Χρονικές σειρές

2^{o} μάθημα: Εισαγωγή στις χρονοσειρές

Εαρινό εξάμηνο 2018-2019
Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διδάσκουσα: **Αγγελική Παπάνα**

Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια

Πολυτεχνική σχολή, Α.Π.Θ. & Οικονομικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

http://users.auth.gr/~agpapana/

1. ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ

Ο μέσος (μ), η διακύμανση (σ^2), οι αυτοδιακυμάνσεις (γ_s) και ο συντελεστής αυτοσυσχετίσεως (ρ_s) του πληθυσμού είναι άγνωστοι.

Στην πράξη, ως εκτιμητές των αγνώστων παραμέτρων του πληθυσμού χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες ροπές του δείγματος. Συγκεκριμένα:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T} \qquad \text{για το } \mu$$

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}{T} \qquad \text{για το } \sigma^2$$

$$c_s = \hat{\gamma}_s = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})(X_{t+s} - \bar{X})}{T} \qquad \text{για το } \gamma_s$$

$$r_s = \hat{\rho}_s = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})(X_{t+s} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2} \qquad \text{για το } \rho_s$$

Αν το **μέγεθος του δείγματος** είναι **μικρό**, ο παρονομαστής του εκτιμητή της διακύμανσης και της αυτοδιακύμανσης αντικαθιστάτε με $T-1$ και $T-s$, αντίστοιχα, ενώ πολλαπλασιάζουμε με $\frac{T-1}{T-s}$ τον παραπάνω τύπο υπολογισμού του συντελεστή αυτοσυσχέτισης.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T} \quad \text{για το } \mu$$

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}{T-1} \quad \text{για το } \sigma^2$$

$$c_s = \hat{\gamma}_s = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(X_{t+s}-\bar{X})}{T-s} \quad \text{για το } \gamma_s$$

$$r_s = \hat{\rho}_s = \frac{T-1}{T-s}\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(X_{t+s}-\bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} \quad \text{για το } \rho_s$$

Παρατηρήσεις

- Ο πίνακας αυτοδιακύμανσης της χρονοσειράς είναι:

$$\Gamma_T = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{T-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{T-2} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{T-1} & \ldots. & \cdots & \ldots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

- Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς είναι:

$$P_T = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \cdots & \rho_{T-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{T-2} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{T-1} & \ldots. & \cdots & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ισχύει: $\boxed{\Gamma_T = \sigma_X^2 P_T}$

- Οι πίνακες Γ_T και P_T είναι συμμετρικοί, με σταθερά τα στοιχεία της διαγωνίου και επιπλέον είναι θετικά ορισμένοι (άρα όλες οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες είναι θετικές), όταν η χρονική σειρά είναι στάσιμη. Από εδώ συνεπάγεται ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης παίρνει τιμές από -1 ως 1:

  π.χ. για $T = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow 1 - \rho_1^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < \rho_1 < 1$

- Γενικά ισχύει $-1 \leq \rho_t \leq 1$
- Επειδή $\rho_s = \rho_{-s}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων και στην πράξη παίρνουμε μόνο το θετικό μισό της συνάρτησης.
- Έχει αποδειχθεί ότι για μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων, η κατανομή των δειγματικών αυτοσυσχετίσεων είναι κανονική.

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι υποθετικές παρατηρήσεις για μια μεταβλητή για 8 χρονικές περιόδους καθώς και η σχετική κατάστρωση των δεδομένων για τον υπολογισμό των αυτοσυνδιακυμάνσεων και αυτοσυσχετίσεων ($\bar{X} = 100$).

Πίνακας 1. Υποθετικά δεδομένα για την μεταβλητή X.

Έτος	X_t	$X_t - \bar{X}$	$X_{t+1} - \bar{X}$	$X_{t+2} - \bar{X}$	$X_{t+3} - \bar{X}$	$X_{t+4} - \bar{X}$	$X_{t+5} - \bar{X}$	$X_{t+6} - \bar{X}$
1	102	2	4	0	-3	-3	-2	1
2	104	4	0	-3	-3	-2	1	1
3	100	0	-3	-3	-2	1	1	
4	97	-3	-3	-2	1	1		
5	97	-3	-2	1	1			
6	98	-2	1	1				
7	101	1	1					
8	101	1						

Με αντικατάσταση στους σχετικούς τύπους υπολογίζουμε τις αυτοσυνδιακυμάνσεις:

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^2}{T-1} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - 100)^2}{7} = \frac{4+16+0+9+9+4+1+1}{7} = \frac{44}{7} = 6.3 = s^2$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})(X_{t+1} - \overline{X})}{T-s} = \frac{8+0+0+9+6-2+1}{7} = \frac{22}{7} = 3.14$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})(X_{t+2} - \overline{X})}{T-s} = \frac{0-12+0+6-3-2}{6} = -\frac{11}{6} = -1.83$$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})(X_{t+3} - \overline{X})}{T-3} = \frac{-6-12+0-3-3}{5} = -\frac{24}{5} = -1.83$$

$$\hat{\gamma}_4 = -\frac{17}{4} = -4.25$$

$$\hat{\gamma}_5 = -\frac{0}{3} = 0$$

$$\hat{\gamma}_6 = \frac{6}{2} = 3$$

και τις αυτοσυσχετίσεις:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{T-1}{T-s}\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(X_{t+s}-\bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(X_{t+1}-\bar{X})}{T-s}}{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}{T-1}} = \frac{\hat{\gamma}_1}{s^2} = \frac{3.14}{6.3} = 0.5$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{T-1}{T-s}\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(X_{t+s}-\bar{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2} = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})(X_{t+2}-\bar{X})}{T-2}}{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}{T-1}} = \frac{\hat{\gamma}_2}{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}{T-1}} = \frac{-1.83}{6.3} = -0.29$$

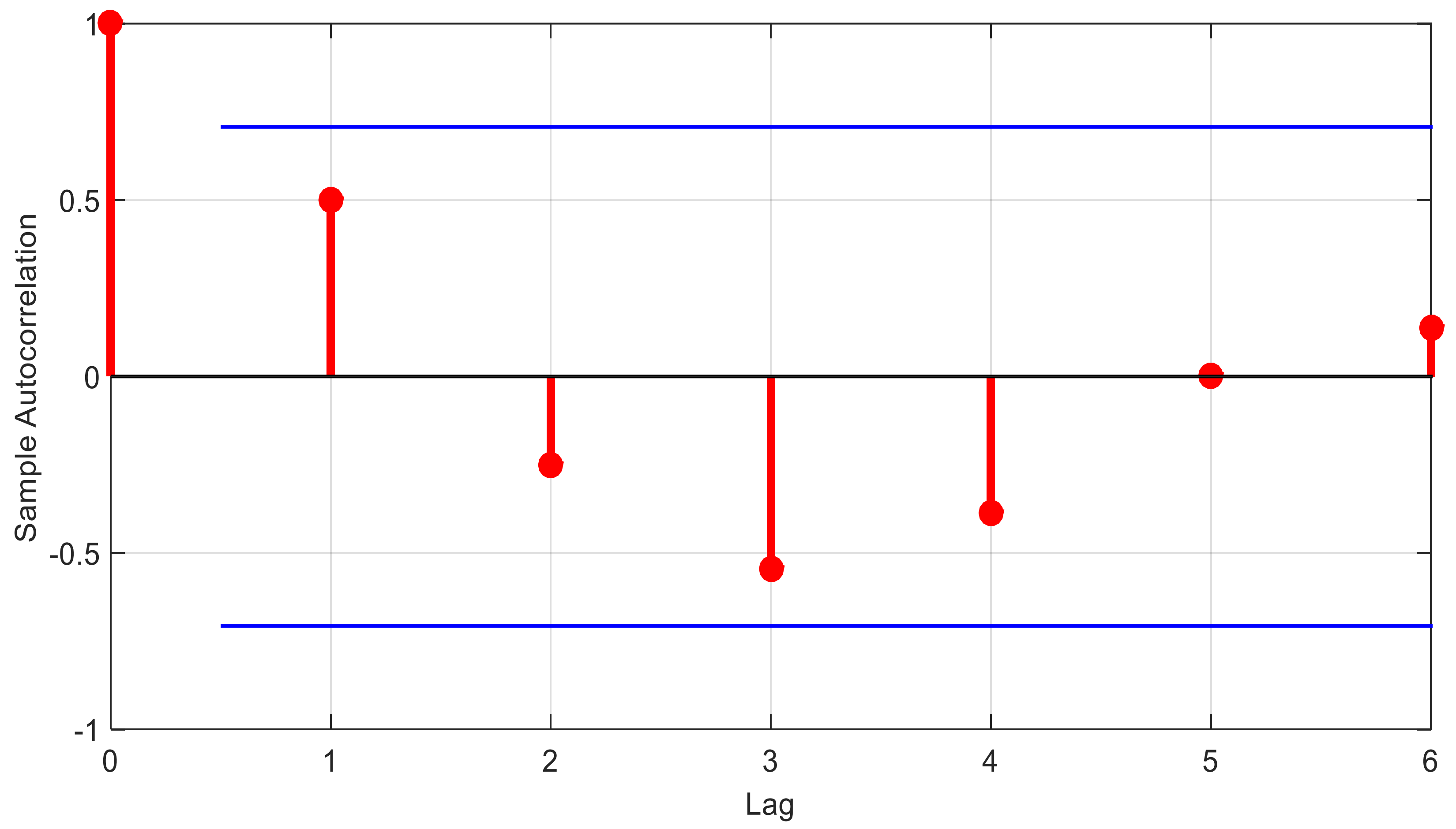
$$\hat{\rho}_3 = \frac{\hat{\gamma}_3}{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\bar{X})^2}{T-1}} = -0.76$$

$\hat{\rho}_4 = -0.67$

$\hat{\rho}_5 = 0$

$\hat{\rho}_6 = -0.48$

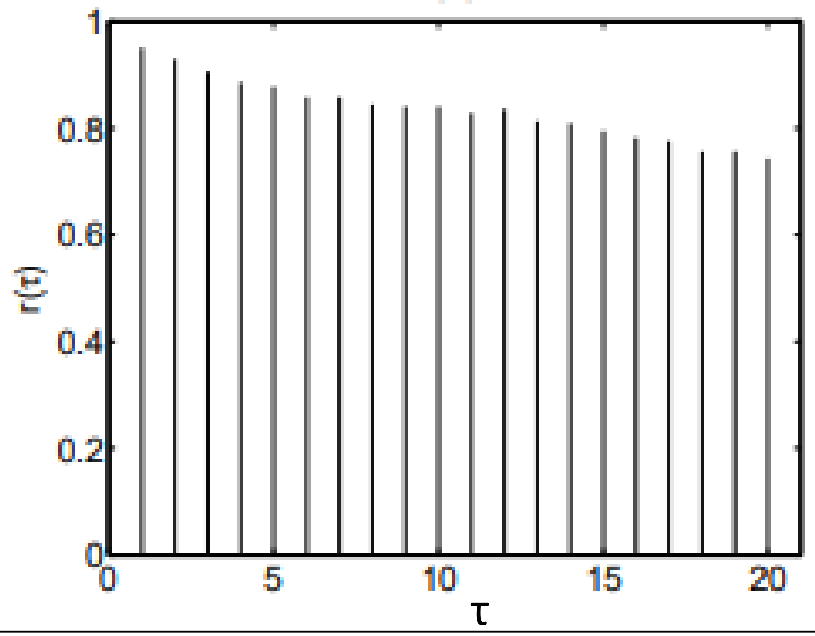
Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για τα δεδομένα του Πίνακα 1.



Οι ορισμοί της αυτοδιασποράς και αυτοσυσχέτισης έχουν νόημα όταν η χρονοσειρά είναι στάσιμη!

Όταν δεν είναι στάσιμή δε μπορεί η αυτοσυσχέτιση και η αυτοδιασπορά να οριστούν ως συνάρτηση της υστέρησης αλλά ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή t.

Αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ως προς την υστέρηση σε μια **μη στάσιμη χρονοσειρά με τάσεις**, παρατηρούμε ότι έχει πολύ υψηλές τιμές και φθίνει πολύ αργά με την υστέρηση. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ κοντινών χρονικά σημείων που είναι λόγω της τάσης. Αυτή η χαρακτηριστική μορφή της αυτοσυσχέτισης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



2. ΣΤΑΣΙΜΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Θεώρημα του Wold

Κάθε στάσιμη στοχαστική διαδικασία μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός μιας ακολουθίας ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών.

‘Ένας τέτοιος γραμμικός συνδυασμός είναι γνωστός και ως γραμμικό φίλτρο.

Έστω λοιπόν μια, όχι αναγκαστικά αυστηρώς στάσιμη στοχαστική διαδικασία X_t με μέσο μ.

Το γραμμικό φίλτρο θα μπορούσε να διατυπωθεί ως:

$$\boxed{X_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots}$$

Θέτοντας $\Psi_0 = 1$, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$X_t - \mu = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \varepsilon_{t-i}$$

Η ακολουθία $\{\varepsilon_t\}$ για $t = 0, \pm 1, \pm 2, ..$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών για την οποία υποθέτουμε ότι για κάθε t ισχύουν τα εξής:

- $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$
- $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$
- $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0$, για κάθε $s \neq 0$

Μια ακολουθία για την οποία ισχύουν οι 3 παραπάνω υποθέσεις είναι επίσης γνωστή ως **διαδικασία λευκού θορύβου** ή απλώς **λευκός θόρυβος**.

Ο αριθμός των συντελεστών Ψ_i, που είναι γνωστοί ως **συντελεστές σταθμίσεως**, μπορεί να είναι άπειρος ή πεπερασμένος.

Αν είναι άπειρος, υποθέτουμε ότι το άθροισμα τους συγκλίνει απολύτως, δηλαδή $\sum_{i=0}^{\infty} |\Psi_i| < \infty$. Διαφορετικά, η διακύμανση τείνει στο άπειρο και ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης στο μηδέν. Αν η σειρά είναι στάσιμη, τότε η διακύμανση είναι πεπερασμένη.

Πράγματι, από την σχέση

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$$

και τις τρεις υποθέσεις σχετικά με τον λευκό θόρυβο, προκύπτουν η διακύμανση, η αυτοσυνδιακύμανση και η αυτοσυσχέτιση:

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Var}(X_t - \mu) = \mathrm{E}(X_t - \mu)^2 = \mathrm{E}(\varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots)^2 =$$

$$= \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) + \Psi_1^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \Psi_2^2 \mathrm{E}(\varepsilon_{t-2}^2) + \cdots = \sigma^2 + \Psi_1^2 \sigma^2 + \Psi_2^2 \sigma^2 + \cdots =$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^2$$

$$\gamma_s = E(X_t - \mu)(X_{t-s} - \mu)$$

$$= E(\varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots) E(\varepsilon_{t-s} + \Psi_1 \varepsilon_{t-s-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-s-2} + \cdots)$$

$$= E(\Psi_s \varepsilon_{t-s}^2) + E(\Psi_1 \Psi_s \varepsilon_{t-s-1}^2) + \cdots$$ (οι υπόλοιποι όροι είναι μηδέν)

$$= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \Psi_{i+s}$$

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\mathrm{Var}(X_t)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \Psi_{i+s}}{\sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^2}$$

Η σχέση

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$$

αποτελεί μια γενική μορφή από την οποία με διάφορες υποθέσεις σχετικά με τους συντελεστές σταθμίσεως προκύπτουν διάφορα στοχαστικά μοντέλα χρονοσειρών.

Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες στοχαστικών μοντέλων, τις οποίες θα μελετήσουμε στις επόμενες ενότητες:

- Αυτοπαλίνδρομα μοντέλα (AR)
- Υποδείγματα κινητών μέσων (MA)
- Μεικτά υποδείγματα (ARMA)

π.χ. Για $\Psi_i = a^i$, στην σχέση

$$X_t - \mu = \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \Psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} X_t - \mu &= \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1} + a^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots \\ &= \varepsilon_t + \alpha(\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-2} + \cdots) \\ &= \varepsilon_t + \alpha(X_{t-1} - \mu) \end{aligned}$$

ή

$$X_t = \mu(1-\alpha) + \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$$

το οποίο είναι γνωστό ως αυτοπαλίνδρομο μοντέλο πρώτης τάξης (AR(1)).

3. ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΛΕΥΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ

Θεωρητικά η αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς λευκού θορύβου είναι μηδενική για υστέρηση τ > 0.

Πρακτικά όμως η αυτοσυσχέτιση εκτιμάται από μια πεπερασμένη χρονοσειρά (κάποιου μήκους T) και άρα θα έχει διακυμάνσεις γύρω από το μηδέν.

Αποδεικνύεται πως η εκτιμούμενη αυτοσυσχέτιση της χρονοσειράς λευκού θορύβου ακολουθεί κανονική κατανομή, $r_\tau \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{T})$.

Αν θεωρήσουμε την μηδενική υπόθεση

H_0: $\rho_s = 0$

H_1: $\rho_s \neq 0$

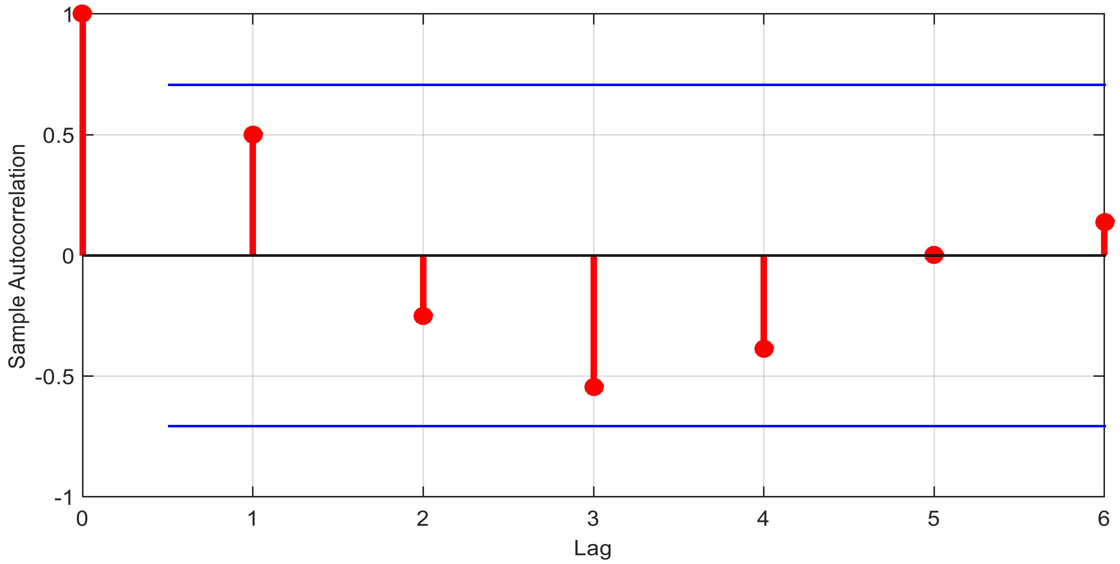
η H_0 απορρίπτεται σε στάθμη σημαντικότητας α (συνήθως $\alpha = 0.05$) αν το ρ_s είναι έξω από το $\pm z_{a/2} \frac{1}{\sqrt{T}}$.

Το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αυτοσυσχέτιση r_τ υποθέτοντας ότι η χρονοσειρά είναι λευκός θόρυβος είναι $\pm z_{a/2} \frac{1}{\sqrt{T}}$.

Με την προϋπόθεση ότι μια σειρά είναι εντελώς τυχαία, ισχύει η προσέγγιση $Var(r_s) \cong \frac{1}{T}$, το οποίο ισχύει για μεγάλο T και μικρό s.

Συνήθως, όταν εκτιμάμε το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αυτοσυσχέτιση r_τ υποθέτοντας ότι η χρονοσειρά είναι λευκός θόρυβος, γίνεται στρογγυλοποίηση του $z_{a/2} = 1.96$ (που αντιστοιχεί στην κρίσιμή τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής για πιθανότητα 0.975), με το 2.

Για αυτό θεωρούμε ότι η αυτοσυσχέτιση για κάποια υστέρηση τ είναι «στατιστικά μηδενική» αν $r_\tau \in [-\frac{2}{\sqrt{T}}, \frac{2}{\sqrt{T}}]$.



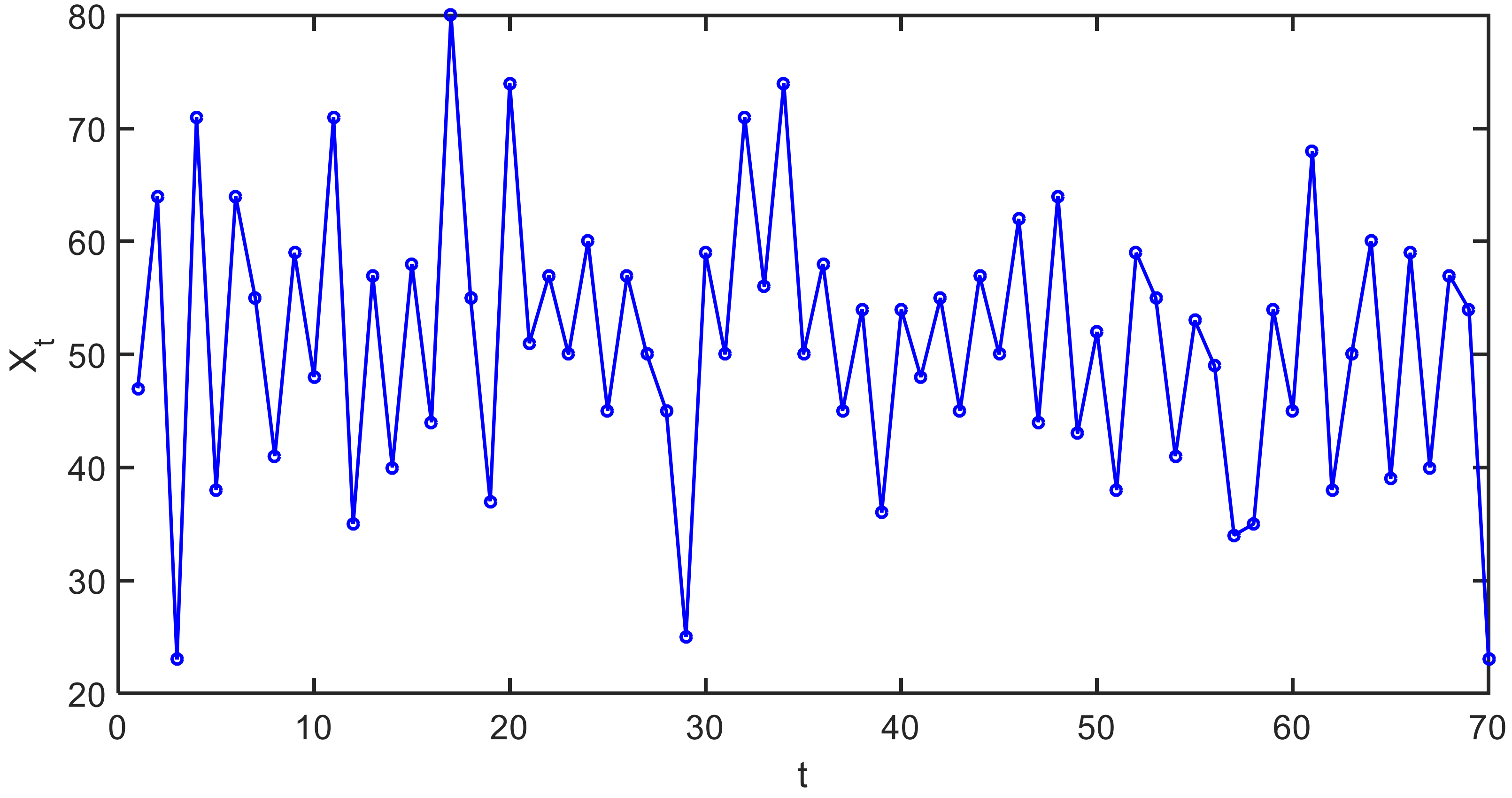
Παράδειγμα 1

Έστω η παρακάτω χρονική σειρά με 70 παρατηρήσεις:

47 64 23 71 38 64 55 41 59 48 71 35 57 40 58 44 80 55 37 74 51 57 50 60 45 57 50 45 25 59 50 71 56 74 50 58 45 54 36 54 48 55 45 57 50 62 44 64 43 52 38 59 55 41 53 49 34 35 54 45 68 38 50 60 39 59 40 57 54 23

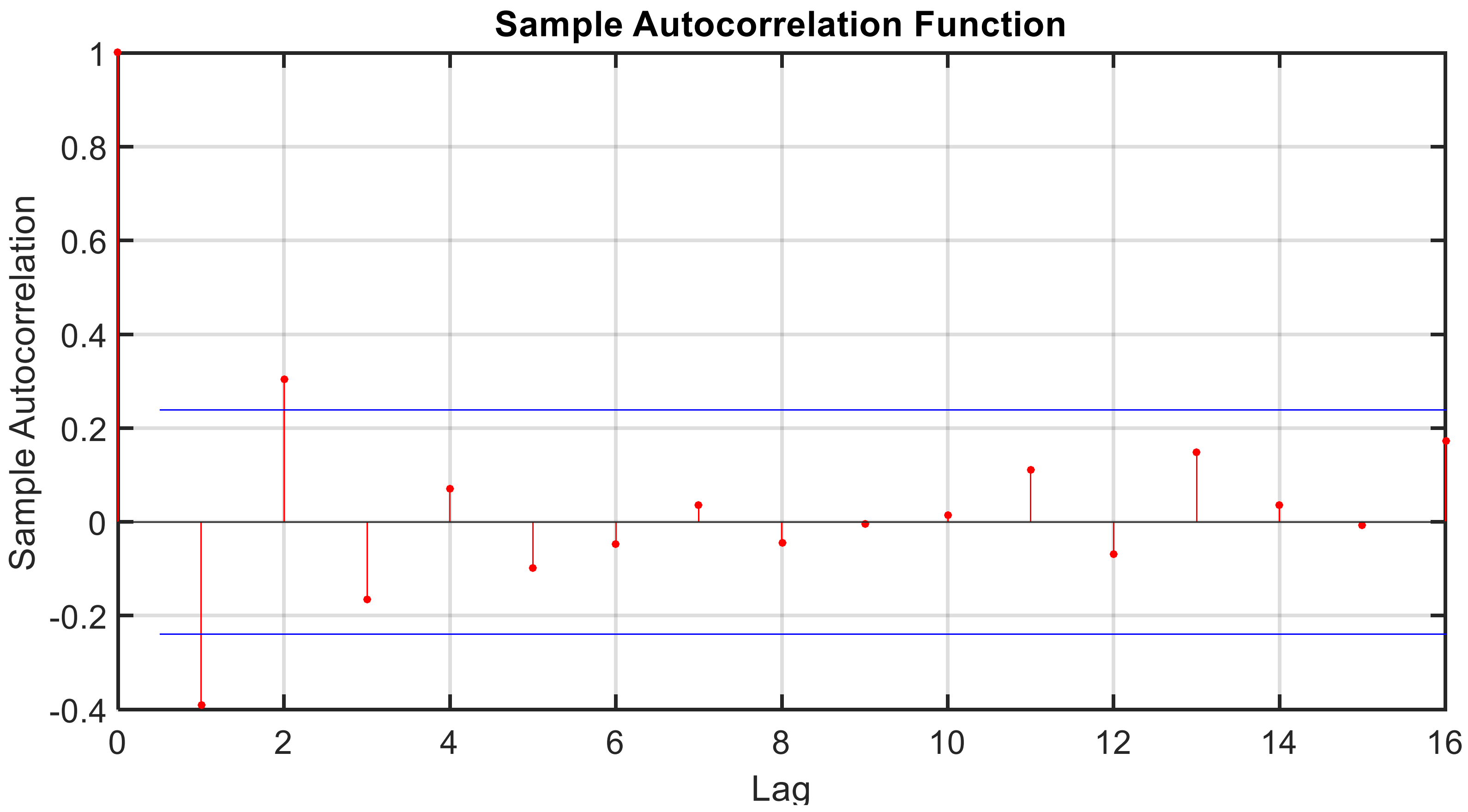
Άρα το μήκος της χρονοσειράς είναι $T = 70$.

Η γραφική παράσταση της χρονικής σειράς $(t, X_t), t = 1, \ldots, 70$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

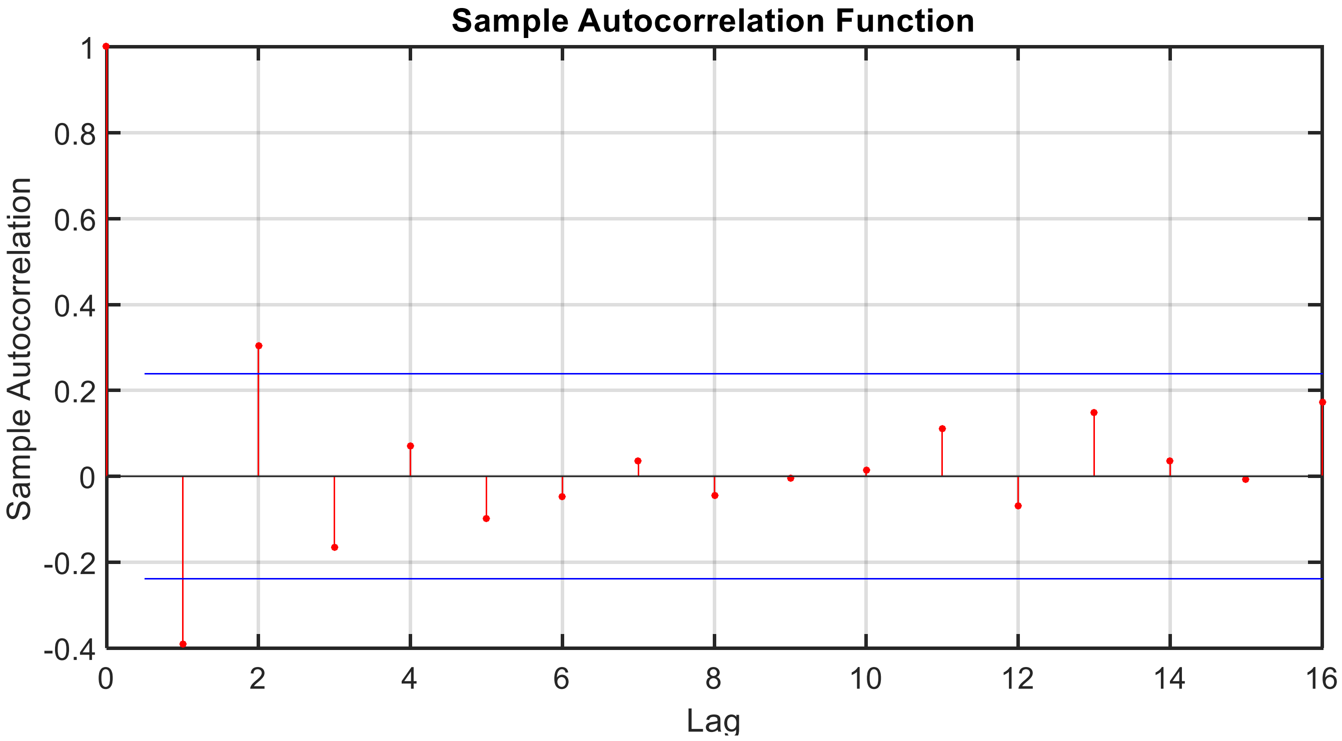


Όπως φαίνεται από το σχήμα, η μέση τιμή της χρονοσειράς κυμαίνεται γύρω από μια μέση τιμή μάλλον τυχαία, πράγμα που μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι πρόκειται για στάσιμη (στατική) χρονική σειρά.

Υπολογίζουμε έπειτα τις αυτοσυσχετίσεις της χρονοσειράς, μέχρι και υστέρηση $s = 16$.

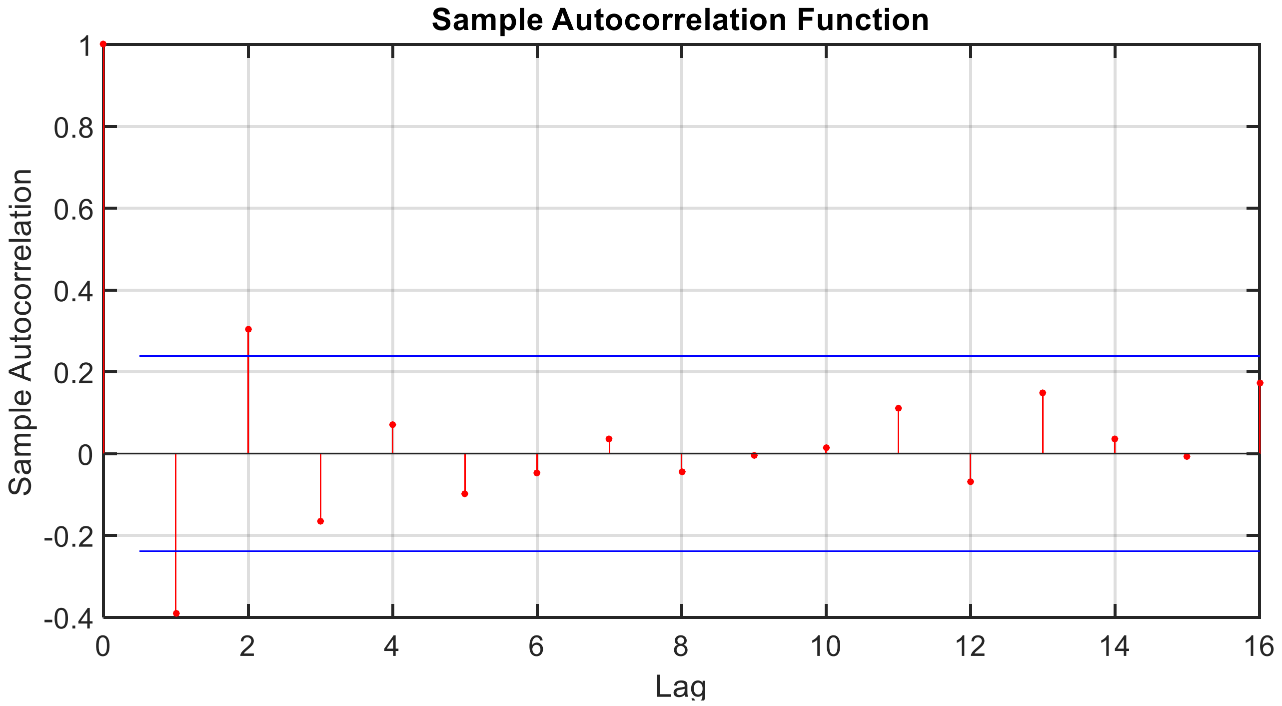


Υστέρηση	Αυτοσυσχέτιση
0	1.0000
1	-0.3899
2	0.3044
3	-0.1656
4	0.0707
5	-0.0970
6	-0.0471
7	0.0354
8	-0.0435
9	-0.0048
10	0.0144
11	0.1099
12	-0.0688
13	0.1480
14	0.0358
15	-0.0067
16	0.1730



Όπως βλέπουμε, οι αυτοσυσχετίσεις χαρακτηρίζονται από εναλλαγές προσήμου και ελαττώνονται όσο μεγαλώνει η υστέρηση της χρονοσειράς, δηλ. όσο μεγαλώνουν τα βήματα που απέχουν οι παρατηρήσεις μεταξύ τους, τόσο πιο ασυσχέτιστες είναι οι παρατηρήσεις (περίπου μέχρι $s = 10$).

Οι μόνες σημαντικές αυτοσυσχετίσεις είναι για $s = 1$ και 2, αφού μόνο αυτές είναι έξω από το διάστημα εμπιστοσύνης το οποίο είναι $\left(-\frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}\right) = (-0.2390, 0.2390)$.



Το διάγραμμα της αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται για έναν πρώτο έλεγχο σχετικά με την ύπαρξη τάσης και περιοδικότητας, και για τον προσδιορισμό κατάλληλου μοντέλου. Χρειάζεται όμως μεγάλη πείρα και χρήση άλλων (αυστηρότερων) κριτηρίων για να μην οδηγηθούμε σε λάθος συμπεράσματα. Περισσότερα θα αναφέρουμε σε επόμενες ενότητες.

Παράδειγμα 2

Από μια χρονική σειρά με $T = 200$, υπολογίσαμε τις παρακάτω δειγματικές αυτοσυσχετίσεις:

Υστέρηση	Αυτοσυσχέτιση
1	-0.38
2	-0.08
3	0.11
4	-0.08
5	0.02
6	0.00
7	0.00
8	0.00
9	0.07
10	-0.08

Με την υπόθεση ότι η σειρά είναι εντελώς τυχαία, ισχύει η προσέγγιση $Var(r_s) \cong \frac{1}{T} = \frac{1}{200} = 0.005$.

Άρα η τυπική απόκλιση της αυτοσυσχέτισης είναι $\sqrt{0.005} \cong 0.07$.

Το 95% για την αυτοσυσχέτιση r_τ υποθέτοντας ότι η χρονοσειρά είναι λευκός θόρυβος είναι

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{200}}, \frac{2}{\sqrt{200}}\right) = (-0.1414, 0.1414)$$

Όμως $r_1 = -0.38$ το οποίο είναι σημαντικά μεγαλύτερο του 0.1414 και άρα δεχόμαστε ότι $\rho_1 \neq 0$ σε στάθμη σημαντικότητας $\alpha = 0.05$.

Παρατήρηση

Στο παράδειγμα αυτό είχαμε 10 αυτοσυσχετίσεις από μια χρονική σειρά με 200 παρατηρήσεις.

Κάνουμε έλεγχο υποθέσεων για την μηδενική υπόθεση ότι η αυτοσυσχέτιση είναι μηδέν με δίπλευρο έλεγχο.

Αν κάποια δειγματική αυτοσυσχέτιση είναι έξω από το διάστημα $(-\frac{2}{\sqrt{T}}, \frac{2}{\sqrt{T}})$, τότε η μηδενική υπόθεση H_0: $\rho_s = 0$ (όπου το ρ_s αναφέρεται στην αυτοσυσχέτιση του πληθυσμού) απορρίπτεται και δεχόμαστε την H_1: $\rho_s \neq 0$.

Παράδειγμα 3

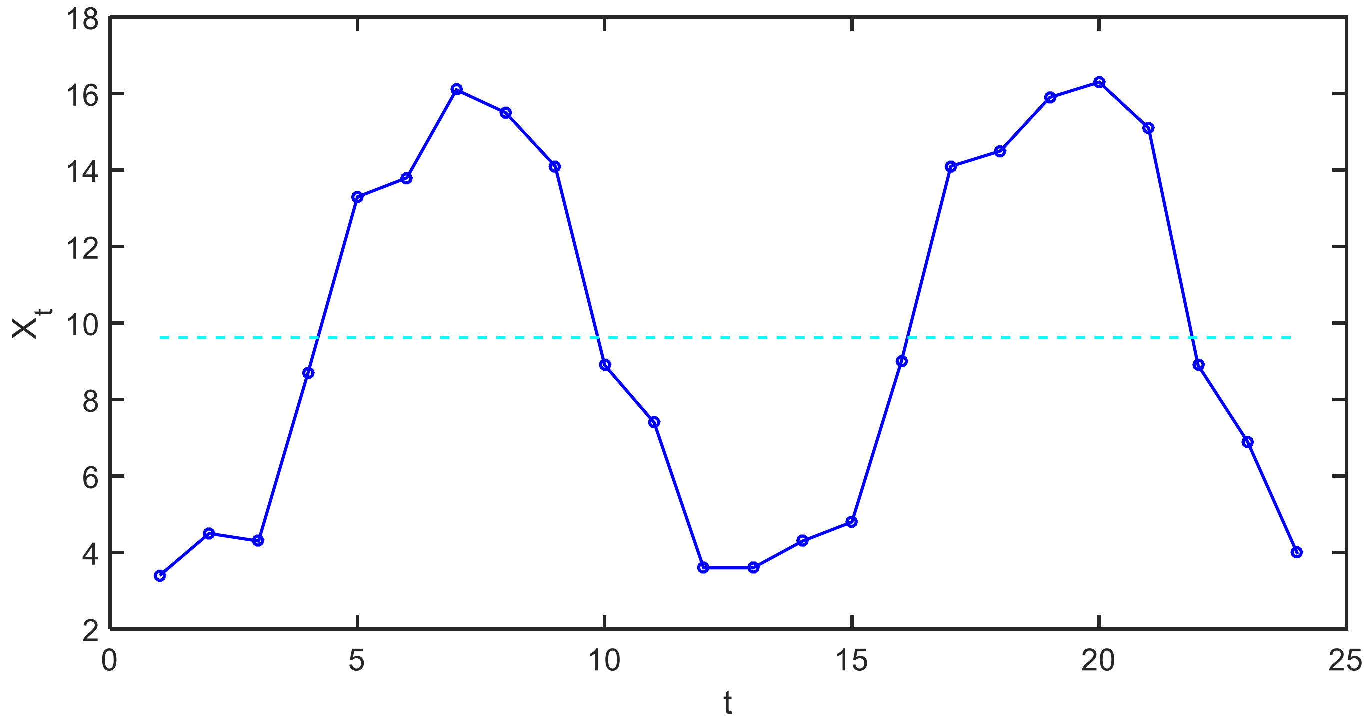
Έστω 24 μέσες μηνιαίες θερμοκρασίες (σε βαθμούς Κελσίου):

3.4 4.5 4.3 8.7 13.3 13.8 16.1 15.5 14.1 8.9 7.4 3.6

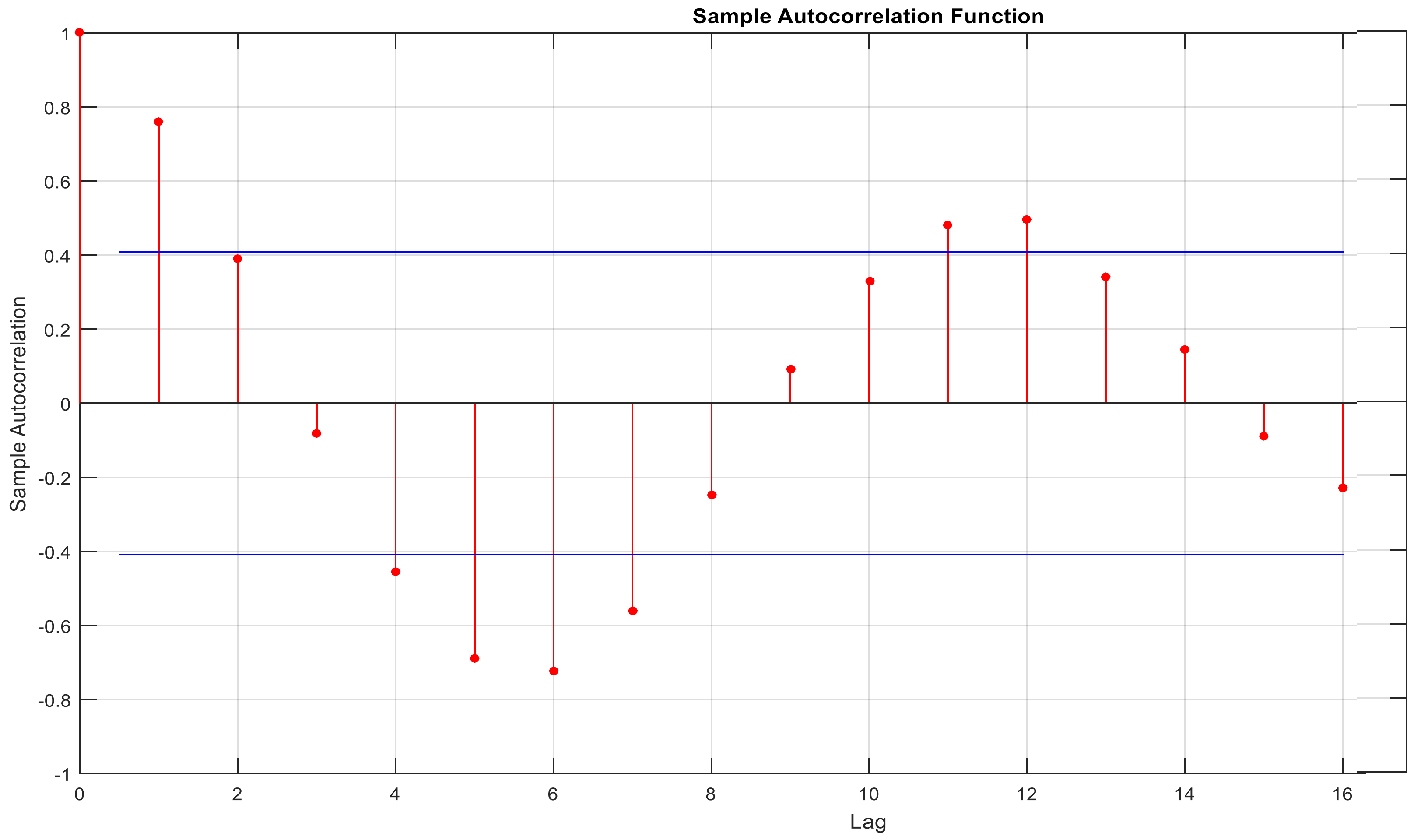
3.6 4.3 4.8 9.0 14.1 14.5 15.9 16.3 15.1 8.9 6.9 4.0

Η γραφική παράσταση της χρονικής σειράς $(t, X_t), t = 1, \ldots, 24$ δίνεται στο διπλανό σχήμα.

Από την γραφική παράσταση της χρονικής σειράς φαίνεται ότι δεν είναι στάσιμη αλλά υπάρχει περιοδικότητα 12 μηνών.

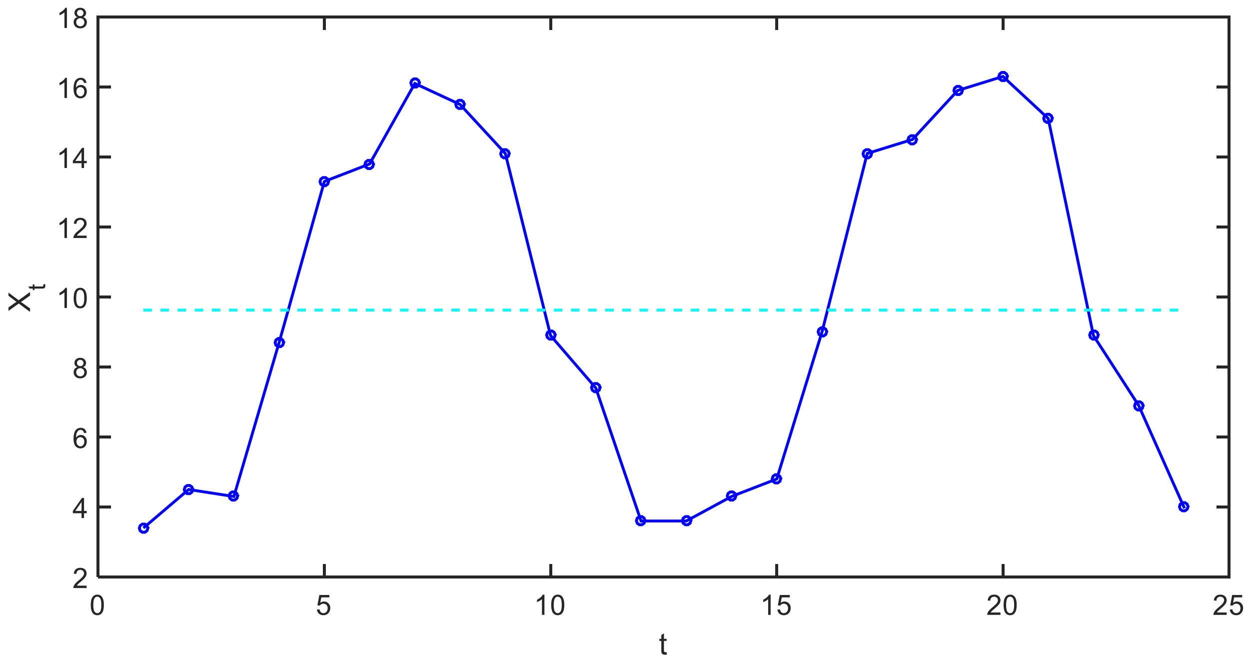


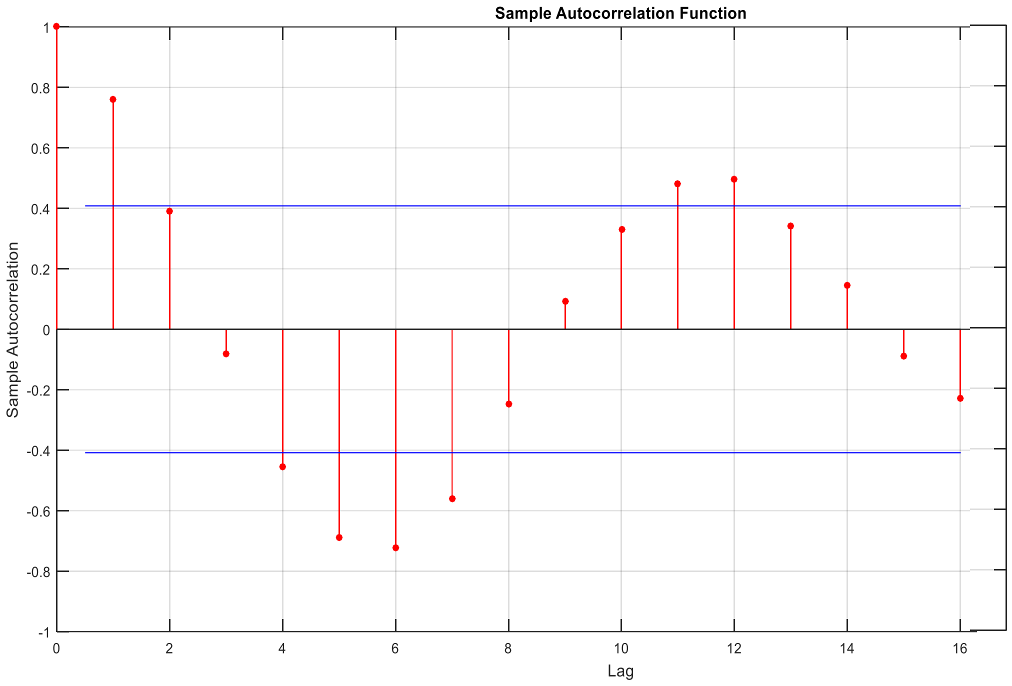
Οι αυτοσυσχετίσεις της χρονοσειράς δίνονται στον διπλανό πίνακα.



Υστέρηση	Αυτοσυσχέτιση
0	1.0000
1	0.7607
2	0.3906
3	-0.0819
4	-0.4558
5	-0.6869
6	-0.7224
7	-0.5605
8	-0.2480
9	0.0939
10	0.3293
11	0.4806
12	0.4967
13	0.3421
14	0.1437
15	-0.0898
16	-0.2295

Εδώ παρατηρούμε ότι πολλές από τις αυτοσυσχετίσεις είναι σημαντικές και το διάγραμμα αυτοσυσχέτισης έχει την ίδια μορφή με της χρονοσειράς.





Άσκηση 1

Δίνονται 16 διαδοχικές παρατηρήσεις μιας στατικής χρονικής σειράς:

1.6 0.8 1.2 0.5 0.9 1.1 1.1 0.6 0.5 0.8 0.9 1.2 0.5 1.3 0.8 1.2

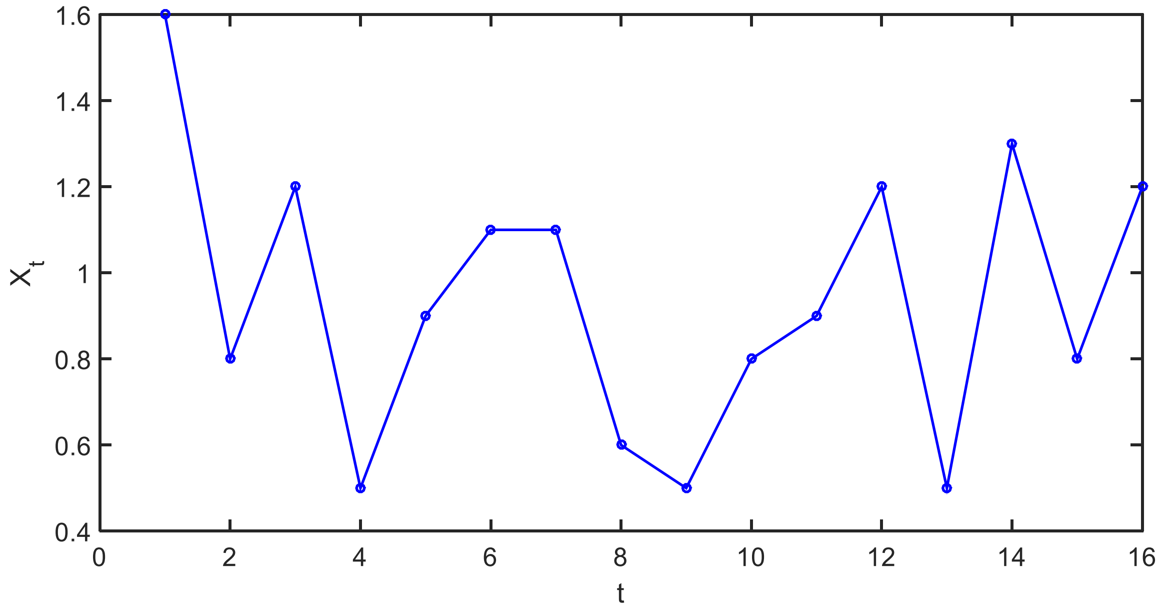
α) Κάντε την γραφική παράσταση της συνάρτησης

β) Βγάλτε συμπεράσματα για την χρονική σειρά από την γραφική παράσταση

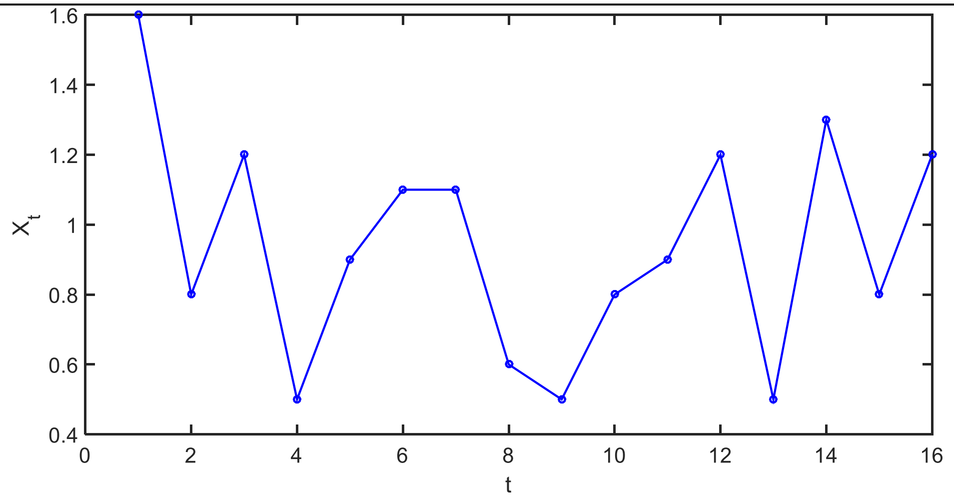
γ) Υπολογίστε το r_1.

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της χρονικής σειράς $(t, X_t), t = 1, \ldots, 16$ δίνεται στο διπλανό σχήμα.



β) Παρατηρούμε ότι οι τιμές της X_t κυμαίνονται γύρω από μια μέση τιμή τυχαία. Δεν φαίνεται να υπάρχει περιοδικότητα. Συνεπώς μάλλον πρόκειται για στάσιμη χρονική σειρά.



γ) Η μέση τιμή της χρονοσειράς είναι:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t}{T} = 0.9375$$

Η αυτοσυσχέτιση για υστέρηση $s = 1$ είναι:

$$r_1 = \frac{c_1}{c_0} = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})(X_{t+s} - \bar{X})}{T - s}}{\frac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}{T - 1}} = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{16}(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{T - 1}}{\frac{\sum_{t=1}^{16}(X_t - \bar{X})^2}{T - 1}} = -0.2640$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

- **Στασιμότητα χρονοσειράς**

Για να είναι μια χρονική σειρά στάσιμη, πρέπει η μέση τιμή της, η διασπορά και η συνδιασπορά να είναι ανεξάρτητες του χρόνου t.

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ \mathrm{E}(X_t) \\ \blacksquare\ \mathrm{Var}(X_t) \\ \blacksquare\ \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) \end{array}\right\} \quad \text{ανεξάρτητα του χρόνου t}$$

Όμως αν ισχύει η $1^{η}$ και $3^{η}$ συνθήκη, τότε αυτό είναι αρκετό για να καλύψουμε και την $2^{η}$ συνθήκη της στασιμότητας, αφού

$$\gamma_0 = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+0}) = \mathrm{Cov}(X_t, X_t) = \mathrm{Var}(X_t)$$

- **Γραφική παράσταση χρονοσειράς**

  Από μια γραφική παράσταση (t, X_t) βγάζουμε τα πρώτα συμπεράσματα όσον αφορά την στασιμότητα της χρονοσειράς και έπειτα εξάγουμε και τα οριστικά βέβαια συμπεράσματα με κατάλληλους ελέγχους που θα μάθουμε παρακάτω. Έτσι, βλέποντας μια χρονοσειρά σε συνάρτηση με τον χρόνο t, εξετάζουμε:

  - Αν υπάρχει κάποια περιοδικότητα στην χρονική σειρά, τότε δεν είναι στάσιμη
  - Αν υπάρχει ανοδική ή καθοδική τάση, τότε δεν είναι στάσιμη
  - Αν η μέση τιμή είναι τυχαία, τότε πιθανόν να είναι στατική

Βιβλιογραφία

1. Ε. Μπόρα – Σέντα, Χ. Μωυσιάδης. Εφαρμοσμένη στατιστική, Β’ έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.
2. Γ. Κ. Χρήστου. Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Β τόμος (Γ’ έκδοση), Εκδόσεις Gutenberg, 2007.
3. Δ. Κουγιουμτζής. Σημειώσεις μαθήματος Χρονοσειρών.