Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

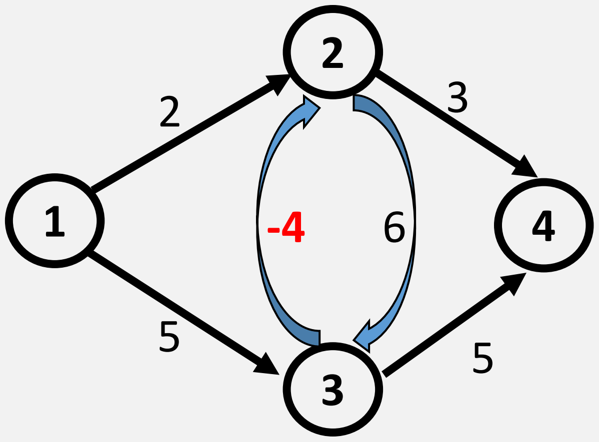
6^{η} ενότητα: **Το γενικό πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής (2)**

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

2) Η μέθοδος των βημάτων

Η μέθοδος Dijkstra μπορεί να εφαρμοστεί μόνο αν οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Η μέθοδος των βημάτων εφαρμόζεται σε κυκλικά δικτυωτά ανεξάρτητα αν τα τόξα έχουν θετικές ή αρνητικές τιμές.



Βέλτιστη συνάρτηση για $i = 1, 2, 3, .., N$

$f_i(k) = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο 1 στον κόμβο k, όταν i ή λιγότερα τόξα πρέπει να χρησιμοποιηθούν$\}$

***Γενικά**: με L το πολύ βήματα ($L \in \mathbb{N}^*$)

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{f_i(k) = min_{j \neq k}\{f_{i-1}(j) + a_{jk}\}}$$

$i = 1, 2, 3, .., L,$ όπου $L \in \mathbb{N}^*$

L: ο μέγιστος αριθμός βημάτων

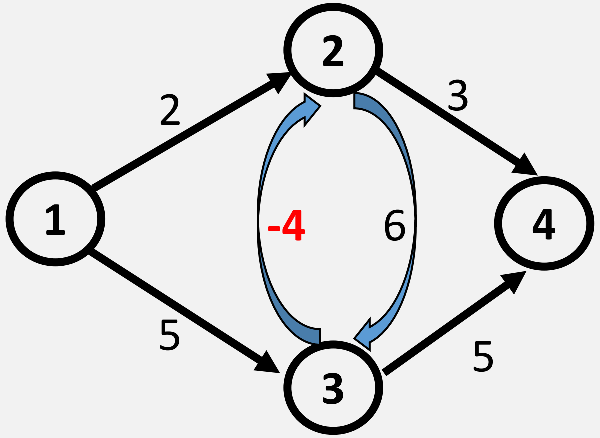
$k = 2, 3, .., N$

Οριακές συνθήκες

$$\boxed{f_0(k) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

Αν $k = 1$ και $j = 1, .., N$:

$$\boxed{f_i(1) = min\{f_{i-1}(j) + a_{j1}\}}$$

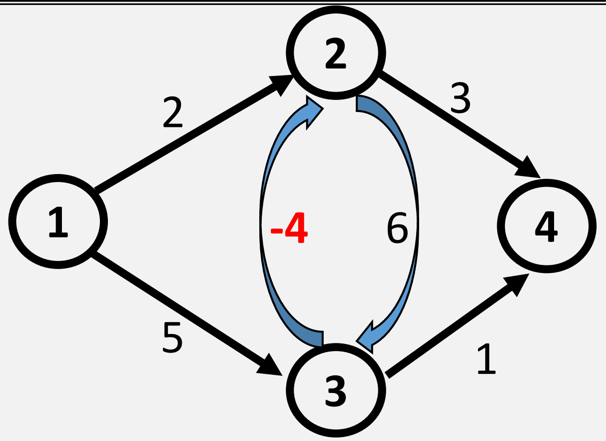


$a_{32} = -4$:

Το αρνητικό κόστος εκφράζει κέρδος.

Δεν μας ενοχλεί το αρνητικό πρόσημο.

Άσκηση
Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο $\mathbf{4}$ με **4 το πολύ βήματα**.



Λύση

- **Οριακές συνθήκες**

  Για $\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{K} = \mathbf{1, 2, 3, 4}$:

$$f_0(1) = 0$$
$$f_0(2) = \infty$$
$$f_0(3) = \infty$$
$$f_0(4) = \infty$$

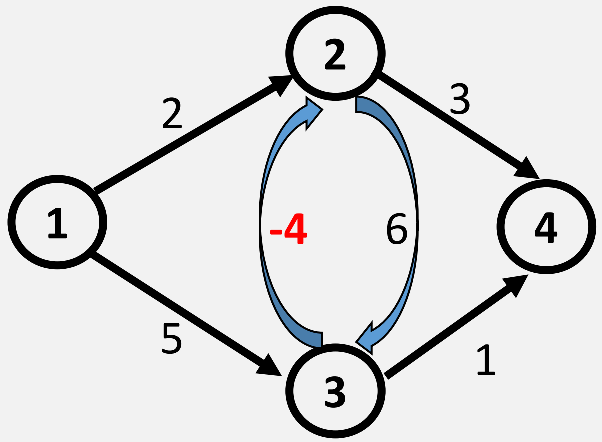
- Για $\boldsymbol{i = 1}$ και $\mathbf{K = 1, 2, 3, 4}$:

$$f_1(1) = \min\{f_0(1) + a_{11}, f_0(2) + a_{21}, f_0(3) + a_{31}, f_0(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$f_1(2) = \min\{f_0(1) + a_{12}, f_0(3) + a_{32}, f_0(4) + a_{42}\}$$
$$= \min\{0 + 2, \infty - 4, \infty + \infty\} = 2$$

$$f_1(3) = \min\{f_0(1) + a_{13}, f_0(2) + a_{23}, f_0(4) + a_{43}\}$$
$$= \min\{0 + 5, \infty + 6, \infty + \infty\} = 5$$

$$f_1(4) = \min\{f_0(1) + a_{14}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, \infty + 3, \infty + 1\} = \infty$$



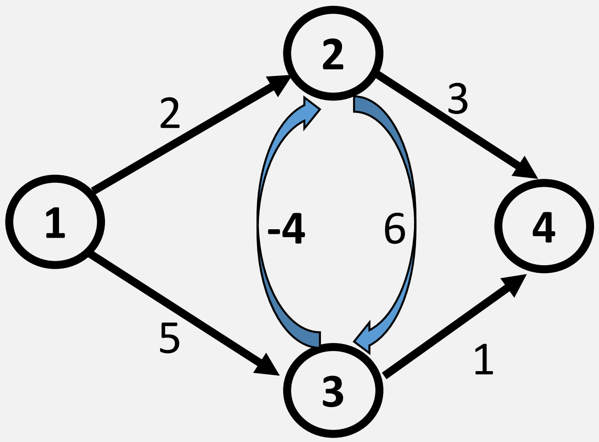
- Για $\boldsymbol{i = 2}$ και $\mathbf{K = 1, 2, 3, 4}$:

$$f_2(1) = \min\{f_1(1) + a_{11}, f_1(2) + a_{21}, f_1(3) + a_{31}, f_1(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, 2 + \infty, 5 + \infty, \infty + \infty\} = 0$$

$$f_2(2) = \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, f_1(4) + a_{42}\}$$
$$= \min\{0 + 2, 5 - 4, \infty + \infty\} = 1$$

$$f_2(3) = \min\{f_1(1) + a_{13}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}\}$$
$$= \min\{0 + 5, 2 + 6, \infty + \infty\} = 5$$

$$f_2(4) = \min\{f_1(1) + a_{14}, f_1(2) + a_{24}, f_1(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 2 + 3, 5 + 1\} = 5$$



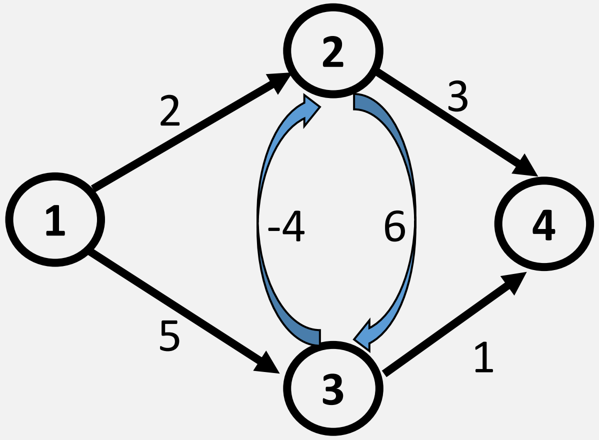
- Για $\boldsymbol{i = 3}$ και $\mathbf{K = 1, 2, 3, 4}$:

$$f_3(1) = \min\{f_2(1) + a_{11}, f_2(2) + a_{21}, f_2(3) + a_{31}, f_2(4) + a_{41}\}$$
$$= \min\{0 + 0, 1 + \infty, 5 + \infty, 5 + \infty\} = 0$$

$$f_3(2) = \min\{f_2(1) + a_{12}, f_2(3) + a_{32}, f_2(4) + a_{42}\}$$
$$= \min\{0 + 2, 5 - 4, 5 + \infty\} = 1$$

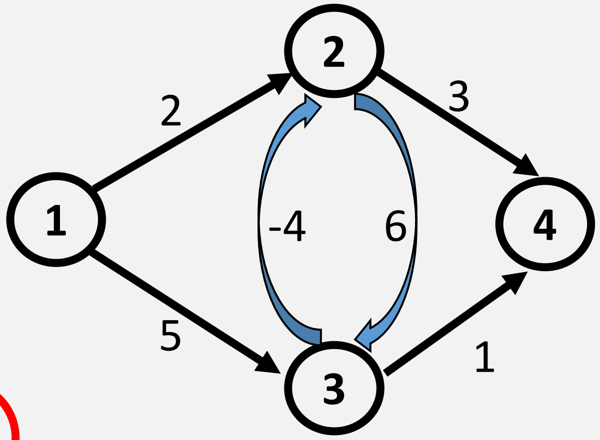
$$f_3(3) = \min\{f_2(1) + a_{13}, f_2(2) + a_{23}, f_2(4) + a_{43}\}$$
$$= \min\{0 + 5, 1 + 6, 5 + \infty\} = 5$$

$$f_3(4) = \min\{f_2(1) + a_{14}, f_2(2) + a_{24}, f_2(3) + a_{34}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 1 + 3, 5 + 1\} = 4$$



- Για $\boldsymbol{i = 4}$ και $\mathbf{K = 4}$:

$$f_4(4) = min\{f_3(1) + a_{14}, f_3(2) + a_{24}, f_3(3) + a_{34}\}$$
$$= min\{0 + \infty, 1 + 3, 5 + 1\} = 4$$



Για να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή:

$$\boldsymbol{f_4(4)} = \min\{f_3(1) + a_{14}, \boldsymbol{f_3(2) +} \boxed{\boldsymbol{a_{24}}}, f_3(3) + a_{34}\} = \mathbf{4}$$

$$\boldsymbol{f_3(2)} = \min\{f_2(1) + a_{12}, \boldsymbol{f_2(3) +} \boxed{\boldsymbol{a_{32}}}, f_2(4) + a_{42}\} = \mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{f_2(3)} = \min\{\boldsymbol{f_1(1) +} \boxed{\boldsymbol{a_{13}}}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}\} = \mathbf{5}$$

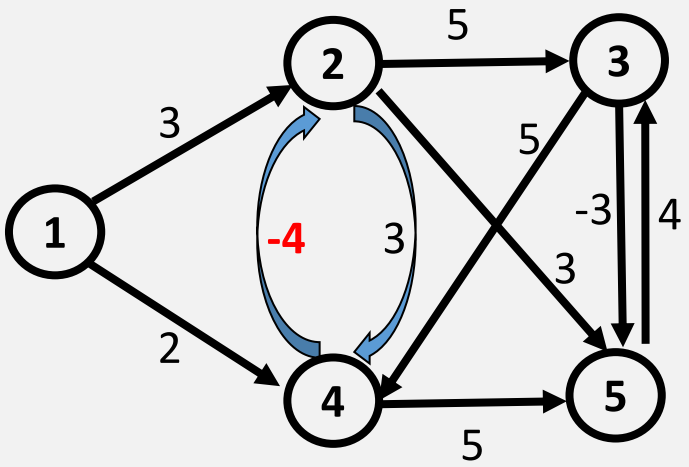
Συνολικό κόστος ελάχιστης διαδρομής = 4

Η ελάχιστη διαδρομή είναι:

$$\mathbf{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο **1** στον **5**, **με 4 το πολύ βήματα**. Οι τιμές στα τόξα παριστάνουν κόστος.



Λύση

Βέλτιστη συνάρτηση για $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, .., N}$

$\boldsymbol{f_i(k)} = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο **1** στον κόμβο $\boldsymbol{k}$, με $\boldsymbol{i}$ το πολύ βήματα$\}$

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{\boldsymbol{f_i(k) = min_{j \neq k}\{f_{i-1}(j) + a_{jk}\}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f_i(1) = min\{f_{i-1}(j) + a_{j1}\}}}$$

Οριακές συνθήκες

$$\boxed{\boldsymbol{f_0(k)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

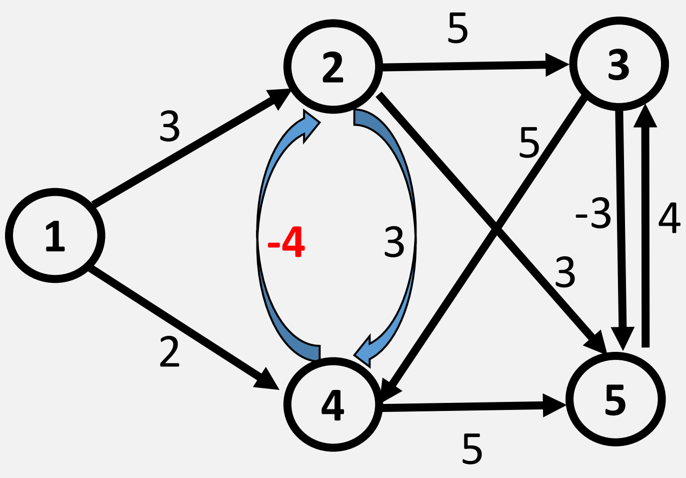
Λύση

- **Οριακές συνθήκες**

  Για $\boldsymbol{i = 0}$ και $\mathbf{K = 1, 2, 3, 4, 5}$:

$$f_0(1) = 0$$

$$f_0(2) = f_0(3) = f_0(4) = f_0(5) = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 1}$:

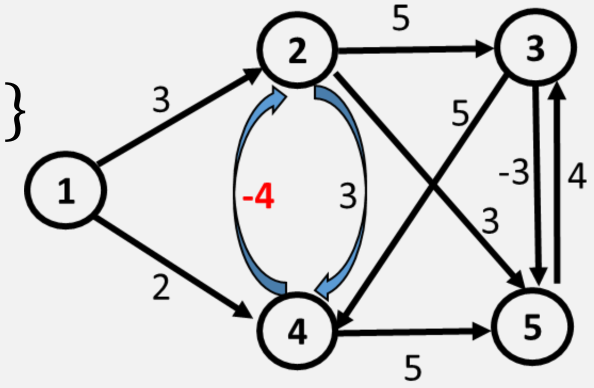
$$f_1(1) = \min\{f_0(1) + a_{11}, f_0(2) + a_{21}, f_0(3) + a_{31}, f_0(4) + a_{41}, f_0(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_1(2) = \min\{f_0(1) + a_{12}, f_0(3) + a_{32}, f_0(4) + a_{42}, f_0(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{3, \infty, \infty, \infty\} = 3$$

$$f_1(3) = \min\{f_0(1) + a_{13}, f_0(2) + a_{23}, f_0(4) + a_{43}, f_0(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$

$$f_1(4) = \min\{f_0(1) + a_{14}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}, f_0(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{2, \infty, \infty, \infty\} = 2$$

$$f_1(5) = \min\{f_0(1) + a_{15}, f_0(2) + a_{25}, f_0(3) + a_{35}, f_0(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 2}$:

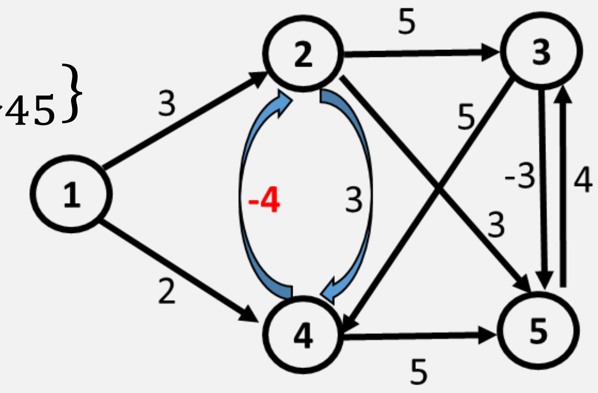
$$f_2(1) = \min\{f_1(1) + a_{11}, f_1(2) + a_{21}, f_1(3) + a_{31}, f_1(4) + a_{41}, f_1(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_2(2) = \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, f_1(4) + a_{42}, f_1(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{3, \infty, -2, \infty\} = -2$$

$$f_2(3) = \min\{f_1(1) + a_{13}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}, f_1(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{0 + \infty, 3 + 5, 2 + \infty, \infty + 4\} = 8$$

$$f_2(4) = \min\{f_1(1) + a_{14}, f_1(2) + a_{24}, f_1(3) + a_{34}, f_1(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{2, 6, \infty, \infty\} = 2$$

$$f_2(5) = \min\{f_1(1) + a_{15}, f_1(2) + a_{25}, f_1(3) + a_{35}, f_1(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 6, \infty, 7\} = 6$$



- Για $\boldsymbol{i = 3}$:

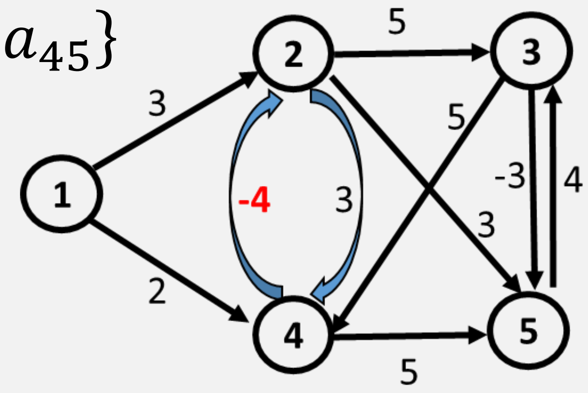
$$f_3(1) = \min\{f_2(1) + a_{11}, f_2(2) + a_{21}, f_2(3) + a_{31}, f_2(4) + a_{41}, f_2(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_3(2) = \min\{f_2(1) + a_{12}, f_2(3) + a_{32}, f_2(4) + a_{42}, f_2(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{3, \infty, -2, \infty\} = -2$$

$$f_3(3) = \min\{f_2(1) + a_{13}, f_2(2) + a_{23}, f_2(4) + a_{43}, f_2(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, 3, \infty, 10\} = 3$$

$$f_3(4) = \min\{f_2(1) + a_{14}, f_2(2) + a_{24}, f_2(3) + a_{34}, f_2(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{2,1,13, \infty\} = 1$$

$$f_3(5) = \min\{f_2(1) + a_{15}, f_2(2) + a_{25}, f_2(3) + a_{35}, f_2(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 1,5,7\} = 1$$



- Για $\boldsymbol{i = 4}$:

$$f_4(5) = min\{f_3(1) + a_{15}, f_3(2) + a_{25}, f_3(3) + a_{35}, f_3(4) + a_{45}\}$$
$$= min\{\infty, 1{,}0{,}6\} = 0$$

Συνολικό κόστος ελάχιστης διαδρομής = 0

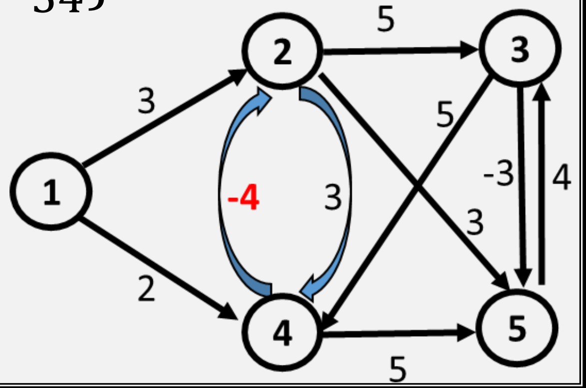
Για να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή:

$$\boldsymbol{f_4(5)} = min\{f_3(1) + a_{15}, f_3(2) + a_{25}, \boldsymbol{f_3(3)} + \boxed{\boldsymbol{a_{35}}}, f_3(4) + a_{45}\} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{f_3(3)} = \min\{f_2(1) + a_{13}, \boldsymbol{f_2(2)} + \boxed{\boldsymbol{a_{23}}}, f_2(4) + a_{43}, f_2(5) + a_{53}\} = 3$$

$$\boldsymbol{f_2(2)} = \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, \boldsymbol{f_1(4)} + \boxed{\boldsymbol{a_{42}}}, f_1(5) + a_{52}\} = -2$$

$$\boldsymbol{f_1(4)} = \min\{\boldsymbol{f_0(1)} + \boxed{\boldsymbol{a_{14}}}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}, f_0(5) + a_{54}\} = 2$$

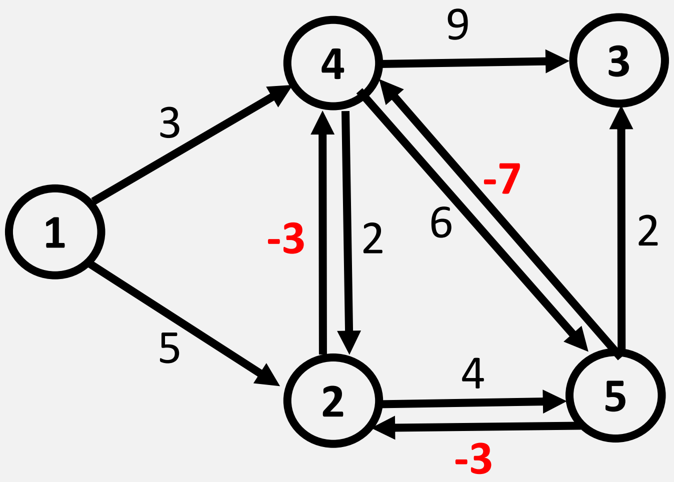


Άρα η διαδρομή ελάχιστου κόστους είναι:

$$\boldsymbol{1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 5}$$

Άσκηση

Να βρεθεί η διαδρομή ελάχιστου κόστους από τον κόμβο **1** στον κόμβο **3**, **σε 5 το πολύ βήματα, περνώντας το πολύ μια φορά από τον κόμβο 5**. Οι τιμές στα τόξα παριστάνουν κόστος.



Λύση

Βέλτιστη συνάρτηση για $i = 1, 2, 3, .., N$

$f_i(k) = \{$το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο $\mathbf{1}$ στον κόμβο k, με i το πολύ βήματα$\}$

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{f_i(k) = min_{j \neq k}\{f_{i-1}(j) + a_{jk}\}}$$

$$\boxed{f_i(1) = min\{f_{i-1}(j) + a_{j1}\}}$$

Οριακές συνθήκες

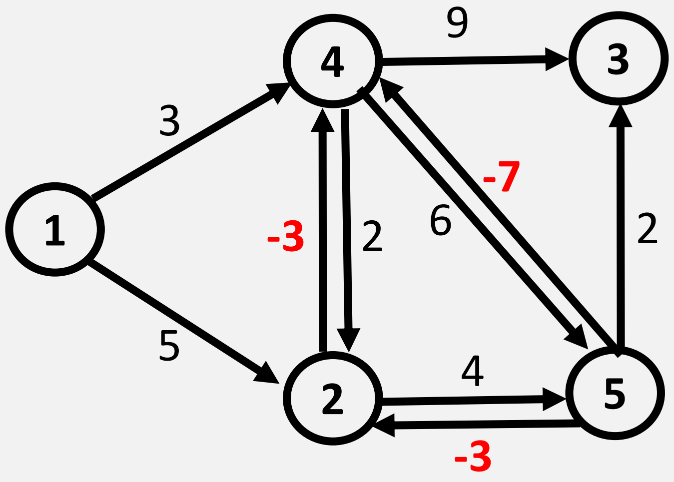
$$\boxed{f_0(k) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \alpha\nu \;\; k = 1 \\ \infty, & \alpha\nu \;\; k \neq 1 \end{cases}}$$

Λύση

- **Οριακές συνθήκες**

  Για $\boldsymbol{i = 0}$ και $\mathbf{K = 1, 2, 3, 4, 5}$:

$$f_0(1) = 0$$
$$f_0(2) = f_0(3) = f_0(4) = f_0(5) = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 1}$:

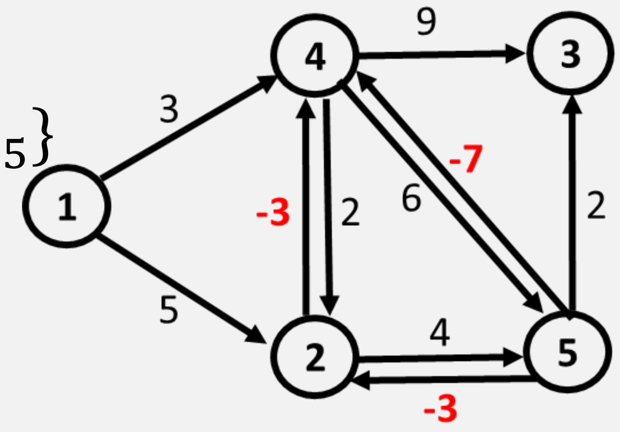
$$f_1(1) = \min\{f_0(1) + a_{11}, f_0(2) + a_{21}, f_0(3) + a_{31}, f_0(4) + a_{41}, f_0(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_1(2) = \min\{f_0(1) + a_{12}, f_0(3) + a_{32}, f_0(4) + a_{42}, f_0(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{5, \infty, \infty, \infty\} = 5$$

$$f_1(3) = \min\{f_0(1) + a_{13}, f_0(2) + a_{23}, f_0(4) + a_{43}, f_0(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$

$$f_1(4) = \min\{f_0(1) + a_{14}, f_0(2) + a_{24}, f_0(3) + a_{34}, f_0(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{3, \infty, \infty, \infty\} = 3$$

$$f_1(5) = \min\{f_0(1) + a_{15}, f_0(2) + a_{25}, f_0(3) + a_{35}, f_0(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$



- Για $\boldsymbol{i = 2}$:

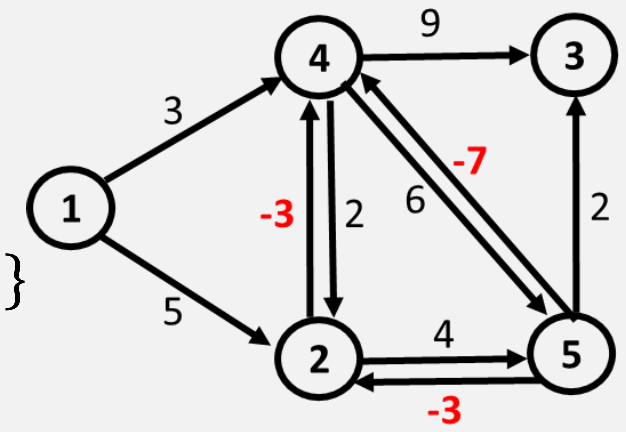
$f_2(1) = 0$

$$f_2(2) = \min\{f_1(1) + a_{12}, f_1(3) + a_{32}, f_1(4) + a_{42}, f_1(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{5, \infty, 5, \infty\} = 5$$

$$f_2(3) = \min\{f_1(1) + a_{13}, f_1(2) + a_{23}, f_1(4) + a_{43}, f_1(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 12, \infty\} = 12$$

$$f_2(4) = \min\{f_1(1) + a_{14}, f_1(2) + a_{24}, f_1(3) + a_{34}, f_1(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{3, 2, \infty, \infty\} = 2$$

$$f_2(5) = \min\{f_1(1) + a_{15}, f_1(2) + a_{25}, f_1(3) + a_{35}, f_1(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 9, \infty, 9\} = 9$$



- Για $\boldsymbol{i = 3}$:

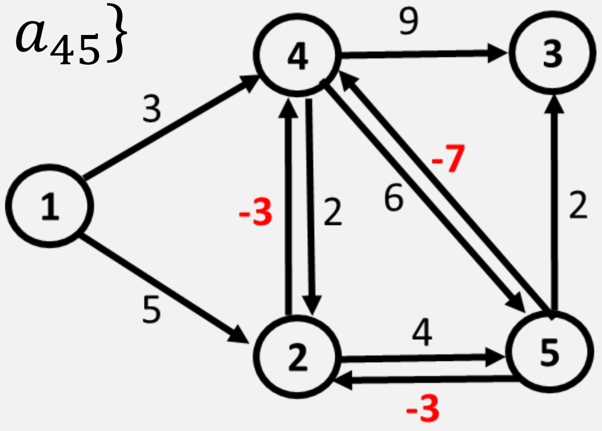
$$f_3(1) = \min\{f_2(1) + a_{11}, f_2(2) + a_{21}, f_2(3) + a_{31}, f_2(4) + a_{41}, f_2(5) + a_{51}\}$$
$$= \min\{0, \infty, \infty, \infty, \infty\} = 0$$

$$f_3(2) = \min\{f_2(1) + a_{12}, f_2(3) + a_{32}, f_2(4) + a_{42}, f_2(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{5, \infty, 4,6\} = 4$$

$$f_3(3) = \min\{f_2(1) + a_{13}, f_2(2) + a_{23}, f_2(4) + a_{43}, f_2(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 11,11\} = 11$$

$$f_3(4) = \min\{f_2(1) + a_{14}, f_2(2) + a_{24}, f_2(3) + a_{34}, f_2\,(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{3,2, \infty, 2\} = 2$$

$$f_3(5) = \min\{f_2(1) + a_{15}, f_2(2) + a_{25}, f_2(3) + a_{35}, f_2\,(4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 9, \infty, 8\} = 8$$



- Για $i = 4$:

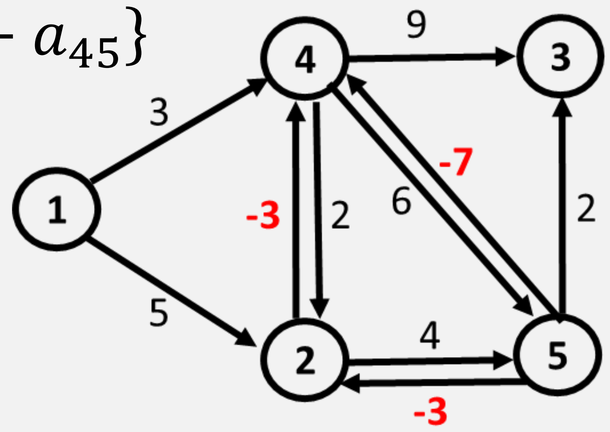
$$f_4(1) = 0$$

$$f_4(2) = \min\{f_3(1) + a_{12}, f_3(3) + a_{32}, f_3(4) + a_{42}, f_3(5) + a_{52}\}$$
$$= \min\{5, \infty, 4,5\} = 4$$

$$f_4(3) = \min\{f_3(1) + a_{13}, f_3(2) + a_{23}, f_3(4) + a_{43}, f_3(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 11,10\} = 10$$

$$f_4(4) = \min\{f_3(1) + a_{14}, f_3(2) + a_{24}, f_3(3) + a_{34}, f_3\,(5) + a_{54}\}$$
$$= \min\{3,1, \infty, 1\} = 1$$

$$f_4(5) = \min\{f_3(1) + a_{15}, f_3(2) + a_{25}, f_3(3) + a_{35}, f_3\ (4) + a_{45}\}$$
$$= \min\{\infty, 8, \infty, 8\} = 8$$

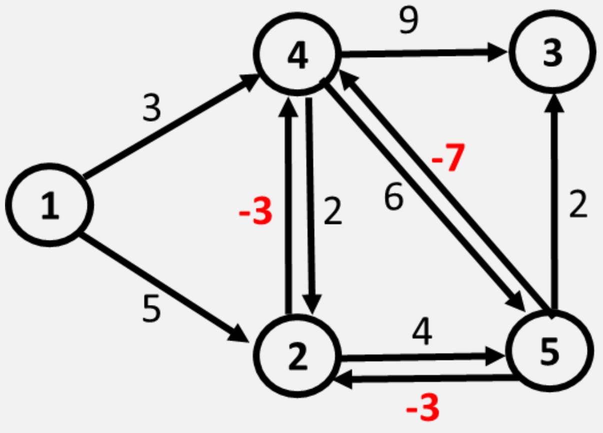


- Για $\boldsymbol{i = 5}$:

$$f_5(3) = \min\{f_4(1) + a_{13}, f_4(2) + a_{23}, f_4(4) + a_{43}, f_4(5) + a_{53}\}$$
$$= \min\{\infty, \infty, 10, 10\} = 10$$

Συνολικό κόστος ελάχιστης διαδρομής = 10

Υπάρχουν 5 διαδρομές με συνολικό κόστος 10:



$\mathbf{1 \to 4 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3}$

$\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3}$

$\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3}$

$\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 2 \to 4 \to 3}$

$\mathbf{1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 4 \to 3}$

Οι διαδρομές με κόστος 10 που <u>απορρίπτονται</u> (εμφανίζεται 2 φορές ο κόμβος 5) είναι: $\mathbf{1 \to 4 \to \boxed{5} \to 4 \to \boxed{5} \to 3}$ **και** $\mathbf{1 \to 2 \to \boxed{5} \to 4 \to \boxed{5} \to 3}$

Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.