Χρονικές σειρές

12^{o} μάθημα: Έλεγχοι στασιμότητας

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ: Εκτίμηση παραμέτρων γραμμικών μοντέλων

Συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης

Εαρινό εξάμηνο 2018-2019

Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διδάσκουσα: **Αγγελική Παπάνα**

Μεταδιδακτορική Ερευνήτρια

Πολυτεχνική σχολή, Α.Π.Θ. & Οικονομικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

http://users.auth.gr/~agpapana/

Στασιμότητα χρονοσειρών

Νόθα αποτελέσματα-spurious regression

Ο έλεγχος στασιμότητας είναι απαραίτητος ώστε η στοχαστική ανάλυση να οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα. Αν η σειρά δεν είναι στάσιμη μπορεί καταλήξουμε στο πρόβλημα γνωστό ως spurious regression.

Τα δεδομένα χρονολογικών σειρών συχνά περιλαμβάνουν τάση δηλαδή η σειρά εμφανίζει μία σταθερή συμπεριφορά ή κατεύθυνση.

Χρονοσειρές με όμοια τάση φαίνεται να συσχετίζονται. Ο συντελεστής προσδιορισμού της αντίστοιχης παλινδρόμησης είναι υψηλός χωρίς να υπάρχει κάποια ερμηνεία της συσχέτισης. Το φαινόμενο παρατηρείται έντονα όταν παλινδρομούμε μη στάσιμες σειρές. Στην περίπτωση αυτή οι στατιστικοί έλεγχοι με την t και F στατιστική δεν είναι αξιόπιστοι.

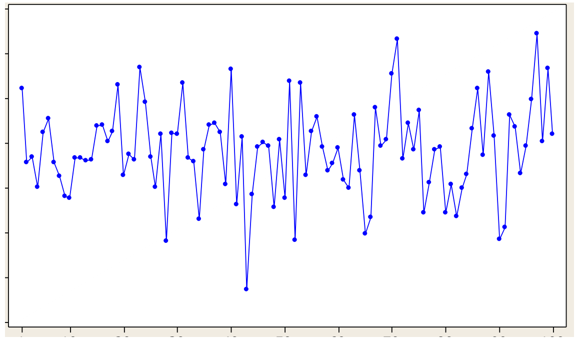
Έλεγχοι στασιμότητας χρονοσειράς

Μπορούμε να ελέγξουμε την στασιμότητα μίας χρονολογικής σειρά ως εξής:

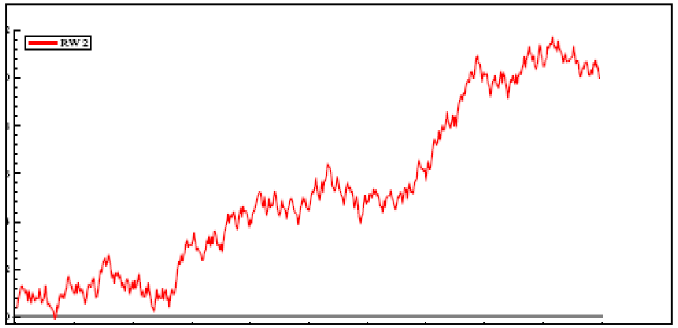
- Μελετώντας την **γραφική παράσταση** της σειράς
- Κατασκευάζοντας και μελετώντας την **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** και την γραφική της παράσταση (**correlogram**)
- Πραγματοποιώντας στατιστικούς ελέγχους για τον **συντελεστή αυτοσυσχέτισης** (**Q statistic**)
- Πραγματοποιώντας **έλεγχο για μοναδιαία ρίζα** (**Dickey-Fuller test**)

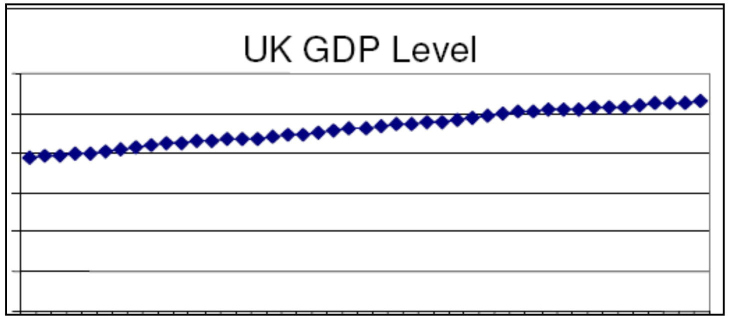
- Μελετώντας την **γραφική παράσταση** της σειράς

Στάσιμη

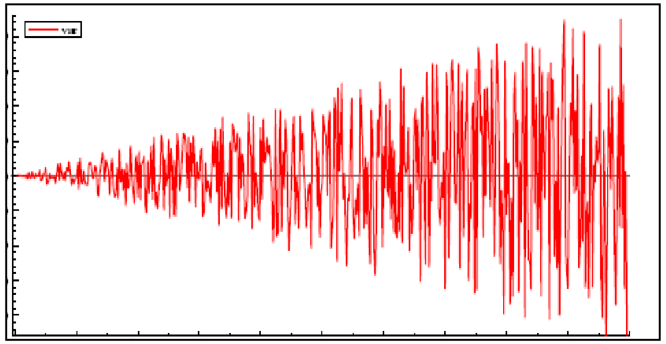


Μη στάσιμες - τάση



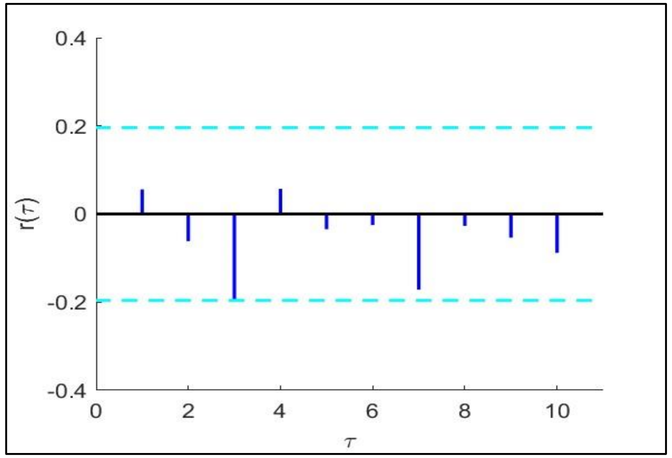


Μη στάσιμη –
η διακύμανση δεν
είναι σταθερή στον χρόνο

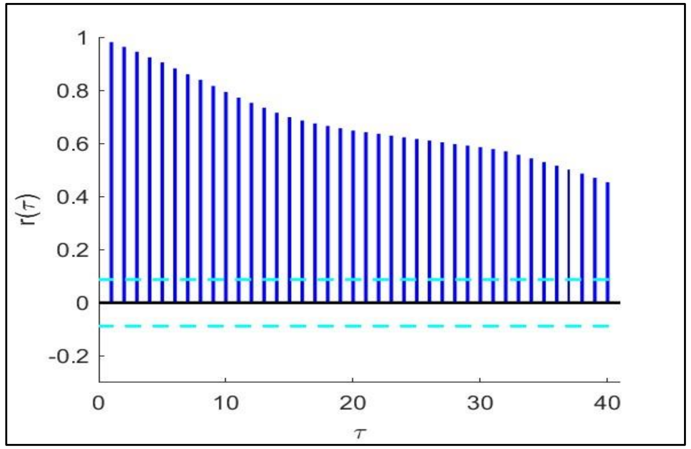


- Κατασκευάζοντας και μελετώντας την **συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** και την γραφική της παράσταση (**correlogram**)

Στάσιμη



Μη στάσιμη



- Πραγματοποιώντας στατιστικούς ελέγχους για τον **συντελεστή αυτοσυσχέτισης** (**Q statistic**)

Η στατιστική αυτή χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της συνδυαστικής υπόθεσης ότι όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν:

$$\boxed{Q = \mathrm{T}\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}_k^2}$$

όπου T το μέγεθος του δείγματος και k το πλήθος των υστερήσεων.

Αν τιμή της στατιστικής που υπολογίζουμε είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή της $\mathcal{X}^2$ με m β.ε. και κάποια στάθμη στατιστικής σημαντικότητας τότε η μηδενική υπόθεση ότι όλοι οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης είναι μηδέν απορρίπτεται και η σειρά ΔΕΝ είναι στάσιμη.

- Πραγματοποιώντας **έλεγχο για μοναδιαία ρίζα**

Έλεγχος Dickey-Fuller

Ο έλεγχος αυτός βασίζεται στην εμπειρική τιμή της στατιστικής t από μια απλή παλινδρόμηση, όμως η σύγκριση για την αποδοχή ή όχι της H_0 δεν γίνεται με τιμές από την t - κατανομή αλλά με τιμές που έχουν προσδιοριστεί εμπειρικά από τον MacKinnon(1991).

Θεωρούμε το παρακάτω μοντέλο AR(1): $\Upsilon_t = \alpha\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Όπως γνωρίζουμε, για να είναι στάσιμη η σειρά πρέπει: $|\alpha| < 1$.

Αν $\alpha = 1$, τότε η σειρά είναι μη στάσιμη.

Με τον έλεγχο Dickey-Fuller γίνεται έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης

$\mathbf{H_0}$: $\alpha = 1$

$\mathbf{H_1}$: $\alpha \neq 1$

Στην περίπτωση που ισχύει $\alpha = 1$, η κατανομή του t και του F δεν συμπίπτουν με την γνωστή κατανομή του t και του F. Δηλαδή οι κρίσιμες τιμές των στατιστικών t και F δεν είναι κατάλληλες για τον έγκυρο έλεγχο της παραπάνω υπόθεσης.

Για να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα, οι Dickey-Fuller *επαναπαραμετροποίησαν* το μοντέλο παίρνοντας πρώτες διαφορές:

$$\Delta \Upsilon_t = \Upsilon_t - \Upsilon_{t-1} = (\alpha - 1)\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \beta\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

όπου ελέγχεται η μηδενική υπόθεση

H_0: $\alpha - 1 = 0$ ή $\beta = 0$

H_1: $\alpha - 1 \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

Ο έλεγχος της παραπάνω υπόθεσης μπορεί να γίνει με την βοήθεια των πινάκων της κατανομής που κατασκεύασαν οι Dickey-Fuller (τ_1).

Η $\mathbf{H_0}$ γίνεται δεκτή αν η t-στατιστική του συντελεστή β

$$\boxed{t = \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}}$$

είναι μικρότερη από την t-στατιστική των Dickey-Fuller (τιμή του τ_1).

Τότε συμπεραίνουμε ότι έχουμε μοναδιαία ρίζα και άρα η σειρά ΔΕΝ είναι στάσιμη.

Παράδειγμα

Σε μια χρονοσειρά με 100 δεδομένα για το μοντέλο: $\Delta\Upsilon_t = \beta\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

προέκυψε με την γραμμική παλινδρόμηση: $\Delta\Upsilon_t = -0.52\Upsilon_{t-1}, s_{\hat{\beta}} = 0.288$

Η στατιστική ελέγχου είναι: $|t| = \left|\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}\right| = \left|\frac{-0.52}{0.288}\right| = 1.81.$

Η κρίσιμη τιμή από τον πίνακα των Dickey-Fuller είναι $|\tau_1| = 1.95$ (σε στάθμη σημαντικότητας 5%).

Οπότε: $|t| = 1.81 < |\tau_1| = 1.95$ δηλαδή αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση H_0: $\beta = 0$ που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδιαία ρίζα ($\alpha = 1$), η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη.

Προσοχή

Αν κάναμε τον έλεγχο με την κατανομή t-student η κρίσιμη τιμή από τον αντίστοιχο πίνακα t-student για στάθμη σημαντικότητας για 5% και T=100 είναι $|t_1| = 1.645$ οπότε ισχύει:

$$|t| = 1.81 > |t_1| = 1.645$$

οπότε απορρίπτουμε την H_0: $\alpha = 1$

Άρα **ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΛΑΘΟΣ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ** αν χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα της **κατανομής t-student**.

Αν στο αρχικό μοντέλο θεωρήσουμε ότι υπάρχει σταθερός όρος, δηλαδή

$$\Upsilon_t = \delta + \alpha\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

τότε το μετασχηματισμένο υπόδειγμα θα είναι

$$\Delta\Upsilon_t = \delta + (\alpha - 1)\Upsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

και ο έλεγχος μοναδιαίας ρίζας εφαρμόζεται όπως προηγουμένως.

Εκτίμηση παραμέτρων γραμμικών μοντέλων

1) Διαδικασία AR(p)

Μέθοδος των ροπών ή μέθοδος Yule-Walker

Στα AR(p), θεωρώντας ότι η διαδικασία έχει μέση τιμή μηδέν και πολλαπλασιάζοντας με X_{t+k} και παίρνοντας τις μέσες τιμές, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\gamma_k = \alpha_1\gamma_{k-1} + \alpha_2\gamma_{k-2} + \cdots + \alpha_p\gamma_{k-p} \qquad \text{ή}$$

$$\boxed{\rho_k = \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p\rho_{k-p}}$$

Οι εξισώσεις Yule-Walker είναι ένα σύστημα p εξισώσεων με p αγνώστους το οποίο προκύπτει από την σχέση

$$\boxed{\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p \rho_{k-p}}$$

για $k = 1,2, \dots, p$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2 + \cdots + \alpha_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \rho_1 + \cdots + \alpha_p \rho_{p-2} \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots \\ \rho_p = \alpha_1 \rho_{p-1} + \alpha_2 \rho_{p-2} + \alpha_3 \rho_{p-3} + \cdots + \alpha_p \end{array}}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, αντικαθιστούμε τις δειγματικές αυτοσυσχετίσεις και λύνουμε το σύστημα για να εκτιμήσουμε τους συντελεστές του AR(p), δηλ. τα α_1, α_2,.., α_p.

π.χ.

- **Διαδικασία AR(1)**

Εξίσωση Yule-Walker $\rho_1 = \alpha_1$ (Αντικαθιστώ όπου ρ_1το $\hat{\rho}_1$)

Λύση συστήματος: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\rho}_1$

- **Διαδικασία AR(2)**

Εξισώσεις Yule-Walker $\rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2\rho_1$

$$\rho_2 = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2$$

Λύση συστήματος: $\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\rho}_1(1-\hat{\rho}_2)}{1-\hat{\rho}_1^2}$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\hat{\rho}_2-\hat{\rho}_1^2}{1-\hat{\rho}_1^2}$$

Οι παραπάνω εκτιμητές των $\hat{\alpha}$ ονομάζονται εκτιμητές Yule – Walker.

2) Διαδικασία MA(q)

Μέθοδος των ροπών ή μέθοδος Yule-Walker

Η συνάρτηση αυτοδιασποράς ενός MA(q) μοντέλου είναι:

$$\gamma_k = \mathrm{E}(\mathrm{X}_t \mathrm{X}_{t-k}) =$$
$$= \mathrm{E}\big(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}\big)\big(\varepsilon_{t-k} + \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-k-q}\big)$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0, & k > q \\ \big(\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q \theta_{q-k}\big)\sigma^2, & k = 1,2 \ldots, q \\ \gamma_{-k}, & k < 0 \end{cases}$$

ενώ για $k = 0$:

$$\gamma_0 = \mathrm{Var}(X_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$$

Διαιρώντας με την διασπορά της σειράς τις παραπάνω εξισώσεις των αυτοδιασπορών, προκύπτει το σύστημα:

$$\boxed{\rho_k = \begin{cases} 0, & k > q \\ \dfrac{\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \cdots + \theta_q\theta_{q-k}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2}, & k = 1,2\ldots,q \\ \rho_{-k}, & k < 0 \end{cases}}$$

το οποίο δεν είναι γραμμικό και η λύση του απαιτεί μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης. Κατά τα λοιπά όμως η λύση αυτού του συστήματος μετά την αντικατάσταση των ρ_k, με τα δειγματικά $\hat{\rho}_k$, δίνει εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου με την μέθοδο των ροπών.

π.χ.

- **Διαδικασία MA(1)**

Σύστημα $\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, k = 1 \\ 0, \quad k > 1 \end{cases}$ (Αντικαθιστώ όπου ρ_1το $\hat{\rho}_1$)

Η λύση του συστήματος δίνει δυο εκτιμητές της παραμέτρου $\hat{\theta}_1$.

Από αυτές επιλέγεται εκείνη που ικανοποιεί την συνθήκη αντιστρεψιμότητας.

3) Διαδικασία ARMA(p,q)

Μέθοδος των ροπών ή μέθοδος Yule-Walker

Αντιστοίχως με τις προηγούμενες περιπτώσεις, εκτιμάται η συνάρτηση αυτοδιασποράς της διαδικασίας ARMA και έπειτα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, οπότε προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων για κάθε υστέρηση. Λύνοντας το σύστημα αυτό, προκύπτουν οι εκτιμητές των συντελεστών του μοντέλου. Το σύστημα δεν είναι γραμμικό, οπότε για την λύση του απαιτούνται μέθοδοι της αριθμητικής ανάλυσης.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός μοντέλου ARMA(p,q) είναι:

$$\rho_k = \begin{cases} \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p\rho_{k-p}, & k \geq q+1 \\ \alpha_1\rho_{k-1} + \alpha_2\rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p\rho_{k-p} + \\ \mathrm{E}(X_{t-k}\varepsilon_t) + \theta_1\mathrm{E}(X_{t-k}\varepsilon_{t-1}) + \cdots + \theta_q\mathrm{E}\left(X_{t-k}\varepsilon_{t-q}\right), & k \leq q \end{cases}$$

Μερικές αυτοσυσχετίσεις

$$\boxed{\rho_{11} = \rho_1}$$

$$\boxed{\rho_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}}$$

$$\boxed{\rho_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}}$$

Μερικές αυτοσυσχετίσεις

$$\rho_{44} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & \rho_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

κ.ο.κ.