Χρονικές σειρές

$3^{ο}$ μάθημα: Βασικές στοχαστικές διαδικασίες
Μη στάσιμες χρονοσειρές

Εαρινό εξάμηνο 2018-2019
Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διδάσκουσα: **Αγγελική Παπάνα**

Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια

Πολυτεχνική σχολή, Α.Π.Θ. & Οικονομικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

http://users.auth.gr/~agpapana/

Άσκηση 1

α) Έστω η στοχαστική διαδικασία $\Upsilon_t = \varepsilon_t, t = 1, \dots, T$, όπου για το ε_t ισχύει:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} +1\ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu o\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \\ -1\ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu o\tau\eta\tau\alpha\ \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Να βρεθούν ο μέσος, η διακύμανση και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις.

Είναι η διαδικασία στάσιμη;

Λύση

Είναι:

- $E(\Upsilon_t) = \sum_{t=1}^{T} \Upsilon_t f(\Upsilon_t) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$
- $Var(\Upsilon_t) = \sum_{t=1}^{T} \left(\Upsilon_t - E(\Upsilon_t)\right)^2 f(\Upsilon_t) = (1-0)^2 \times \frac{1}{2} + (-1-0)^2 \times \frac{1}{2} = 1$
- $Cov(Y_t, Y_{t+s}) = E\left(\Upsilon_t - E(\Upsilon_t)\right)\left(\Upsilon_{t+s} - E(\Upsilon_{t+s})\right) = E(\Upsilon_t \Upsilon_{t+s}) =$

  $= E\Upsilon_t E\Upsilon_{t+s} = 0$

  διότι $\Upsilon_t, \Upsilon_{t+s}$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές

Άρα η Υ_t είναι στάσιμη, αφού ισχύουν οι τρεις συνθήκες στασιμότητας για την Υ_t, δηλαδή η μέση τιμή, η διασπορά και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις είναι ανεξάρτητες του t.

β) Έστω ότι $\Upsilon_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}, t = 1, \dots, T$, για το ε_t όπως ορίστηκε στο α).

Να βρεθούν ο μέσος και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις γ_0, γ_1.

<u>Λύση</u>

Είναι:

- $E(\Upsilon_t) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t) + E(\varepsilon_{t-1}) = 0 + 0 = 0$
- $\gamma_0 = \mathrm{Cov}(\Upsilon_t, \Upsilon_t) = \mathrm{Var}(\Upsilon_t) = Var(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) =$
  $= Var(\varepsilon_t) + Var(\varepsilon_{t-1}) + 2\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = 1 + 1 + 0 = 2$
- $\gamma_1 = \mathrm{Cov}(\Upsilon_t, \Upsilon_{t-1}) = \mathrm{E}(\Upsilon_t - E(\Upsilon_t))(\Upsilon_{t-1} - E(\Upsilon_{t-1})) =$
  $= E(Y_t Y_{t-1}) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}) =$
  $= E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}^2 + \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) =$
  $= E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) + \mathrm{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) + \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) =$
  $= 0 + 0 + \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + 0 = \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) = 1$

Άσκηση 2

Δίνεται η στάσιμη χρονοσειρά z_t.

α) Να δείξετε ότι και η χρονοσειρά $\Upsilon_t = cz_t$, όπου c σταθερά, είναι στάσιμη.

<u>Λύση</u>

Η χρονοσειρά z_t είναι στάσιμη. Αυτό σημαίνει:

- $E(z_t) = \mu$ (σταθερό)
- $Var(z_t) = \sigma^2$ (σταθερό) (ανεξάρτητα του χρόνου t)
- $Cov(z_t, z_{t+s})= \gamma_s$ (σταθερό)

Για να δείξουμε ότι Υ_t στάσιμη, θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι τρεις συνθήκες στασιμότητας και για την Υ_t.

Είναι:

Ιδιότητα μέσης τιμής $\mathrm{E}(\alpha \mathrm{X}+\beta)=\alpha \mathrm{E}(\mathrm{X})+\beta$

- $E(\Upsilon_t) = \boxed{E(\mathrm{c}\,\mathrm{z}_t) = cE(\mathrm{z}_t)} = c\,\mu$ άρα σταθερό

Ιδιότητα διασπορών $\mathrm{Var}(\alpha \mathrm{X}+\beta)=a^2\mathrm{Var}(\mathrm{X})$

- $Var(\Upsilon_t) = \boxed{Var(c\,\mathrm{z}_t) = c^2\,Var(\mathrm{z}_t)} = c^2\sigma^2$ άρα σταθερό

Ιδιότητα συνδιασπορών $Cov(\alpha \mathrm{X}+\beta, \gamma \Upsilon+\delta)=\alpha\beta Cov(\mathrm{X},\Upsilon)$

- $Cov(Y_t, Y_{t+s}) = \boxed{Cov(cz_t, cz_{t+s}) = c^2 Cov(z_t, z_{t+s})} = c^2\gamma_s$ άρα σταθερό

Άρα η Υ_t είναι στάσιμη.

β) Να δείξετε ότι και η χρονοσειρά $\Upsilon_t = c_1 z_t + c_2 z_{t-1}$, όπου c_1, c_2 σταθερές, είναι στάσιμη. Γενικεύστε επαγωγικά.

<u>Λύση</u>

Η χρονοσειρά z_t είναι στάσιμη. Αυτό σημαίνει:

- $E(z_t)$ σταθερό
- $Var(z_t)$ σταθερό (ανεξάρτητα του χρόνου t)
- $Cov(z_t, z_{t+s}) = \gamma_s$ σταθερό

Επιπλέον, αφού η χρονοσειρά z_t είναι στάσιμη, άρα και η z_{t-1} είναι στάσιμη (και άρα ισχύουν τα παραπάνω).

Για να δείξουμε ότι Υ_t στάσιμη, θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι τρεις συνθήκες στασιμότητας για την Υ_t.

Είναι:

- $E(\Upsilon_t) = E(c_1 z_t + c_2 z_{t-1}) = c_1 E(\mathrm{z}_t) + c_2 E(\mathrm{z}_{t-1})$ άρα σταθερό
- $Var(\Upsilon_t) = Var(c_1 z_t + c_2 z_{t-1}) =$

Εφόσον z_t, z_{t-1} στάσιμες χρονοσειρές, δεν είναι ανεξάρτητες, οπότε χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των διασπορών για μη ανεξάρτητες μεταβλητές

$$= Var(c_1 \mathrm{z}_t) + Var(c_2 \mathrm{z}_t) + 2\mathrm{Cov}(c_1 z_t, c_2 z_{t-1}) =$$

$$= c_1^2 Var(\mathrm{z}_t) + c_2^2 Var(\mathrm{z}_t) + 2c_1 c_2 \mathrm{Cov}(z_t, z_{t-1})$$

$$= c_1^2 Var(\mathrm{z}_t) + c_2^2 Var(\mathrm{z}_t) + 2c_1 c_2 \gamma_{|(t-1)-t|}$$

$$= c_1^2 Var(\mathrm{z}_t) + c_2^2 Var(\mathrm{z}_t) + 2c_1 c_2 \gamma_1 \quad \text{άρα σταθερό}$$

- $Cov(Y_t, Y_s) = Cov(c_1 z_t + c_2 z_{t-1}, c_1 z_s + c_2 z_{s-1}) =$

Ιδιότητα $Cov(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

$= E[(c_1 z_t + c_2 z_{t-1})(c_1 z_s + c_2 z_{s-1})] - E(c_1 z_t + c_2 z_{t-1})\, \mathrm{E}(c_1 z_s + c_2 z_{s-1})$

σταθερό σταθερό

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $E[(c_1 z_t + c_2 z_{t-1})(c_1 z_s + c_2 z_{s-1})]$ σταθερό.

$E[(c_1 z_t + c_2 z_{t-1})(c_1 z_s + c_2 z_{s-1})] =$

$= E(c_1^2 z_t z_s + c_1 c_2 z_t z_{s-1} + c_2 c_1 z_{t-1} z_s + c_2^2 z_{t-1} z_{s-1}) =$

$= c_1^2 E(z_t z_s) + c_1 c_2 E(z_t z_{s-1}) + c_2 c_1 E(z_{t-1} z_s) + c_2^2 E(z_{t-1} z_{s-1})$

Αρκεί να δείξουμε ότι $E(z_t z_s)$ σταθερό

Είναι:

Ιδιότητα $Cov(\mathrm{X},\Upsilon) = \mathrm{E}(\mathrm{X}\Upsilon) - \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\Upsilon)$

$$Cov(z_t, z_s) = \mathrm{E}(z_t, z_s) - \mathrm{E}(z_t)\mathrm{E}(z_s) \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E}(z_t, z_s) = \underbrace{Cov(z_t, z_s)}_{\text{σταθερό}} + \underbrace{\mathrm{E}(z_t)\mathrm{E}(z_s)}_{\text{σταθερά}} \quad \text{άρα σταθερό}$$

Οπότε $Cov(Y_t, Y_s)$ σταθερό.

Άρα η Υ_t είναι στάσιμη.

Επαγωγική γενίκευση

Οι $\Upsilon_t = cz_t$ και $\Upsilon_t = c_1 z_t + c_2 z_{t-1}$ αποδείξαμε ότι είναι στάσιμες χρονικές σειρές (θεωρώ $k = 0, 1$).

Έστω ότι η $\mathrm{Z}_t = c_1 z_t + c_2 z_{t-1}$+…+$c_\kappa z_{t-\kappa}$ είναι στάσιμη χρονική σειρά (για $k = \kappa$).

Θέλω να δείξω ότι είναι στάσιμη και για $\kappa = k + 1$, δηλ. η

$\mathrm{Z}_t = c_1 z_t + c_2 z_{t-1}$+…+$c_k z_{t-k}$+$c_{k+1} z_{t-k+1}$ είναι στάσιμη χρονική σειρά.

Όπως προηγουμένως, αποδεικνύουμε ότι ισχύουν οι 3 συνθήκες στασιμότητας.

Άσκηση 3

Να ελέγξετε αν η χρονοσειρά $X_t = \mathrm{U}\cos(\theta t) + V sin(\theta t), \theta \in (-\pi, \pi]$ είναι στάσιμη, όπου U, V είναι δύο ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με μηδενικούς μέσους και μοναδιαίες διασπορές.

<u>**Λύση**</u>

Η χρονοσειρά X_t θα είναι στάσιμη αν:

- $E(X_t)$ σταθερό
- $Cov(X_t, X_{t+s})$ σταθερό

Είναι :

- $E(X_t) = \mathrm{E}[\mathrm{U}\cos(\theta t) + V sin(\theta t)] = \mathrm{E}[\mathrm{U}]\cos(\theta t) + \mathrm{E}(V) sin(\theta t) =$
$= 0 \times \cos(\theta t) + 0 \times \sin(\theta t) = 0$ (σταθερό)

- $Cov(X_t, X_{t+s}) = E(X_t, X_{t+s}) - E(X_t)E(X_{t+s}) = E(X_t, X_{t+s}) =$

$= \mathrm{E}\left([\mathrm{U}\cos(\theta t) + V sin(\theta t)]\left[\mathrm{U}\cos\big(\theta(t+s)\big) + V sin\big(\theta(t+s)\big)\right]\right)$

$= \mathrm{E}(U^2\cos(\theta t)\cos(\theta t + \theta s) + UV\cos(\theta t)\sin(\theta t + \theta s)$
$+ UV sin(\theta t)\cos(\theta t + \theta s) + V^2 sin(\theta t)\sin(\theta t + \theta s)) =$

$= \mathrm{E}(U^2)\cos(\theta t)\cos(\theta t + \theta s) + E(UV)\cos(\theta t)\sin(\theta t + \theta s)$
$+ E(UV) sin(\theta t)\cos(\theta t + \theta s) + E(V^2) sin(\theta t)\sin(\theta t + \theta s)$

$$= \cos(\theta t)\cos(\theta t + \theta s) + sin(\theta t)\sin(\theta t + \theta s) =$$

$$= \cos(\theta t - \theta t - \theta s)$$

$$= \cos(-\theta s) = \cos(\theta s)$$ σταθερό

Άρα η X_t στάσιμη.

$Var(U) = \mathrm{E}(U^2) - (\mathrm{E}U)^2 \Leftrightarrow$
1 $= \mathrm{E}(U^2) - 0 \Leftrightarrow$
$\mathrm{E}(U^2) = 1$

U, V *ασυσχέτιστες*
$\rho(U,V) = 0 \Leftrightarrow$
$\mathrm{Cov}(U,V) = 0 \Leftrightarrow$
$\mathrm{E}(UV) - \mathrm{E(U)E(V)} = 0 \Leftrightarrow$
$\mathrm{E}(UV) = 0$

$cos\alpha \cos \beta + \sin\alpha sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$

Άσκηση 4

Να ελέγξετε αν η χρονοσειρά $X_t = \cos(\lambda t + z)$ είναι στάσιμη, όπου λ σταθερά και $z \sim \mathrm{U}(-\pi, \pi)$.

<u>Λύση</u>

Η χρονοσειρά X_t θα είναι στάσιμη αν:

- $E(X_t) = \mu$ (σταθερό)
- $Var(X_t) = \sigma^2$ (σταθερό) (ανεξάρτητα του χρόνου t)
- $Cov(X_t, X_{t+s})$= γ_s (σταθερό)

Η ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - a}, & \alpha\nu\ \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\alpha \end{cases}$$

Η X ακολουθεί την συνεχή ομοιόμορφη κατανομή με παραμέτρους α, β και συμβολίζουμε $X \sim \mathrm{U}(-\alpha, \beta)$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\mathrm{E}(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)$$

και

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}(\beta - a)^2$$

Είναι:

- $E(X_t) = \mathrm{E}(\cos(\lambda t + z)) = \mathrm{E}(\cos(\lambda t)\cos z - \sin(\lambda t)\, sinz) =$

$$= \mathrm{E}(\cos(\lambda t)\cos z) - E(\sin(\lambda t)\, sinz) =$$

$$= \cos(\lambda t)\,\mathrm{E}(\mathrm{cosz}) - \sin(\lambda t) E(sinz) =$$

Αν $X \sim \mathrm{U}(\alpha, \beta)$ με σ.π.π. $f(x)$:

$$Eg(\mathrm{X}) = \int_{\alpha}^{\beta} g(X) f(x) dx$$

$$= \cos(\lambda t) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \mathrm{cos}z dz - \sin(\lambda t) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \mathrm{sin}z dz$$

$$= \cos(\lambda t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{cos}z dz - \sin(\lambda t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sin}z dz$$

$$= \cos(\lambda t) \frac{1}{2\pi} (sinz) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \sin(\lambda t) \frac{1}{2\pi} (-cosz) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \cos(\lambda t) \frac{1}{2\pi} [sin\pi - \sin(-\pi)] - \sin(\lambda t) \frac{1}{2\pi} [-(cos\pi - \cos(-\pi))]$$

$$= \cos(\lambda t) \frac{1}{2\pi} [0 + 0] - \sin(\lambda t) \frac{1}{2\pi} [-(1 - 1)] = 0 \text{ άρα σταθερό}$$

- $Var(X_t) = \mathrm{E}(X_t^2) - E(X_t)^2 = \mathrm{E}(X_t^2) - 0 = \mathrm{E}(X_t^2) = \mathrm{E}(X_t X_t)$

$$= \mathrm{E}(\cos(\lambda t + z)\cos(\lambda t + z)) =$$

$$= \mathrm{E}((\cos(\lambda t)\, cosz - \sin(\lambda t)\, sinz)\,(\cos(\lambda t)\, cosz - \sin(\lambda t)\, sinz)) =$$

$$= \mathrm{E}([\cos(\lambda t)]^2[\cos z]^2 - 2\cos(\lambda t)\, cosz \sin(\lambda t)\, sinz +$$

$$[\sin(\lambda t)]^2[\sin z]^2) =$$

$$= [\cos(\lambda t)]^2\mathrm{E}([\cos z]^2) - 2\cos(\lambda t)\sin(\lambda t)\, E(cosz)E(sinz) +$$

$$[\sin(\lambda t)]^2 E([\sin z]^2) =$$

$$= [\cos(\lambda t)]^2\mathrm{E}([\cos z]^2) \ + [\sin(\lambda t)]^2 E([\sin z]^2) =$$

$$= [\cos(\lambda t)]^2 \times \frac{1}{2} + [\sin(\lambda t)]^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}([\cos(\lambda t)]^2 + [\sin(\lambda t)]^2) = \frac{1}{2}$$

σταθερό

[Ν.δ.ο. $\mathrm{E}([\cos z]^2) = \mathrm{E}([sin\, z]^2) = \frac{1}{2}$]

- $Cov(X_t, X_{t+s}) = \mathrm{E}(X_t X_{t+s}) - \mathrm{E}(X_t)\mathrm{E}(X_{t+s}) = \mathrm{E}(X_t X_{t+s}) - 0 =$

$$= \mathrm{E}(\cos(\lambda t + z)\cos(\lambda(t+s) + z)) =$$

$$= \mathrm{E}(\cos(\lambda t + z)\cos(\lambda t + \lambda s + z)) =$$

$$\cos\alpha\, cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\lambda t + z - \lambda t - \lambda s - z) + \cos(\lambda t + z + \lambda t + \lambda s + z)) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(-\lambda s) + \cos((2\lambda t + 2z) + \lambda s))) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\lambda s)) + \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(2\lambda t + 2z)\cos(\lambda s) - \sin(2\lambda t + 2z)\sin(\lambda s)) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\lambda s)) + \frac{1}{2}\mathrm{E}[(\cos(2\lambda t)\cos(2z) - \sin(2\lambda t)\sin(2z))\cos(\lambda s) -$$

$$(\sin(2\lambda t)\cos(2z) + \cos(2\lambda t)\sin(2z))\sin(\lambda s)] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{E}(\cos(\lambda s)) \text{ άρα σταθερό.}$$

Άρα η χρονοσειρά X_t είναι στάσιμη.

[Ν.δ.ο. $\mathrm{E}(\cos 2z) = \mathrm{E}(\sin 2z) = 0$]

ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

- **Ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές**
- **Λευκός θόρυβος**
- **Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία**
- **Τυχαίος περίπατος**

Ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

Μια απλή υπόθεση για τη χρονοσειρά $\{x_t\}, t = 1,..$ είναι ότι αποτελείται από **ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές** αλλά που όλες ακολουθούν την **ίδια κατανομή**, και λέγεται **χρονοσειρά ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών** (independent and identically distributed, iid).

Μαθηματικά η iid ορίζεται από την ανεξαρτησία για οποιοδήποτε σύνολο T μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_T$ της $\{x_t\}, t = 1,..$, δηλ. ισχύει

$$\boxed{P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_T \leq x_T) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_T \leq x_T)}$$

όπου $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_T \leq x_T)$ είναι η κοινή αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας και $P(X_i \leq x_i)$ οι αντίστοιχες περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας.

Μια iid χρονοσειρά είναι εντελώς τυχαία και δεν περιέχει αυτοσυσχετίσεις (γραμμικές ή μη-γραμμικές), δηλαδή συσχετίσεις μεταξύ στοιχείων της χρονοσειράς.

Η ανεξαρτησία σε μια χρονοσειρά δηλώνει πως δεν υπάρχει καμιά πληροφορία να αντλήσουμε από τη μελέτη της και η πραγματοποίηση της αποτελείται από τυχαίες τιμές και η μόνη περιγραφή που μπορούμε είναι στατική και περιορίζεται στην περιθώρια κατανομή της.

Λευκός θόρυβος

Μια iid χρονοσειρά είναι εντελώς τυχαία και δεν περιέχει αυτοσυσχετίσεις (γραμμικές ή μη-γραμμικές), δηλαδή συσχετίσεις μεταξύ στοιχείων της χρονοσειράς.

Μια iid χρονοσειρά λέγεται και **λευκός θόρυβος** (white noise) και θα συμβολίζουμε την κατανομή της ως $\mathbf{WN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}})$, με μέση τιμή $\mathbf{0}$ και (σταθερή) διασπορά $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{2}}$.

Αν επιπλέον τα στοιχεία της χρονοσειράς λευκού θορύβου ακολουθούν **κανονική (Γκαουσιανή) κατανομή**, τότε η χρονοσειρά λέγεται **Γκαουσιανός λευκός θόρυβος** (Gaussian white noise).

Παρατήρηση

Σημειώνεται πως στη βιβλιογραφία δεν υπάρχει συμφωνία στην έννοια του όρου "**λευκός θόρυβος**".

Σε κάποια συγγράμματα, ο όρος "λευκός θόρυβος" χρησιμοποιείται για χρονοσειρές ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες, ενώ σε άλλα συγγράμματα ταυτίζεται με τον όρο iid, δηλ για χρονοσειρές ασυσχέτιστες και ανεξάρτητες.

Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία

Η πιο απλή στοχαστική διαδικασία με συσχετίσεις είναι η Γκαουσιανή στοχαστική διαδικασία ή χρονοσειρά.

Για κάθε τάξη T, δηλ. για T τυχαίες μεταβλητές, η κοινή κατανομή της Γκαουσιανής χρονοσειράς είναι η $\boldsymbol{T}$-διάστατη Γκαουσιανή κατανομή, $\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$:

$$\boxed{f_{X_1,\ldots,X_T}(x_1,\ldots,x_T) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp(-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}))}$$

όπου

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1,\ldots,\mu_T)$: μέση τιμή

$\boldsymbol{\Sigma}$: πίνακας συνδιασπορών (συμμετρικός και θετικά ημι-ορισμένος)

- Τα διαγώνια στοιχεία του **Σ**: η διασπορά ${\sigma_i}^2$ της τυχαίας μεταβλητής X_i
- Τα μη διαγώνια στοιχεία του **Σ**: η συνδιασπορά των τυχαίας μεταβλητών X_i, X_j $(\mathrm{E}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j))$

Παρατήρηση

Για μια Γκαουσιανή χρονοσειρά η έννοια της **ασθενής** και **αυστηρής στασιμότητας** ταυτίζονται αφού η Γκαουσιανή κατανομή ορίζεται μόνο από τις δύο πρώτες ροπές.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση κανονικών τυχαίων μεταβλητών, όταν αυτές είναι **ασυσχέτιστες** είναι και **ανεξάρτητες**, το οποίο δεν ισχύει γενικά για οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές.

Αν έχουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ο πίνακας συνδιασπορών **Σ** είναι **διαγώνιος**:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. \\ 0 & .. & {\sigma_\mathrm{N}}^2 \end{bmatrix}$$

Τυχαίος περίπατος

Ο **τυχαίος περίπατος** (random walk) είναι μια **μη-στάσιμη χρονοσειρά** $\{\Upsilon_t\}_{-\infty}^{+\infty}$, όπου η κάθε τυχαία μεταβλητή Υ_t για χρόνο t προκύπτει όταν στην προηγούμενη τυχαία μεταβλητή Υ_{t-1} προστεθεί ένα τυχαίο βήμα, δηλαδή μια iid τυχαία μεταβλητή X_t:

$$\boxed{\Upsilon_t = \Upsilon_{t-1} + \mathrm{X}_t}$$

Το όνομα υποδηλώνει ακριβώς ότι η χρονοσειρά παράγεται από την τυχαία κίνηση πάνω σε μια ευθεία γραμμή (στο $\Re$), όπου σε κάθε χρονική στιγμή t κάνει ένα τυχαίο βήμα μπρος ή πίσω (X_t) από το σημείο που βρίσκεται (Υ_{t-1}) στο επόμενο (Υ_t).

Αρχίζοντας από κάποια τιμή X_0 (δηλ. για t = 0, $\Upsilon_0 = \mathrm{X}_0$) και αντικαθιστώντας επαναληπτικά στον ορισμό του τυχαίου περιπάτου $\Upsilon_t = \Upsilon_{t-1} + \mathrm{X}_t$ για χρόνους ως t, ο ορισμός του τυχαίου περιπάτου μπορεί να γραφεί ως

$$\boxed{\Upsilon_t = \sum_{k=0}^{t} \mathrm{X}_k}$$

δηλαδή ως άθροισμα όλων των τυχαίων βημάτων ως τη στιγμή t.

Είναι:

- $\mathrm{E}(\Upsilon_t) = 0$
- $\mathrm{Var}(\Upsilon_t) = E(Y_t^2) = t\sigma_X^2$

Επειδή η διασπορά του τυχαίου περιπάτου είναι ανάλογη του χρόνου t, άρα η χρονοσειρά του τυχαίου περιπάτου είναι **μη-στάσιμη**.

Βιβλιογραφία

1. Ε. Μπόρα – Σέντα, Χ. Μωυσιάδης. Εφαρμοσμένη στατιστική, Β’ έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.
2. Γ. Κ. Χρήστου. Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Β τόμος (Γ’ έκδοση), Εκδόσεις Gutenberg, 2007.
3. Δ. Κουγιουμτζής. Σημειώσεις μαθήματος Χρονοσειρών. Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, ΑΠΘ.
4. Γ.Ε. Κοκολάκης. Σημειώσεις ανάλυσης Χρονοσειρών. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών, Αθήνα.