Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

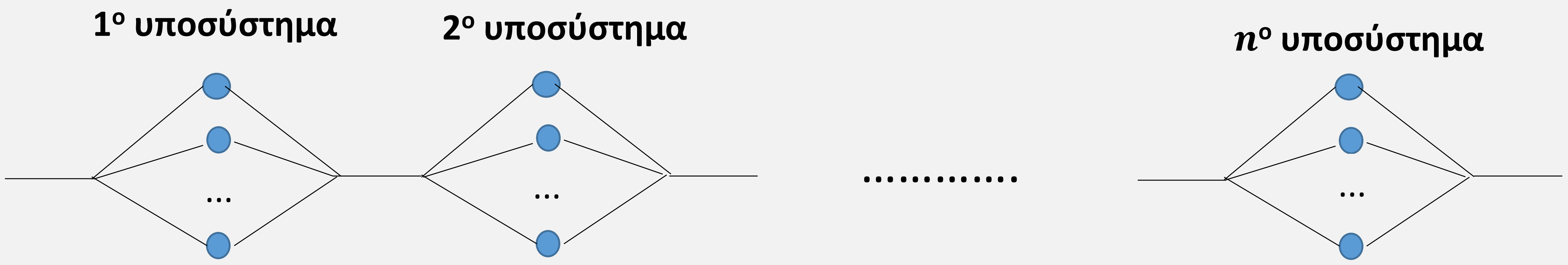
7η ενότητα: **Προβλήματα αξιοπιστίας**

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

Το πρόβλημα της αξιοπιστίας

Έστω ότι έχουμε ένα εργαλείο το οποίο έχει σε σειρά ορισμένα όργανα, που όταν ένα από αυτά δεν λειτουργεί, το εργαλείο σταματά να λειτουργεί. Δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο n υποσυστημάτων όπου στο καθένα τοποθετείται ένα πλήθος οργάνων παράλληλα. Σε κάθε υποσύστημα τοποθετούμε ένα πλήθος οργάνων παράλληλα, ώστε αν χαλάσει το ένα όργανο, να λειτουργήσει το επόμενο.



Δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε μεγάλο αριθμό από όργανα σε παράλληλη θέση διότι υπάρχουν πάντα περιορισμοί, π.χ. βάρος, κόστος κτλ

Το πρόβλημα

Θέλουμε να **μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα λειτουργίας του εργαλείου** όταν είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κάποια όργανα σε παράλληλη θέση έτσι ώστε αν χαλάσει κάποιο από τα όργανα που είναι σε παράλληλη θέση, θα λειτουργήσει κάποιο άλλο.

Συμβολισμοί

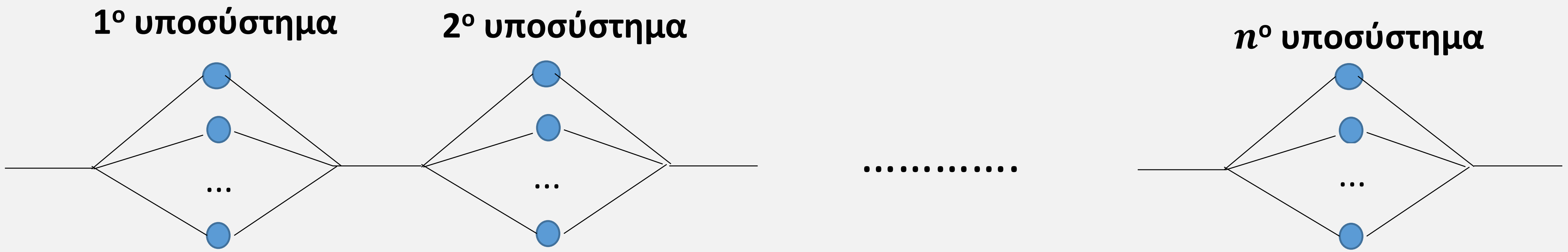
$\boldsymbol{n}$: πλήθος υποσυστημάτων

$\boldsymbol{x_i}$: πλήθος οργάνων στο $\boldsymbol{i}$ υποσύστημα

$\boldsymbol{p_i(x_i)}$: η πιθανότητα να λειτουργεί το $\boldsymbol{i}$ υποσύστημα όταν έχει $\boldsymbol{x_i}$ όργανα παράλληλα τοποθετημένα

$\boldsymbol{c_i(x_i)}$: το κόστος αγοράς (και τοποθέτησης) των $\boldsymbol{x_i}$ οργάνων του $\boldsymbol{i}$ υποσυστήματος

$\boldsymbol{K}$: το κεφάλαιο που διαθέτουμε για την αγορά των οργάνων

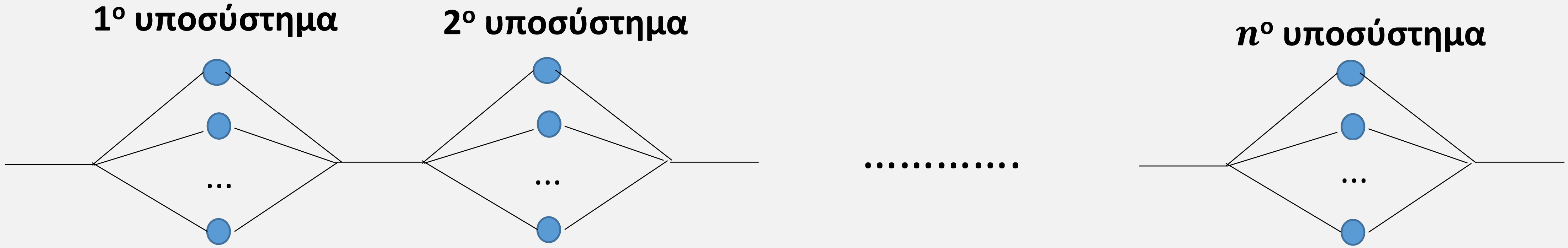


Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα να λειτουργούν τα όργανα που βρίσκονται σε σειρά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, έτσι η πιθανότητα να λειτουργήσουν και τα $\boldsymbol{n}$-όργανα των $\boldsymbol{n}$ υποσυστημάτων είναι:

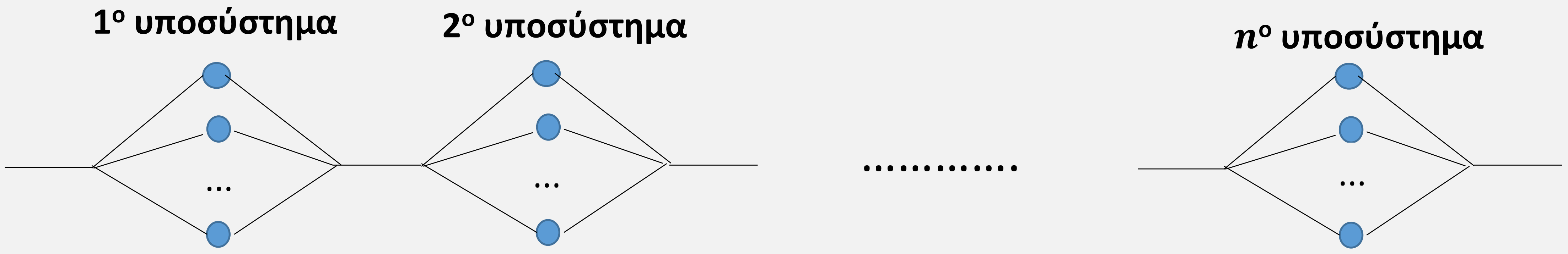
$$\boldsymbol{p_1(x_1)\cdot p_2(x_2)\cdots p_n(x_n)=\prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)}$$

Πρόβλημα αξιοπιστίας: $\max \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$

με $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i) \le K,\ x_i = 0,1,\dots$



Επειδή το πρόβλημα (μαθηματικά) έχει **ΓΙΝΟΜΕΝΟ** και όχι **ΑΘΡΟΙΣΜΑ**, **ΔΕΝ** μπορούμε να εφαρμόσουμε μεθόδους του ακέραιου προγραμματισμού, αλλά μόνο με **ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ**.



Βέλτιστη συνάρτηση

$\boldsymbol{f_i(k)}$ = {η μέγιστη πιθανότητα λειτουργίας των υποσυστημάτων $i, i+1, \ldots, n$ όταν για αυτά υπάρχει διαθέσιμο κεφάλαιο K}

Επαναληπτική σχέση

$$\boldsymbol{f_i(k)} = max_{x_i}\{p_i(x_i)\, f_{i+1}(k - c_i(x_i))\},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$x_i = 1, \ldots, k/c_i(x_i)$$

$$k = 0, 1, \ldots, K$$

Οριακές συνθήκες

Για $\boldsymbol{i = n}$:

$\boldsymbol{f_n(k)} = max_{x_n}\{p_n(x_n)\}$ με $c_n(x_n) \leq K$

Άσκηση

Έστω ένα σύστημα αντιστάστεων, όπου το 1^{o} υποσύστημα έχει το πολύ 3 αντιστάσεις, το 2^{o} υποσύστημα έχει το πολύ 3 αντιστάσεις και το 3^{o} υποσύστημα έχει το πολύ 2 αντιστάσεις. Ζητείται το πλήθος των αντιστάσεων σε κάθε υποσύστημα που μπορούν να αγοραστούν με κεφάλαιο $K = 9$, ώστε να προκύπτει για το σύστημα η μέγιστη δυνατή αξιοπιστία.

$c_i(j)$	1	2	3
1	1	2	4
2	3	2	1
3	3	4	-

$\pi_i(j)$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

Βέλτιστη συνάρτηση

$\boldsymbol{f_i(k)} = \{$η μέγιστη πιθανότητα λειτουργίας των υποσυστημάτων $i, i+1, \ldots, 3$ όταν για αυτά υπάρχει διαθέσιμο κεφάλαιο $K\}$

Επαναληπτική σχέση

$$\boldsymbol{f_i(k)} = max\{\pi_i(j)\, f_{i+1}(k - c_i(j))\}$$

$\boldsymbol{c_i(j)}$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	4
2	3	2	1
3	**3**	4	-

$\boldsymbol{\pi_i(j)}$	**1**	**2**	**3**
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

Οριακές συνθήκες

- Για $\boldsymbol{i = 3}$:

$$\boldsymbol{f_3(3)} = \pi_3(1) = 0.5$$

η αξιοπιστία που θα δώσει το 3ο υποσύστημα με 1 αντίσταση

($\boldsymbol{3}$:ελάχιστος κόστος για μια αντίσταση στο 3ο υποσύστημα)

$f_3(4) = \max\{\pi_3(1), \pi_3(2)\} = 0.5$ (η αξιοπιστία που θα δώσει το 3ο υποσύστημα με 2 αντιστάσεις)

$f_3(k) = \max\{\pi_3(1), \pi_3(2)\} = 0.5$

όπου $k = 5,6,7$

Η μέγιστη τιμή του k είναι 7 ώστε να αφήσουμε κατά ελάχιστο ποσό από 1 χρηματική μονάδα για τα 2 πρώτα υποσυστήματα.

$c_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	4
2	3	2	1
3	**3**	4	-

$\pi_i(j)$	**1**	**2**	**3**
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

- Για $i = 2$:

$c_2(3) = 1$: το 3ο όργανο του 2ου υποσυστήματος έχει το μικρότερο κόστος

$$f_2(4) = \pi_2(3) \cdot f_3\left(4 - c_2(3)\right) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

4: το ελάχιστο ποσό που χρειαζόμαστε για τα υποσυστήματα 2 και 3

$$f_2(5) = \max\{\pi_2(1) \cdot f_3\left(5 - c_2(1)\right),$$
$$\pi_2(2) \cdot f_3\left(5 - c_2(2)\right), \pi_2(3) \cdot f_3\left(5 - c_2(3)\right)\} =$$
$$\max\{0.2 \cdot 0, 0.4 \cdot 0.5, 0.3 \cdot 0.5\} = 0.2$$

(Θέτω $f_3(2) = 0$ γιατί δεν μπορεί να υπολογιστεί)

$$f_2(6) = \max\{\pi_2(1) \cdot f_3\left(6 - c_2(1)\right),$$
$$\pi_2(2) \cdot f_3\left(6 - c_2(2)\right), \pi_2(3) \cdot f_3\left(6 - c_2(3)\right)\} =$$
$$\max\{0.1, 0.2, 0.15\} = 0.2$$

$c_i(j)$	1	2	3
1	1	2	4
2	3	2	1
3	3	4	-

$\pi_i(j)$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

Ομοίως

$f_2(7) = 0.2$

$f_2(8) = 0.2$

$f_2(9) = 0.2$

$c_i(j)$	1	2	3
1	1	2	4
2	3	2	1
3	3	4	-

$\pi_i(j)$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

- Για $i = 1$:

$$f_1(9) = \max\{\pi_1(1) \cdot f_2\left(9 - c_1(1)\right), \pi_1(2) \cdot f_2\left(9 - c_1(2)\right), \pi_1(3) \cdot f_2\left(9 - c_1(3)\right)\}$$

$$= \max\{0.1 \cdot 0.2\,,\; 0.2 \cdot 0.2,\; 0.3 \cdot 0.2\} = 0.06$$

Κεφάλαιο

Βέλτιστο πλήθος αντιστάσεων

1 αντίσταση στο 3ο υποσύστημα ($\pi_3(1)$)

2 αντιστάσεις στο 2ο υποσύστημα ($\pi_2(2)$)

3 αντιστάσεις στο 1ο υποσύστημα ($\pi_1(3)$)

Αξιοπιστία

$$\pi_3(1) \cdot \pi_2(2) \cdot \pi_1(3) = 0.06$$

$c_i(j)$	1	2	3
1	1	2	4
2	3	2	1
3	3	4	-

$\pi_i(j)$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.4	0.3
3	0.5	0.4	-

Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.