

Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

4^η ενότητα: Προβλήματα αντικατάστασης
εργαλείων (2)

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας

E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agrapana@auth.gr

Webpage: <http://users.auth.gr/agrapana>

Άσκηση

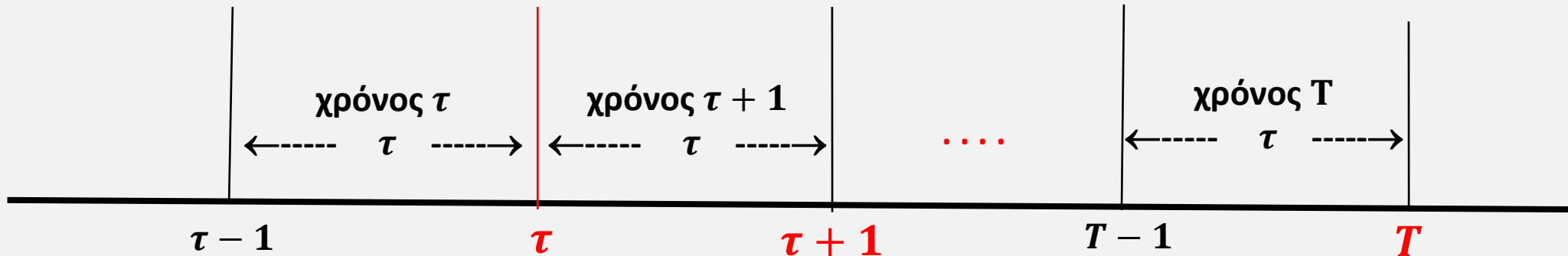
Έστω ένα **εργαλείο ηλικίας t** . Χρειαζόμαστε το εργαλείο αυτό για τα επόμενα **T χρόνια**. Υποθέτουμε ότι όταν πουλάμε το εργαλείο ηλικίας t , μπορούμε να μην αγοράσουμε νέο, αλλά παίρνουμε πάλι την **τιμή πώλησης**, και έχουμε την δυνατότητα να **νοικιάσουμε** ένα νέο εργαλείο για έναν χρόνο με **κόστος ϵ** . Να λυθεί το πρόβλημα με την προς τα πίσω μέθοδο του ΔΠ.

1^η περίπτωση:

Διαθέτουμε δικό μας εργαλείο την χρονική στιγμή τ , ηλικίας t

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση** ως:

$f(t, \tau)$ = {το **ελάχιστο κόστος** του εργαλείου από την **χρονική στιγμή τ** (τέλος «χρόνου τ » και αρχή «χρόνου $\tau + 1$ ») μέχρι το **τέλος T** δεδομένου ότι αρχίζοντας ο χρόνος, το εργαλείο μας είναι **ηλικίας t**



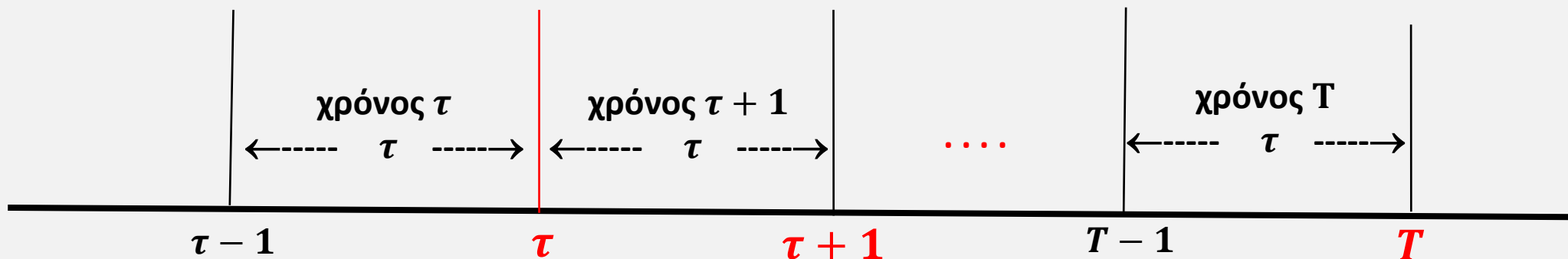
2^η περίπτωση:

Δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο

(διότι τον προηγούμενο χρόνο είχαμε νοικιάσει ένα εργαλείο)

Ορίζουμε την **βέλτιστη συνάρτηση** ως:

$F(\tau)$ = {το **ελάχιστο κόστος** του εργαλείου από την **χρονική στιγμή τ** μέχρι το **τέλος T** δεδομένου ότι την **χρονική στιγμή τ** (στην αρχή του «χρόνου **$\tau + 1$** ») δεν έχουμε δικό μας εργαλείο, καθώς τον προηγούμενο χρόνο τον διανύσαμε με ένα που είχαμε νοικιάσει



1^η περίπτωση: Διαθέτουμε δικό μας εργαλείο την χρονική στιγμή t , το οποίο είναι ηλικίας t .

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τρεις επιλογές:

1) Αγορά νέου εργαλείου

2) Κρατάμε το εργαλείο που έχουμε

3) Πουλάμε το εργαλείο που έχουμε και νοικιάζουμε ένα εργαλείο για την επόμενη χρονική περίοδο

Το **κόστος** κάθε μιας επιλογής είναι από **την χρονική στιγμή t** , ως το τέλος **T** είναι:

1) Αγορά νέου εργαλείου

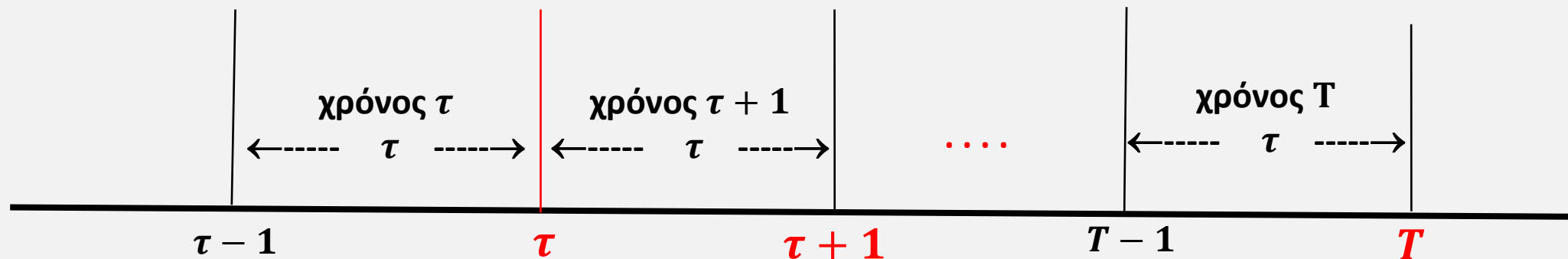
$$A - \alpha(t) + k(0) + f(1, \tau + 1)$$

2) Κρατάμε το εργαλείο που έχουμε

$$k(t) + f(t + 1, \tau + 1)$$

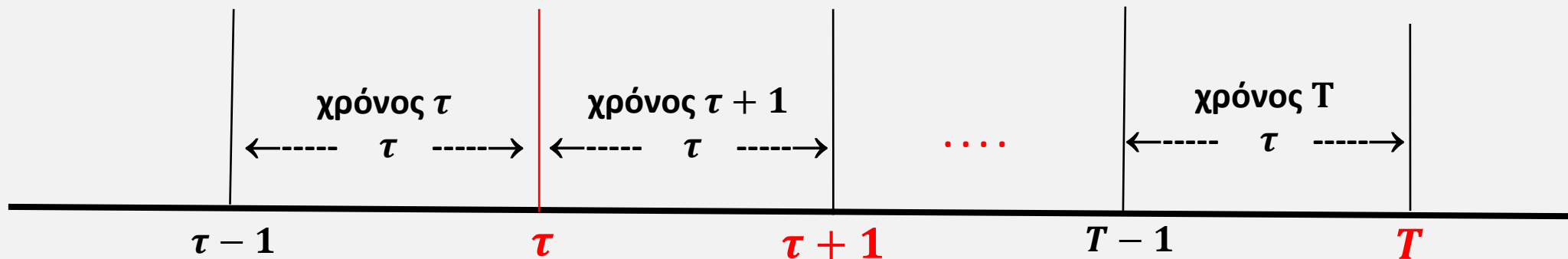
3) Πουλάμε το εργαλείο που έχουμε και νοικιάζουμε ένα νέο εργαλείο για την επόμενη χρονική περίοδο

$$-\pi(t) + \varepsilon + k(0) + F(\tau + 1)$$



Με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση**:

$$f(t, \tau) = \min \left\{ \begin{array}{l} A - \alpha(t) + k(0) + f(1, \tau + 1) \\ k(t) + f(t + 1, \tau + 1) \\ -\pi(t) + \varepsilon + k(0) + F(\tau + 1) \end{array} \right.$$



2^η περίπτωση: Έστω ότι δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο την χρονική στιγμή αρχή t , διότι την προηγούμενη περίοδο νοικιάζαμε ένα εργαλείο.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο επιλογές:

1) Αγορά νέου εργαλείου

2) Νοικιάζουμε ένα νέο εργαλείο για την επόμενη χρονική περίοδο

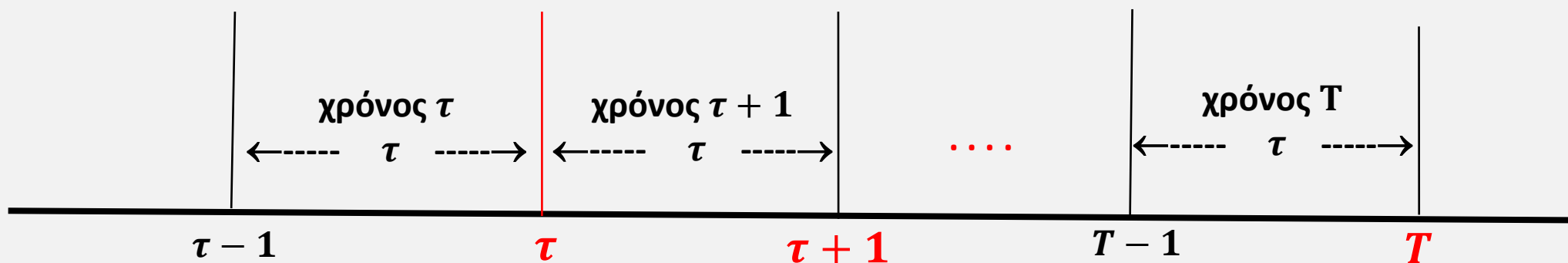
Το **κόστος** κάθε μιας επιλογής είναι από **την χρονική στιγμή t** , ως το τέλος **T** είναι:

1) Αγορά νέου εργαλείου

$$A + k(0) + f(1, \tau + 1)$$

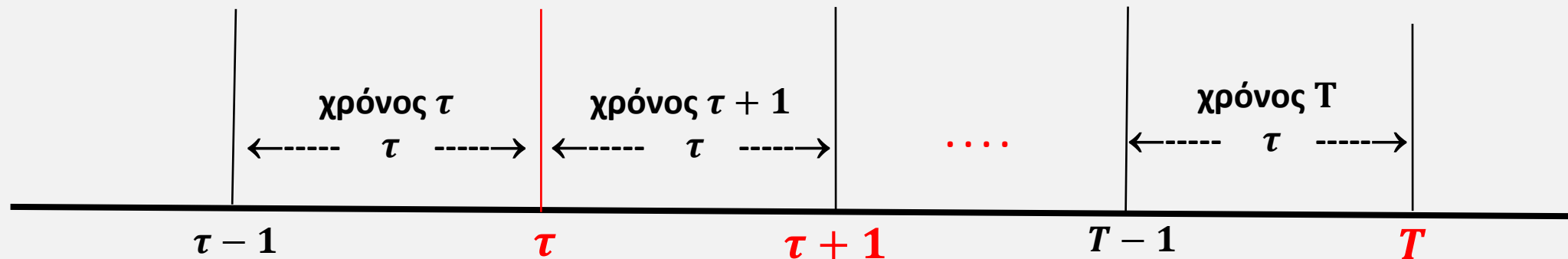
2) Νοικιάζουμε ένα νέο εργαλείο για την επόμενη χρονική περίοδο

$$\varepsilon + k(0) + F(\tau + 1)$$



Με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**, προκύπτει η **επαναληπτική σχέση**:

$$F(\tau) = \min \begin{cases} A + k(0) + f(1, \tau + 1) \\ \varepsilon + k(0) + F(\tau + 1) \end{cases}$$



Επομένως:

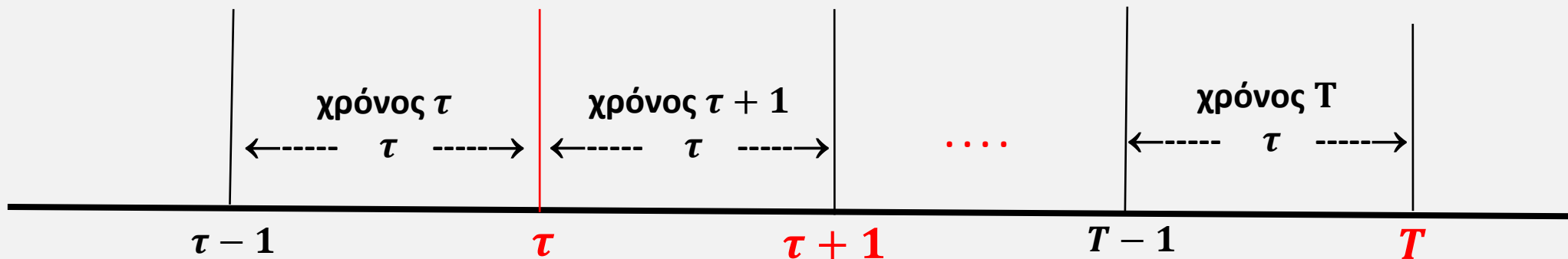
$$f(t, \tau) = \min \begin{cases} A - \alpha(t) + k(0) + f(1, \tau + 1) \\ k(t) + f(t + 1, \tau + 1) \\ -\pi(t) + \varepsilon + k(0) + F(\tau + 1) \end{cases}$$

$$F(\tau) = \min \begin{cases} A + k(0) + f(1, \tau + 1) \\ \varepsilon + k(0) + F(\tau + 1) \end{cases}$$

Οριακές συνθήκες

$$f(t, T) = -\pi(t)$$

$$F(T) = 0$$



Άσκηση Το εργαστήριο αξονικής τομογραφίας κεντρικού νοσοκομείου της πόλης, αποφασίζει την εγκατάσταση μιας νέας μονάδας μαγνητικής τομογραφίας. Η μονάδα αυτή θα λειτουργήσει για 4 χρόνια και έπειτα θα εκτιμηθεί η κατάσταση με βάση τα αποτελέσματα της 4ετίας. Το εργαστήριο μπορεί να νοικιάσει τομογράφο αντί να αγοράσει, με κάποιο ανάλογο κόστος $\varepsilon(\tau)$. Έστω $A(\tau)$ η τιμή αγοράς στο χρόνο τ , $k(t)$ το κόστος χρήσης, $\pi(t)$ η τιμή πώλησης και $\alpha(t)$ η τιμή ανταλλαγής. Το κόστος χρήσης ενός νοικιασμένου μηχανήματος είναι $k(0)$. Δίνονται:

$$A(\tau) = A + 5\tau, \text{ με } A = 50 \text{ και } \tau = 0,1,2,3$$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon + 3\tau, \text{ με } \varepsilon = 10 \text{ και } \tau = 0,1,2,3$$

$$k(t) = k + 5t, \text{ με } k = 5 \text{ και } t = 0,1,2,3$$

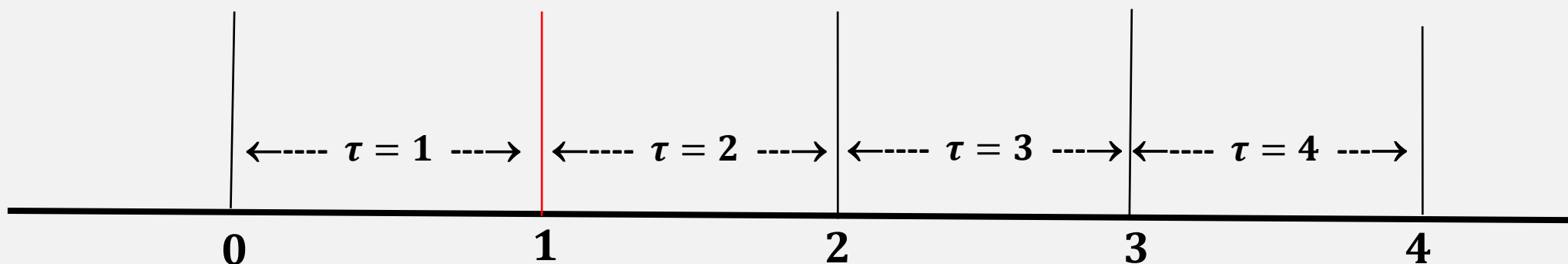
$$\pi(t) = \pi - 6t, \text{ με } \pi = 45 \text{ και } t = 1,2,3$$

$$\alpha(t) = \alpha - 5t, \text{ με } \alpha = 55 \text{ και } t = 1,2,3 \text{ και } T = 4.$$

Βέλτιστη συνάρτηση:

$f(t, \tau)$ = {το ελάχιστο κόστος του εργαλείου από την χρονική στιγμή τ ως το τέλος του χρόνου T , δεδομένου ότι το εργαλείο μας είναι ηλικίας t }

$F(\tau)$ = {το ελάχιστο κόστος του εργαλείου από την χρονική στιγμή τ ως το τέλος T , δεδομένου ότι δεν διαθέτουμε δικό μας εργαλείο την χρονική στιγμή τ }



Βέλτιστη συνάρτηση:

$$f(t, \tau) = \min \left\{ \begin{array}{l} A(\tau) - \alpha(t) + k(0) + f(1, \tau + 1) \\ k(t) + f(t + 1, \tau + 1) \\ -\pi(t) + \varepsilon(\tau) + k(0) + F(\tau + 1) \end{array} \right.$$

Αγορά νέου εργαλείου

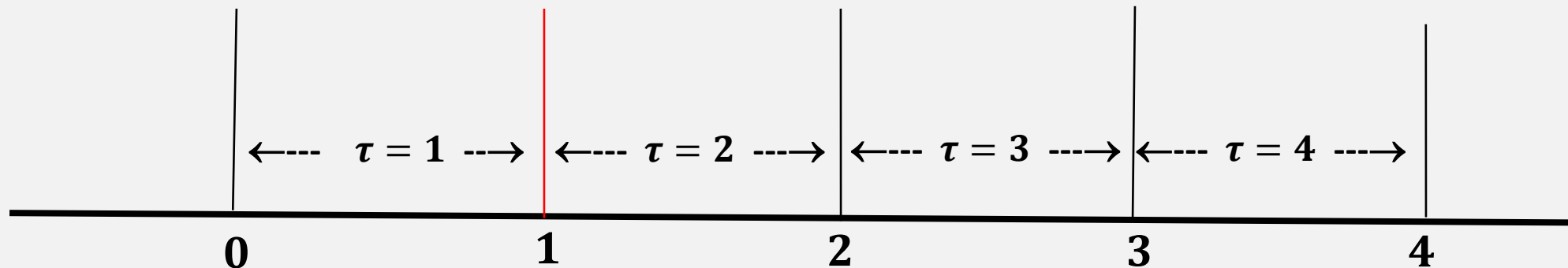
Κρατάμε το εργαλείο που έχουμε

Πουλάμε το εργαλείο που έχουμε και νοικιάζουμε ένα εργαλείο για την επόμενη χρονική περίοδο

$$F(\tau) = \min \left\{ \begin{array}{l} A(\tau) + k(0) + f(1, \tau + 1) \\ \varepsilon(\tau) + k(0) + F(\tau + 1) \end{array} \right.$$

Αγορά νέου εργαλείου

Νοικιάζουμε ένα νέο εργαλείο για την επόμενη χρονική περίοδο



Οριακές συνθήκες

$$f(t, T) = 0$$

και

$$F(T) = 0$$

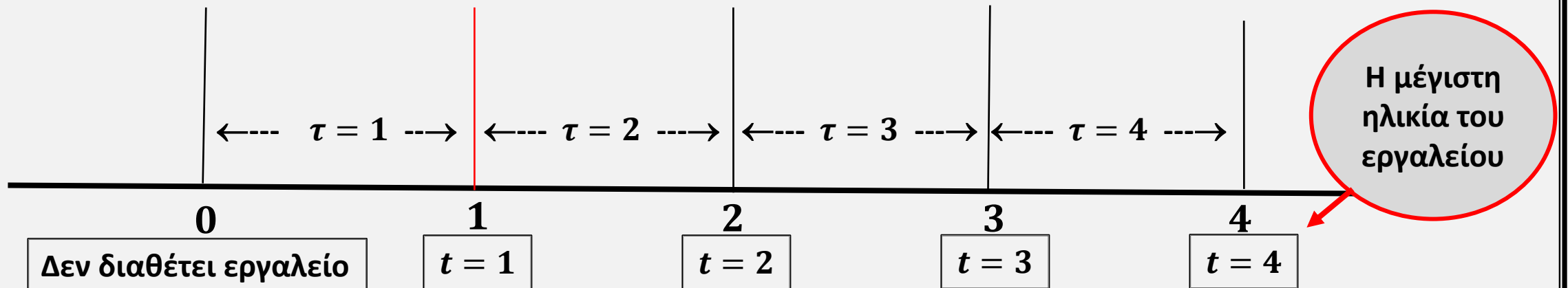
- Για $\tau = 4$:

$$f(1, 4) = 0 \quad F(4) = 0$$

$$f(2, 4) = 0$$

$$f(3, 4) = 0$$

$$f(4, 4) = 0$$



■ Για $\tau = 3$:

$$F(3) = \min\{A(3) + k(0) + f(1,4), \varepsilon(3) + k(0) + F(4)\} = \min\{70, 24\} = 24$$

$$f(1, 3) = \min\{A(3) - \alpha(1) + k(0) + f(1,4), k(1) + f(2,4), \\ -\pi(1) + \varepsilon(3) + k(0) + F(4)\} = -15$$

$$f(2, 3) = \min\{A(3) - \alpha(2) + k(0) + f(1,4), k(2) + f(3,4), \\ -\pi(2) + \varepsilon(3) + k(0) + F(4)\} = -9$$

$$f(3, 3) = \min\{A(3) - \alpha(3) + k(0) + f(1,4), k(3) + f(4,4), \\ -\pi(3) + \varepsilon(3) + k(0) + F(4)\} = -3$$

■ Για $\tau = 2$:

$$F(2) = \min\{A(2) + k(0) + f(1,3), \varepsilon(2) + k(0) + F(3)\} = 45$$

$$f(1,2) = \min\{A(2) - \alpha(1) + k(0) + f(1,3), k(1) + f(2,3), \\ -\pi(1) + \varepsilon(2) + k(0) + F(3)\} = 0$$

$$f(2,2) = \min\{A(2) - \alpha(2) + k(0) + f(1,3), k(2) + f(3,3), \\ -\pi(2) + \varepsilon(2) + k(0) + F(3)\} = 5$$

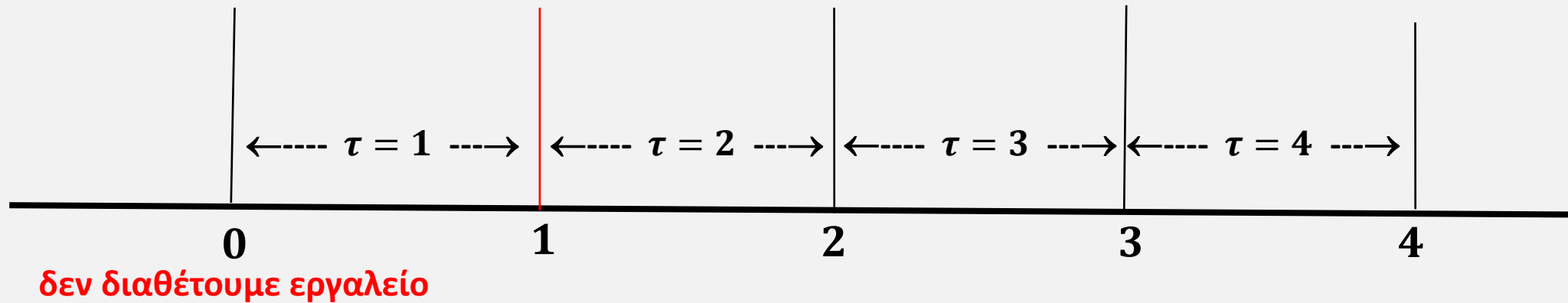
■ Για $\tau = 1$:

$$F(1) = \min\{A(1) + k(0) + f(1,2), \varepsilon(1) + k(0) + F(2)\} = 60$$

$$f(1,1) = \min\{A(1) - \alpha(1) + k(0) + f(1,2), \\ k(1) + f(2,2), -\pi(1) + \varepsilon(1) + k(0) + F(2)\} = 10$$

■ Για $\tau = 0$:

$$F(0) = \min\{A(0) + k(0) + f(1,1), \varepsilon(0) + k(0) + F(1)\} = 65$$



$$F(0) = \min\{A(0) + k(0) + f(1,1), \varepsilon(0) + k(0) + F(1)\} = 65$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$f(1,1) = \min\{A(1) - \alpha(1) + k(0) + f(1,2), k(1) + f(2,2), -\pi(1) + \varepsilon(1) + k(0) + F(2)\} = 10$$

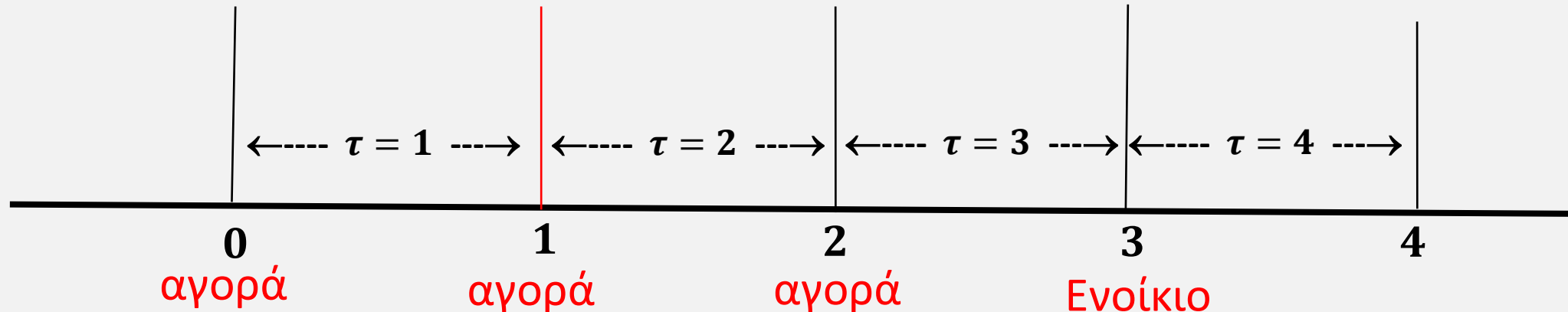
Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$f(1,2) = \min\{A(2) - \alpha(1) + k(0) + f(1,3), k(1) + f(2,3), -\pi(1) + \varepsilon(2) + k(0) + F(3)\} = 0$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$f(1,3) = \min\{A(3) - \alpha(1) + k(0) + f(1,4), k(1) + f(2,4), -\pi(1) + \varepsilon(3) + k(0) + F(4)\} = -15$$

Απόφαση: ενοικίαση εργαλείου



Άσκηση

Έστω ένα εργαλείο ηλικίας t . Χρειαζόμαστε το εργαλείο αυτό για τα επόμενα T χρόνια. Επιπλέον:

α) Οποιαδήποτε αλλαγή εργαλείων πρέπει να γίνει σε ηλικία τέτοια ώστε να μην ξεπερνά την ηλικία που έγινε η προηγούμενη αλλαγή.

β) Κατά την αλλαγή εργαλείου ηλικίας i μπορούμε να αγοράσουμε ένα άλλο ηλικίας j με κόστος $\varepsilon(i, j)$.

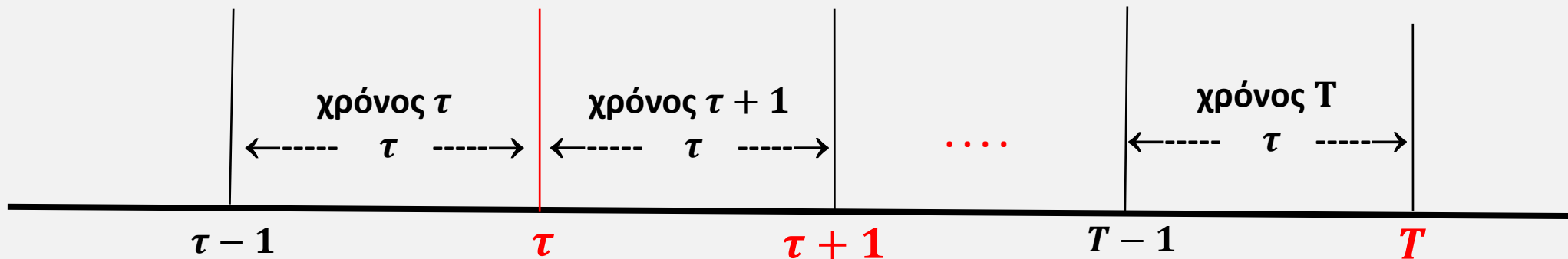
γ) Οποιοδήποτε εργαλείο ηλικίας Φ πρέπει να αντικατασταθεί, δηλ. η ηλικία Φ είναι ένα άνω φράγμα για την ηλικία του εργαλείου.

Να λυθεί το πρόβλημα με την προς τα πίσω μέθοδο του ΔΠ.

Πολυδιάστατη βέλτιστη συνάρτηση: πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την ηλικία που έγινε η τελευταία αλλαγή του εργαλείου.

$f(t, \tau, x)$ = {το **ελάχιστο κόστος** του εργαλείου από την **χρονική στιγμή τ** μέχρι το **τέλος T** δεδομένου ότι είναι **ηλικίας t** και ότι x ήταν η ηλικία αλλαγής του εργαλείου την προηγούμενη φορά

Αν δεν έχει γίνει ποτέ αλλαγή εργαλείου τότε $x = \Phi$.

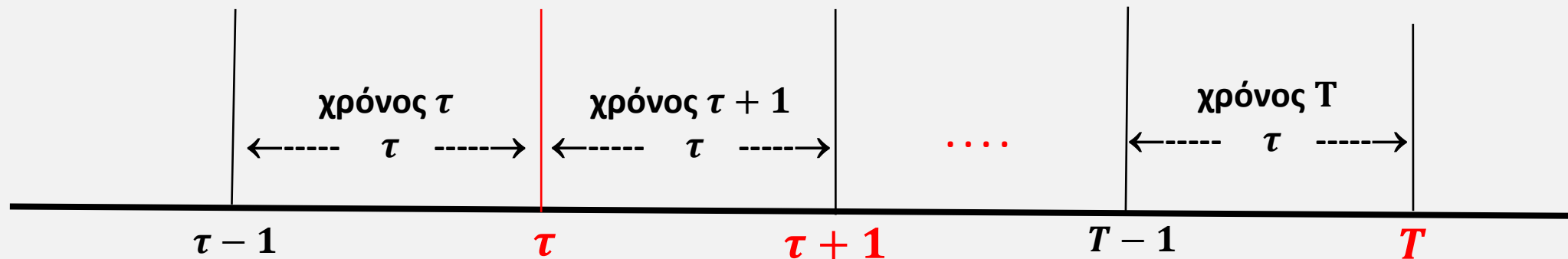


Σε κάθε χρονική στιγμή έχουμε να επιλέξουμε μια από τις δυνατές αποφάσεις:

Μπορούμε να αλλάξουμε το εργαλείο μας ηλικίας t με κάποιο άλλο εργαλείο ηλικίας μεταξύ $j = 0, 1, \dots, x - 1$. Έστω ότι αλλάζουμε το εργαλείο μας ηλικίας t με κάποιο άλλο εργαλείο ηλικίας j .

Το κόστος της αλλαγής είναι $\varepsilon(t, j)$ και το κόστος που προκύπτει μέχρι το τέλος του χρόνου T είναι:

$$\varepsilon(t, j) + k(j) + f(j + 1, \tau + 1, t)$$



Υπάρχουν $j = 0, 1, \dots, x - 1$ τέτοιες δυνατές αποφάσεις μέσα στις οποίες συμπεριλαμβάνεται και η απόφαση να **κρατήσουμε το εργαλείο** για $j = t$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση δεν προστίθεται η $f(j + 1, \tau + 1, t)$ αλλά η $f(j + 1, \tau + 1, x)$.

Η βέλτιστη απόφαση προκύπτει για το ελάχιστο κόστος, άρα

$$f(t, \tau, x) = \min\{\varepsilon(t, j) + k(j) + f(j + 1, \tau + 1, t) \text{ για } t \neq j = 0, 1, \dots, x - 1, \\ \varepsilon(t, t) + k(t) + f(j + 1, \tau + 1, x) \text{ για } t = j\}$$

και $x = 1, \dots, \Phi$

Οριακές συνθήκες

$$f(t, T, x) = -\pi(t)$$

Βιβλιογραφία

- 1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
- 2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.