Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

5η ενότητα: **Στοχαστικά προβλήματα αντικατάστασης εργαλείων (3)**

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

Άσκηση Σε στοχαστικό πρόβλημα αντικατάστασης εργαλείων δίνονται οι συναρτήσεις: $\alpha(t)$: η τιμή ανταλλαγής, στην αρχή του χρόνου, εργαλείου που λειτουργεί, ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, με ένα καινούριο, A: η τιμή αγοράς νέου εργαλείου, στην αρχή του χρόνου, $p(t)$: η πιθανότητα ένα εργαλείο ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, να χαλάσει στο 1/3 του χρόνου, $\delta(t)$: η τιμή επιδιόρθωσης ενός χαλασμένου εργαλείου ηλικίας t στο 1/3 του χρόνου, $R_1(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, για το πρώτο 1/3 του χρόνου, $R_3(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t, για τα τελευταία 2/3 του χρόνου, αν το εργαλείο δεν χάλασε , $R_2(t)$: το κόστος λειτουργίας εργαλείου ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, για τα τελευταία 2/3 του χρόνου, αν το εργαλείο χάλασε στο 1/3 του χρόνου και επιδιορθώθηκε. Χρειαζόμαστε το εργαλείο για T χρόνια και διαθέτουμε δικό μας εργαλείο ηλικίας 1 χρόνου. Ορίστε την βέλτιστη συνάρτηση, επαναληπτική σχέση και οριακές συνθήκες.

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση**:

$f(t,\tau)$ ={το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** του εργαλείου από την αρχή του **χρόνου** τ μέχρι το **τέλος** T, δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνου τ **διαθέτουμε δικό μας εργαλείο που λειτουργεί**

Άρα στην αρχή ενός χρόνου τ, έχουμε τις επιλογές:

1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: Συνεχίζουμε με το εργαλείο που διαθέτουμε

❑ Επαναληπτική σχέση:

$$\boldsymbol{f(t,\tau)} = \boldsymbol{min}\{\mathrm{A} - \alpha(t) + R_1(0) + p(0)\left(\delta\left(\frac{1}{3}\right) + R_2(0) + f(1,\tau+1)\right)$$

$$+(1-p(0))(R_3\left(\frac{1}{3}\right) + f(1,\tau+1)),$$

$$R_1(t) + p(t)\left(\delta\left(t+\frac{1}{3}\right) + R_2(t) + f(t+1,\tau+1)\right)$$

$$+(1-p(t))(R_3\left(t+\frac{1}{3}\right) + f(t+1,\tau+1))$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

❑ Οριακές συνθήκες:

Ορίζονται για $\boldsymbol{\tau = T}$ (στην αρχή του τελευταίου χρόνου):

$$\boldsymbol{f(t,T) = min}\{\, \mathrm{A} - \alpha(t) + R_1(0) + p(0)\left(\delta\left(\frac{1}{3}\right) + R_2(0)\right) + (1-p(0))\left(R_3\left(\frac{1}{3}\right)\right),$$

$$R_1(t) + p(t)\left(\delta\left(t + \frac{1}{3}\right) + R_2(t)\right) + (1-p(t))\left(R_3\left(t + \frac{1}{3}\right)\right)$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

Άσκηση

Σε στοχαστικό πρόβλημα αντικατάστασης εργαλείων δίνονται οι συναρτήσεις: $\alpha(t)$: η τιμή ανταλλαγής, στην αρχή του χρόνου, εργαλείου που λειτουργεί, ηλικίας t, με ένα καινούριο ή νοικιασμένο, $\beta(t)$: η τιμή ανταλλαγής χαλασμένου εργαλείου ηλικίας t, με ένα καινούριο, στο τέλος του χρόνου, ε: η τιμή ενοικίασης, στην αρχή του χρόνου, νέου εργαλείου, για έναν χρόνο, $\gamma(t)$: η τιμή επιδιόρθωσης, στο τέλος του χρόνου, χαλασμένου εργαλείου ηλικίας t, A : η τιμή αγοράς νέου εργαλείου, $p(t,x)$: η πιθανότητα εργαλείο ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, να έχει κόστος λειτουργίας κατά την διάρκεια του χρόνου ίσο με x ($x = 0,1, \ldots, X$), $q(t)$: η πιθανότητα εργαλείο ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, να είναι χαλασμένο στο τέλος του χρόνου.
Χρειαζόμαστε το εργαλείο για T χρόνια και δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο εξαρχής. Ορίστε την βέλτιστη συνάρτηση, επαναληπτική σχέση και οριακές συνθήκες.

Θα χρησιμοποιήσουμε την προς τα πίσω μέθοδο του ΔΠ.

Στην αρχή κάθε χρόνου μπορεί να **διαθέτει κάποιος δικό του εργαλείο**, ηλικίας t ή να **μην διαθέτει δικό του εργαλείο**, καθώς την προηγούμενη χρονιά είχε νοικιάσει ένα εργαλείο.

Η **βέλτιστη συνάρτηση** και επομένως και η **επαναληπτική σχέση** πρέπει να οριστεί διαφορετικά για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, καθώς έπειτα οι δυνατές επιλογές που έχει κάποιος είναι διαφορετικές.

Συγκεκριμένα:

- **1η περίπτωση**: Έστω ότι **δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο** στην αρχή του χρόνου $\boldsymbol{\tau}$.

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση**:

$F(\tau)$ ={το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** από την αρχή του **χρόνου $\boldsymbol{\tau}$** μέχρι το **τέλος $\boldsymbol{T}$**, δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνου $\boldsymbol{\tau}$ **<u>δεν</u> διαθέτουμε δικό μας εργαλείο**

Άρα στην αρχή ενός χρόνου $\boldsymbol{\tau}$, έχουμε τις επιλογές:

1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: Ενοικίαση εργαλείου

- **2η περίπτωση:** Έστω ότι **διαθέτουμε δικό μας εργαλείο** στην αρχή του χρόνου $\boldsymbol{\tau}$.

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση**:

$f(t,\tau)$ ={το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** του εργαλείου από την αρχή του **χρόνου $\boldsymbol{\tau}$** μέχρι το **τέλος T**, δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνου $\boldsymbol{\tau}$ **διαθέτουμε δικό μας εργαλείο που λειτουργεί**

Άρα στην αρχή ενός χρόνου $\boldsymbol{\tau}$, έχουμε τις επιλογές:

1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: Ενοικίαση εργαλείου

3) Απόφαση: Συνεχίζουμε με το εργαλείο που διαθέτουμε

- **1η περίπτωση:** Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση**:

$$F(\tau) = min\{\, \mathrm{A} + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + \overbrace{q(0)}^{\text{αν χαλάσει}} min\left\{ \begin{matrix} \overbrace{A - \beta(1) + f(0,\tau+1)}^{\text{Αγορά νέου εργαλείου}} \\ \underbrace{\gamma(1) + f(1,\tau+1)}_{\text{επιδιόρθωση}} \end{matrix} \right\} +$$

$$\overbrace{\big(1 - q(0)\big)}^{\text{αν δεν χαλάσει}} f(1,\tau+1),$$

Διαθέτουμε το νέο εργαλείο (ηλικίας 1) στην αρχή της επόμενης χρονιάς

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\varepsilon + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + \overbrace{q(0)}^{\text{αν χαλάσει}} \overbrace{(\gamma(1) + \mathrm{F}(\tau+1))}^{\text{επιδιόρθωση}} +$$

$$\overbrace{\big(1 - q(0)\big)}^{\text{αν δεν χαλάσει}} F(\tau+1)\}$$

συνεχίζουμε ως έχει, χωρίς δικό μας εργαλείο

2) Απόφαση: ενοικίαση εργαλείου

❑ **2η περίπτωση:** Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση** για $\tau < T$:

$$f(t,\tau) = min\Big\{A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\,p(0,x) + \overset{\text{αν χαλάσει}}{q(0)}\,min\left\{\begin{matrix} \overset{\text{Αγορά νέου εργαλείου}}{A-\beta(1)+f(0,\tau+1)} \\ \underset{\text{επιδιόρθωση}}{\gamma(1)+f(1,\tau+1)} \end{matrix}\right\} +$$

$$\overset{\text{αν δεν χαλάσει}}{\big(1-q(0)\big)}f(1,\tau+1),$$ Συνεχίζουμε με το νέο εργαλείο (ηλικίας 1)

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\varepsilon - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\,p(0,x) + \overset{\text{αν χαλάσει}}{q(0)}\overset{\text{επιδιόρθωση}}{(\gamma(1) + F(\tau+1))} +$$

$$\overset{\text{αν δεν χαλάσει}}{\big(1-q(0)\big)}F(\tau+1)\Big\}$$ Συνεχίζουμε χωρίς δικό μας εργαλείο

2) Απόφαση: ενοικίαση εργαλείου

$$\sum_{x=0}^{X} x\,p(t,x) + \overset{\text{αν χαλάσει}}{q(t)}\,min\left\{\begin{matrix} \overset{\text{Αγορά νέου εργαλείου}}{A-\beta(t+1)+f(0,\tau+1)} \\ \underset{\text{επιδιόρθωση}}{\gamma(t+1)+f(t+1,\tau+1)} \end{matrix}\right\} +$$

$$\overset{\text{αν δεν χαλάσει}}{\big(1-q(t)\big)}f(t+1,\tau+1)\Big\}$$ Συνεχίζουμε με το εργαλείο μας ηλικίας *t*+1

3) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

- Η **επαναληπτική σχέση** για $\tau = 1$ (αρχή πρώτου χρόνου, όπου **δεν** διαθέτουμε δικό μας εργαλείο):

Αγορά νέου εργαλείου

αν χαλάσει

$$f(t,1) = min\{A + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + q(0) min \begin{Bmatrix} A - \beta(1) + f(0,\tau+1) \\ \gamma(1) + f(1,\tau+1) \end{Bmatrix} +$$

επιδιόρθωση

αν δεν χαλάσει

$$\big(1 - q(0)\big) f(1,\tau+1),$$ Συνεχίζουμε με το νέο εργαλείο (ηλικίας 1)

αν χαλάσει   επιδιόρθωση

$$\varepsilon + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + q(0)\big(\gamma(1) + F(\tau+1)\big) +$$

αν δεν χαλάσει

$$\big(1 - q(0)\big) F(\tau+1)\}$$ Συνεχίζουμε χωρίς δικό μας εργαλείο

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: ενοικίαση εργαλείου

❑ Οριακές συνθήκες:

1η περίπτωση: Ορίζονται για $\tau = T$ (στην αρχή του τελευταίου χρόνου), αν δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο στην αρχή του χρόνου T:

$$F(T) = min\{\ A + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x)\,,$$

επιδιόρθωση νοικιασμένου

$$\varepsilon + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + q(0)(\gamma(1)) + \left(1 - q(0)\right) \cdot 0\}$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: ενοικίαση εργαλείου

❑ Οριακές συνθήκες:

2η περίπτωση: Ορίζονται για $\boldsymbol{\tau = T}$ (στην αρχή του τελευταίου χρόνου), αν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο στην αρχή του χρόνου $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{f(t,T) = min\{\mathrm{A} - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x),}$$

Επιδιόρθωση νοικιασμένου

$$\boldsymbol{\varepsilon - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + q(0)(\gamma(1)) + \big(1 - q(0)\big)\cdot 0,}$$

$$\boldsymbol{\sum_{x=0}^{X} x\, p(t,x)\}}$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: ενοικίαση εργαλείου

3) Απόφαση: συνεχίζουμε με το εργαλείο που έχουμε

Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.

2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.