# Στοχαστικές Στρατηγικές

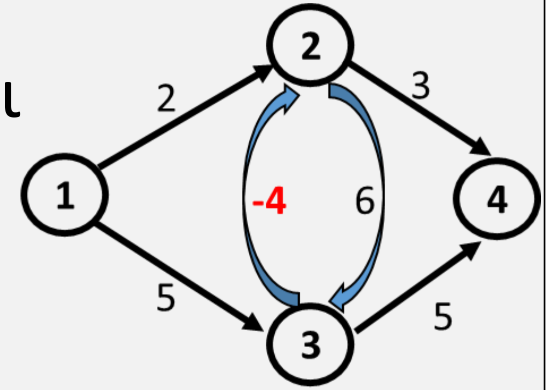
**Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ**

6η ενότητα: **Το γενικό πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής (3)**

**Παπάνα Αγγελική**

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

## 3) Η μέθοδος των μειώσεων




Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις όπου έχει σημασία η διεύθυνση μετάβασης από κόμβο σε κόμβο και υπάρχει περιορισμός στο πλήθος των μεταβάσεων από μεγαλύτερους σε μικρότερους κόμβους (αλλιώς μπορώ να κάνω ατέρμονα κύκλους μεταξύ συγκεκριμένων κόμβων).

## Ορισμός

Λέμε ότι έχουμε μια **μείωση** κατά την μετάβαση από τον κόμβο $\boldsymbol{i}$ στον κόμβο $\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{i} \rightarrow \boldsymbol{j}$) αν $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{j}$.

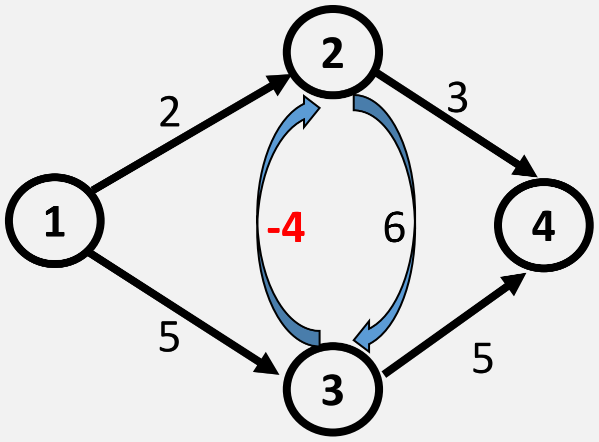
π.χ. στην διαδρομή $\mathbf{1} \rightarrow \boxed{\mathbf{4} \rightarrow \mathbf{2}} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{5}$ έχουμε μια **μείωση** αφού από τον κόμβο $\mathbf{4}$ μεταβαίνουμε στον κόμβο $\mathbf{2}$.

## Το πρόβλημα

Να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{N}$ με **μια** το πολύ **μείωση** **(ή γενικά το πολύ $\boldsymbol{i}$ μειώσεις)**.

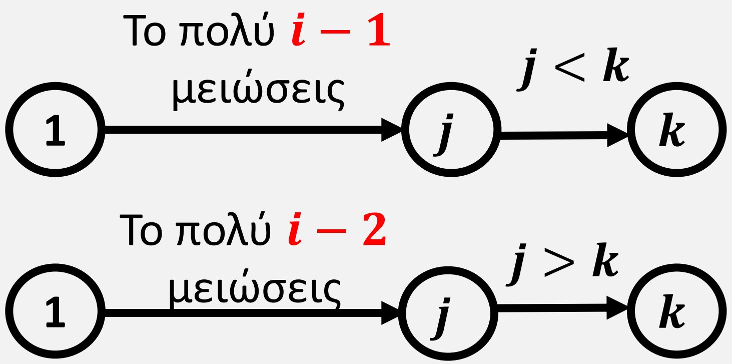
## Βέλτιστη συνάρτηση

$g_i(k) = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο $1$ στον κόμβο $k$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $i-1$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$




## Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{g_i(k) = min\begin{cases} min_{j<k}\{g_i(j) + a_{jk}\} \\ \\ min_{j>k}\{g_{i-1}(j) + a_{jk}\} \end{cases}}$$




Στην τελευταία μετάβαση $j \rightarrow k$ δεν έχω μείωση

Στην τελευταία μετάβαση $j \rightarrow k$ έχω μια μείωση

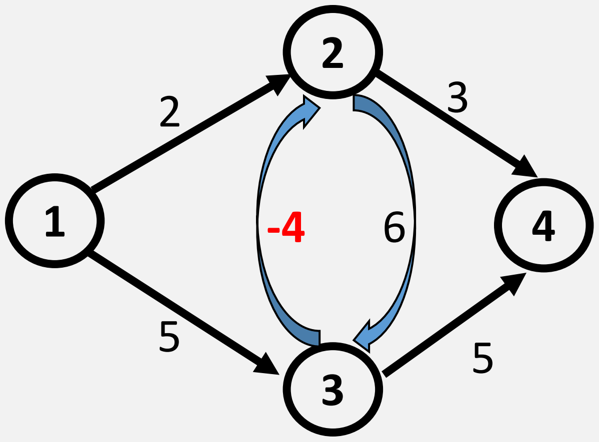
για $i = 1, 2, 3, .., L$, όπου $L \in \mathbb{N}^*$,

$L$: ο μέγιστος αριθμός μειώσεων

$k = 1, 2, 3, .., N$

Για $\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$: (επιτρέπεται $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$)

$$\boxed{\boldsymbol{g_i(1) = min_{j \geq 1}\{g_{i-1}(j) + a_{j1}}}$$



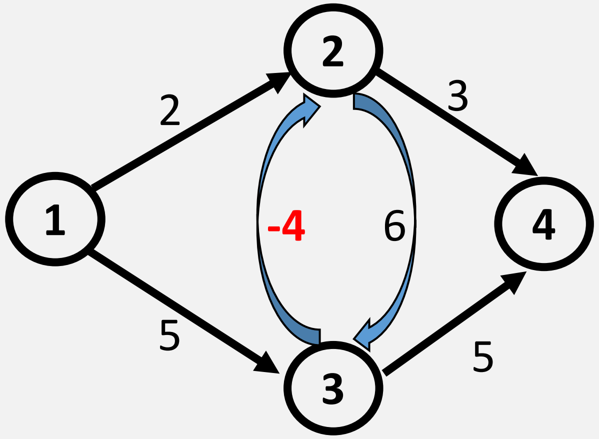

## Οριακές συνθήκες

$$\boxed{\boldsymbol{g_0(k)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

Οριακές συνθήκες: Ορίζονται για $\boldsymbol{i = 0}$ όπου ουσιαστικά έχουμε <u>μηδέν</u> μεταβάσεις από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{k}$ και επιτρέπονται το πολύ $\boldsymbol{i - 1 = 0 - 1 = -1}$ μειώσεις (δηλ. καμία μείωση)

**Άσκηση**

Στο δικτυωτό του σχήματος, να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\mathbf{4}$ με **μια** το πολύ **μείωση**.




Λύση

**Βέλτιστη συνάρτηση**

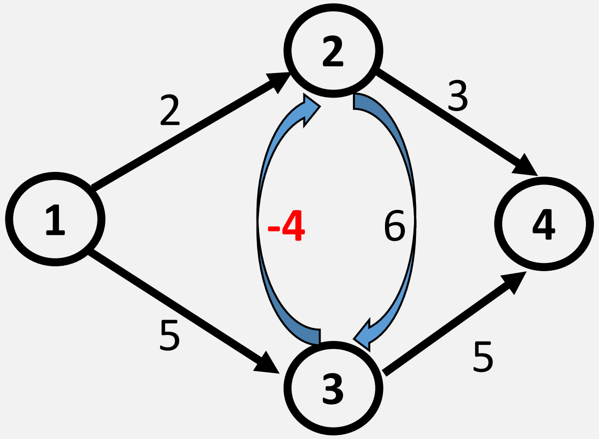
$\boldsymbol{g_i(k)} = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $\boldsymbol{i-1}$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

**Μια το πολύ μείωση** σημαίνει:

$\boldsymbol{i-1=1} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{i=2}}$

- **Οριακές συνθήκες**

  Για $\boldsymbol{i = 0}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4}$:




$$g_0(1) = 0$$
$$g_0(2) = \infty$$
$$g_0(3) = \infty$$
$$g_0(4) = \infty$$

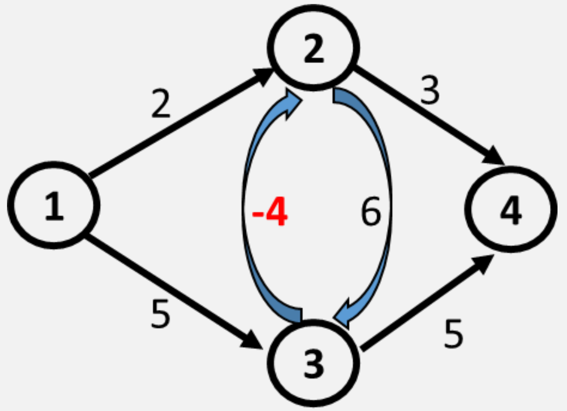
- Για $\boldsymbol{i = 1}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4}$:

$$g_1(1) = \min\{g_0(1) + a_{11}, g_0(2) + a_{21}, g_0(3) + a_{31}, g_0(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$g_1(2) = \min\begin{cases} \min\{g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}\} \\ g_1(1) + a_{12} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{\infty - 4, \infty + \infty\} \\ 0 + 2 \end{cases} = 2$$

$$g_1(3) = \min\begin{cases} g_0(4) + a_{43} \\ \min\{g_1(1) + a_{13}, g_1(2) + a_{23}\} \end{cases} = \min\begin{cases} \infty + \infty \\ \min\{0 + 5, 2 + 6\} \end{cases} = 5$$

$$g_1(4) = \min\{g_1(1) + a_{14}, g_1(2) + a_{24}, g_1(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 2 + 3,5 + 5\} = 5$$



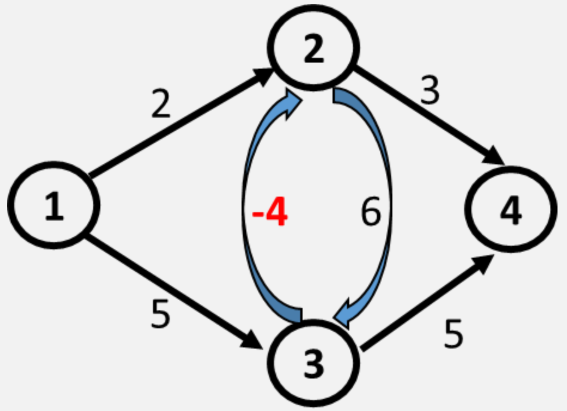
- Για $\boldsymbol{i = 2}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4}$:

$$g_2(1) = \min\{g_1(1) + a_{11}, g_1(2) + a_{21}, g_1(3) + a_{31}, g_1(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, 2 + \infty, 5 + \infty, 5 + \infty\} = 0$$

$$g_2(2) = \min\begin{cases}\min\{g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}\} \\ g_2(1) + a_{12}\end{cases} = \min\begin{cases}\min\{5 - 4, 5 + \infty\} \\ 0 + 2\end{cases} = 1$$

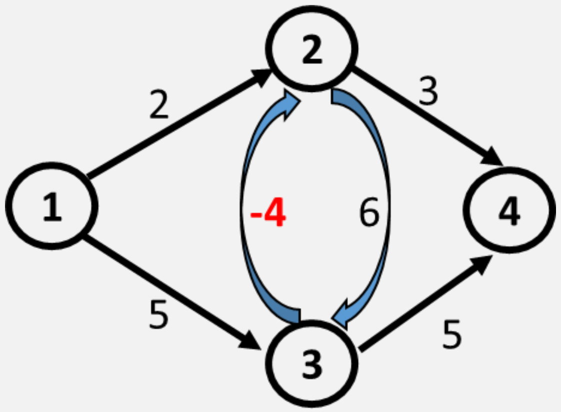
$$g_2(3) = \min\begin{cases}g_1(4) + a_{43} \\ \min\{g_2(1) + a_{13}, g_2(2) + a_{23}\}\end{cases} = \min\begin{cases}5 + \infty \\ \min\{0 + 5, 1 + 6\}\end{cases} = 5$$

$$g_2(4) = \min\{g_2(1) + a_{14}, g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 1 + 3, 5 + 5\} = 4$$



Είναι:

$$\boldsymbol{g_2(4)} = \min\{g_2(1) + a_{14}, \boldsymbol{g_2(2) + a_{24}}, g_2(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, \boldsymbol{1 + 3}, 5 + 5\} = \boldsymbol{4}$$




$$\boldsymbol{g_2(2)} = \min\begin{cases} min\{\boldsymbol{g_1(3) + a_{32}}, g_1(4) + a_{42}\} \\ g_2(1) + a_{12} \end{cases} = \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{g_1(3)} = \min\begin{cases} g_0(4) + a_{43} \\ min\{\boldsymbol{g_1(1) + a_{13}}, g_1(2) + a_{23}\} \end{cases} = \boldsymbol{5}$$

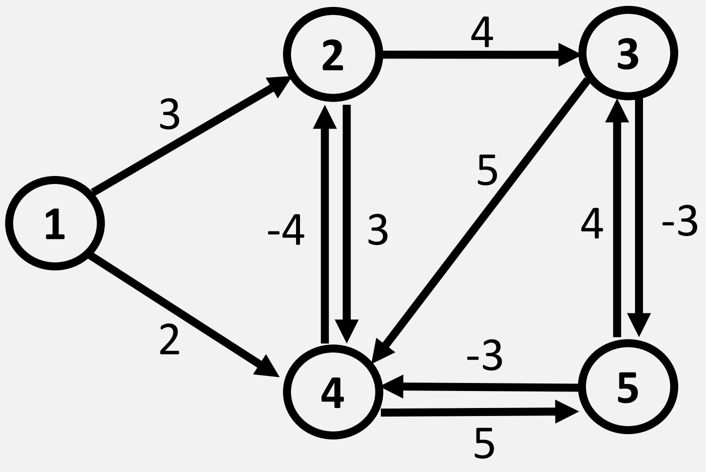
Άρα η βέλτιστη διαδρομή με μια το πολύ μείωση είναι:

$\boldsymbol{1 \to 3 \to 2 \to 4}$

με κόστος διαδρομής **4.**

## Άσκηση

Στο δικτυωτό του σχήματος, να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **1** στον κόμβο **5** με **μια** το πολύ **μείωση**.




Λύση

**Βέλτιστη συνάρτηση**

$g_i(k) = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο **1** στον κόμβο $k$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $i-1$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

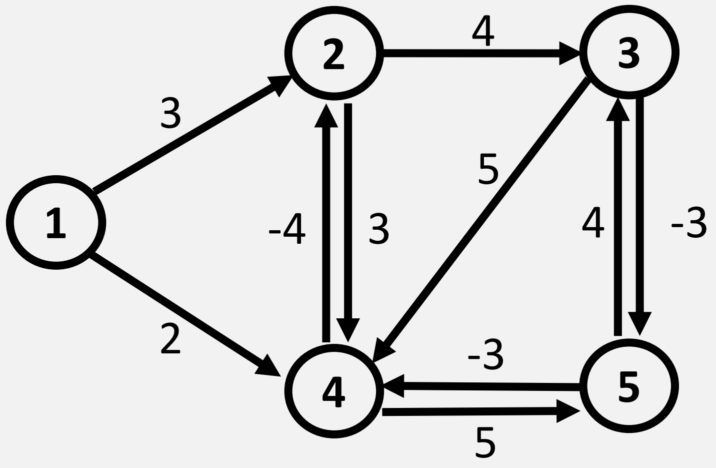
**Μια το πολύ μείωση** σημαίνει:

$i - 1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{i = 2}$

- **Οριακές συνθήκες** για $\boldsymbol{i = 0}$

$g_0(1) = 0$

$g_0(2) = g_0(3) = g_0(4) = g_0(5) = \infty$




- Για $\boldsymbol{i = 1}$ και $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, 4, 5}$:

$$g_1(1) = \min\{g_0(1) + a_{11}, g_0(2) + a_{21}, g_0(3) + a_{31}, g_0(4) + a_{41}, g_0(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$g_1(2) = \min\begin{cases} min\{g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}, g_0(5) + a_{52}\} \\ g_1(1) + a_{12} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{\infty, \infty, \infty\} \\ 0 + 3 \end{cases} = 3$$

$$g_1(3) = \min\begin{cases} \min\{g_0(4) + a_{43}, g_0(5) + a_{53}\} \\ \min\{g_1(1) + a_{13}, g_1(2) + a_{23}\} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{\infty, \infty\} \\ \min\{\infty, 7\} \end{cases} = 7$$

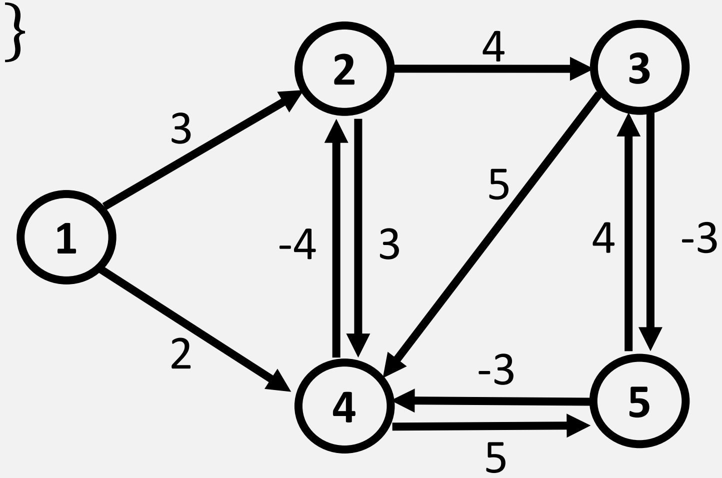
$$g_1(4) = \min\begin{cases} g_0(5) + a_{54} \\ \min\{g_1(1) + a_{14}, g_1(2) + a_{24}, g_1(3) + a_{34}\} \end{cases} = \min\begin{cases} \infty \\ \min\{2,6,12\} \end{cases} = 2$$

$$g_1(5) = \min\{g_1(1) + a_{15}, g_1(2) + a_{25}, g_1(3) + a_{35}, g_1(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 4,7\} = 4$$

- Για $\boldsymbol{i = 2}$ και $\boldsymbol{j = 1, 2, 3, 4, 5}$:

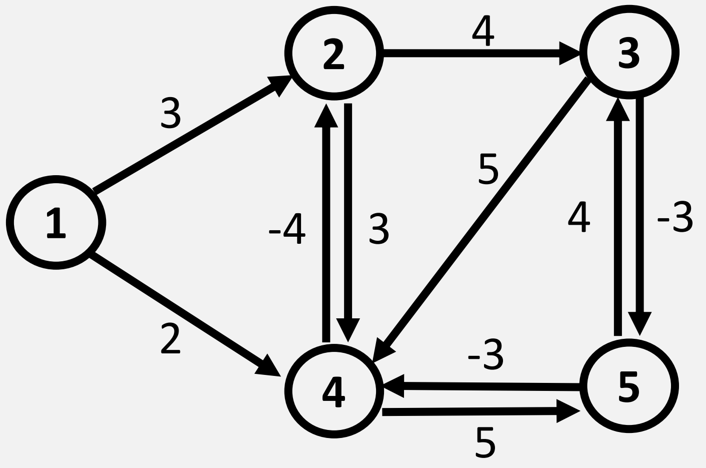
$$g_2(1) = \min\{g_1(1) + a_{11}, g_1(2) + a_{21}, g_1(3) + a_{31}, g_1(4) + a_{41}, g_1(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$g_2(2) = \min\begin{cases} min\{g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}, g_1(5) + a_{52}\} \\ g_2(1) + a_{12} \end{cases}$$
$$= \min\begin{cases} \min\{\infty, -2, \infty\} \\ 3 \end{cases} = -2$$



$$g_2(3) = \min\begin{cases}\min\{g_1(4) + a_{43}, g_1(5) + a_{53}\}\\ \min\{g_2(1) + a_{13}, g_2(2) + a_{23}\}\end{cases}$$

$$= \min\begin{cases}\min\{\infty, 8\}\\ \min\{\infty, 2\}\end{cases} = 2$$




$$g_2(4) = \min\begin{cases}g_1(5) + a_{54}\\ \min\{g_2(1) + a_{14}, g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\}\end{cases}$$

$$= \min\begin{cases}4 - 3\\ \min\{2, -2 + 3, 2 + 5\}\end{cases} = 1$$

$$g_2(5) = \min\{g_2(1) + a_{15}, g_2(2) + a_{25}, g_2(3) + a_{35}, g_2(4) + a_{45}\}$$

$$= \min\{\infty, \infty, 2 + (-3), 1 + 5\} = \boxed{-1}$$

Είναι:

$$g_2(5) = \min\{g_2(1) + a_{15}, g_2(2) + a_{25}, g_2(3) + a_{35}, g_2(4) + a_{45}\} = \boxed{-1}$$

$$g_2(3) = \min\begin{cases} \min\{g_1(4) + a_{43}, g_1(5) + a_{53}\} \\ \min\{g_2(1) + a_{13}, g_2(2) + a_{23}\} \end{cases} = 2$$

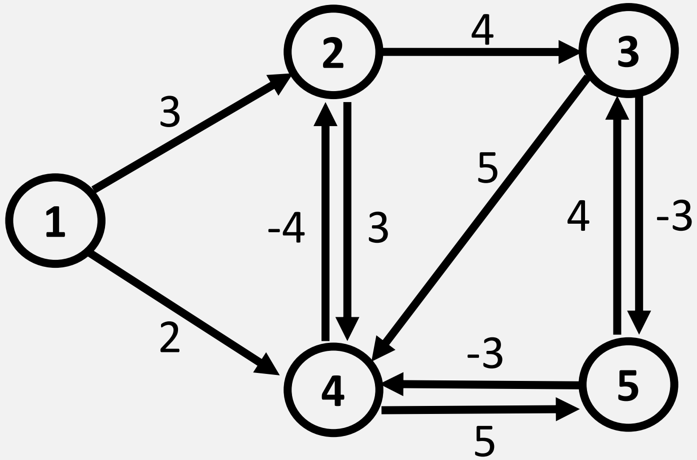
$$g_2(2) = \min\begin{cases} min\{g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}, g_1(5) + a_{52}\} \\ g_2(1) + a_{12} \end{cases} = -2$$

$$g_1(4) = \min\begin{cases} g_0(5) + a_{54} \\ \min\{g_1(1) + a_{14}, g_1(2) + a_{24}, g_1(3) + a_{34}\} \end{cases} = 2$$

Οπότε η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **1** στον **5** με **μια το πολύ μείωση** είναι:

$$1 \to \boxed{4 \to 2} \to 3 \to 5$$

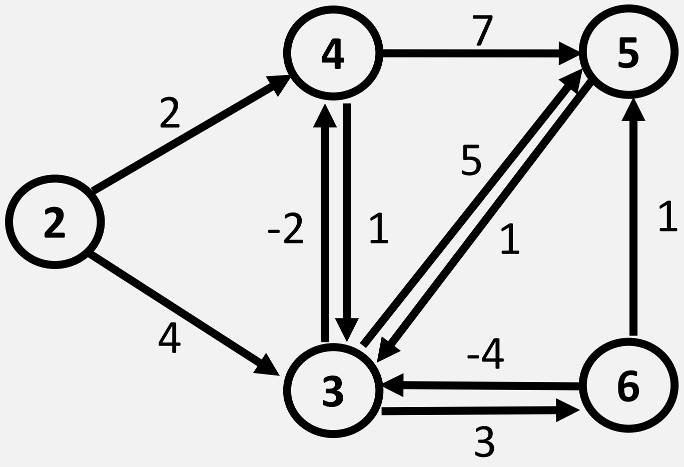
όπου έχουμε μια μείωση



**Άσκηση**

**α)** Στο δικτυωτό του σχήματος, να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή από τον κόμβο **2** στον κόμβο **5** **με μια το πολύ μείωση** αν δεν επιτρέπεται σε μια διαδρομή να υπάρχει το τόξο $3 \rightarrow 4$ δύο φορές.

**β)** Εξηγείστε σχετικά με τη λύση, αν λείπει η υπογραμμισμένη συνθήκη.




Λύση

**α) Βέλτιστη συνάρτηση**

$\boldsymbol{g_i(k)} = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο **2** στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, μεταξύ όλων των διαδρομών που έχουν $\boldsymbol{i-1}$ ή λιγότερες μειώσεις$\}$

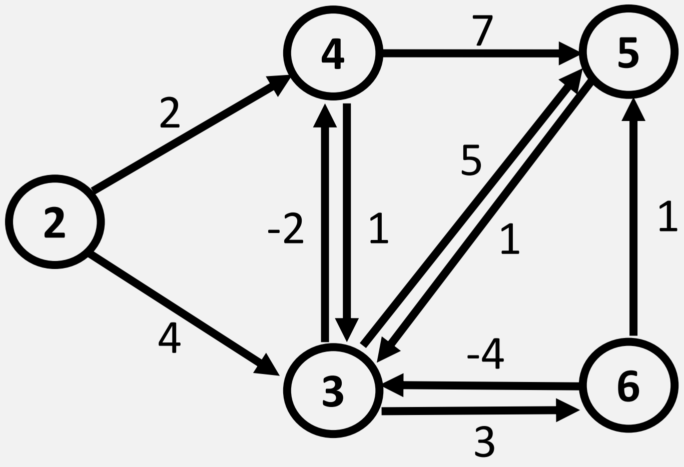
**Μια το πολύ μείωση** σημαίνει:

$$\boldsymbol{i-1=1 \Leftrightarrow i=2}$$

- **Οριακές συνθήκες** για $\boldsymbol{i = 0}$

$$g_0(2) = 0$$

$$g_0(3) = g_0(4) = g_0(5) = g_0(6) = \infty$$




- Για $\boldsymbol{i = 1}$:

$$g_1(2) = \min\{g_0(2) + a_{22}, g_0(3) + a_{32}, g_0(4) + a_{42}, g_0(5) + a_{52}, g_0(6) + a_{62}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$g_1(3) = \min\begin{cases} min\{g_0(4) + a_{43}, g_0(5) + a_{53}, g_0(6) + a_{63}\} \\ g_1(2) + a_{23} \end{cases}$$

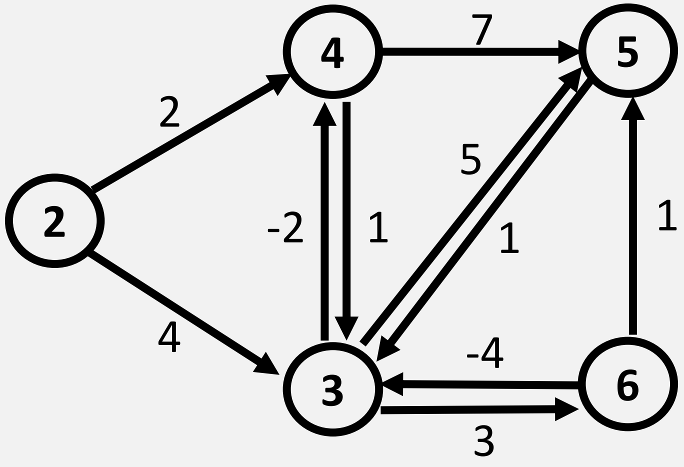
$$= \min\begin{cases} \min\{\infty + 1, \infty + 1, \infty + (-4)\} \\ 0 + 4 \end{cases} = 4$$

$$g_1(4) = \min\begin{cases} \min\{g_0(5) + a_{54}, g_0(6) + a_{64}\} \\ \min\{g_1(2) + a_{24}, g_1(3) + a_{34}\} \end{cases} = \min\begin{cases} \min\{\infty, \infty\} \\ \min\{0 + 2, 4 + (-2)\} \end{cases} = 2$$

$$g_1(5) = \min\begin{cases} g_0(6) + a_{65} \\ \min\{g_1(2) + a_{25}, g_1(3) + a_{35}, g_1(4) + a_{45}\} \end{cases}$$

$$= \min\begin{cases} \infty + 1 \\ \min\{0 + \infty, 4 + 5, 2 + 7\} \end{cases} = 9$$

$$g_1(6) = \min\{g_1(2) + a_{26}, g_1(3) + a_{36}, g_1(4) + a_{46}, g_1(5) + a_{56}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 4 + 3, 2 + \infty, 9 + \infty\} = 7$$



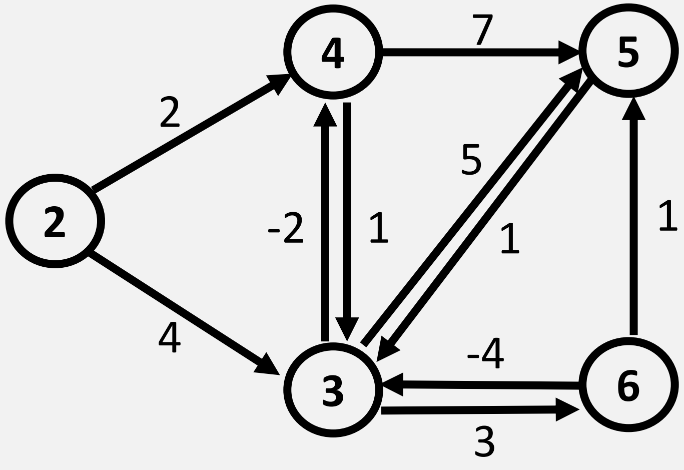
- Για $\boldsymbol{i = 2}$:

$$g_2(2) = \min\{g_1(2) + a_{22}, g_1(3) + a_{32}, g_1(4) + a_{42}, g_1(5) + a_{52}, g_1(6) + a_{62}\}$$
$$= \min\{0 + 0{,}4 + \infty, 2 + \infty, 9 + \infty, 7 + \infty\} = 0$$

$$g_2(3) = \min\begin{cases} min\{g_1(4) + a_{43}, g_1(5) + a_{53}, g_1(6) + a_{63}\} \\ g_2(2) + a_{23} \end{cases}$$

$$= \min\begin{cases} \min\{2 + 1{,}9 + 1{,}7 + (-4)\} \\ 0 + 4 \end{cases} = 3$$

$$g_2(4) = \min\begin{cases} \min\{g_1(5) + a_{54}, g_1(6) + a_{64}\} \\ \min\{g_2(2) + a_{24}, g_2(3) + a_{34}\} \end{cases}$$
$$= \min\begin{cases} \min\{9 + \infty, 7 + \infty\} \\ \min\{0 + 2, 3 + (-2)\} \end{cases} = 1$$



$$g_2(5) = \min\begin{cases} g_1(6) + a_{65} \\ \min\{g_2(2) + a_{25}, g_2(3) + a_{35}, g_2(4) + a_{45}\} \end{cases}$$

$$= \min\begin{cases} 7 + 1 \\ \min\{0 + \infty, 3 + 5, 1 + 7\} \end{cases} = \boxed{\mathbf{8}}$$ : ελάχιστο κόστος

Άρα οι βέλτιστες διαδρομές με μια το πολύ μείωση είναι:

$\mathbf{2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5}$

$\mathbf{2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5}$

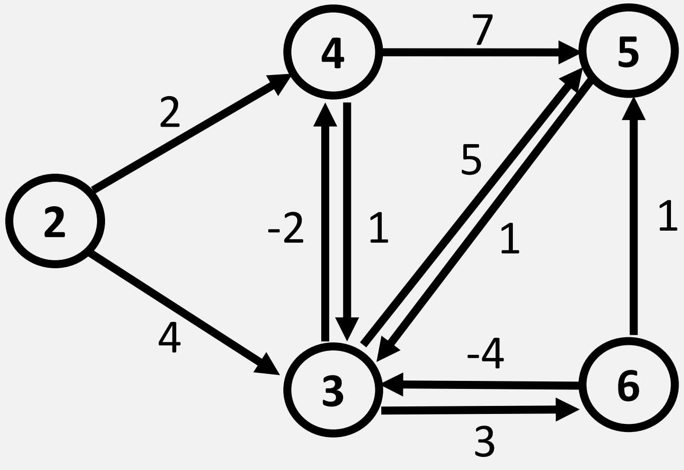
$\mathbf{2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 5}$

$\mathbf{2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5}$

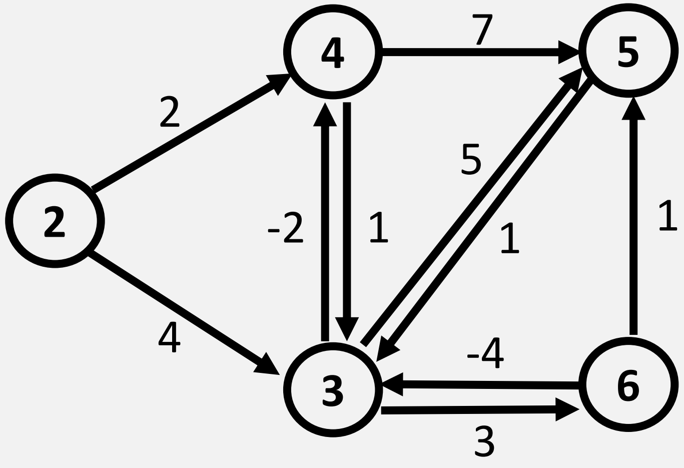
$\mathbf{2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5}$

$\mathbf{2 \rightarrow \boxed{3 \rightarrow 4} \rightarrow \boxed{3 \rightarrow 4} \rightarrow 5}$ (απορρίπτεται)

$\mathbf{2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5}$



**β)** Αν στην άσκηση δεν αναφέρεται ο μέγιστος επιτρεπτός αριθμός μειώσεων, τότε το πρόβλημα δεν έχει **φραγμένη λύση**, αφού είναι δυνατόν να επαναλαμβάνουμε συνεχώς τον **κύκλο $\mathbf{3 \leftrightarrow 6}$ μειώνοντας διαρκώς το κόστος**.



## Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.