

# Στοχαστικές Στρατηγικές

## 5<sup>η</sup> ενότητα: Στοχαστικά προβλήματα αντικατάστασης εργαλείων

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ  
Ακαδημαϊκό έτος 2018-2019  
Χειμερινό Εξάμηνο

**Παπάνα Αγγελική**

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

E-mail: [angeliki.papana@gmail.com](mailto:angeliki.papana@gmail.com), [agrapana@auth.gr](mailto:agrapana@auth.gr)

Webpage: <http://users.auth.gr/agrapana>

## Στοχαστικά προβλήματα αντικατάστασης εργαλείων

Το πρόβλημα της αντικατάστασης εργαλείων μετατρέπεται σε **στοχαστικό** αν υποθέσουμε ότι ισχύει κάποιο ή όλα τα παρακάτω:

- Ο **χρόνος χρήσης** του εργαλείου,  $T$ , είναι μια **τυχαία μεταβλητή**.
- Το **κόστος χρήσης** σε κάθε χρονική περίοδο είναι επίσης μια **τυχαία μεταβλητή**.
- Υπάρχει το **ενδεχόμενο** της **καταστροφής** του εργαλείου και κατά συνέπεια της απρόβλεπτης **αντικατάστασης** του.

### Το πρόβλημα

**Αν** και **ποια χρονική στιγμή** πρέπει να **αντικατασταθεί** το εργαλείο έτσι ώστε το **ολικό κόστος** να είναι **ελάχιστο**.

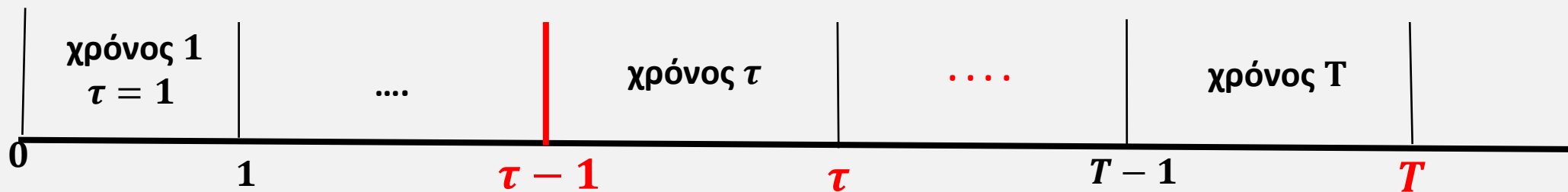
## Δεδομένα

Έστω ότι έχουμε ένα εργαλείο **ηλικίας  $t$** .

Χρειαζόμαστε το εργαλείο αυτό για τα επόμενα  **$T$  χρόνια** (ή τις επόμενες  $T$  χρονικές περιόδους).

Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι **πόσες φορές** πρέπει να αντικαταστήσουμε το εργαλείο και **πότε** στην χρονική περίοδο των  **$T$  χρονικών στιγμών**, έτσι ώστε το **ολικό κόστος** να είναι **ελάχιστο**.

Άρα στην αρχή κάθε χρονιάς πρέπει να γνωρίζουμε τις δυνατές επιλογές μας.



Δίνονται τα παρακάτω στοιχεία:

- $\alpha(t)$ : η **τιμή ανταλλαγής** που λαμβάνεται όταν ανταλλάσσουμε το εργαλείο μας, **ηλικίας  $t$**  στην αρχή του χρόνου με ένα καινούριο την στιγμή που αρχίζει ο νέος χρόνος δεδομένου ότι το εργαλείο μας λειτουργεί
- $p(t, x)$ : η **πιθανότητα** ένα εργαλείο **ηλικίας  $t$**  στην αρχή του χρόνου, να έχει **κόστος λειτουργίας** κατά την διάρκεια του χρόνου ίσο με  $x$  (όπου  $x = 0, 1, 2, \dots, X$ )
- $q(t)$ : η **πιθανότητα** ένα εργαλείο **ηλικίας  $t$**  στην αρχή του χρόνου, να σταματήσει να λειτουργεί στο τέλος του χρόνου
- $A$ : η **τιμή αγοράς** νέου εργαλείου

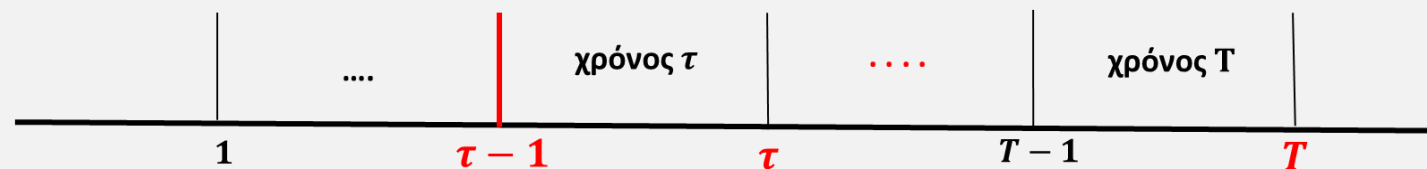
- $\pi_1(t)$ : η **τιμή πώλησης** του εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $T$ , όταν το εργαλείο είναι **ηλικίας  $t$**  δεδομένου ότι αυτό λειτουργεί
- $\pi_2(t)$ : η **τιμή πώλησης** του εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $T$ , όταν το εργαλείο είναι **ηλικίας  $t$**  δεδομένου ότι αυτό **δεν** λειτουργεί
- $\gamma(t)$ : η **τιμή επιδιόρθωσης** ενός εργαλείου **ηλικίας  $t$**
- $\beta(t)$ : η **τιμή ανταλλαγής** ενός εργαλείου **ηλικίας  $t$**  που δεν λειτουργεί στο τέλος του χρόνου

Ορίζουμε ως **βέλτιστη συνάρτηση**:

$f(t, \tau)$  = {το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** του εργαλείου από την αρχή του **χρόνου  $\tau$**  μέχρι το **τέλος  $T$** , δεδομένου ότι στο χρόνο  **$\tau$**  έχουμε ένα εργαλείο **ηλικίας  $t$  και λειτουργεί**

Για να ορίσουμε την επαναληπτική σχέση, δηλ. για να προσδιορίσουμε την  $f(t, \tau)$ , πρέπει να εξετάσουμε τις δυνατές επιλογές που έχουμε στην αρχή κάθε χρονιάς και να εκτιμήσουμε το κόστος της κάθε μιας.

Στο τέλος κάθε χρόνου ή στην αρχή του επόμενου, πρέπει να ληφθεί η απόφαση **αν θα αντικαταστήσουμε το εργαλείο μας ή αν θα το κρατήσουμε.**



## 1) Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

- Στην αρχή του χρόνου  $\tau$  διαθέτω ένα εργαλείο ηλικίας  $t$  το οποίο λειτουργεί αλλά θέλω να το αντικαταστήσω με νέο.
- Στο τέλος του χρόνου  $\tau$  πρέπει να διαθέτω ένα εργαλείο που λειτουργεί.
- Στο τέλος του χρόνου  $\tau$  θα διαθέτω ένα εργαλείο ηλικίας  $1$ , το οποίο μπορεί:

να χαλάσει με πιθανότητα  $q(0)$   
(με βάση την ηλικία του εργαλείου  
στην αρχή του χρόνου)

να λειτουργεί κανονικά, με  
πιθανότητα  $1 - q(0)$

Αν χαλάσει το νέο εργαλείο ηλικίας  $1$  έτους  
στο τέλος του χρόνου  $\tau$ , έχουμε δύο  
επιλογές:

Αγορά νέου εργαλείου

Επιδιόρθωση του εργαλείου

Το **κόστος** της απόφαση της **αγοράς νέου εργαλείου** είναι:

$\alpha(t)$ : Τιμή ανταλλαγής εργαλείου ηλικίας  $t$  το οποίο δουλεύει

$q(0)$ : Η πιθανότητα το νέο εργαλείο να χαλάσει στο τέλος του χρόνου  $\tau$ , όταν θα είναι ηλικίας 1 έτους

Αγορά νέου εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $\tau$  διότι χάλασε το νέο εργαλείο ηλικίας 1 έτους που αγοράσαμε στην αρχή του χρόνου  $\tau$

$\beta(1)$ : Τιμή ανταλλαγής εργαλείου ηλικίας 1 το οποίο δεν δουλεύει

$$A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^X x p(0, x) + q(0) \min \left\{ \begin{array}{l} A - \beta(1) + f(0, \tau + 1) \\ \gamma(1) + f(1, \tau + 1) \end{array} \right\} + (1 - q(0)) f(1, \tau + 1)$$

$A$ : Τιμή αγοράς νέου εργαλείου

Μέσο αναμενόμενο κόστος λειτουργίας νέου εργαλείου

Επιδιόρθωση του νέου εργαλείου ηλικίας 1 έτους στο τέλος του χρόνου  $\tau$

$1 - q(0)$ : Η πιθανότητα το νέο εργαλείο να μην χαλάσει στο τέλος του χρόνου  $\tau$ , όταν θα είναι ηλικίας 1 έτους



## 2) Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ηλικίας $t$

- Στην αρχή του χρόνου  $\tau$  διαθέτω ένα εργαλείο ηλικίας  $t$  το οποίο λειτουργεί και θέλω να το κρατήσω για άλλη μια χρονική περίοδο.
- Στο τέλος του χρόνου  $\tau$  πρέπει να διαθέτω ένα εργαλείο που να λειτουργεί.
- Στο τέλος του χρόνου  $\tau$  θα διαθέτω ένα εργαλείο ηλικίας  $t + 1$ , το οποίο μπορεί:

να χαλάσει με πιθανότητα  $q(t)$  (με βάση την ηλικία του εργαλείου στην αρχή του χρόνου)

να λειτουργεί κανονικά, με πιθανότητα  $1 - q(t)$

Αν χαλάσει, στο τέλος του χρόνου  $\tau$ , το εργαλείο ηλικίας  $t + 1$ , έχουμε δύο επιλογές:

Αγορά νέου εργαλείου

Επιδιόρθωση του εργαλείου

Το **κόστος** της απόφασης να **κρατήσουμε το εργαλείο ηλικίας  $t$**  είναι:

$q(t)$ : Η πιθανότητα το εργαλείο να χαλάσει στο τέλος του χρόνου  $\tau$ , όταν θα είναι ηλικίας  $t + 1$

Αγορά νέου εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $\tau$  διότι χάλασε το εργαλείο ηλικίας  $t + 1$  στο τέλος του χρόνου  $\tau$

$\beta(t + 1)$ : Τιμή ανταλλαγής εργαλείου ηλικίας  $t + 1$  το οποίο δεν δουλεύει

$$\sum_{x=0}^X x p(t, x) + q(t) \min \left\{ A - \beta(t + 1) + f(0, \tau + 1), \gamma(t + 1) + f(t + 1, \tau + 1) \right\} + (1 - q(t)) f(t + 1, \tau + 1)$$

Μέσο αναμενόμενο κόστος λειτουργίας του εργαλείου ηλικίας  $t$

Επιδιόρθωση του εργαλείου ηλικίας  $t + 1$  έτους στο τέλος του χρόνου  $\tau$

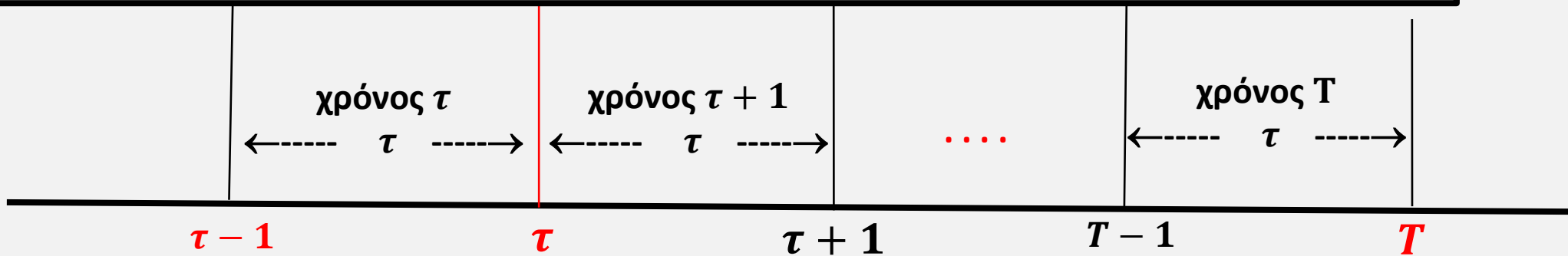
$1 - q(t)$ : Η πιθανότητα το εργαλείο να μην χαλάσει στο τέλος του χρόνου  $\tau$ , όταν θα είναι ηλικίας  $t + 1$

Με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση**:

$$f(t, \tau) = \min \left\{ A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^X x p(0, x) + q(0) \min \left\{ \begin{array}{l} A - \beta(1) + f(0, \tau + 1) \\ \gamma(1) + f(1, \tau + 1) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. (1 - q(0)) f(1, \tau + 1), \right. \\ \left. \sum_{x=0}^X x p(t, x) + q(t) \min \left\{ \begin{array}{l} A - \beta(t + 1) + f(0, \tau + 1) \\ \gamma(t + 1) + f(t + 1, \tau + 1) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. (1 - q(t)) f(t + 1, \tau + 1) \right\}$$

Απόφαση:  
αγορά νέου  
εργαλείου

Απόφαση:  
κρατάμε το  
εργαλείο  
ηλικίας  $t$

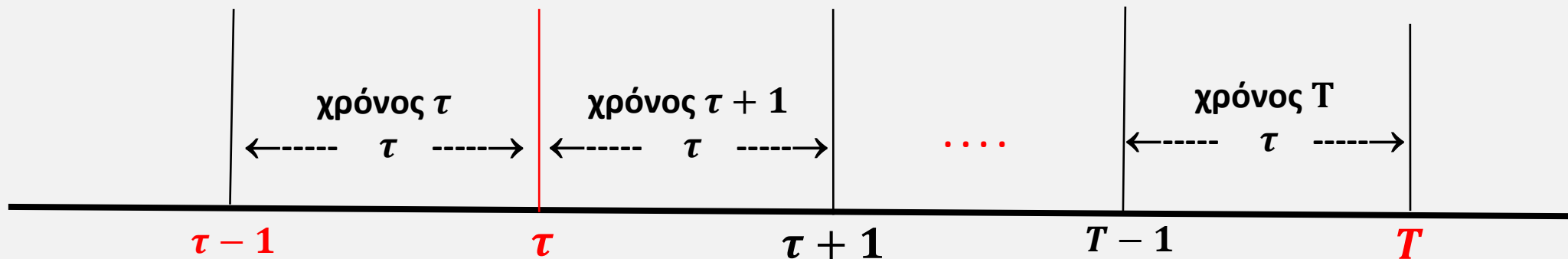


Για  $t = 0$ , υπάρχει μια μόνο επιλογή αφού έχω καινούριο εργαλείο στην αρχή του χρόνου  $\tau$ , κρατάω το εργαλείο ηλικίας  $t = 0$  για την επόμενη χρονική περίοδο.

Η επαναληπτική σχέση στην περίπτωση αυτή είναι:

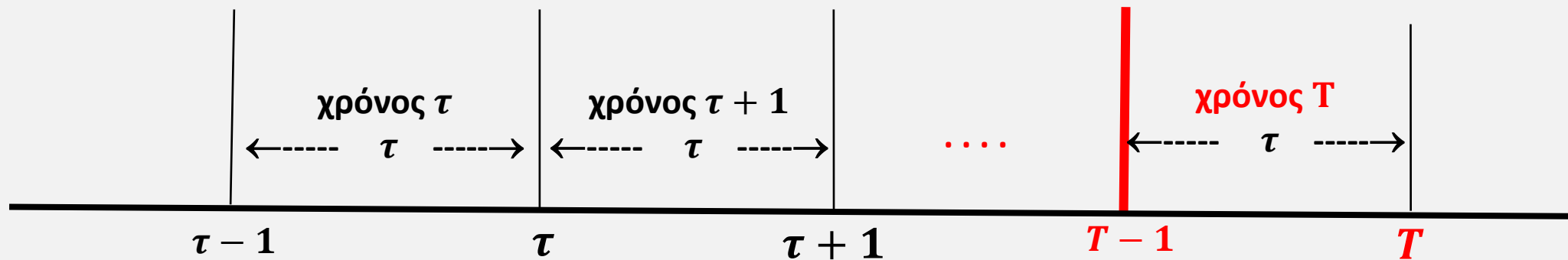
$$f(0, \tau) = \sum_{x=0}^X x p(0, x) + q(0) \min \left\{ \begin{array}{l} A - \beta(1) + f(0, \tau + 1) \\ \gamma(1) + f(1, \tau + 1) \end{array} \right\} + (1 - q(0)) f(1, \tau + 1)$$

Απόφαση:  
κρατάμε το  
εργαλείο  
ηλικίας  $t=0$



## Οριακές συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες ορίζονται για την **τελευταία χρονική περίοδο** όπου στο τέλος της χρονιάς αυτής δεν μας ενδιαφέρει να έχουμε άλλο το εργαλείο (ή αν λειτουργεί το εργαλείο μας), δηλ. ορίζονται για τον **τελευταίο χρόνο  $T$** .



## Οριακές συνθήκες για την τελευταία χρονική περίοδο $T$ :

$q(0)$ : Η πιθανότητα το εργαλείο να χαλάσει στο τέλος του χρόνου  $T$ , όταν θα είναι ηλικίας 1

$\pi_2(1)$ : η τιμή πώλησης του εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $T$ , ηλικίας 1 και δεδομένου ότι αυτό δεν λειτουργεί

$\pi_1(1)$ : η τιμή πώλησης του εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $T$ , ηλικίας 1 και δεδομένου ότι αυτό λειτουργεί

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$f(t, T) = \min\{A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^X x p(0, x) + q(0)(-\pi_2(1)) + (1 - q(0))(-\pi_1(1)), \\ \sum_{x=0}^X x p(t, x) + q(t)(-\pi_2(t+1)) + (1 - q(t))(-\pi_1(t+1))\}$$

Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ηλικίας  $t$

$\pi_2(t+1)$ : η τιμή πώλησης του εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $T$ , ηλικίας  $t+1$  και δεδομένου ότι αυτό δεν λειτουργεί

$\pi_1(t+1)$ : η τιμή πώλησης του εργαλείου στο τέλος του χρόνου  $T$ , ηλικίας  $t+1$  και δεδομένου ότι αυτό λειτουργεί

## Άσκηση

Σε στοχαστικό πρόβλημα αντικατάστασης εργαλείων δίνονται οι συναρτήσεις:  
 $\alpha(t)$ : η τιμή ανταλλαγής, στην αρχή του χρόνου, εργαλείου που λειτουργεί, ηλικίας  $t$ , με ένα καινούριο,  $\beta(t)$ : η τιμή ανταλλαγής χαλασμένου εργαλείου ηλικίας  $t$ , με ένα καινούριο, στο τέλος του χρόνου,  $\varepsilon(t)$ : η τιμή επιδιόρθωσης, στο τέλος του χρόνου, χαλασμένου εργαλείου ηλικίας  $t$ ,  $\sigma(t)$ : η τιμή γενικής συντήρησης, στο τέλος του χρόνου, εργαλείου ηλικίας  $t$ , που λειτουργεί, οπότε το εργαλείο θεωρείτε έπειτα νέο (ηλικίας 0),  $A$ : η τιμή αγοράς νέου εργαλείου,  $p(t, x)$ : η πιθανότητα εργαλείο ηλικίας  $t$  στην αρχή του χρόνου, να έχει κόστος λειτουργίας κατά την διάρκεια του χρόνου ίσο με  $x$  ( $x = 0, 1, \dots, X$ ),  $q(t)$ : η πιθανότητα εργαλείο ηλικίας  $t$  στην αρχή του χρόνου, να είναι χαλασμένο στο τέλος του χρόνου. Χρειαζόμαστε το εργαλείο για  $T$  χρόνια και δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο εξαρχής. Ορίστε την βέλτιστη συνάρτηση, επαναληπτική σχέση και οριακές συνθήκες.

Θα χρησιμοποιήσουμε την προς τα πίσω μέθοδο του ΔΠ.

Ορίζουμε την βέλτιστη συνάρτηση:

$f(t, \tau)$  = {το **ελάχιστο αναμενόμενο κόστος** λειτουργίας του εργαλείου από την αρχή του **χρόνου  $\tau$**  μέχρι το **τέλος  $T$** , δεδομένου ότι στην αρχή του χρόνο  **$\tau$**  έχουμε ένα εργαλείο **ηλικίας  $t$  και λειτουργεί**

Στην αρχή ενός χρόνου  **$\tau$** , έχουμε τις επιλογές:

- 1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου**
- 2) Απόφαση: Κρατάμε το εργαλείου ηλικίας  $t$**



## 1) Απόφαση: Αγορά νέου εργαλείου

Στο τέλος του χρόνου, το εργαλείο μπορεί να δουλεύει ή να μην δουλεύει.

■ Αν στο τέλος ενός χρόνου το εργαλείο δουλεύει, τότε έχουμε τις επιλογές:

1) Συντήρηση του εργαλείου

2) Κρατάμε το εργαλείο ως έχει

■ Αν στο τέλος ενός χρόνου το εργαλείο χαλάσει, τότε έχουμε τις επιλογές:

1) Αγορά νέου εργαλείου

2) Επιδιόρθωση

## 2) Απόφαση: Κρατάμε το εργαλείο ηλικίας $t$

Στο τέλος του χρόνου, το εργαλείο μπορεί να δουλεύει ή να μην δουλεύει.

- Αν στο τέλος ενός χρόνου το εργαλείο δουλεύει, τότε έχουμε τις επιλογές:

- 1) Συντήρηση του εργαλείου

- 2) Κρατάμε το εργαλείο ως έχει

- Αν στο τέλος ενός χρόνου το εργαλείο χαλάσει, τότε έχουμε τις επιλογές:

- 1) Αγορά νέου εργαλείου

- 2) Επιδιόρθωση

□ Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω και με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση** για  $t > 0$ :

$$\begin{aligned}
 f(t, \tau) = & \min \left\{ \mathbf{A} - \alpha(t) + \sum_{x=0}^X x p(0, x) + q(0) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{Αγορά νέου εργαλείου} \\ A - \beta(1) + f(0, \tau + 1) \\ \varepsilon(1) + f(1, \tau + 1) \end{array} \right\} + \right. \\
 & \left. (1 - q(0)) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{συντήρηση} \\ \sigma(1) + f(0, \tau + 1) \\ \text{κρατάμε το εργαλείο ως έχει} \\ f(1, \tau + 1) \end{array} \right\}, \right. \\
 & \left. \sum_{x=0}^X x p(t, x) + q(t) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{Αγορά νέου εργαλείου} \\ A - \beta(t + 1) + f(0, \tau + 1) \\ \varepsilon(t + 1) + f(t + 1, \tau + 1) \end{array} \right\} + \right. \\
 & \left. (1 - q(t)) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{συντήρηση} \\ \sigma(t + 1) + f(0, \tau + 1) \\ \text{κρατάμε το εργαλείο ως έχει} \\ f(t + 1, \tau + 1) \end{array} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Απόφαση:  
αγορά νέου  
εργαλείου

Απόφαση:  
κρατάμε το  
εργαλείο  
ηλικίας  $t$

□ Για  $t = 0$  (διαθέτω δικό μου καινούριο εργαλείο (ηλικίας 0 χρόνων)):

$$f(0, \tau) = \sum_{x=0}^X x p(0, x) + q(0) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{Αγορά νέου εργαλείου} \\ A - \beta(1) + f(0, \tau + 1) \\ \varepsilon(1) + f(1, \tau + 1) \\ \text{επιδιόρθωση} \end{array} \right\} +$$

$$(1 - q(0)) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{συντήρηση} \\ \sigma(1) + f(0, \tau + 1) \\ f(1, \tau + 1) \\ \text{κρατάμε το εργαλείο ως έχει} \end{array} \right\}$$

Απόφαση:  
κρατάμε το  
εργαλείο ηλικίας  
 $t=0$

□ Για την πρώτη χρονιά ( $\tau = 1$ ), όπου δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο:

$$f(-, 1) = A + \sum_{x=0}^X x p(0, x) + q(0) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{Αγορά νέου εργαλείου} \\ A - \beta(1) + f(0, \tau + 1) \\ \varepsilon(1) + f(1, \tau + 1) \\ \text{επιδιόρθωση} \end{array} \right\} +$$

$$(1 - q(0)) \min \left\{ \begin{array}{l} \text{συντήρηση} \\ \sigma(1) + f(0, \tau + 1) \\ f(1, \tau + 1) \\ \text{κρατάμε το εργαλείο ως έχει} \end{array} \right\}$$

Απόφαση: αγορά  
νέου εργαλείου

□ **Οριακές συνθήκες για την τελευταία χρονική περίοδο  $T$**  (δεν μας ενδιαφέρει αν το εργαλείο χαλάσει ή λειτουργεί στο τέλος του χρόνου  $T$ , δεν δίνονται από την εκφώνηση τιμές πώλησης ενός εργαλείου χωρίς ανταλλαγή με νέο εργαλείο):

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$f(t, T) = \min\{A - \alpha(t) + \sum_{x=0}^X x p(0, x), \sum_{x=0}^X x p(t, x)\}$$

Απόφαση: κρατάμε το εργαλείο ηλικίας  $t$

## Βιβλιογραφία

- 1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
- 2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.