

# **Χρονικές σειρές**

**1<sup>η</sup> ενότητα: Εισαγωγή στις χρονοσειρές**

**Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ**

Διδάσκουσα: **Αγγελική Παπάνα**

Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια

Πολυτεχνική σχολή, Α.Π.Θ. & Οικονομικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

<http://users.auth.gr/~agrapana/>

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ

Το σύνολο των δεδομένων, τα οποία συλλέγονται διαχρονικά και εκφράζουν την εξέλιξη των τιμών μιας μεταβλητής κατά τη διάρκεια ίσων διαδοχικών χρονικών περιόδων, ονομάζεται **χρονοσειρά** ή **χρονολογική σειρά** ή **χρονική σειρά**.

Η χρονοσειρά αποτελείται από ένα σύνολο παρατηρήσεων μιας μεταβλητής, οι τιμές της οποίας είναι ιεραρχημένες με βάση τη χρονική περίοδο στην οποία αναφέρονται, π.χ. έτος, τρίμηνο, μήνας κ.τ.λ.

Με τον όρο χρονοσειρά εννοούμε συνήθως μια ακολουθία  $\{x_t: t = 1, 2, \dots, T\}$ , όπου κάθε  $x_t$  εκφράζει την κατάσταση ενός συστήματος κατά την χρονική στιγμή  $t$  το οποίο εξελίσσεται στο χρόνο κατά τυχαίο εν γένει τρόπο.

Παρατηρούμενο μέγεθος

→ μεταβλητή  $X$

Οι τιμές του παρατηρούμενου  
μεγέθους αλλάζουν με τυχαιότητα

→ τυχαία μεταβλητή  $X$

Οι παρατηρήσεις λαμβάνονται με  
συγκεκριμένο χρονικό βήμα

→ χρόνος δειγματοληψίας

Τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $X$   
την χρονική στιγμή  $t$

→  $x_t$

Το σύνολο των τιμών της  
μεταβλητής  $X$  για κάποια  
χρονική περίοδο  $n$

→ Μονοδιάστατη χρονοσειρά

$$\{x_1, \dots, x_T\} = \{x_t\}_{t=1}^T = \{x_t\}_{t=1, \dots, T}$$

Οι χρονοσειρές διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- 1. συνεχείς χρονοσειρές**
- 2. διακριτές χρονοσειρές**

Συνεχείς χρονοσειρές είναι αυτές που η τιμή του φαινομένου παρατηρείται συνεχώς. Παράδειγμα συνεχών χρονοσειρών είναι η συνεχόμενη καταγραφή της θερμοκρασίας του αέρα ή η συνεχής παρακολούθηση των σεισμών.

Διακριτές χρονοσειρές είναι αυτές όπου η τιμή του φαινομένου καταγράφεται σε ορισμένα χρονικά διαστήματα. Παράδειγμα διακριτών χρονοσειρών είναι η τιμή μιας μετοχής ανά ημέρα ή ο αριθμός των ηλιακών κηλίδων ανά έτος, όπου υπάρχουν τιμές σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα.

## Παραδείγματα χρονοσειρών

- Οι ημερήσιες αεροπορικές αφίξεις τουριστών στην χώρα μας κάθε μια ώρα.
- Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός προϊόντος μιας επιχείρησης κατά την τελευταία τετραετία.
- Το ετήσιο ακαθάριστο εθνικό προϊόν μιας χώρας.
- Η ημερήσια τιμή κλεισίματος μιας μετοχής στο Χρηματιστήριο.
- Ο συνολικός αριθμός τροχαίων ατυχημάτων κατά μήκος μιας οδικής αρτηρίας σε έναν μήνα.
- Οι ωριαίες θερμοκρασίες σε συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή.
- Η ημερήσια κατανάλωση ηλεκτρικού ρεύματος σε συγκεκριμένη γεωγραφική περιοχή μιας χώρας σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα
- το ετήσιο ακαθάριστο εθνικό προϊόν μιας χώρας.

Όπως διαπιστώνει κανείς από τα παραπάνω παραδείγματα, οι χρονοσειρές μπορούν να αφορούν:

- 1. διακριτά μεγέθη σε διακριτό χρόνο**
- 2. διακριτά μεγέθη σε συνεχή χρόνο**
- 3. συνεχή μεγέθη σε διακριτό χρόνο**
- 4. συνεχή μεγέθη σε συνεχή χρόνο**

Όταν υπάρχουν ταυτόχρονες παρατηρήσεις περισσότερων από μιας μεταβλητής, τότε ορίζεται μια πολυδιάστατη χρονοσειρά. Δεν θα μας απασχολήσουν τέτοιου τύπου χρονοσειρές.

## 2. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Όπως είδαμε, χρονολογική σειρά ονομάζουμε το δείγμα  $x_1, \dots, x_T$ , όπου ο δείκτης παριστάνει ισαπέχοντα χρονικά σημεία ή διαστήματα.

Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις  $x_1, \dots, x_T$  είναι συγκεκριμένες τιμές ή συγκεκριμένες πραγματοποιήσεις των τυχαίων μεταβλητών  $X_1, \dots, X_T$  και ότι επιπλέον οι τυχαίες αυτές μεταβλητές,  $X_1, \dots, X_T$ , είναι ένα μόνο μέρος μιας άπειρης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών.

Η άπειρη αυτή ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών ονομάζεται **στοχαστική** ή **τυχαία διαδικασία** ή **στοχαστική ανέλιξη**.

Συνεπώς, μια παρατηρούμενη σειρά (ακολουθία)  $T$  διαδοχικών παρατηρήσεων,  $x_1, \dots, x_T$ , είναι μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση μιας στοχαστικής διαδικασίας  $\{X_T\}$ .

Χρησιμοποιώντας την ορολογία της κλασικής στατιστικής, η έννοια της **στοχαστικής διαδικασίας** είναι ανάλογη της έννοιας του **πληθυσμού**, ενώ η έννοια της **συγκεκριμένης πραγματοποιήσεως** είναι ανάλογη της έννοιας του **δείγματος**.

Γενικά, όπως και στην περίπτωση  $T$  τυχαίων μεταβλητών, μια στοχαστική διαδικασία μπορεί να περιγραφεί από την **κοινή (συνδυασμένη) συνάρτηση πιθανότητας  $f(x_1, \dots, x_T)$** .

Αν ήταν γνωστή η συνάρτηση πιθανότητας, τότε θα ήταν εύκολο να υπολογιστεί, για παράδειγμα, η πιθανότητα μιας συγκεκριμένης πραγματοποίησης ή η πιθανότητα μιας μελλοντικής τιμής. Η συνάρτηση πιθανότητας όμως δεν είναι γνωστή, ούτε η πλήρης εξειδίκευση της μορφής της είναι δυνατή.



### 3. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Ο κύριος στόχος της ανάλυσης των χρονοσειρών είναι η αναζήτηση μοντέλων που να μπορούν να περιγράψουν το μηχανισμό της στοχαστικής διαδικασίας από την οποία προέκυψε η συγκεκριμένη σειρά.

**Η ανάλυση χρονοσειρών αποσκοπεί στην ανεύρεση των χαρακτηριστικών εκείνων που συμβάλουν στην κατανόηση της ιστορικής συμπεριφοράς μιας μεταβλητής και επιτρέπουν την πρόβλεψη μελλοντικών τιμών της.**

Στόχος είναι λοιπόν η επιλογή και προσαρμογή ενός κατάλληλου μοντέλου που να προσεγγίζει ικανοποιητικά τα δεδομένα, καθώς και η χρησιμοποίηση του μοντέλου για πρόβλεψη. Η ιδέα βασίζεται στην πεποίθηση ότι είναι δυνατή η προεκβολή των ιστορικών τιμών μιας χρονοσειράς, ακολουθώντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.

## Εφαρμογές των χρονοσειρών

Η ανάλυση χρονοσειρών αποτελεί ένα βασικό εργαλείο σε πληθώρα εφαρμογών, π.χ. στην **Διοίκηση Επιχειρήσεων** και την **Οικονομία**:

- Μια επιχείρηση μπορεί να λάβει αποφάσεις με βάση τις προβλέψεις οικονομικών μεγεθών που προέρχονται από την επεξεργασία των διαθέσιμων δεδομένων και την εφαρμογή των κατάλληλων μεθόδων πρόβλεψης. Επιπλέον, αποφάσεις που αφορούν τις παραγόμενες ποσότητες των προϊόντων, το σχεδιασμό της παραγωγικής διαδικασίας, τις ανάγκες σε ανθρώπινους και λοιπούς πόρους, το ύψος των διαφημιστικών δαπανών και πολλές άλλες, βασίζονται κατά κύριο λόγο στην πρόβλεψη της μελλοντικής ζήτησης.
- Πρόβλεψη της κερδοφορίας της Ελληνικής Οικονομίας με βάση το Ακαθάριστο Εθνικό Προϊόν (Α.Ε.Π.) της Ελλάδος.

## Στην ιατρική:

- Τα (ήλεκτρο-)καρδιογραφήματα είναι οι χρονοσειρές του ηλεκτρικού δυναμικού, δηλ. της ηλεκτρική δραστηριότητας των μυών της παλλόμενης καρδιάς. Με το ηλεκτροκαρδιογράφημα μπορούν οι γιατροί να διαπιστώσουν οξείες και χρόνιες διαταραχές, π.χ. οξύ έμφραγμα του μυοκαρδίου, κοιλική μαρμαρυγή, καρδιακές αρρυθμίες, οι οποίες αφορούν τον καρδιακό ρυθμό και την αρχιτεκτονική της καρδιάς.
- Η πρόβλεψη των επιληπτικών κρίσεων των ασθενών μελετάται μέσω των ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων, δηλαδή της ηλεκτρικής δραστηριότητας των μυών του εγκεφάλου. Μία επιληπτική κρίση είναι μια παρέκκλιση στην ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου.

## 4. ΒΑΣΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Ο σκοπός της ανάλυσης χρονοσειρών περιλαμβάνει την κατανόηση του συστήματος που μελετάμε, την εκτίμηση διακριτικών χαρακτηριστικών του συστήματος και την πρόβλεψη μελλοντικών τιμών μιας χρονοσειράς. Τα κυριότερα προβλήματα που σημειώνονται στην ανάλυση χρονοσειρών είναι τα παρακάτω:

- ✓ Σε πολλά πραγματικά προβλήματα έχουμε μετρήσεις ενός μόνο μεγέθους ενός συστήματος, ενώ εμπλέκονται παραπάνω μεταβλητές, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να μετρηθούν. Άρα προσπαθούμε να εξάγουμε συμπεράσματα με βάση τις μετρήσεις μιας μονομεταβλητής χρονοσειράς, ενώ ιδανικά έπρεπε να μελετηθεί μια πολυμεταβλητή χρονοσειρά.

- ✓ Σε χρονοσειρές από φυσικές διαδικασίες, δεν μπορούμε να έχουμε πειραματικά δεδομένα. Δηλαδή δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε κάποιο μέγεθος κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, οπότε έχουμε ουσιαστικά μόνο μια πραγματοποίηση του ίδιου συστήματος.
- ✓ Συνήθως οι χρονοσειρές που διαθέτουμε έχουν περιορισμένο μήκος, καθώς δεν είναι δυνατή η επιλογή του μεγέθους ενός δείγματος όταν αναφερόμαστε σε πραγματικά δεδομένα. Π.χ. οι χρονοσειρές ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων από επιληπτικές κρίσεις έχουν συγκεκριμένο μήκος, όσο είναι η διάρκεια μιας κρίσης.

✓ Στα πραγματικά δεδομένα πάντα υπάρχει **θόρυβος**. Ο θόρυβος ευθύνεται για οποιεσδήποτε διακυμάνσεις υπάρχουν στις χρονοσειρές, οι οποίες δεν προέρχονται από την παρατηρούμενη διαδικασία, αλλά είναι είτε τυχαίες είτε να έχουν συγκεκριμένη μορφή.

Ο θόρυβος σχετίζεται με την εξέλιξη του συστήματος και περιλαμβάνει όλες εκείνες τις εξωτερικές επιδράσεις στο υπό μελέτη σύστημα που δε μπορούμε να εξηγήσουμε. Για παράδειγμα, οι χρηματιστηριακοί δείκτες επηρεάζονται και από άλλους χρηματο-οικονομικούς παράγοντες αλλά και από εξωτερικά γεγονότα τα οποία δεν μπορούμε να προβλέψουμε, τα οποία αποτελούν το **δυναμικό θόρυβο**.

Υπάρχει και ο **θόρυβος παρατήρησης**, και έχει να κάνει με την ακρίβεια του οργάνου παρατήρησης ή τη δυνατότητα παρατήρησης, ή ακόμα και με την αριθμητική ακρίβεια των μετρήσεων.

✓ **Έλλειψη στασιμότητας.** Αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με την ύπαρξη εξωτερικών επιδράσεων ως προς το σύστημα που μελετάμε, που ενδεχομένως προσθέτουν χαρακτηριστικά ξένα προς το σύστημα. Πολλές φορές το αποτέλεσμα είναι η χρονοσειρά να παρουσιάζει μη-στασιμότητα, δηλαδή αργές μεταβολές (τάσεις) ή/και περιοδικότητα, που δεν σχετίζονται με το μηχανισμό που θέλουμε να μελετήσουμε. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να διερευνήσουμε το μηχανισμό που καθορίζει τις μεταβολές του ημερήσιου δείκτη από μέρα σε μέρα, δε μας ενδιαφέρει η στάθμη του δείκτη, αν δηλαδή αναφερόμαστε στην περίοδο της λεγόμενης «φούσκας» του 2000 ή της ύφεσης του 2011. Θα θέλαμε λοιπόν πρώτα να απαλείψουμε τις αργές μεταβολές του δείκτη που έγιναν σε χρονικό ορίζοντα μηνών ή ετών. Το θέμα αυτό θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

## 5. ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑΣ

Για να γίνει η σωστή μελέτη μιας χρονοσειράς πρέπει κανείς να ξεκινήσει με την επισκόπηση του γραφήματός της στο πεδίο του χρόνου, από το οποίο μπορούν αρχικά να ανιχνευθούν και έπειτα να εξεταστούν τα βασικά χαρακτηριστικά της:

- **τάση**
- **περιοδικότητα**
- **ακραίες τιμές**



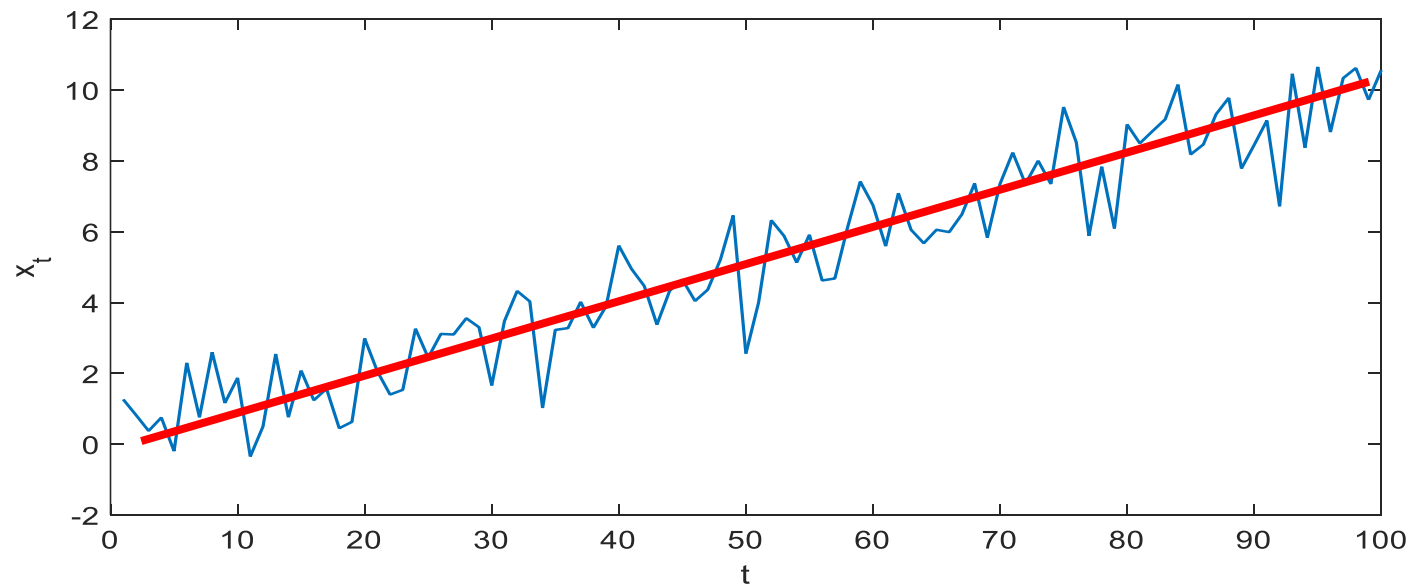
## Τάση

**Η τάση (trend) είναι μια μακροπρόθεσμη μεταβολή του μέσου επιπέδου των τιμών μιας χρονοσειράς.**

Η τάση των τιμών μιας μεταβλητής μπορεί να είναι ανοδική, πτωτική ή σταθερή σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Για να είναι ασφαλή τα συμπεράσματα που θα εξαχθούν για το αν μια σειρά παρουσιάζει τάση ή όχι θα πρέπει να έχουμε ένα ικανό αριθμό παρατηρήσεων και να εκτιμηθεί σε ένα κατάλληλο χρονικό διάστημα.

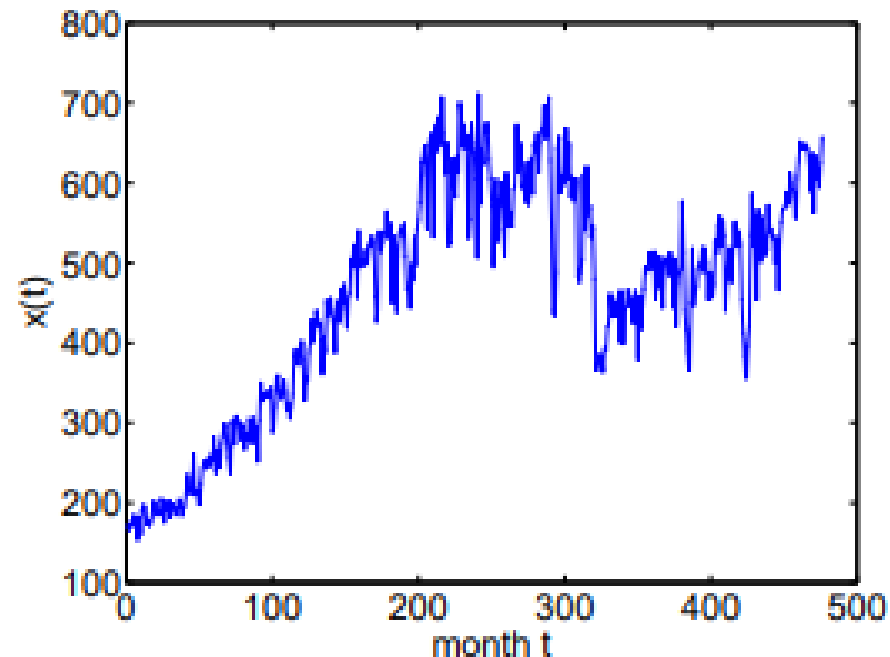
Συχνά, εκτιμάται από διάφορες οικογένειες καμπυλών, όπως την ευθεία γραμμή ή την εκθετική καμπύλη. Όταν η τάση σε μια χρονοσειρά μπορεί να περιγραφεί από κάποια γνωστή ή εκτιμώμενη συνάρτηση του χρόνου,  $\mu_t = f(t)$ , ονομάζεται **καθοριστική τάση** (deterministic trend).

π.χ. η γραφική παράσταση μιας χρονοσειράς που παρουσιάζει γραμμική ανοδική τάση



Μπορεί όμως η τάση σε μια χρονοσειρά να μην είναι δυνατόν να περιγραφεί από μια γνωστή συνάρτηση του χρόνου, οπότε και ονομάζεται **στοχαστική τάση** (stochastic trend).

π.χ. Μηνιαία παραγωγή (βασικού) σιδήρου στην Αυστραλία την περίοδο Ιανουάριος 1956 - Αύγουστος 1995 (σε χιλιάδες τόνων).

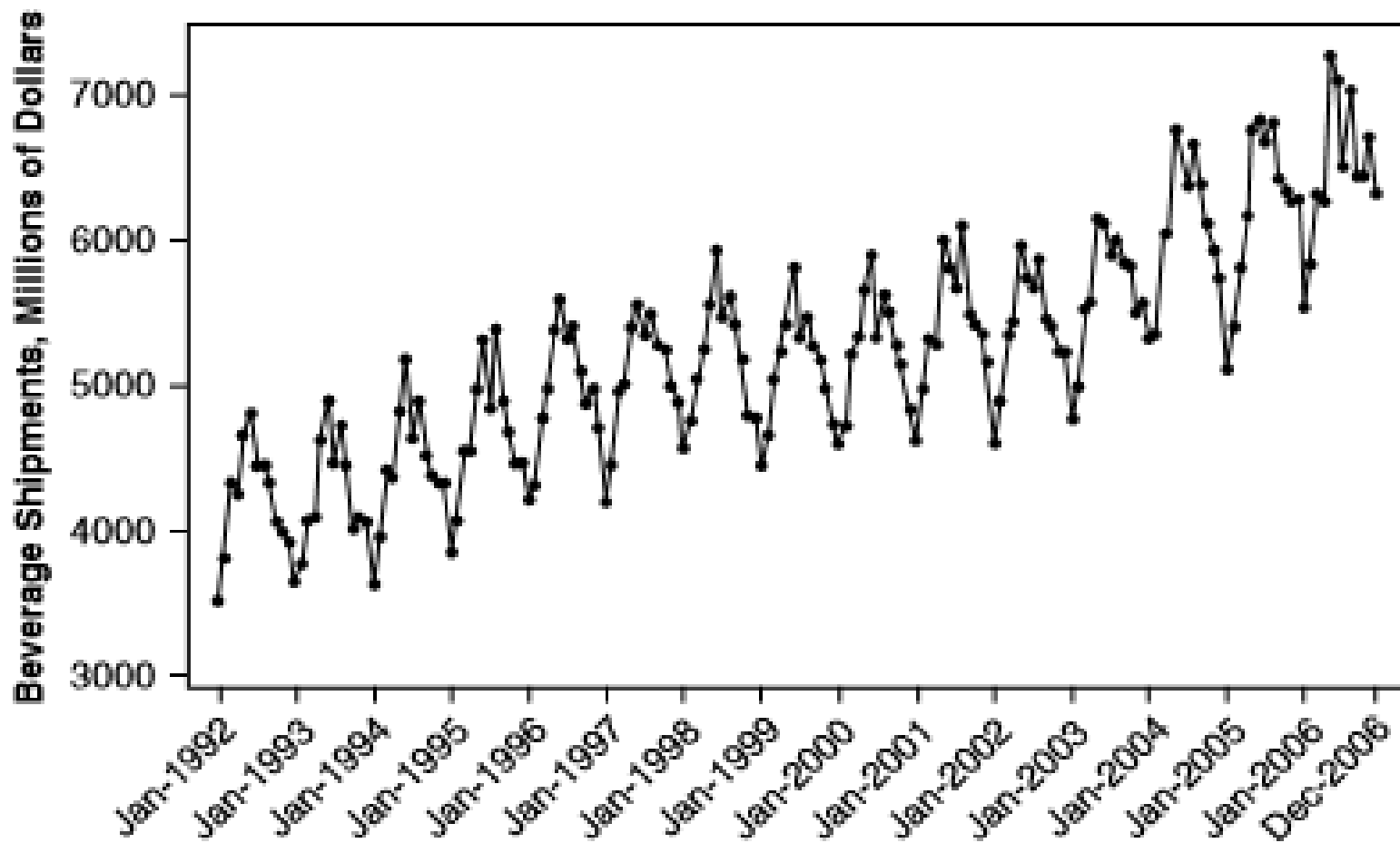


## Κυκλικότητα ή περιοδικότητα ή εποχικότητα

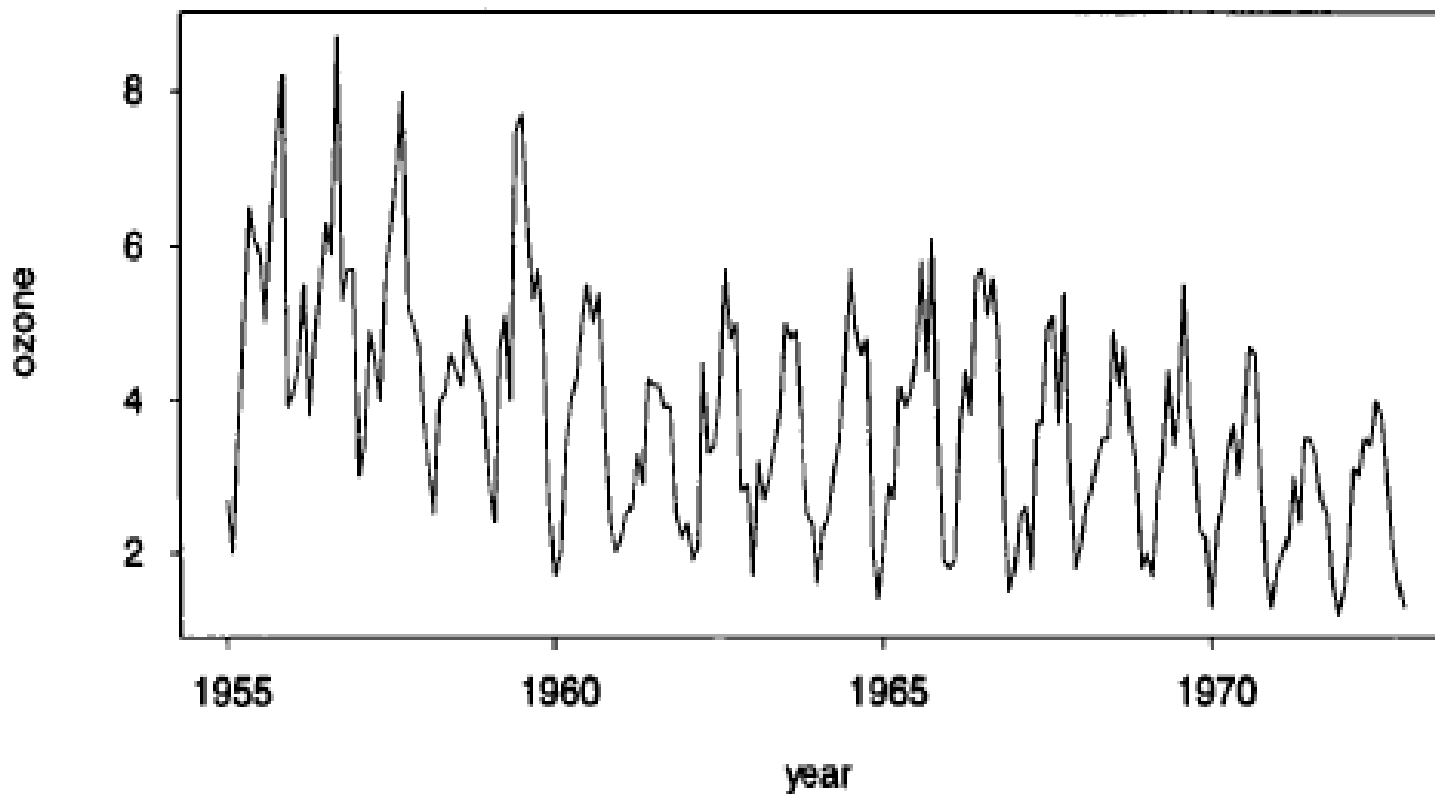
Μια χρονοσειρά μπορεί να παρουσιάζει **περιοδικότητα** (periodicity), που όταν αναφέρεται σε συγκεκριμένες περιόδους που σχετίζονται με φυσικές εποχές του έτους (μήνα, τρίμηνο, τετράμηνο) λέγεται και **εποχικότητα** (seasonality), π.χ. η τιμή του όζοντος στην ατμόσφαιρα υπόκειται σε εποχικές διακυμάνσεις πέρα από τις διακυμάνσεις που μπορεί να οφείλονται στην εξέλιξη του οικοσυστήματος.

Εφόσον, η εποχική διακύμανση παρουσιάζεται με συστηματικό τρόπο, είναι ένα χαρακτηριστικό εύκολα οπτικά αναγνωρίσιμο που μπορεί να μετρηθεί και να απομονωθεί, ώστε να μην επηρεάζει τα δεδομένα μας.

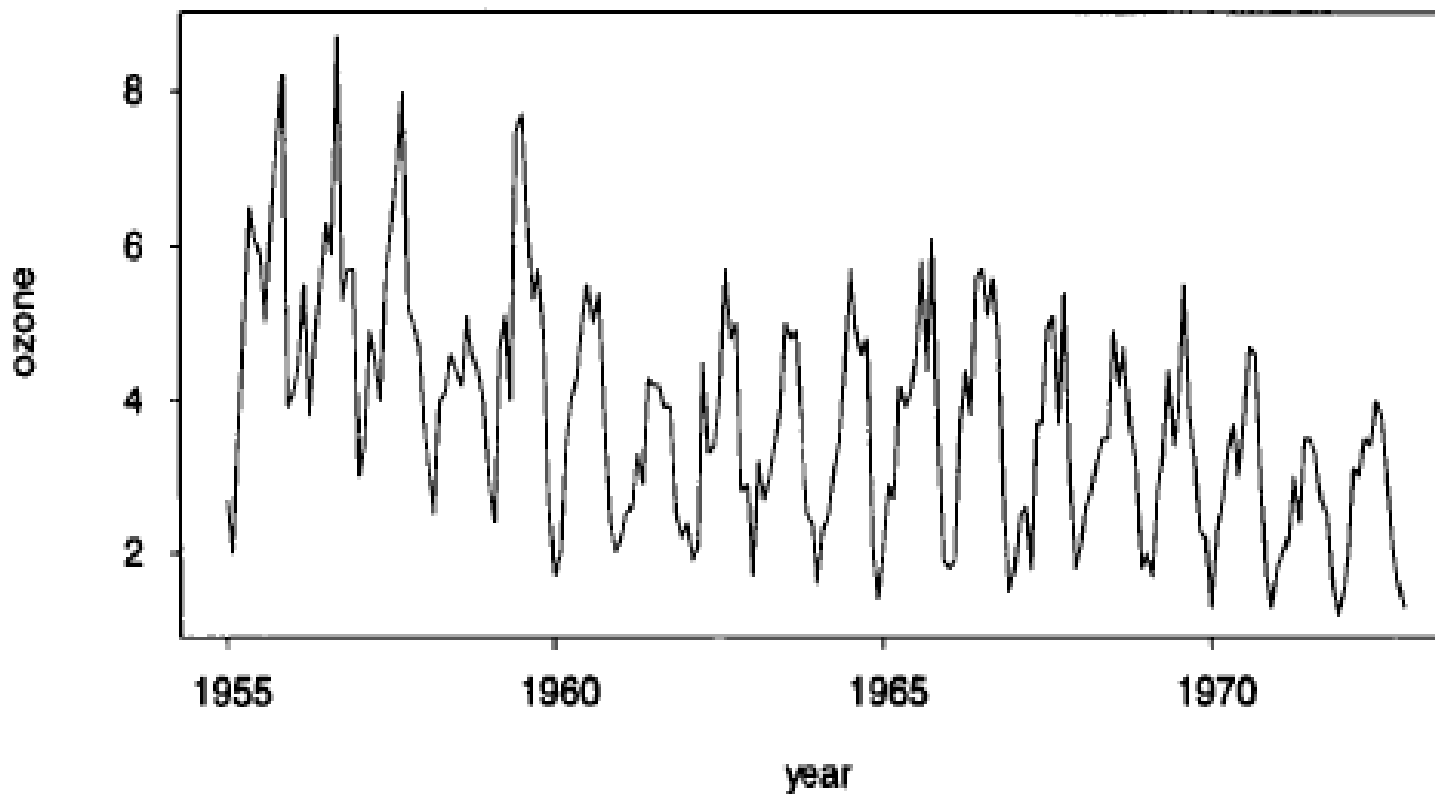
π.χ. Μηνιαία έσοδα από πωλήσεις αναψυκτικού στις ΗΠΑ (ετήσια κυκλικότητα)



π.χ. Μηνιαίες ενδείξεις όζοντος στο Λος Άντζελες: το ατμοσφαιρικό όζον που είναι ένας δείκτης της ατμοσφαιρικής ρύπανσης παρουσιάζει έντονη εποχικότητα, η οποία είναι υψηλή κατά τους καλοκαιρινούς μήνες και χαμηλή τον χειμώνα



π.χ. Μηνιαίες ενδείξεις όζοντος στο Λος Άντζελες: το ατμοσφαιρικό όζον που είναι ένας δείκτης της ατμοσφαιρικής ρύπανσης παρουσιάζει έντονη εποχικότητα, η οποία είναι υψηλή κατά τους καλοκαιρινούς μήνες και χαμηλή τον χειμώνα



## Ακραίες τιμές

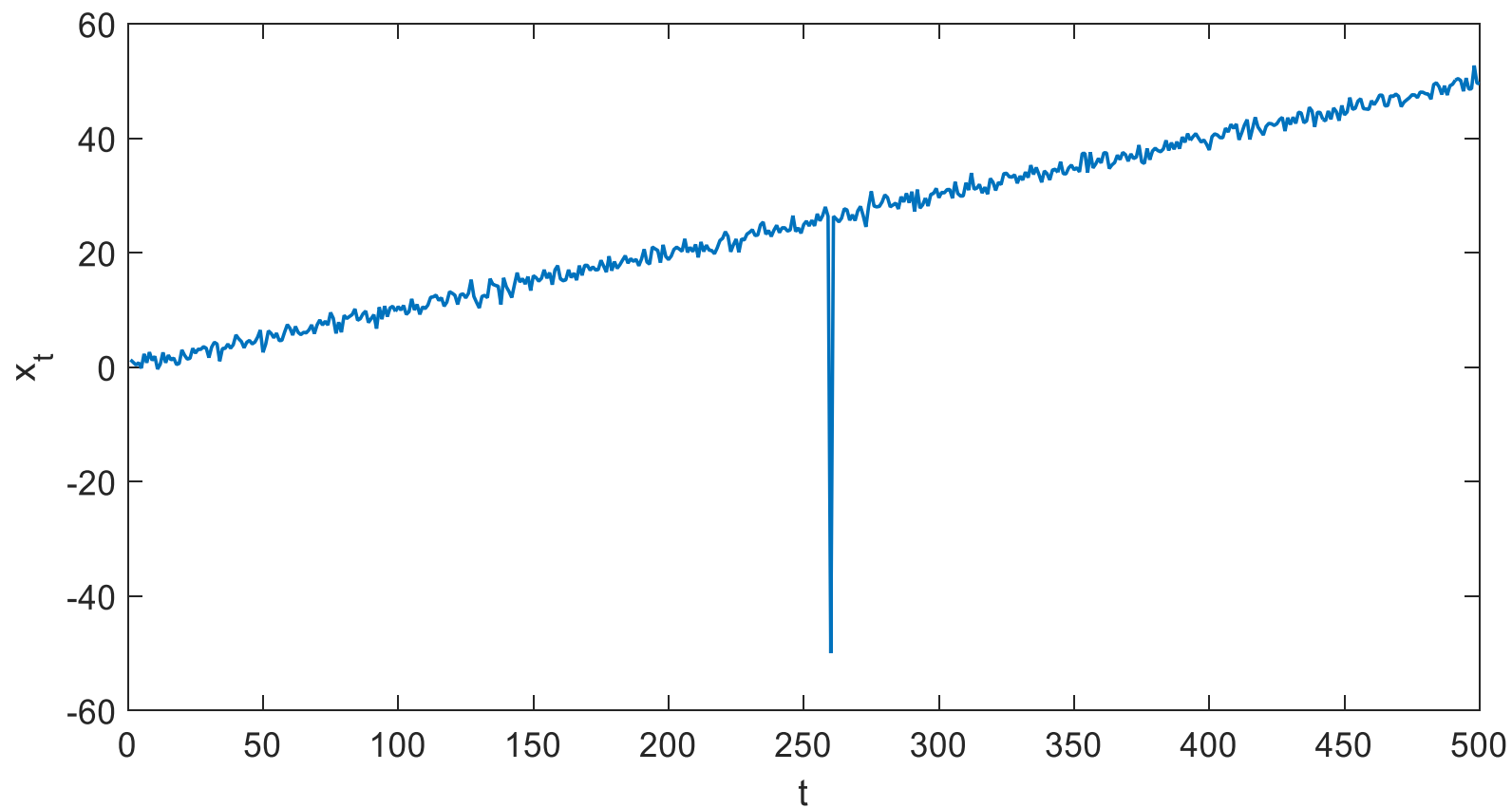
Οι **ακραίες τιμές** (outliers) είναι οι απομονωμένες παρατηρήσεις που εμφανίζονται στο γράφημα κάποιας χρονοσειράς ως απότομες αλλαγές στο πρότυπο συμπεριφοράς της. Οι ακραίες τιμές είναι μη προβλέψιμες και η επίδρασή τους στην χρονοσειρά έχει μικρή χρονική διάρκεια.

Η ερμηνεία τέτοιων παρατηρήσεων χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή, διότι απαιτείται θεωρητική γνώση, κριτική ικανότητα και κοινή λογική. Ένα ακραίο σημείο μπορεί να αντιπροσωπεύει μια ασυνήθιστη παρατήρηση που οφείλεται σε κάποιο απρόβλεπτο γεγονός.

Για παράδειγμα, μια απεργία μπορεί να προκαλέσει μεγάλη πτώση στην παραγωγή μιας βιομηχανικής μονάδας μια μέρα του χρόνου.



π.χ. Γραφική παράσταση χρονοσειράς που παρουσιάζει μια ακραία τιμή.



## 6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Η ανάλυση των χρονοσειρών μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

### 1) Ανάλυση χρονοσειρών στο πεδίο του χρόνου

Υποθέτουμε ότι κάθε παρατήρηση στο χρόνο  $t$  είναι συνάρτηση της συμπεριφοράς της χρονοσειράς στους προηγούμενους χρόνους.

### 2) Ανάλυση χρονοσειρών στο πεδίο των συχνοτήτων

Υποθέτουμε ότι κάθε παρατήρηση είναι συνάρτηση ημιτόνων και συνημίτονων με διαφορετικές συχνότητες. Στην περίπτωση αυτή, θεωρείται η συχνότητα ως μεταβλητή (αντί του χρόνου).

Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την ανάλυση χρονοσειρών στο πεδίο του χρόνου.

Τα βήματα που ακολουθούμε στην ανάλυση μιας χρονικής σειράς είναι τα παρακάτω:

- Εξασφαλίζουμε ότι η χρονοσειρά δεν είναι τελείως τυχαία (λευκός θόρυβος)
- Εξασφαλίζουμε ότι η χρονοσειρά έχει σταθερή συμπεριφορά (στατικότητα ή στασιμότητα)
- Εξασφαλίζουμε ότι δεν υπάρχουν περιοδικότητες
- Εξασφαλίζουμε κατάλληλο μοντέλο που να προσαρμόζεται στα δεδομένα μας
- Εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους του μοντέλου
- Χρησιμοποιούμε το τελικό μοντέλο για προβλέψεις

Η πρώτη υπόθεση που θα πρέπει να απορρίψουμε για να έχει νόημα η ανάλυση της χρονοσειράς είναι ότι η μεταβολή των τιμών του μεγέθους που παρατηρούμε είναι εντελώς τυχαία, δηλαδή το σύστημα που παρατηρούμε είναι **λευκός θόρυβος**. Στην περίπτωση αυτή οι παρατηρήσεις μας είναι τελείως ανεξάρτητες και ασυσχέτιστες και επομένως δεν μπορεί να γίνει ούτε μοντελοποίηση ούτε πρόβλεψη μελλοντικών τιμών της χρονοσειράς.

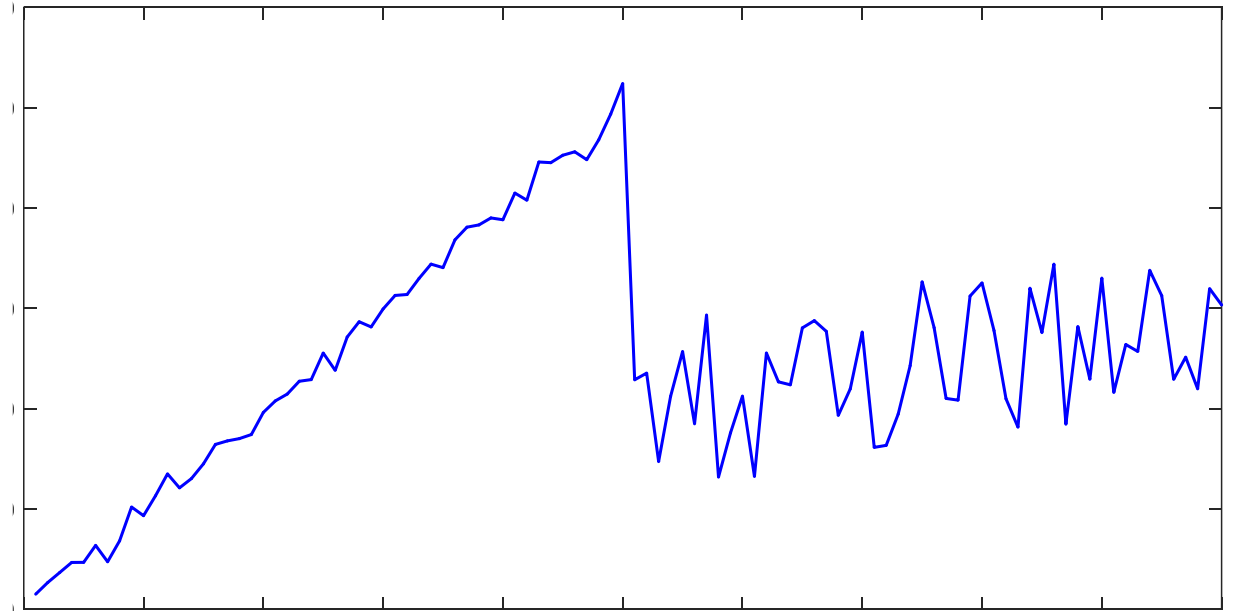
Αν οι παρατηρήσεις της χρονοσειράς δεν είναι ανεξάρτητες, η πληροφορία που υπάρχει στη χρονοσειρά μπορεί να δίνεται με διαφορετικές μορφές και τα κυριότερα χαρακτηριστικά που θα πρέπει να μελετήσουμε πριν προχωρήσουμε να προσαρμόσουμε κάποιο μοντέλο στη χρονοσειρά είναι τα παρακάτω:

## Στασιμότητα

Αν μια χρονοσειρά είναι στάσιμη, τότε οι διακυμάνσεις των τιμών της χρονοσειράς δε διαφοροποιούνται με το χρόνο.

Μια μη στάσιμη χρονοσειρά μπορεί να έχει τάσεις (trends), δηλαδή (αργές) αλλαγές στη μέση τιμή της με το χρόνο.

Π.χ. η τιμή βενζίνης μπορεί να έχει διακυμάνσεις λόγω της διεθνούς αγοράς αλλά και να παρουσιάζει μια αυξητική τάση σε βάθος χρόνου λόγω πληθωρισμού. Μια μη στάσιμη χρονοσειρά μπορεί επίσης να παρουσιάζει περιοδικότητα.



## Αιτιοκρατία και στοχαστικότητα

Όλες οι χρονοσειρές από πραγματικά μεγέθη περιέχουν θόρυβο και με αυτήν την έννοια όλες οι πραγματικές χρονοσειρές είναι στοχαστικές.

Η μεγαλύτερη πρόκληση στην ανάλυση πραγματικών χρονοσειρών είναι η διερεύνηση και ταύτιση ή εντοπισμός του αιτιοκρατικού μέρους του συστήματος που παράγει τη χρονοσειρά.

Όταν αυτό είναι κρυμμένο μέσα στο θόρυβο ή γενικότερα δεν κυριαρχεί στην εξέλιξη της χρονοσειράς, τότε θεωρούμε πως το σύστημα είναι στοχαστικό και περιοριζόμαστε σε στατιστική περιγραφή του συστήματος.

Αν για κάποιο λόγο μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύστημα που παράγει τη χρονοσειρά είναι κυρίως αιτιοκρατικό με κάποιες στοχαστικές διαταραχές που όμως δεν κυριαρχούν στην εξέλιξη του συστήματος, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές προσεγγίσεις που είναι κατάλληλες για αιτιοκρατικά δυναμικά συστήματα, π.χ. ανίχνευση κύριων περιόδων αν το σύστημα φαίνεται να είναι περιοδικό ή διερεύνηση της μη-γραμμικής δυναμικής αν το σύστημα φαίνεται να είναι χαοτικό.

Για παράδειγμα η μεταβολή της στάθμης του όζοντος στην ατμόσφαιρα μπορεί να έχει διαφορετικές περιοδικότητες που θέλουμε να εντοπίσουμε με ακρίβεια (περίοδο έτους αλλά ίσως και άλλες περιόδους) και τότε καταφεύγουμε σε μεθόδους της φασματικής ανάλυσης. Δεν θα ασχοληθούμε με αυτές τις μεθόδους.

## Γραμμικότητα (linearity) και μη-γραμμικότητα (nonlinearity)

Η γραμμικότητα του συστήματος σημαίνει πως οι μεταβλητές του συστήματος αλλήλο-επιδρούν γραμμικά, δηλαδή αν θα εκφράζαμε το σύστημα με αναλυτική μορφή όλοι οι όροι θα ήταν γραμμικοί ως προς τις μεταβλητές του συστήματος.

Σε αντίθετη περίπτωση το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

Για τη χρονοσειρά αυτό σημαίνει πως για ένα γραμμικό σύστημα ορίζουμε την εξέλιξη της χρονοσειράς ως γραμμικό συνδυασμό των προηγούμενων παρατηρήσεων της χρονοσειράς, ενώ για ένα μη-γραμμικό σύστημα μπορούμε να ορίσουμε την εξέλιξη της χρονοσειράς με μεγαλύτερη ακρίβεια αν θεωρήσουμε και τη συνδυασμένη επίδραση των προηγούμενων παρατηρήσεων σε διαφορετικές χρονικές στιγμές ή τις ίδιες.

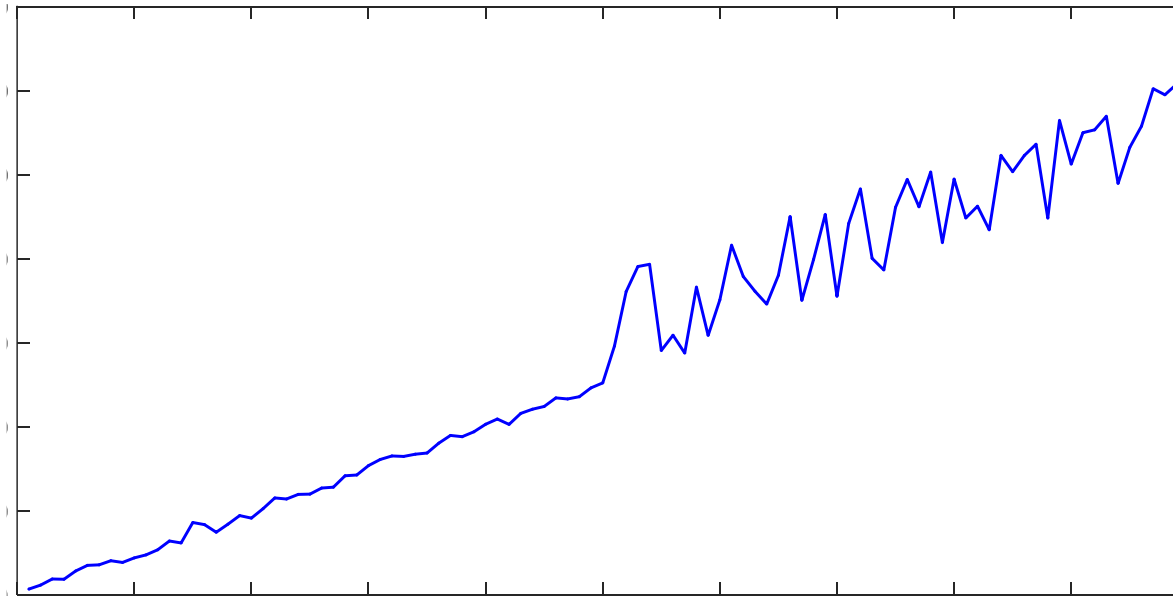


Η μελέτη των χρονοσειρών θα αρχίσει δίνοντας τα πρώτα στάδια της ανάλυσης χρονοσειρών και περιγράφοντας βασικά χαρακτηριστικά χρονοσειρών από στοχαστικά συστήματα, όπως η έννοια της στασιμότητας και της αυτοσυσχέτισης.

## 7. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Η ύπαρξη μη-στασιμότητας είναι ένα από τα βασικότερα προβλήματα στην ανάλυση χρονοσειρών και το πρώτο που πρέπει να αντιμετωπιστεί.

Η εμφάνιση τάσης στη χρονοσειρά υποδηλώνει ότι τα στατιστικά χαρακτηριστικά του συστήματος που παράγει τη χρονοσειρά αλλάζουν με το χρόνο και η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη.



Το ενδιαφέρον μας σχετικά με τα χαρακτηριστικά μιας κατανομής πιθανότητας περιορίζεται συνήθως στις **πρώτες ροπές**, δηλαδή στον **μέσο** και στην **διακύμανση**.

Σε μια **κοινή συνάρτηση πιθανότητας**  $T$  μεταβλητών, έχουμε  $T$  **μέσους**,  $T$  **διακυμάνσεις** και επιπλέον  $T(T - 1)/2$  **συνδιακυμάνσεις**.

Είναι προφανές, ότι από μια μόνο πραγματοποίηση (δείγμα  $T$  παρατηρήσεων) δεν είναι δυνατή η εκτίμηση όλων των παραπάνω άγνωστων παραμέτρων, δηλ.  $2T + \frac{T(T-1)}{2}$  άγνωστων παραμέτρων.

Μια βασική υπόθεση που απλοποιεί σημαντικά το παραπάνω πρόβλημα είναι η **υπόθεση της στασιμότητας**.

**Μια στοχαστική διαδικασία είναι αυστηρά στάσιμη (strict stationary) όταν οι ιδιότητες της δεν επηρεάζονται από μια αλλαγή στην αρχή μετρήσεως του χρόνου.**

Αυτό σημαίνει ότι η **κοινή συνάρτηση πιθανότητας** με αρχή το χρονικό σημείο  $t$ , δηλαδή η  $f(x_t, \dots, x_{t+T})$  είναι ακριβώς ίδια με την κοινή συνάρτηση πιθανότητας με αρχή το χρονικό σημείο  $t + s$ , δηλαδή η  $f(x_{t+s}, \dots, x_{t+s+T})$ . Δηλαδή:

$$f(x_t, \dots, x_{t+T}) = f(x_{t+s}, \dots, x_{t+s+T})$$

Το  **$s$**  παριστάνει μια αυθαίρετη μετακίνηση κατά μήκος του άξονα του χρόνου είτε προς τα εμπρός είτε προς τα πίσω (το  $s$  μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό) και ονομάζεται **υστέρηση**.

Αφού η κοινή συνάρτηση πιθανότητας δε μεταβάλλεται με τον χρόνο, επομένως και η **περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας** στο χρονικό σημείο  $t$ ,  $f(x_t)$ , θα είναι ίδια με την περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας  $f(x_{t+s})$  στο χρονικό σημείο  $t + s$ . Δηλαδή:

$$f(x_t) = f(x_{t+s})$$

πράγμα που σημαίνει ότι η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας δεν εξαρτάται από τον χρόνο  $t$ .

Το ίδιο ισχύει και για όλες τις διμεταβλητές περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας, για κάθε υστέρηση  $s$ :

$$f(x_t, x_{t+s}) = f(x_{t+m}, x_{t+m+s})$$

Με βάση τα παραπάνω, όταν μια χρονοσειρά είναι στάσιμη, συνεπάγεται **ότι ο μέσος και η διακύμανση είναι σταθερά και ανεξάρτητα του χρόνου, ενώ οι συνδιακυμάνσεις είναι συναρτήσεις μόνο της υστέρησης  $s$ .**

Δηλαδή:

- $E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_T) = E(X_t) = \mu$  (σταθερό)
- $Var(X_1) = Var(X_2) = \dots = Var(X_T) = Var(X_t) = \sigma^2$  (σταθερό)
- $Cov(X_1, X_{1+s}) = Cov(X_2, X_{2+s}) = \dots = Cov(X_T, X_{T+s}) = \gamma_s$  (εξαρτάται μόνο από την υστέρηση  $s$ )

Οι παραπάνω τρεις συνθήκες αναφέρονται στις πρώτες και δεύτερες ροπές, που είναι μερικές από τις ιδιότητες ή τα χαρακτηριστικά μιας κατανομής πιθανότητας.

Ο αυστηρός όμως ορισμός της στάσιμης χρονοσειράς αναφέρεται σε όλες τις ιδιότητες μιας στοχαστικής διαδικασίας (ροπές οποιαδήποτε τάξης).

Για αυτό, όταν ικανοποιούνται μόνο οι παραπάνω συνθήκες, η στοχαστική διαδικασία χαρακτηρίζεται ως **δευτέρας τάξεως** ή **ασθενώς στάσιμη** ή **κατά συνδιακύμανση στάσιμη**.

Δηλαδή, οι υποθέσεις που θέλουμε να ισχύουν ώστε να είναι μια διαδικασία **ασθενώς στάσιμη** (και επομένως πριν αρχίσουμε τον προσδιορισμό του κατάλληλου μοντέλου) είναι:

1.  $E(X_t) = \mu$  (ο μέσος είναι ανεξάρτητος του χρόνου  $t$ )
2.  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$  (η διασπορά είναι ανεξάρτητη του χρόνου  $t$ )
3.  $\text{Cov}(X_t, X_{t+s}) = \text{Cov}(X_{t+m}, X_{t+m+s}) = \gamma_s$  (συνδιασπορά ανεξάρτητη του χρόνου  $t$ )

Επειδή  $X_t, X_{t+s}$  είναι παρατηρήσεις της ίδιας μεταβλητής που απέχουν χρονικά μεταξύ τους κατά υστέρηση  $s$ , η **συνδιακύμανση**  $\text{Cov}(X_t, X_{t+s})$  αναφέρεται και ως **αυτοσυνδιακύμανση** (autocovariance).



## Παρατηρήσεις

- $Cov(X_t, X_{t+s}) = Cov(X_{t+s}, X_t)$
- $\gamma_s = \gamma_{-s}$
- Για  $s = 0$ :  $\gamma_0 = Var(X_t) = \sigma^2$

## 8. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

Όπως γνωρίζουμε, ο λόγος της συνδιακυμάνσεως προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διακυμάνσεων δυο μεταβλητών είναι ο συντελεστής συσχέτισεως τους.

Στην περίπτωση των χρονοσειρών, ο συντελεστής συσχέτισεως ανάμεσα στην  $X_t$  και την  $X_{t+s}$  ονομάζεται **συντελεστής αυτοσυσχετίσεως** (autocorrelation coefficient) και δίνεται από την σχέση:

$$\rho_s = \frac{Cov(X_t, X_{t+s})}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_{t+s})}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

## Παρατηρήσεις

- Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης  $\rho_s$ , όπως η αυτοσυνδιακύμανση, δεν εξαρτάται από τον χρόνο  $t$  αλλά μόνο από την υστέρηση  $s$ .
- $\rho_s = \rho_{-s}$ .
- Η σχέση που προκύπτει ανάμεσα στον συντελεστή αυτοσυσχέτισης  $\rho_s$  και την υστέρηση  $s$  ονομάζεται **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** (autocorrelation function) και η γραφική απεικόνισή της **διάγραμμα αυτοσυσχέτισης** (correlogram).

Η σημασία της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης στην ανάλυση χρονοσειρών είναι πολύ μεγάλη, γιατί **δείχνει τόσο το βαθμό (ένταση) όσο και το μήκος ή τη χρονική διάρκεια της μνήμης της στοχαστικής διαδικασίας.**

## Βιβλιογραφία

1. Ε. Μπόρα – Σέντα, Χ. Μωυσιάδης. Εφαρμοσμένη στατιστική, Β' έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, 1995.
2. Γ. Κ. Χρήστου. Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Β τόμος (Γ' έκδοση), Εκδόσεις Gutenberg, 2007.
3. Δ. Κουγιουμτζής. Σημειώσεις μαθήματος Χρονοσειρών.
4. Γ. Καλαμβόκη. Μέθοδοι πρόβλεψης χρονοσειρών: χρονοσειρές στην ελληνική οικονομία. Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία, Πάτρα, 2017.