Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

5η ενότητα: **Στοχαστικά προβλήματα αντικατάστασης εργαλείων (2)**

Παπάνα Αγγελική

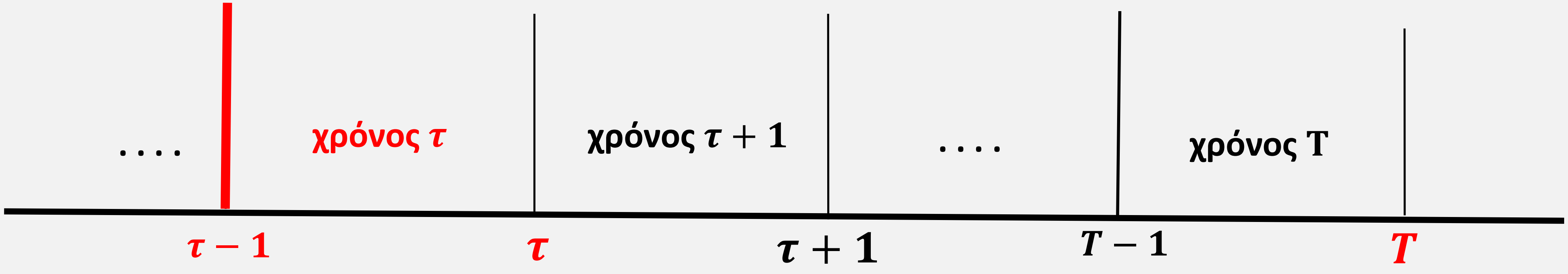
Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

Άσκηση Σε στοχαστικό πρόβλημα αντικατάστασης εργαλείων δίνονται οι συναρτήσεις: $\alpha(t)$: η τιμή ανταλλαγής, στην αρχή του χρόνου, εργαλείου που λειτουργεί, ηλικίας t, με ένα καινούριο, $\beta(t)$: η τιμή ανταλλαγής χαλασμένου εργαλείου ηλικίας t, με ένα καινούριο, στο τέλος του χρόνου, $\varepsilon(t)$: η τιμή επιδιόρθωσης, στο τέλος του χρόνου, χαλασμένου εργαλείου ηλικίας t, $\sigma(t)$: η τιμή προληπτικής συντήρησης, στην αρχή του χρόνου, εργαλείου ηλικίας t, που διάνυσε την προηγούμενη χρονιά χωρίς να χαλάσει – μετά την συντήρηση το εργαλείο θεωρείτε νέο (ηλικίας 0), A: η τιμή αγοράς νέου εργαλείου, $p(t,x)$: η πιθανότητα εργαλείο ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, να έχει κόστος λειτουργίας κατά την διάρκεια του χρόνου ίσο με x ($x = 0,1,\ldots,X$), $q(t)$: η πιθανότητα εργαλείο ηλικίας t στην αρχή του χρόνου, να είναι χαλασμένο στο τέλος του χρόνου, $\pi_1(t)$: η τιμή πώλησης εργαλείου ηλικίας t στο τέλος του χρόνου T, δεδομένου ότι λειτουργεί ενώ αντίστοιχα όταν δεν λειτουργεί είναι $\pi_2(t)$. Θεωρούμε ότι ένα εργαλείο που επιδιορθώνεται στο τέλος μιας χρονιάς δεν συντηρείται αμέσως μετά στην αρχή της νέας χρονιάς. Χρειαζόμαστε το εργαλείο για T χρόνια και δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο εξαρχής. Ορίστε την βέλτιστη συνάρτηση, επαναληπτική σχέση και οριακές συνθήκες.

Θα χρησιμοποιήσουμε την προς τα πίσω μέθοδο του ΔΠ.

Ορίζουμε την βέλτιστη συνάρτηση:

$f(t, \tau, i)$ ={το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** λειτουργίας του εργαλείου από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι το **τέλος T**, δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνο τ έχουμε ένα εργαλείο **ηλικίας t** **και λειτουργεί** και
$i = 0$ αν το εργαλείο δεν είχε χαλάσει την προηγούμενη χρονιά,
$i = 1$ αν το εργαλείο είχε χαλάσει την προηγούμενη χρονιά}



- Έστω $\boxed{i = 0}$, δηλ. διαθέτω ένα εργαλείο **ηλικίας t** στην αρχή του **χρόνου τ**, το οποίο **δεν** είχε χαλάσει την προηγούμενη χρονιά.

Για να ορίσουμε την **επαναληπτική σχέση** πρέπει να δούμε τι δυνατές αποφάσεις μπορούμε να πάρουμε στην περίπτωση αυτή.

1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: Συνεχίζω με το εργαλείο ηλικίας t όπως έχει

3) Απόφαση: Προληπτική συντήρηση του εργαλείου ηλικίας t στην αρχή του χρόνου τ

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση** για $i = 0$ και $t > 0$ και $\tau > 1$:

$$f(t,\tau,0) = min\{A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\,p(0,x) + \overbrace{q(0)}^{\text{αν χαλάσει}} min\begin{Bmatrix} \overbrace{A - \beta(1) + f(0,\tau+1,0)}^{\text{Αγορά νέου εργαλείου}} \\ \underbrace{\varepsilon(1) + f(1,\tau+1,1)}_{\text{επιδιόρθωση}} \end{Bmatrix}$$

$$+ \overbrace{(1 - q(0))}^{\text{αν δεν χαλάσει}} f(1,\tau+1,0),$$ κρατάμε το εργαλείο ως έχει

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\sum_{x=0}^{X} x\,p(t,x) + \overbrace{q(t)}^{\text{αν χαλάσει}} min\begin{Bmatrix} \overbrace{A - \beta(t+1) + f(0,\tau+1,0)}^{\text{Αγορά νέου εργαλείου}} \\ \underbrace{\varepsilon(t+1) + f(t+1,\tau+1,1)}_{\text{επιδιόρθωση}} \end{Bmatrix} +$$

$$\overbrace{(1 - q(t))}^{\text{αν δεν χαλάσει}} f(t+1,\tau+1,0),$$ κρατάμε το εργαλείο ως έχει

2) Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ως έχει

$$\underbrace{\sigma(t)}_{\text{κόστος συντήρησης}} + \sum_{x=0}^{X} x\,p(0,x) + \overbrace{q(0)}^{\text{αν χαλάσει}} min\begin{Bmatrix} \overbrace{A - \beta(1) + f(0,\tau+1,0)}^{\text{Αγορά νέου εργαλείου}} \\ \underbrace{\varepsilon(1) + f(1,\tau+1,1)}_{\text{επιδιόρθωση}} \end{Bmatrix} +$$

$$\overbrace{(1 - q(0))}^{\text{αν δεν χαλάσει}} f(1,\tau+1,0)\}$$

3) Απόφαση: συντηρώ το εργαλείο

Ομοίως προκύπτει η **επαναληπτική σχέση** για $i = 0$ και $t = 0$ (διαθέτω νέο εργαλείο στην αρχή του χρόνου) και $\tau > 1$:

$$f(0,\tau,0) = \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + \overset{\text{αν χαλάσει}}{q(0)} min \left\{ \begin{matrix} \overset{\text{Αγορά νέου εργαλείου}}{A - \beta(1) + f(0,\tau+1,0)} \\ \underset{\text{επιδιόρθωση}}{\varepsilon(1) + f(1,\tau+1,1)} \end{matrix} \right\} + \overset{\text{αν δεν χαλάσει}}{\big(1 - q(0)\big)} f(1,\tau+1,0)$$

κρατάμε το εργαλείο ως έχει

Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ως έχει

- Έστω $\boxed{\boldsymbol{i = 1}}$, δηλ. διαθέτω ένα εργαλείο **ηλικίας $\boldsymbol{t}$** στην αρχή του **χρόνου $\boldsymbol{\tau}$**, το οποίο **είχε χαλάσει την προηγούμενη χρονιά**.

Για να ορίσουμε την **επαναληπτική σχέση** πρέπει να δούμε τι δυνατές αποφάσεις μπορούμε να πάρουμε στην περίπτωση αυτή.

1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: Συνεχίζω με το εργαλείο ηλικίας $\boldsymbol{t}$ όπως έχει

Δεν μπορεί να γίνει **προληπτική συντήρηση** του εργαλείου ηλικίας t στην αρχή του χρόνου τ καθώς είχε χαλάσει την προηγούμενη χρονιά και άρα είτε αγοράστηκε νέο εργαλείο είτε επιδιορθώθηκε το εργαλείο στο τέλος της προηγούμενης χρονιάς.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση** για $i = 1$ και $t > 0$ και $\tau > 1$:

$$f(t,\tau,1) = \min\Big\{A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + \underbrace{q(0)}_{\text{αν χαλάσει}} \min \left\{ \begin{matrix} \overbrace{A - \beta(1) + f(0,\tau+1,0)}^{\text{Αγορά νέου εργαλείου}} \\ \underbrace{\varepsilon(1) + f(1,\tau+1,1)}_{\text{επιδιόρθωση}} \end{matrix} \right\} + \underbrace{\big(1 - q(0)\big)}_{\text{αν δεν χαλάσει}} \underbrace{f(1,\tau+1,0)}_{\text{κρατάμε το εργαλείο ως έχει}}$$

$$\sum_{x=0}^{X} x\, p(t,x) + \underbrace{q(t)}_{\text{αν χαλάσει}} \min \left\{ \begin{matrix} \overbrace{A - \beta(t+1) + f(0,\tau+1,0)}^{\text{Αγορά νέου εργαλείου}} \\ \underbrace{\varepsilon(t+1) + f(t+1,\tau+1,1)}_{\text{επιδιόρθωση}} \end{matrix} \right\} + \underbrace{\big(1 - q(t)\big)}_{\text{αν δεν χαλάσει}} \underbrace{f(t+1,\tau+1,0)\Big\}}_{\text{κρατάμε το εργαλείο ως έχει}}$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ως έχει

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση** για $\boldsymbol{i = 1}$ και $\boldsymbol{t = 0}$ και $\boldsymbol{\tau > 1}$:

Αγορά νέου εργαλείου

αν χαλάσει

$$\boldsymbol{f(0,\tau,1)} = \sum_{x=0}^{X} \boldsymbol{x\,p(0,x)} + \boldsymbol{q(0)}\boldsymbol{min}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{A-\beta(1)+f(0,\tau+1,0)} \\ \boldsymbol{\varepsilon(1)+f(1,\tau+1,1)} \end{Bmatrix} +$$

επιδιόρθωση

Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ως έχει

$$\boldsymbol{\big(1-q(0)\big)f(1,\tau+1,0)}\}$$

κρατάμε το εργαλείο ως έχει

αν δεν χαλάσει

- Για την αρχή της διαδικασίας, δηλ. για $\tau = 1$, έχουμε:

Αρχικά δεν διαθέτουμε εργαλείο, άρα πρέπει να **αγοράσουμε**.

Άρα η **επαναληπτική σχέση** ορίζεται ως:

$$f(0,1,-) = \mathrm{A} + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + \underbrace{q(0)}_{\text{αν χαλάσει}} \min \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{A - \beta(1) + f(0,2,0)}^{\text{Αγορά νέου εργαλείου}} \\ \underbrace{\varepsilon(1)}_{\text{επιδιόρθωση}} + f(1,2,1) \end{array} \right\} + \underbrace{\big(1 - q(0)\big)}_{\text{αν δεν χαλάσει}} f(1,2,0) \}$$

κρατάμε το εργαλείο ως έχει

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

- Οριακές συνθήκες για την τελευταία χρονική περίοδο T και $i = 0$, δηλ. διαθέτω ένα εργαλείο **ηλικίας t** στην αρχή του **χρόνου T**, το οποίο **δεν** είχε χαλάσει την προηγούμενη χρονιά) :

$$f(t,T,0) = min\{A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\,p(0,x) + \overbrace{q(0)(-\pi_2(1))}^{\text{αν χαλάσει}} + \overbrace{\big(1 - q(0)\big)(-\pi_1(1))}^{\text{αν δεν χαλάσει}},$$

$$\sum_{x=0}^{X} x\,p(t,x) + \overbrace{q(t)(-\pi_2(t+1))}^{\text{αν χαλάσει}} + \overbrace{\big(1 - q(t)\big)(-\pi_1(t+1))}^{\text{αν δεν χαλάσει}},$$

$$\underbrace{\sigma(t)}_{\text{κόστος συντήρησης}} + \sum_{x=0}^{X} x\,p(0,x) + \overbrace{q(0)(-\pi_2(1))}^{\text{αν χαλάσει}} + \overbrace{\big(1 - q(0)\big)(-\pi_1(1))}^{\text{αν δεν χαλάσει}}\}$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ως έχει

3) Απόφαση: συντηρώ το εργαλείο

- Οριακές συνθήκες για την τελευταία χρονική περίοδο T και $i = 1$, δηλ. διαθέτω ένα εργαλείο **ηλικίας t** στην αρχή του **χρόνου T**, το οποίο είχε χαλάσει την προηγούμενη χρονιά:

$$f(t,T,1) = min\{A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^{X} x\, p(0,x) + \overbrace{q(0)(-\pi_2(1))}^{\text{αν χαλάσει}} + \overbrace{\left(1 - q(0)\right)(-\pi_1(1))}^{\text{αν δεν χαλάσει}},$$

$$\sum_{x=0}^{X} x\, p(t,x) + \overbrace{q(t)(-\pi_2(t+1))}^{\text{αν χαλάσει}} + \overbrace{\left(1 - q(t)\right)(-\pi_1(t+1))}^{\text{αν δεν χαλάσει}}\}$$

1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

2) Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ως έχει

Στοχαστικά προβλήματα αντικατάστασης και συντήρησης εργαλείων

Στοχαστικά προβλήματα αντικατάστασης και συντήρησης εργαλείων

Έστω διαθέτουμε ένα **εργαλείο** που αποτελείται από δύο **εξαρτήματα Α** και **Β**. Αν δεν λειτουργεί κάποιο εξάρτημα από τα δύο, τότε δεν λειτουργεί και το μηχάνημα.

Συντήρηση: Το κάθε εξάρτημα το **συντηρούμε** στην αρχή του χρόνου και χρειάζεται x_1 (το Α) και αντίστοιχα x_2 (το Β) **χρονικές περιόδους** για να συντηρηθεί ενώ αν κάνουμε **συγχρόνως** συντήρηση και των δύο εξαρτημάτων τότε χρειάζονται x_{12} **χρονικές περίοδοι** για την ολοκλήρωση της συντήρησης.

Αντικατάσταση: Έστω ότι για να **αντικαταστήσουμε** το εξάρτημα Α χρειάζονται y_1 **χρονικές περίοδοι** και αντίστοιχα y_2 για το εξάρτημα Β ενώ αν τα αντικαταστήσουμε **συγχρόνως** χρειάζονται y_{12} **χρονικές περίοδοι** για την ολοκλήρωση της αντικατάστασης.

Υποθέτουμε ότι όταν ένα εξάρτημα **συντηρηθεί**, τότε η **ηλικία** του γίνεται **0.**

Υποθέτουμε ότι η **πιθανότητα να λειτουργεί** στην αρχή μιας χρονικής περιόδου δεδομένου ότι λειτουργούσε στην αρχή της προηγούμενης είναι αντίστοιχα $\boldsymbol{p_1}$ για το A και $\boldsymbol{p_2}$ για το B. Δηλαδή υποθέτουμε ότι ένα εξάρτημα που λειτουργεί στην αρχή μιας περιόδου, μπορεί να χαλάσει μόνο στο τέλος της.

Υποθέτουμε ότι η **συντήρηση** και η **αντικατάσταση** των εξαρτημάτων **δεν** μπορεί να γίνει **συγχρόνως**.

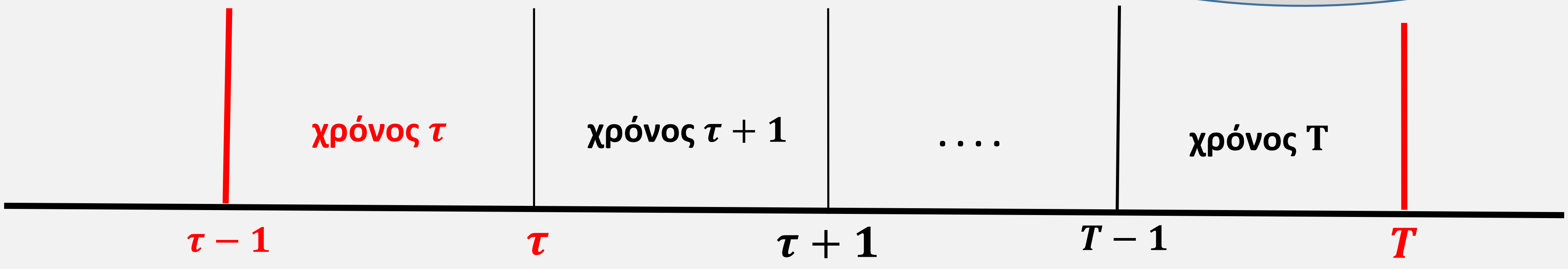
Το πρόβλημα Θέλουμε να βρούμε την **βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης** και **συντήρησης** των εξαρτημάτων, έτσι ώστε δεδομένου ότι θα έχουμε το εργαλείο για τις επόμενες $\boldsymbol{T}$ **χρονικές περιόδους,** ο **αναμενόμενος αριθμός των χρονικών περιόδων που το εργαλείο θα είναι σε λειτουργία να είναι μέγιστος.**

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση**:

$f(t_1, t_2, \tau)$ ={ο **μέγιστος αριθμός χρονικών περιόδων** από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι και το **τέλος T**, **που το εργαλείο λειτουργεί,** δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνου **τ το εξάρτημα Α είναι ηλικίας t_1 και το Β ηλικίας t_2**

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον αριθμό των χρονικών περιόδων που το εργαλείο λειτουργεί

Δεν ξέρουμε αν τα εξαρτήματα Α και Β λειτουργούν στην αρχή του χρόνου τ!



Επίσης ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$\mathbf{F_1(t_1,\tau)}$ ={ο **μέγιστος αριθμός χρονικών περιόδων** από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι και το **τέλος T, που το εργαλείο λειτουργεί,** δεδομένου ότι το εργαλείο αρχίζει στην αρχή του χρόνου τ με **το εξάρτημα Α ηλικίας t_1 και το εξάρτημα Β βρέθηκε χαλασμένο**

$\mathbf{F_2(t_2,\tau)}$ ={ο **μέγιστος αριθμός χρονικών περιόδων** από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι και το **τέλος T, που το σύστημα λειτουργεί,** δεδομένου ότι το εργαλείο αρχίζει στην αρχή του χρόνου τ με **το εξάρτημα Α χαλασμένο και το εξάρτημα Β ηλικίας t_2**

$\mathbf{F_3(\tau)}$ ={ο **μέγιστος αριθμός χρονικών περιόδων** από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι και το **τέλος T, που το σύστημα λειτουργεί,** δεδομένου ότι το εργαλείο αρχίζει στην αρχή του χρόνου τ με **τα εξαρτήματα Α και Β χαλασμένα**

Βέλτιστη συνάρτηση $f(t_1, t_2, \tau)$

Στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου, έχουμε την δυνατότητα να πάρουμε **7** διαφορετικές αποφάσεις ή υπάρχουν **7** διαφορετικές περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε, κάθε μια από τις οποίες έχει σαν αποτέλεσμα ένα **αναμενόμενο αριθμό χρονικών περιόδων που το εργαλείο θα λειτουργήσει**.

Επιλέγουμε την απόφαση που **μεγιστοποιεί** τον **αναμενόμενο αριθμό χρονικών περιόδων που το εργαλείο θα λειτουργήσει**.

Παρατηρήσεις

- Μετά την συντήρηση ενός εξαρτήματος, μπορεί αυτό να μην λειτουργεί. Η συντήρηση είναι ουσιαστικά προληπτική και γίνεται από το κέντρο λήψης αποφάσεων με βάση την ηλικία των εργαλείων.
- Αν ένα εξάρτημα χαλάσει, πρέπει να αντικατασταθεί όχι να συντηρηθεί.

Δυνατές εντολές

1. Δεν κάνουμε τίποτα (γιατί θεωρούμε ότι τα Α, Β λειτουργούν)
2. Συντήρηση του Α
3. Συντήρηση του Β
4. Συντήρηση των Α και Β
5. Αντικατάσταση του Α
6. Αντικατάσταση του Β
7. Αντικατάσταση των Α και Β

Συντήρηση

Αντικατάσταση

Έστω ότι είμαστε στην αρχή του **χρόνου τ** και τα **εξαρτήματα A** και **B** είναι **ηλικίας t_1** και t_2 αντίστοιχα.

Για την απόφαση **1) Δεν κάνουμε τίποτα (διότι θεωρούμε ότι τα A, B θα λειτουργούν στην αρχή του χρόνου τ)**, **ο μέγιστος αναμενόμενος αριθμός χρονικών περιόδων** που το σύστημα θα λειτουργήσει δίνεται από:

$$\boxed{p_1^{t_1} p_2^{t_2} f(t_1+1, t_2+1, \tau+1)}$$

γιατί $p_1^{t_1} p_2^{t_2}$ είναι η **πιθανότητα** και τα δύο εξαρτήματα να είναι σε καλή κατάσταση μετά το τέλος t_1 και t_2 χρονικών περιόδων.

Όλες οι άλλες δυνατές περιπτώσεις, δηλ. να μην λειτουργεί ένα από τα εξαρτήματα ή κανένα από τα εξαρτήματα, έχουν **αναμενόμενο χρόνο λειτουργίας 0**.

Έστω ότι είμαστε στην αρχή του **χρόνου τ** και τα **εξαρτήματα Α** και **Β** είναι **ηλικίας t_1** και t_2 αντίστοιχα.

Για την περίπτωση **2) Συντήρηση του Α**, **ο μέγιστος αναμενόμενος αριθμός χρονικών περιόδων** που το σύστημα θα λειτουργήσει δίνεται από:

$$p_1^{t_1} f\left(\boxed{0}, t_2, \underline{\tau + x_1}\right) + (1 - p_1^{t_1}) F_2(t_2, \underline{\tau + x_1})$$

Μετά την συντήρηση το Α θεωρείται νέο ($t_1 = 0$)

Περιμένουμε x_1 χρονικές περιόδους για να συντηρηθεί το Α

$p_1^{t_1}$: η **πιθανότητα** το εξάρτημα Α να είναι σε καλή κατάσταση μετά το τέλος t_1 χρονικών περιόδων και να λειτουργεί

$(1 - p_1^{t_1})$: η πιθανότητα να μην λειτουργεί το Α μετά το τέλος t_1 χρονικών περιόδων (ούτε μετά την συντήρηση)

Έστω ότι είμαστε στην αρχή του **χρόνου τ** και τα **εξαρτήματα Α** και **Β** είναι **ηλικίας t_1** και t_2 αντίστοιχα.

Για την περίπτωση **3) Συντήρηση του Β**, **ο μέγιστος αναμενόμενος αριθμός χρονικών περιόδων** που το σύστημα θα λειτουργήσει δίνεται από:

$$\boxed{p_2^{t_2} f\left(t_1, \boxed{0}, \underline{\tau + x_2}\right) + (1 - p_2^{t_2}) F_1(t_1, \underline{\tau + x_2})}$$

Μετά την συντήρηση το Β θεωρείται νέο ($t_2 = 0$)

Περιμένουμε x_2 χρονικές περιόδους για να συντηρηθεί το Β

$p_2^{t_2}$: η **πιθανότητα** το εξάρτημα Β να είναι σε καλή κατάσταση μετά το τέλος t_2 χρονικών περιόδων και να λειτουργεί

$(1 - p_2^{t_2})$: η πιθανότητα να μην λειτουργεί το Β μετά το τέλος t_2 χρονικών περιόδων (ούτε μετά την συντήρηση)

Έστω ότι είμαστε στην αρχή του **χρόνου τ** και τα **εξαρτήματα A** και **B** είναι **ηλικίας t_1** και t_2 αντίστοιχα.

Για την περίπτωση **4) Συντήρηση των A και B**, **ο μέγιστος αναμενόμενος αριθμός χρονικών περιόδων** που το σύστημα θα λειτουργήσει δίνεται από:

Τα A, B λειτουργούν, συντήρηση των A και B μετά από x_{12} χρονικές περιόδους, θεωρούνται νέα ($t_1 = t_2 = 0$)

Το A δεν λειτουργεί μετά από t_1 χρονικές περιόδους με πιθανότητα $(1 - p_1{}^{t_1})$, το B λειτουργεί μετά από t_2 χρονικές περιόδους με πιθανότητα $p_2{}^{t_2}$

$$p_1{}^{t_1} p_2{}^{t_2} f(0, 0, \tau + x_{12}) + (1 - p_1{}^{t_1}) p_2{}^{t_2} F_2(0, \tau + x_{12}) + p_1{}^{t_1}(1 - p_2{}^{t_2}) F_1(0, \tau + x_{12}) + (1 - p_1{}^{t_1})(1 - p_2{}^{t_2}) F_3(\tau + x_{12})$$

Το A λειτουργεί μετά από t_1 χρονικές περιόδους με πιθανότητα $p_1{}^{t_1}$, το B δεν λειτουργεί μετά από t_2 χρονικές περιόδους με πιθανότητα $(1 - p_2{}^{t_2})$

Το A δεν λειτουργεί μετά από t_1 χρονικές περιόδους με πιθανότητα $1 - p_1{}^{t_1}$, το B δεν λειτουργεί μετά από t_2 χρονικές περιόδους με πιθανότητα $(1 - p_2{}^{t_2})$

Έστω ότι είμαστε στην αρχή του **χρόνου τ** και τα **εξαρτήματα Α** και **Β** είναι **ηλικίας t_1** και t_2 αντίστοιχα.

Για την περίπτωση **5) Αντικατάσταση του Α**, **ο μέγιστος αναμενόμενος αριθμός χρονικών περιόδων** που το σύστημα θα λειτουργήσει δίνεται από:

$$\boxed{f(0, t_2, \tau + y_1)}$$

Αντικαθιστώ το Α μετά από y_1 χρονικές περιόδους, θεωρείται νέο ($t_1 = 0$)

Για την περίπτωση **6) Αντικατάσταση του Β**, **ο μέγιστος αναμενόμενος αριθμός χρονικών περιόδων** που το σύστημα θα λειτουργήσει δίνεται από:

$$\boxed{f(t_1, 0, \tau + y_2)}$$

Αντικαθιστώ το Β μετά από y_2 χρονικές περιόδους, θεωρείται νέο ($t_2 = 0$)

Για την περίπτωση **7) Αντικατάσταση των Α και Β**, **ο μέγιστος αναμενόμενος αριθμός χρονικών περιόδων** που το σύστημα θα λειτουργήσει δίνεται από:

$$\boxed{f(0, 0, \tau + y_{12})}$$

Αντικαθιστώ τα Α και Β μετά από y_{12} χρονικές περιόδους

Τελικά προκύπτει η **επαναληπτική σχέση** για την **βέλτιστη συνάρτηση** $f(t_1, t_2, \tau)$:

$$f(t_1, t_2, \tau) = max \begin{cases} {p_1}^{t_1}{p_2}^{t_2} f(t_1 + 1, t_2 + 1, \tau + 1) \\ {p_1}^{t_1} f(0, t_2, \tau + x_1) + (1 - {p_1}^{t_1}) F_2(t_2, \tau + x_1) \\ {p_2}^{t_2} f(t_1, 0, \tau + x_2) + (1 - {p_2}^{t_2}) F_1(t_1, \tau + x_2) \\ {p_1}^{t_1}{p_2}^{t_2} f(0, 0, \tau + x_{12}) + (1 - {p_1}^{t_1}){p_2}^{t_2} F_2(0, \tau + x_{12}) + \\ {p_1}^{t_1}(1 - {p_2}^{t_2}) F_1(0, \tau + x_{12}) + (1 - {p_1}^{t_1})(1 - {p_2}^{t_2}) F_3(\tau + x_{12}) \\ f(0, t_2, \tau + y_1) \\ f(t_1, 0, \tau + y_2) \\ f(0, 0, \tau + y_{12}) \end{cases}$$

Ομοίως ορίζουμε τις υπόλοιπες **επαναληπτικές σχέσεις**:

αναγκαστική αντικάσταση των Α, Β $(F_3(\tau + x_1))$

$$F_1(t_1,\tau) = max\begin{cases} {p_1}^{t_1}F_1(0,\tau+x_1) + (1-{p_1}^{t_1})f(0,0,\tau+x_1+y_{12}) & \text{συντήρηση του Α} \\ f(t_1,0,\tau+y_2) & \text{αντικατ. του Β} \\ f(0,0,\tau+y_{12}) & \text{αντικατ. των Α, Β} \end{cases}$$

Λείπει η απόφαση αντικατάστασης του Α διότι προφανώς $y_{12} \le y_1 + y_2$ και άρα δεν έχει νόημα να δοθεί αυτή η εντολή

$F_1(t_1,\tau)$ ={ο **μέγιστος αριθμός χρονικών περιόδων** από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι και το **τέλος T**, **που το εργαλείο λειτουργεί,** δεδομένου ότι το εργαλείο αρχίζει στην αρχή του χρόνου τ με **το εξάρτημα Α ηλικίας t_1 και το εξάρτημα Β βρέθηκε χαλασμένο**

Ομοίως ορίζουμε τις υπόλοιπες **επαναληπτικές σχέσεις**:

$$F_2(t_2,\tau) = max\begin{cases} p_2^{t_2}F_2(0,\tau+x_2)+(1-p_2^{t_2})f(0,0,\tau+x_2+y_{12}) & \text{συντήρηση του B} \\ f(0,t_2,\tau+y_1) & \text{αντικατ. του A} \\ f(0,0,\tau+y_{12}) & \text{αντικατ. των A, B} \end{cases}$$

$F_2(t_2,\tau)$ ={ο **μέγιστος αριθμός χρονικών περιόδων** από την αρχή του **χρόνου τ** μέχρι και το **τέλος T**, **που το εργαλείο λειτουργεί,** δεδομένου ότι το εργαλείο αρχίζει στην αρχή του χρόνου τ με **το εξάρτημα B ηλικίας t_2 και το εξάρτημα A βρέθηκε χαλασμένο**

$$F_3(\tau) = f(0,0,\tau+y_{12})$$ **αντικατάσταση των A, B**

Οριακές συνθήκες (για όλες τις τιμές των t_1, t_2):

$$f(t_1,t_2,T+1) = F_1(t_1,T+1) = F_2(t_2,T+1) = F_3(T+1) = 0$$

Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.

Copy protected with Online-PDF-No-Copy.com