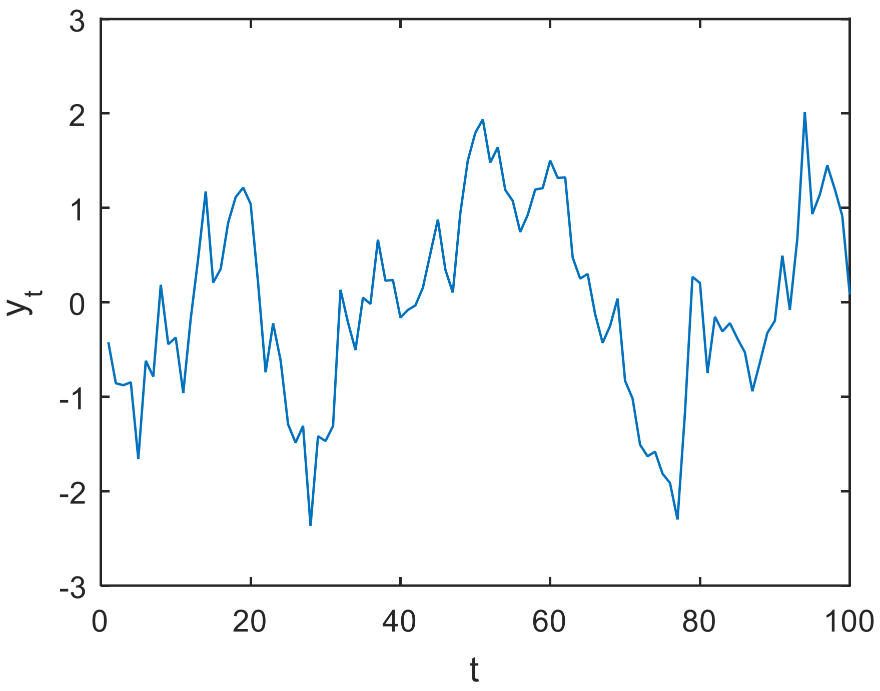
Συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε να παραστήσουμε την y_t ως σειρά άπειρων όρων:

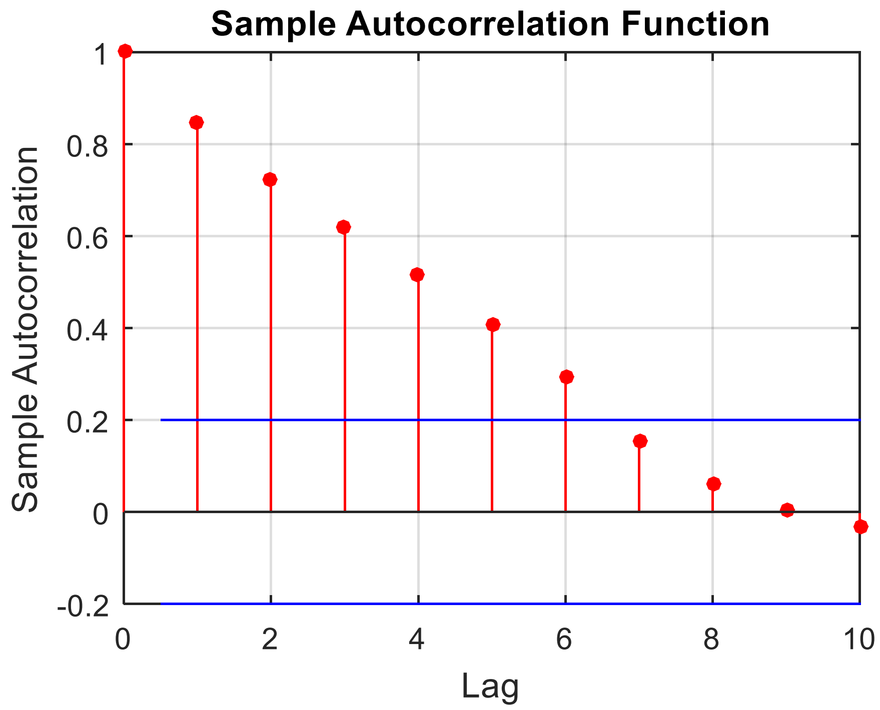
$y_t = \varepsilon_t + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$ ή με την βοήθεια τελεστών ως

$y_t = (1 + \alpha_1 \mathrm{L} + \alpha_1^2 L^2 + \cdots)\varepsilon_t$

Παράδειγμα

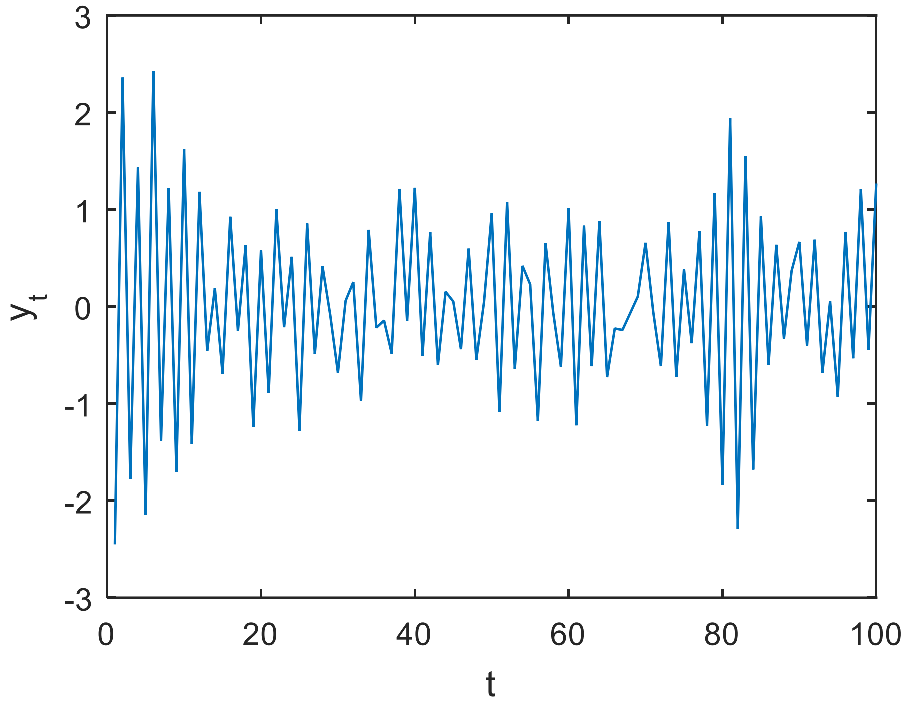
Έστω το μοντέλο AR(1) με εξίσωση $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, όπου $\alpha_1 = 0.8$.
Η γραφική παράσταση μιας πραγματοποίησης και της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης δίνονται παρακάτω.

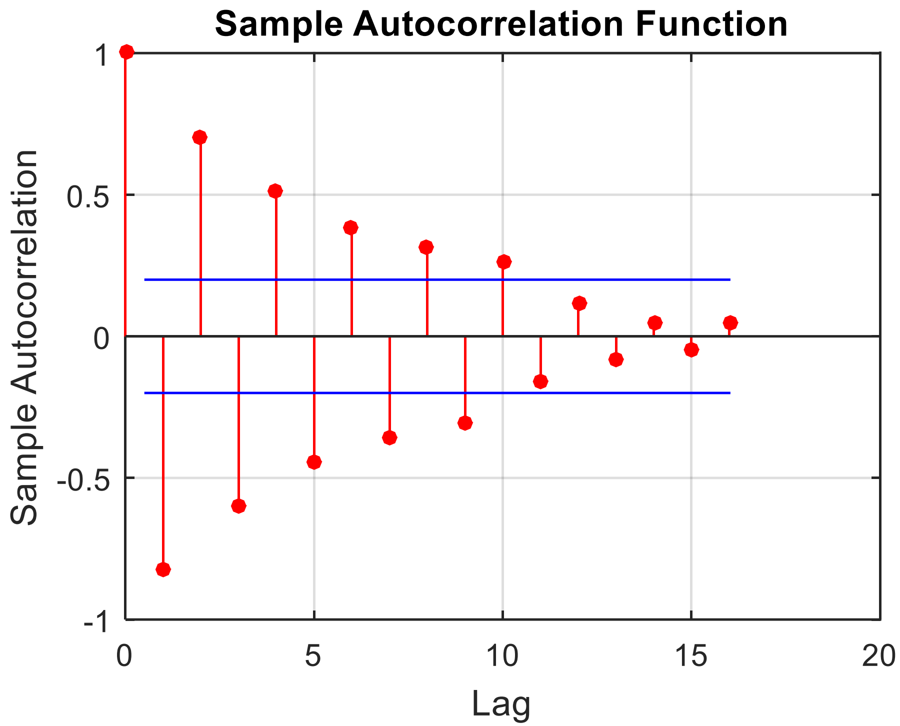




Παράδειγμα

Έστω το μοντέλο AR(1) με εξίσωση $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, όπου $\alpha_1 = -0.8$.
Η γραφική παράσταση μιας πραγματοποίησης και της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης δίνονται παρακάτω.





Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα δεύτερης τάξης AR(2)

Η γενική μορφή ενός μοντέλου AR(2) είναι:

$$\boxed{\Upsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \alpha_2 \Upsilon_{t-2} + \varepsilon_t}$$

ή

$$\boxed{\mathrm{y}_t = \alpha_1 \mathrm{y}_{t-1} + \alpha_2 \mathrm{y}_{t-2} + \varepsilon_t}$$

Με τον συμβολισμό του τελεστή υστέρησης L, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\boxed{\mathrm{A(L)y}_t = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)\mathrm{y}_t = \varepsilon_t}$$

Ισχύουν τα παρακάτω:

- $\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}$
- $\gamma_0 = Var(\mathrm{Y}_t) = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2$
- $\gamma_s = Cov(\mathrm{Y}_t, \mathrm{Y}_{t-s}) = \alpha_1\gamma_{s-1} + \alpha_2\gamma_{s-2}$ για $s > 0$
- $\rho_s = \alpha_1\rho_{s-1} + \alpha_2\rho_{s-2}$ για $s > 0$

- $\boxed{\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}}$

Απόδειξη

$\Upsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \alpha_2 \Upsilon_{t-2} + \varepsilon_t$ Παίρνουμε τις προσδοκώμενες τιμές

$\mathrm{E}(\Upsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{E}(\Upsilon_{t-1}) + \alpha_2 \mathrm{E}(\Upsilon_{t-2}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t)$ $(\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0)$

$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu$

$$\mu = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \alpha_2}$$

- $\boxed{\gamma_0 = Var(\mathrm{Y}_t) = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2}$

<u>Απόδειξη</u>

$\mathrm{y}_t = \alpha_1 \mathrm{y}_{t-1} + \alpha_2 \mathrm{y}_{t-2} + \varepsilon_t$ Πολλαπλασιάζουμε με y_t

$y_t^2 = \alpha_1 \mathrm{y}_t \mathrm{y}_{t-1} + \alpha_2 \mathrm{y}_t \mathrm{y}_{t-2} + \mathrm{y}_t \varepsilon_t$ Παίρνουμε τις προσδοκώμενες τιμές

$E(y_t^2) = \alpha_1 E(\mathrm{y}_t \mathrm{y}_{t-1}) + \alpha_2 E(\mathrm{y}_t \mathrm{y}_{t-2}) + E(\mathrm{y}_t \varepsilon_t)$

$Var(\mathrm{Y}_t) = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \sigma^2$ διότι

$$
\begin{aligned}
E(\mathrm{y}_t\varepsilon_t) &= \mathrm{E}[(\alpha_1 \mathrm{y}_{t-1} + \alpha_2 \mathrm{y}_{t-2} + \varepsilon_t)\varepsilon_t] \\
&= \mathrm{E}(\alpha_1 \mathrm{y}_{t-1}\varepsilon_t + \alpha_2 \mathrm{y}_{t-2}\varepsilon_t + \varepsilon_t^2) \\
&= \alpha_1 \mathrm{E}(\mathrm{y}_{t-1}\varepsilon_t) + \alpha_2 \mathrm{E}(\mathrm{y}_{t-2}\varepsilon_t) + \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

- $\boxed{\gamma_s = Cov(Y_t, Y_{t-s}) = \alpha_1\gamma_{s-1} + \alpha_2\gamma_{s-2} \text{ για } s > 0}$

Απόδειξη

$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ Πολλαπλασιάζουμε με y_{t-s}

$y_t y_{t-s} = \alpha_1 y_{t-1} y_{t-s} + \alpha_2 y_{t-2} y_{t-s} + y_{t-s}\varepsilon_t$ Παίρνουμε τις προσδοκώμενες τιμές

$E(y_t y_{t-s}) = \alpha_1 E(y_{t-1} y_{t-s}) + \alpha_2 E(y_{t-2} y_{t-s}) + E(y_{t-s}\varepsilon_t)$

$Cov(Y_t, Y_{t-s}) = \alpha_1\gamma_{s-1} + \alpha_2\gamma_{s-2}$ $(E(y_{t-s}\varepsilon_t) = 0)$

- $\boxed{\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} \text{ για } s > 0}$

<u>Απόδειξη</u>

Δείξαμε ότι

$\gamma_s = Cov(Y_t, Y_{t-s}) = \alpha_1 \gamma_{s-1} + \alpha_2 \gamma_{s-2}$ Διαιρούμε με γ_0

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_0} = \alpha_1 \frac{\gamma_{s-1}}{\gamma_0} + \alpha_2 \frac{\gamma_{s-2}}{\gamma_0}$$

$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2}$$

<u>Στασιμότητα</u>

Η σειρά είναι **στάσιμη** αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\mathrm{A(L)} = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2$ είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου, και επομένως αν ισχύουν οι συνθήκες:

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 < 1} \qquad \boxed{-\alpha_1 + \alpha_2 < 1} \qquad \boxed{-1 < \alpha_2 < 1}$$

Συμπερασματικά, η σειρά είναι **στάσιμη** αν η διακύμανση γ_0 είναι θετικός σταθερός αριθμός, το οποίο συμβαίνει μόνο αν ισχύει η σχέση:

$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} \qquad \rightarrow \rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 \qquad (\rho_0 = 1, \rho_{-1} = \rho_1)$$

$$\rightarrow \rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2$$

Οι εξισώσεις αυτές

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 \\ \rho_2 &= \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 \end{aligned}}$$

είναι γνωστές ως **εξισώσεις Yule-Walker** και συνιστούν σύστημα δύο εξισώσεων από την λύση του οποίου προκύπτουν οι τιμές για τις δύο αυτοσυσχετίσεις, εφόσον είναι γνωστές οι τιμές των συντελεστών α_1, α_2.

Συγκεκριμένα:

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}} \qquad \boxed{\rho_2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_2}}$$

Εναλλακτικά, αν είναι γνωστές οι αυτοσυσχετίσεις, μπορούμε να βρούμε τιμές των συντελεστών.

Η αυτοσυσχέτιση μιας AR(2) διαδικασίας τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται η υστέρηση s.

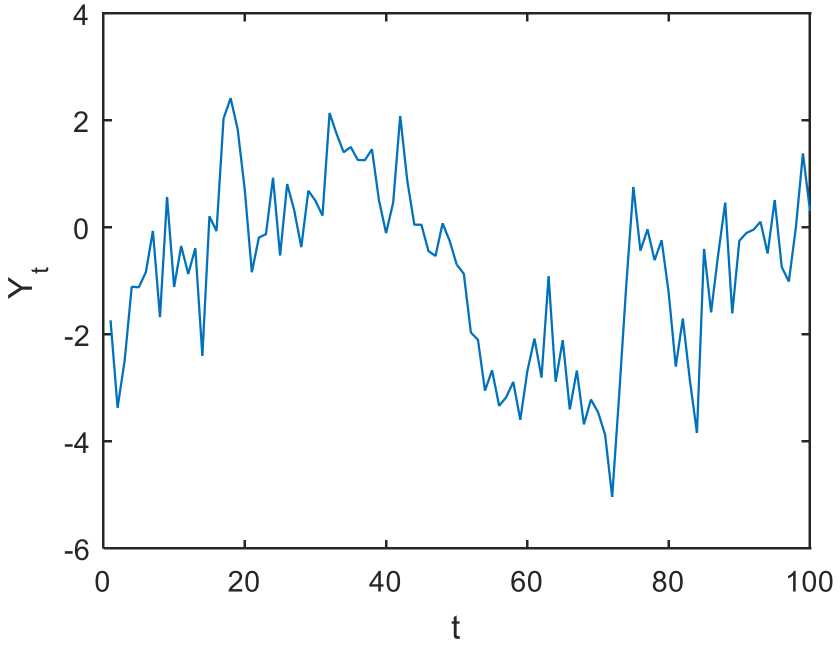
Οι αυτοσυσχετίσεις για $s > 2$ υπολογίζονται από την σχέση

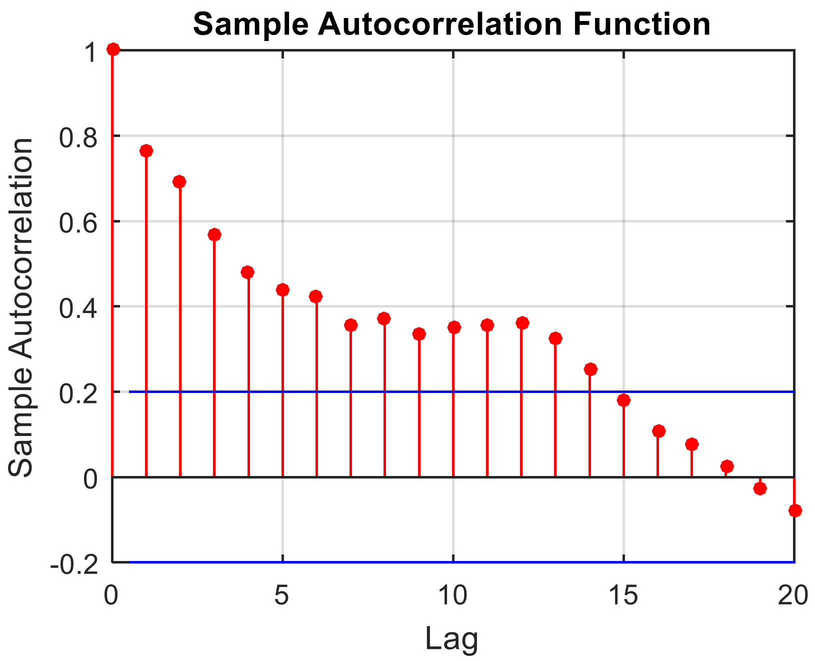
$$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2}$$

αφού προηγουμένως έχουν υπολογιστεί τα ρ_1, ρ_2.

Παράδειγμα

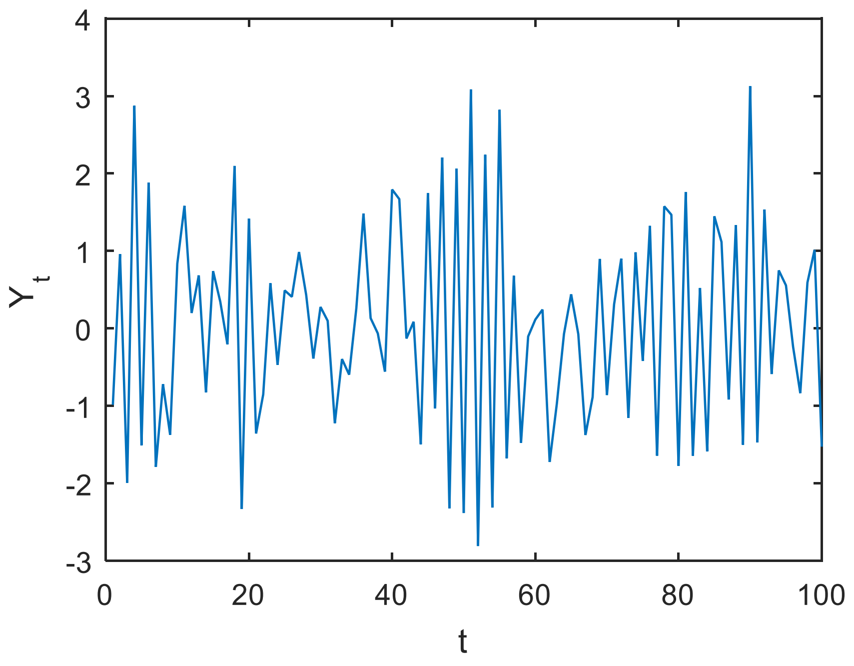
Έστω το μοντέλο AR(2) με εξίσωση $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$, όπου $\alpha_1 = 0.5$ και $\alpha_2 = 0.3$. Η γραφική παράσταση μιας πραγματοποίησης και της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης δίνονται παρακάτω.

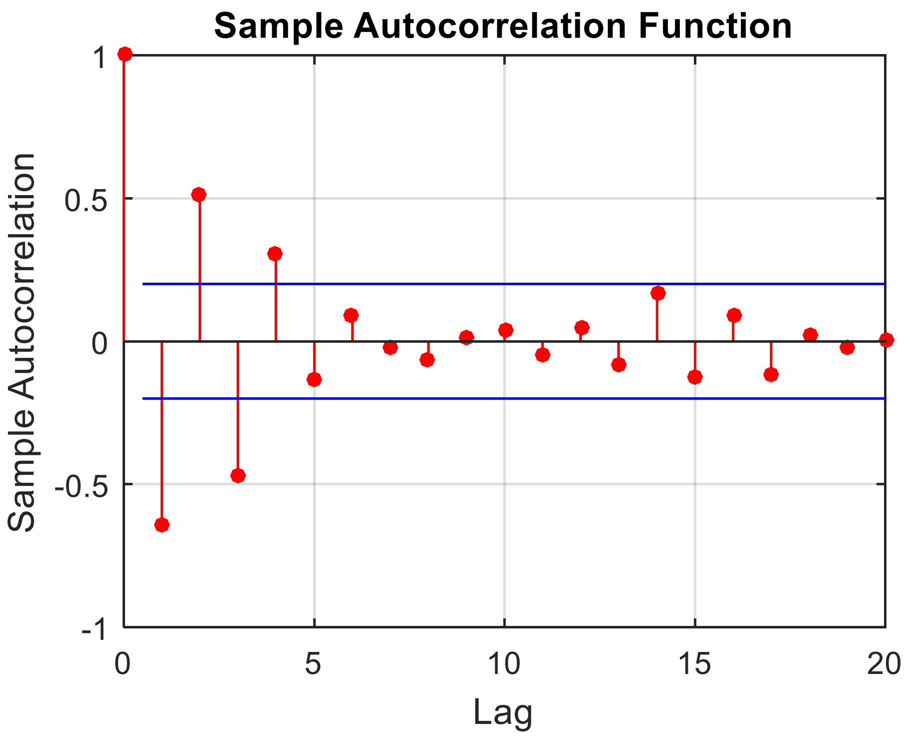




Παράδειγμα

Έστω το μοντέλο AR(2) με εξίσωση $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$, όπου $\alpha_1 = -0.5$ και $\alpha_2 = 0.3$. Η γραφική παράσταση μιας πραγματοποίησης και της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης δίνονται παρακάτω.





Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα p τάξης AR(p)

Η γενική μορφή ενός μοντέλου AR(p) είναι:

$$\boxed{\Upsilon_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Upsilon_{t-1} + \cdots + \alpha_p \Upsilon_{t-p} + \varepsilon_t}$$

ή

$$\boxed{y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t}$$

Με τον συμβολισμό του τελεστή υστέρησης L, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\boxed{\mathrm{A(L)}y_t = \left(1 - \alpha_1 L - \cdots - \alpha_p L^p\right) y_t = \varepsilon_t}$$

Ο μέσος μ των Y_t δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\cdots-\alpha_p}}$$

Για το AR(p) ισχύουν τα εξής:

- $\gamma_0 = \sigma^2 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \cdots + \alpha_p\gamma_p$
- $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1\rho_1-\cdots-\alpha_p\rho_\pi}$
- $\gamma_s = \alpha_1\gamma_{s-1} + \alpha_2\gamma_{s-2} + \cdots + \alpha_p\gamma_{s-p}$ για $s > 0$
- $\rho_s = \alpha_1\rho_{s-1} + \alpha_2\rho_{s-2} + \cdots + \alpha_p\rho_{s-p}$ για $s > 0$

Από την σχέση

$$\boxed{\rho_s = \alpha_1\rho_{s-1} + \alpha_2\rho_{s-2} + \cdots + \alpha_p\rho_{s-p} \text{ για } s > 0}$$

προκύπτουν οι p Yule-Walker εξισώσεις:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 + \alpha_3\rho_2 \ldots + \alpha_p\rho_{p-1} \\ \rho_2 = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 + \alpha_3\rho_1 \ldots + \alpha_p\rho_{p-2} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \\ \rho_p = \alpha_1\rho_{p-1} + \alpha_2\rho_{p-2} + \alpha_3\rho_{p-3} + \cdots + \alpha_p \end{array}}$$

Οι εξισώσεις αυτές σχηματίζουν ένα σύστημα p εξισώσεων, από την λύση του οποίου προκύπτουν οι τιμές για τις αυτοσυσχετίσεις, αν είναι γνωστές οι τιμές των συντελεστών αυτοπαλινδρομήσεως $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$

Με τον συμβολισμό πινάκων, το παραπάνω σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\boxed{\mathbf{R} = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{A}}$$

όπου:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho_1} \\ \boldsymbol{\rho_2} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\rho_p} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \cdots \\ \boldsymbol{a_p} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\rho_1} & \cdots & \boldsymbol{\rho_{p-1}} \\ \boldsymbol{\rho_1} & \mathbf{1} & \cdots & \boldsymbol{\rho_{p-2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{\rho_{p-1}} & \boldsymbol{\rho_{p-2}} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Αν οι αυτοσυσχετίσεις είναι γνωστές, τότε οι συντελεστές αυτοπαλινδρομήσεως δίνονται από την σχέση

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Pi}^{-1}\mathbf{R}$$

Στασιμότητα

Η διαδικασία AR(p) είναι στάσιμη αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\boxed{\mathrm{A(L)} = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \cdots - \alpha_p L^p}$$

είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου ή αντίστοιχα αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\boxed{\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \alpha_{p-1}\lambda - \alpha_p = 0}$$

είναι όλες μικρότερες της μονάδας κατά απόλυτη τιμή.

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης καθορίζουν την μορφή της αυτοσυσχέτισης και κατά επέκταση την στοχαστική διαδικασία AR(p).

Υπάρχουν οι περιπτώσεις:

- Κάποιες ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης να είναι μεγαλύτερες της μονάδας κατά απόλυτη τιμή. Η AR(p) είναι ασταθής και η χρονοσειρά που παράγεται είναι εκρηκτικά μη στάσιμη, δηλαδή αυξάνει σε μέγεθος και τείνει στο άπειρο.
- Η μεγαλύτερη χαρακτηριστική ρίζα να είναι ίση με την μονάδα. Η χρονοσειρά που παράγεται είναι μη στάσιμη, αλλά έχει ένα ιδιαίτερο τύπο μη στασιμότητας που λέγεται μη στασιμότητα μοναδιαίας ρίζας. Για τάξη 1, έχουμε τον τυχαίο περίπατο. Τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές γιατί εξηγούν χρονοσειρές που δεν έχουν σταθερή μέση τιμή. Παίρνοντας τις πρώτες διαφορές, η μοναδιαία ρίζα απαλείφεται.
- Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μικρότερες της μονάδας, και η χρονοσειρά που παράγεται είναι στάσιμη.

Μερική αυτοσυσχέτιση

Όλες οι αυτοπαλίνδρομες διαδικασίες έχουν συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης, οι οποίες είναι φθίνουσες καθώς αυξάνει η υστέρηση s, με συνέπεια να είναι πολλές φορές δύσκολο να καθοριστεί η τάξη του μοντέλου που περιγράφει την χρονική σειρά, με βάση την συνάρτηση αυτοσυσχετίσεως.

Ως ένα πρόσθετο κριτήριο για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται η **συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης** (partial autocorrelation function).

Η μερική αυτοσυσχέτιση ανάμεσα στην Υ_t και την Υ_{t-s} αναφέρεται στη συσχέτιση ανάμεσα στην Υ_t και στην Υ_{t-s} όταν έχουν αφαιρεθεί οι γραμμικές επιδράσεις των ενδιάμεσων μεταβλητών $\Upsilon_{t-1}, \Upsilon_{t-2}, \ldots, \Upsilon_{t-(s-1)}$.

Αν παραστήσουμε με ρ_{ss} το συντελεστή μερικής αυτοσυσχέτισης s τάξεως, δηλαδή τον συντελεστή μερικής αυτοσυσχέτισης ανάμεσα στην Υ_t και την Υ_{t-s}, για $s = 1,2, \ldots$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό του, τότε το ρ_{ss} είναι ο μερικός συντελεστής παλινδρομήσεως στο μοντέλο:

$$\boxed{y_t = \rho_{1s} y_{t-1} + \rho_{2s} y_{t-2} + \rho_{3s} y_{t-3} + \cdots + \rho_{ss} y_{t-s} + \varepsilon_t}$$

Ο μερικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης πρώτης τάξης ρ_{11} συμπίπτει με τον συντελεστή αυτοπαλινδρομήσεως ρ_1:

$$\boxed{\rho_{11} = \rho_1}$$

Ο μερικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης δεύτερης τάξης ρ_{22} προκύπτει από την παλινδρόμηση:

$$\boxed{y_t = \rho_{12} y_{t-1} + \rho_{22} y_{t-2} + \varepsilon_t}$$

Ο μερικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης τρίτης τάξης ρ_{33} προκύπτει από την παλινδρόμηση:

$$\boxed{y_t = \rho_{13} y_{t-1} + \rho_{23} y_{t-2} + \rho_{33} y_{t-3} + \varepsilon_t}$$

κ.ο.κ.

Με άλλα λόγια, οι μερικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_{11}, ρ_{22},…ρ_{ss} προκύπτουν από διαδοχικές παλινδρομήσεις ανάμεσα στην y_t και την y_{t-s} για $s = 1,2,..$, δηλαδή αρχίζοντας με y_{t-1} και προσθέτοντας κάθε φορά μια υστέρηση.

Οι μερικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_{ss} μπορούν να εκφραστούν ως συνάρτηση των συντελεστών αυτοσυσχέτισης ρ_s, με βάση τις εξισώσεις Yule-Walker, όπου αντικαθιστούμε τους συντελεστές αυτοπαλινδρομήσεως $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ με τους μερικούς συντελεστές παλινδρομήσεως της σχέσης

$$\boxed{y_t = \rho_{1s} y_{t-1} + \rho_{2s} y_{t-2} + \rho_{3s} y_{t-3} + \cdots + \rho_{ss} y_{t-s} + \varepsilon_t}$$

δηλαδή ρ_{1s}, ρ_{2s},…ρ_{ss}, οπότε έχουμε τη σχέση

$$\boxed{\rho_s = \rho_{1s}\rho_{s-1} + \rho_{2s}\rho_{s-2} + \rho_{3s}\rho_{s-3} + \cdots + \rho_{ss}\rho_{s-p}, \quad s = 1,2..,p}$$

Οι μερικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_{ss} προκύπτουν από την λύση του παραπάνω συστήματος p εξισώσεων.

Έστω $\mathbf{R}_{ss}$ το διάνυσμα των μερικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης ρ_{ss}, δηλαδή $\mathbf{R}_{ss} = (\rho_{11}, \rho_{22},\ldots\rho_{ss})'$.

Είναι

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{\Pi}\mathbf{R}_{ss}}$$

και

$$\boxed{\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{R}}$$

Οι μερικοί συντελεστές αυτοσυσχέτισης υπολογίζονται με τον κανόνα Cramer ως εξής:

$$\boxed{\rho_{11} = \rho_1}$$

$$\boxed{\rho_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}}$$

$$\rho_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

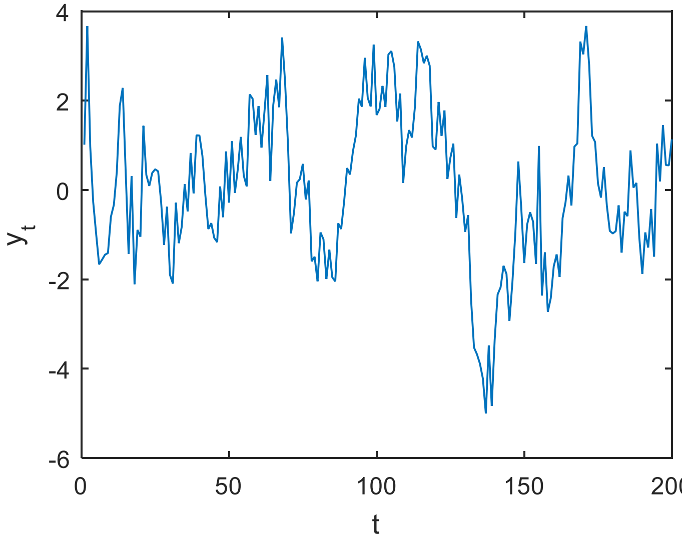
κ.ο.κ

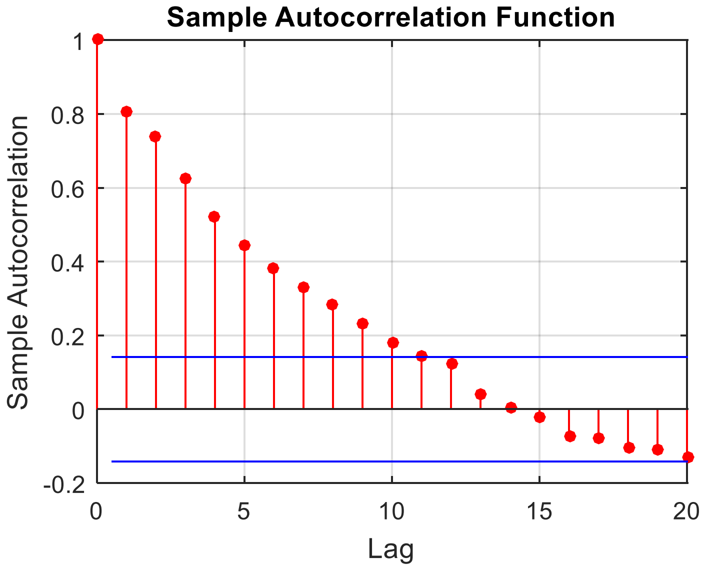
$$\rho_{ss} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & .. & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & .. & \rho_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ \rho_{s-1} & \rho_{s-2} & .. & \rho_s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & .. & \rho_{s-1} \\ \rho_1 & 1 & .. & \rho_{s-2} \\ .. & .. & .. & .. \\ \rho_{s-1} & \rho_{s-2} & .. & 1 \end{vmatrix}}$$

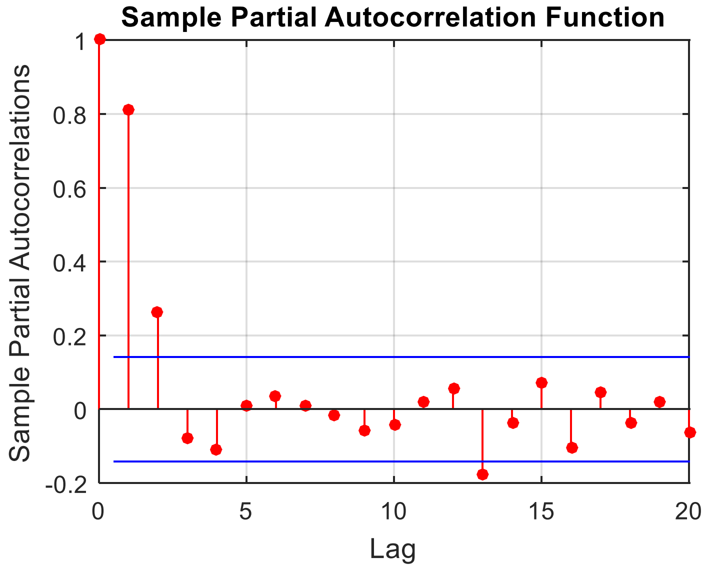
Οι συντελεστές ρ_{ss} για διάφορες τιμές του s είναι η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης.

Παράδειγμα

Έστω το μοντέλο AR(2) με εξίσωση $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_t$, όπου $\alpha_1 = 0.5$ και $\alpha_2 = 0.3$. Η γραφική παράσταση μιας πραγματοποίησης, η συνάρτηση αυτοσυσχέτιση και η συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης.







Συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης στο MATLAB: parcorr.m

Βιβλιογραφία

1. Ε. Μπόρα – Σέντα, Χ. Μωυσιάδης. Εφαρμοσμένη στατιστική, Β’ έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.
2. Γ. Κ. Χρήστου. Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Β τόμος (Γ’ έκδοση), Εκδόσεις Gutenberg, 2007.
3. Δ. Κουγιουμτζής. Σημειώσεις μαθήματος Χρονοσειρών. Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, ΑΠΘ.
4. Γ.Ε. Κοκολάκης. Σημειώσεις ανάλυσης Χρονοσειρών. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών, Αθήνα.