Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

4η ενότητα: Προβλήματα αντικατάστασης εργαλείων

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

Αντικατάσταση εργαλείων

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα **εργαλείο**, π.χ. αυτοκίνητο ή μηχάνημα και έστω ότι θέλουμε να έχουμε ένα τέτοιο εργαλείο για T **χρονικές στιγμές**.

Το πρόβλημα

Πρέπει να αποφασίσουμε, **πόσες φορές** πρέπει να **αντικαταστήσουμε** το εργαλείο και **πότε**, στη χρονική περίοδο των T **χρονικών στιγμών**, έτσι ώστε **το ολικό κόστος να είναι ελάχιστο**.

Δεδομένα

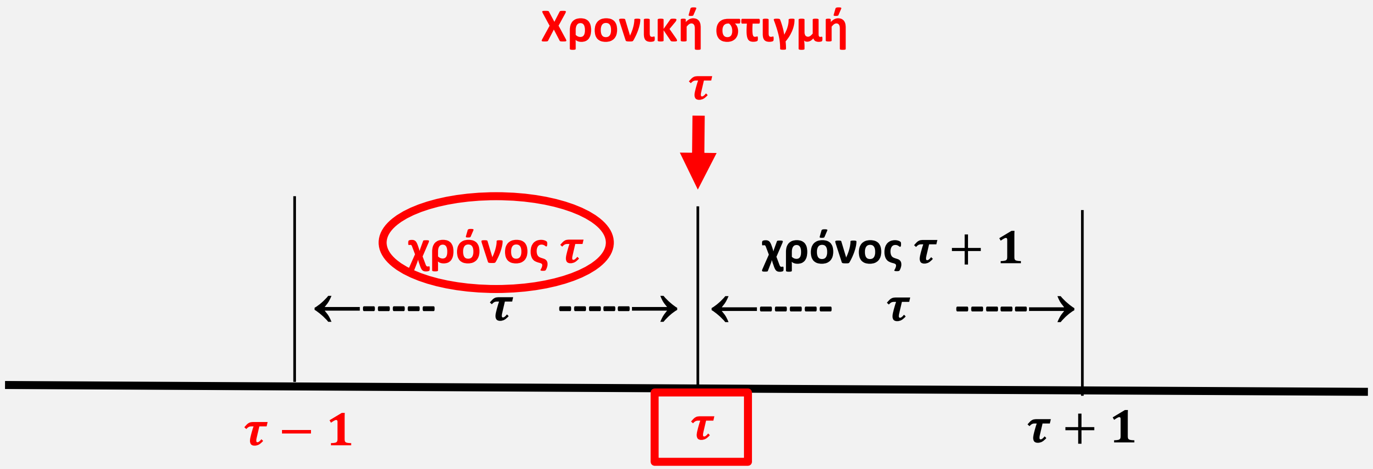
Σε προβλήματα αντικατάστασης εργαλείων δίνονται τα παρακάτω:

- $\boldsymbol{k(t)}$: το κόστος χρήσης του εργαλείου για έναν χρόνο (ή μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο), όταν αυτό είναι ηλικίας t στην αρχή του χρόνου (ή στην αρχή μιας χρονικής περιόδου)
- $\boldsymbol{\alpha(t)}$: η τιμή ανταλλαγής που λαμβάνεται όταν ανταλλάσσουμε το εργαλείο μας, ηλικίας t στην αρχή του χρόνου με ένα καινούριο τη στιγμή που αρχίζει ο νέος χρόνος
- $\boldsymbol{\pi(t)}$: η τιμή πώλησης του εργαλείου στο τέλος του χρόνου T, όταν αυτό είναι ηλικίας t
- $\boldsymbol{A}$: η τιμή αγοράς ενός νέου εργαλείου

Όταν αναφερόμαστε στη **χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$**, αυτό είναι ένα **σημείο** πάνω στην ευθεία που μετρά τον χρόνο.

- Όταν λέμε **«στον χρόνο $\boldsymbol{\tau}$»**, εννοούμε το διάστημα $[\boldsymbol{\tau-1}, \boldsymbol{\tau}]$.

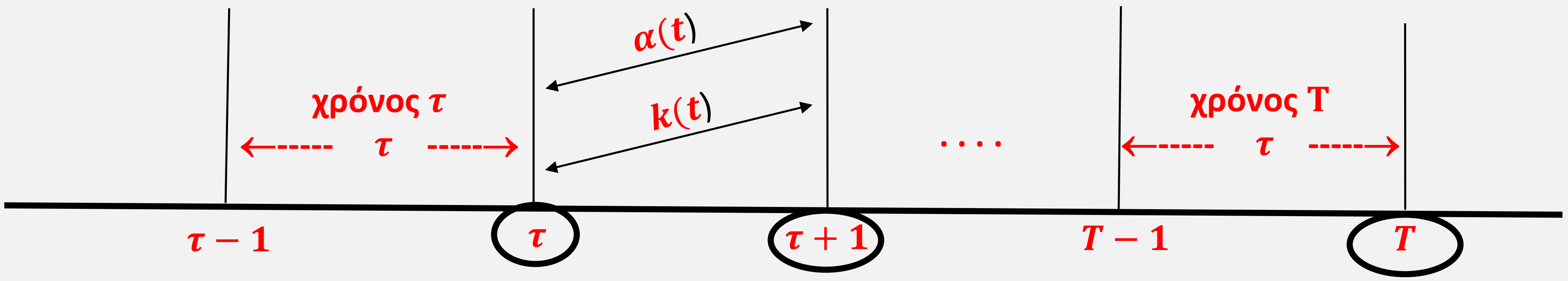
  Δηλαδή η αρχή του **χρόνου $\boldsymbol{\tau}$** *είναι η χρονική στιγμή* $\boldsymbol{\tau-1}$, *η οποία χρονική στιγμή* $\boldsymbol{\tau-1}$ *είναι συγχρόνως το τέλος του* **χρόνου $\boldsymbol{\tau-1}$**.



Βέλτιστη συνάρτηση

$f(t,\tau)$ $=$ {το ελάχιστο κόστος του εργαλείου από τη χρονική στιγμή τ (αρχή της χρονιάς $\tau+1$) μέχρι τη χρονική στιγμή T (τέλος) δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή τ είναι ηλικίας t}

Στο τέλος κάθε χρόνου ή στην αρχή του επόμενου, πρέπει να ληφθεί η απόφαση αν θα αντικατασταθεί το εργαλείο ή όχι, με κριτήριο το κόστος.



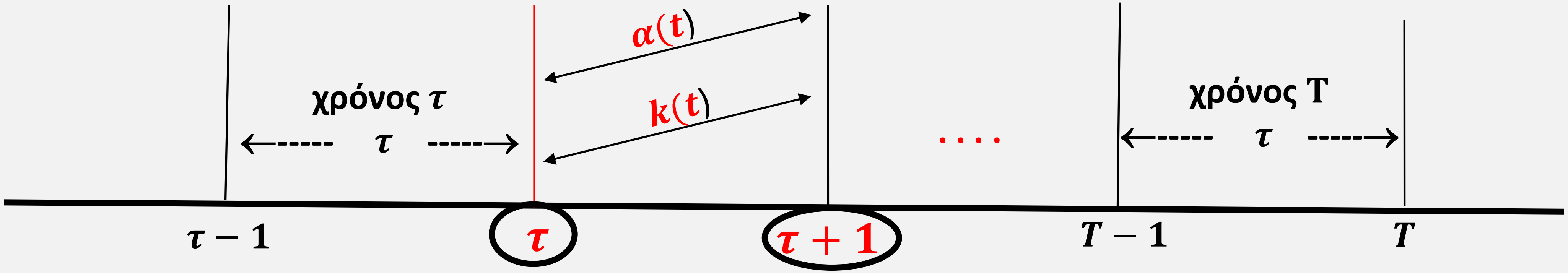
Αρχικά βρίσκουμε **το κόστος μιας χρονικής περιόδου**, για κάθε μια από τις δύο επιλογές που έχουμε, με αρχή την χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$.

- Η **απόφαση αγοράς νέου εργαλείου** τη **χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$**, και για μια χρονική περίοδο, έχει κόστος:

$$\boxed{A - \alpha(t) + k(0)}$$

- Η **απόφαση να κρατήσουμε το παλιό εργαλείο** τη **χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$**, για άλλη μια χρονική περίοδο, έχει κόστος:

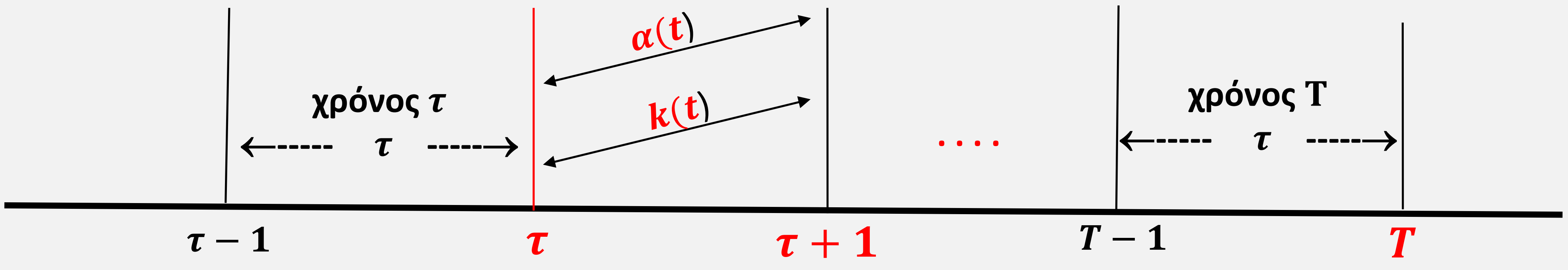
$$\boxed{k(t)}$$



Με βάση την **αρχή της βελτιστοποίησης**:

για να βρούμε το ολικό κόστος από τη **χρονική στιγμή τ** μέχρι την τελική χρονική στιγμή T, αρκεί να **προσθέσουμε**:

- το κόστος που υπολογίσαμε για κάθε μια απόφαση από τη **χρονική στιγμή τ** ως τη **χρονική στιγμή $\tau + 1$**
- την τιμή του ελάχιστου κόστους από τη χρονική στιγμή $\tau + 1$ μέχρι την τελική χρονική στιγμή T.

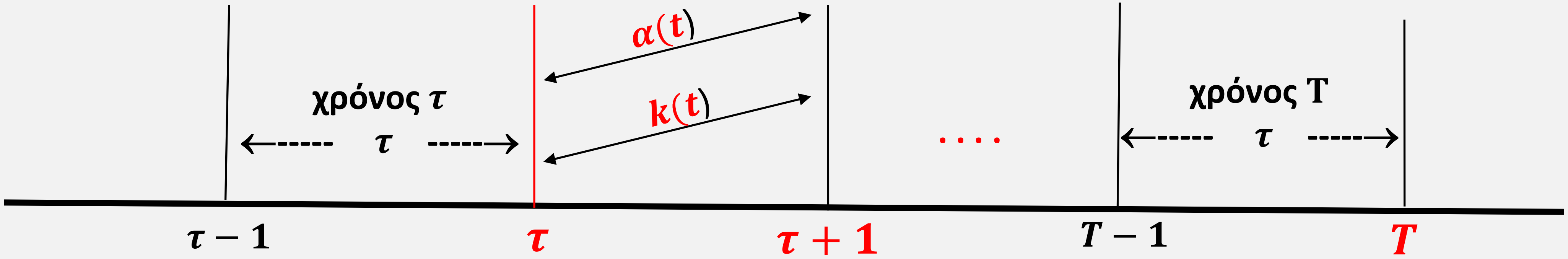


- Για την **απόφαση να αγοράσουμε νέο εργαλείο** τη **χρονική στιγμή τ**, το ελάχιστο κόστος από την χρονική στιγμή $\tau+1$ μέχρι την τελική χρονική στιγμή T θα είναι:

$$\boxed{f(1,\tau+1)}$$

- Για την **απόφαση να κρατήσουμε το παλιό εργαλείο** ηλικίας t τη **χρονική στιγμή τ**, για άλλον έναν χρόνο, το ελάχιστο κόστος από την χρονική στιγμή $\tau+1$ μέχρι την τελική χρονική στιγμή T θα είναι:

$$\boxed{f(t+1,\tau+1)}$$



Επομένως:

- **Απόφαση αγοράς νέου εργαλείου** τη **χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$**:
  το **συνολικό κόστος** από την χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$ μέχρι την τελική χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$ είναι:

$$\boxed{\boldsymbol{A - \alpha(t) + k(0) + f(1, \tau + 1)}}$$

- **Απόφαση να κρατήσουμε το παλιό εργαλείο** ηλικίας $\boldsymbol{t}$, για άλλη μια χρονική περίοδο, τη **χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$**:
  το **συνολικό κόστος** από την χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$ μέχρι την τελική χρονική στιγμή $\boldsymbol{T}$ είναι:

$$\boxed{\boldsymbol{k(t) + f(t + 1, \tau + 1)}}$$

Επαναληπτική σχέση

$$\boxed{\boldsymbol{f(t,\tau) = min\{A - \alpha(t) + k(0) + f(1,\tau+1),\, k(t) + f(t+1,\tau+1)\}}}$$

Προς τα πίσω μέθοδος: Η μεταβλητή τ σχετίζεται με τα loops

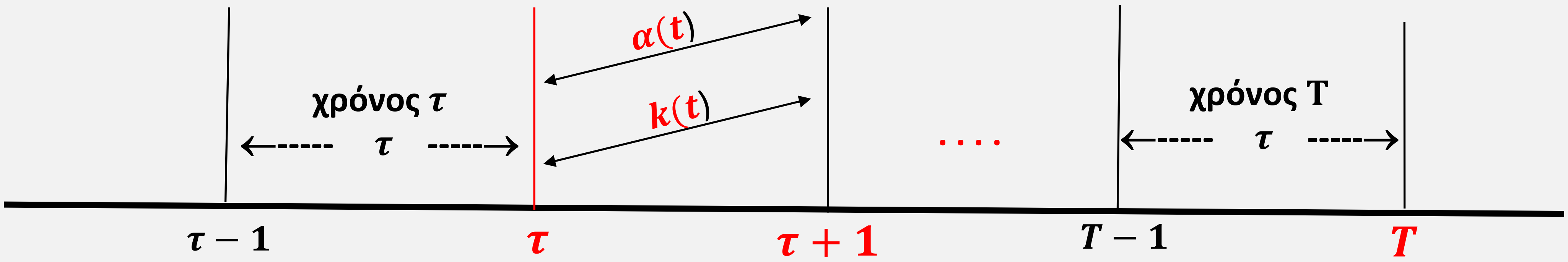
αντικατάσταση εργαλείου με νέο τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$

Δεν αντικαθιστώ το εργαλείο που έχω με νέο τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau}$

Οριακή συνθήκη

$$\boxed{\boldsymbol{f(t,\mathrm{T}) = -\pi(t)}}$$

η τιμή πώλησης του εργαλείου στο τέλος του χρόνου T, όταν αυτό είναι ηλικίας t



Άσκηση

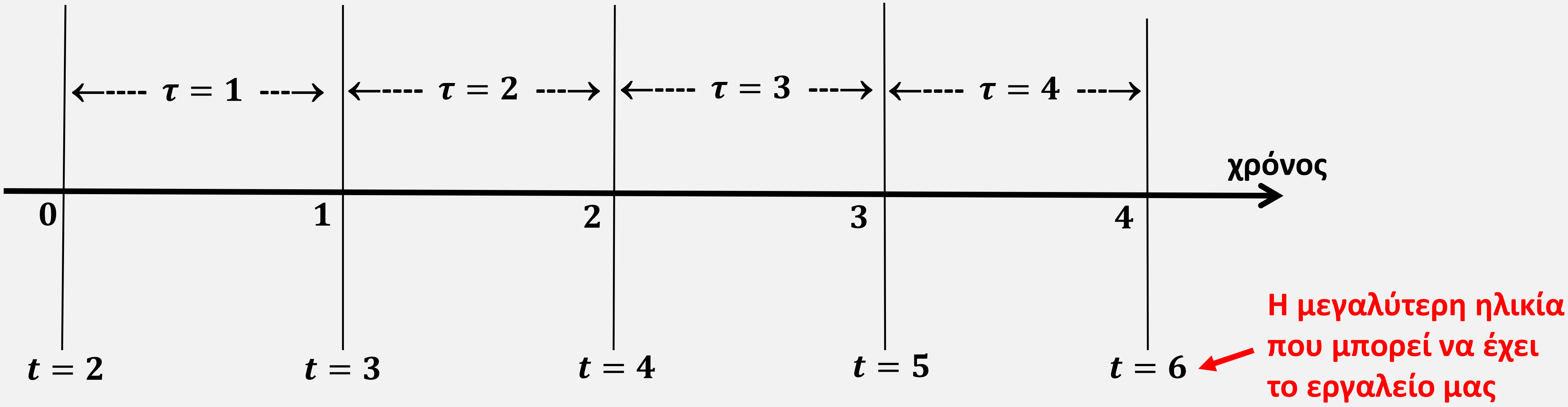
Έστω ένα εργαλείο ηλικίας 2 χρόνων (π.χ. ένα αυτοκίνητο). Χρειαζόμαστε το εργαλείο αυτό για τα επόμενα 4 χρόνια, δηλ. $T = 4$. Τα δεδομένα του προβλήματος δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Ηλικία εργαλείου t	Κόστος χρήσης $k(t)$	τιμή ανταλλαγής $a(t)$	τιμή πώλησης $\pi(t)$	Τιμή αγοράς νέου εργαλείου A
0	5	-	-	70
1	10	55	45	
2	15	40	40	
3	20	30	30	
4	25	20	15	
5	35	10	10	
6	50	2	2	

- **Η παράμετρος t εκφράζει την ηλικία του εργαλείου στην αρχή κάθε χρόνου.**

  π.χ. Στην αρχή του χρόνου 1, δηλ. την χρονική στιγμή 0, η ηλικία του εργαλείου είναι 2. Αν δεν ανταλλάξουμε το εργαλείο μας κατά την συνολική χρονική διάρκεια, τότε στο τέλος του χρόνου 4 (δηλ. την χρονική στιγμή 4), το εργαλείο θα είναι ηλικίας $t = 6$.

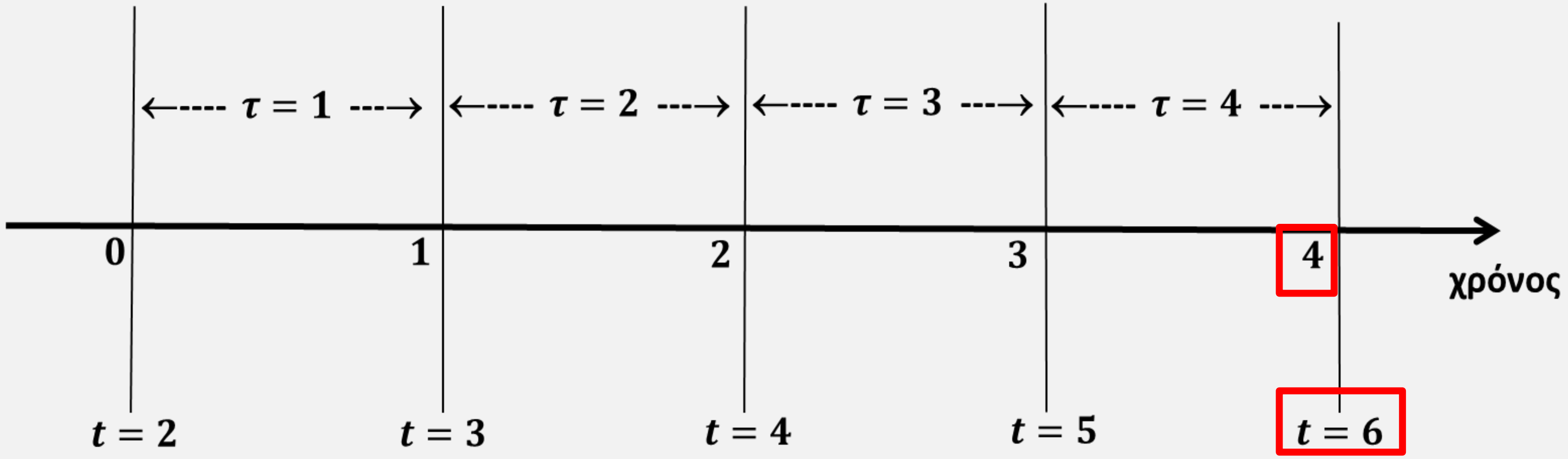
- **Η παράμετρος τ εκφράζει είτε τον χρόνο είτε την χρονική στιγμή.**



Εφαρμόζουμε την **προς τα πίσω μέθοδο** του ΔΠ.

- Για $\boxed{\boldsymbol{\tau = 4}}$ (τέλος του χρόνου $\boldsymbol{\tau = 4}$):

Βρίσκουμε τις οριακές συνθήκες από την σχέση που ορίσαμε πριν $\boxed{\boldsymbol{f(t,\tau) = -\pi(t)}}$ στην οποία θέτουμε για $\boldsymbol{\tau = 4}$ όλες τις δυνατές τιμές του $\boldsymbol{t}$:



Παρατήρηση

Δεν έχει νόημα να θέσουμε $\boldsymbol{t = 0}$, καθώς δεν έχει νόημα να αγοράσουμε νέο εργαλείο αν είναι καινούριο το εργαλείο μας

Επομένως για $\boldsymbol{\tau = 4}$:

$\boldsymbol{f(1,4) = -\pi(1) = -45}$ (Ηλικία εργαλείου $\boldsymbol{t = 1}$, χρόνος $\boldsymbol{\tau = 4}$)

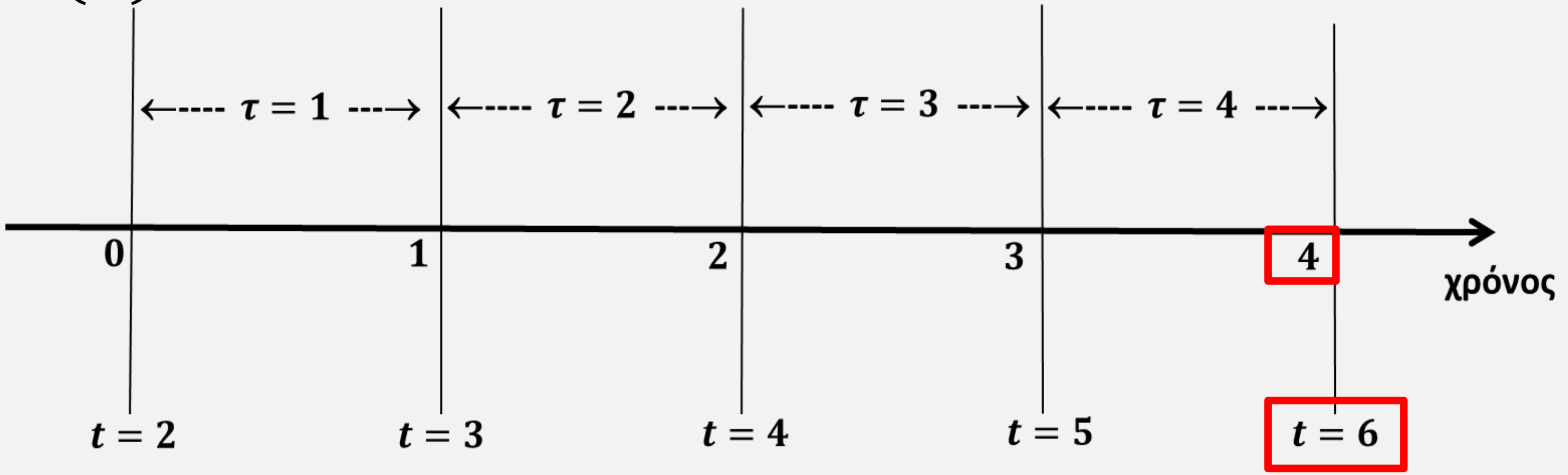
$\boldsymbol{f(2,4) = -\pi(2) = -40}$ (Ηλικία εργαλείου $\boldsymbol{t = 2}$, χρόνος $\boldsymbol{\tau = 4}$)

$\boldsymbol{f(3,4) = -\pi(3) = -30}$

$\boldsymbol{f(4,4) = -\pi(4) = -15}$

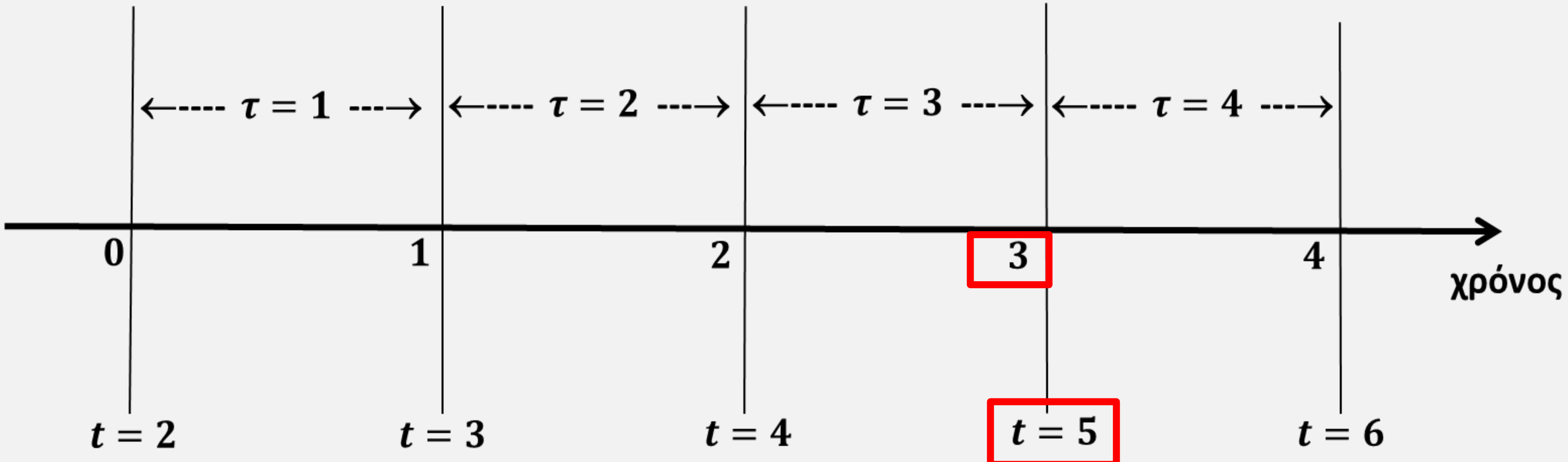
$\boldsymbol{f(5,4) = -\pi(5) = -10}$

$\boldsymbol{f(6,4) = -\pi(6) = -2}$



- Για $\boxed{\tau = 3}$:

Υπολογίζουμε το ελάχιστο κόστος για όλες τις δυνατές τιμές του t, δηλαδή για $t = 1, 2, 3, 4, 5$



Παρατήρηση

Δεν μπορούμε να θέσουμε $t = 0$, καθώς στο τέλος του 3ου χρόνου $(\tau = 3)$ το εργαλείο μας είναι το λιγότερο ενός έτους $(t = 1)$.

Η μεγαλύτερη ηλικία που μπορεί να έχει το εργαλείο μας

Επομένως για $\boldsymbol{\tau = 3}$:

Αντικατάσταση εργαλείου — Κρατάμε το εργαλείο

$$\boldsymbol{f(1,3)} = \min\{A - a(1) + k(0) + f(1,4), k(1) + f(2,4)\} = \min(-25, \mathbf{-30}) = \mathbf{-30}$$

Απόφαση: κράτα το εργαλείο

$$\boldsymbol{f(2,3)} = \min\{A - a(2) + k(0) + f(1,4), k(2) + f(3,4)\} = \min(-10, \mathbf{-15}) = \mathbf{-15}$$

Απόφαση: κράτα το εργαλείο

$$\boldsymbol{f(3,3)} = \min\{A - a(3) + k(0) + f(1,4), k(3) + f(4,4)\} = \min(\mathbf{0}, 5) = \mathbf{0}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\underline{\boldsymbol{f(4,3)}} = \min\{A - a(4) + k(0) + f(1,4), k(4) + f(5,4)\} = \min(\mathbf{10}, \mathbf{1}5) = \mathbf{10}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\boldsymbol{f(5,3)} = \min\{A - a(5) + k(0) + f(1,4), k(5) + f(6,4)\} = \min(\mathbf{20}, 33) = \mathbf{20}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

- Για $\boxed{\boldsymbol{\tau = 2}}$:

Αντικατάσταση εργαλείου — Κρατάμε το εργαλείο

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{1},\mathbf{2}) = \min\{A - a(1) + k(0) + f(1,3), k(1) + f(2,3)\} = \min(\mathbf{-10}, -5) = \mathbf{-10}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{2},\mathbf{2}) = \min\{A - a(2) + k(0) + f(1,3), k(2) + f(3,3)\} = \min(\mathbf{5}, 15) = \mathbf{5}$$

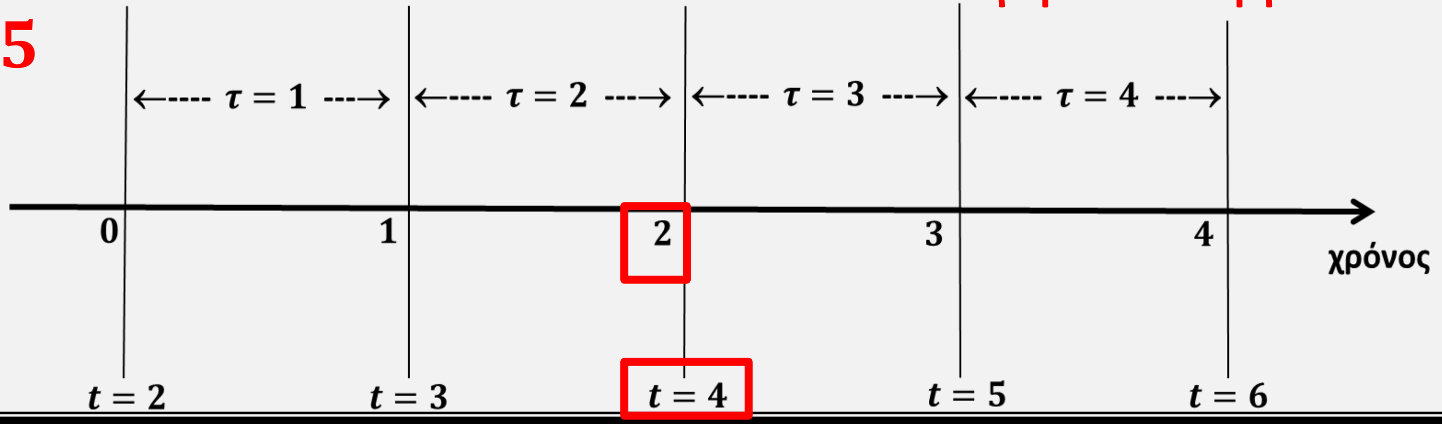
Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\underline{\boldsymbol{f}(\mathbf{3},\mathbf{2})} = \min\{A - a(3) + k(0) + f(1,3), k(3) + f(4,3)\} = \min(\mathbf{15}, 30) = \mathbf{15}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{4},\mathbf{2}) = \min\{A - a(4) + k(0) + f(1,3), k(4) + f(5,3)\} = \min(\mathbf{25}, 45) = \mathbf{25}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου



- Για $\boxed{\boldsymbol{\tau = 1}}$:

Αντικατάσταση εργαλείου Κρατάμε το εργαλείο

$$\boldsymbol{f(1,1)} = \min\{A - a(1) + k(0) + f(1,2), k(1) + f(2,2)\} = \min(\mathbf{10}, 15) = \mathbf{10}$$

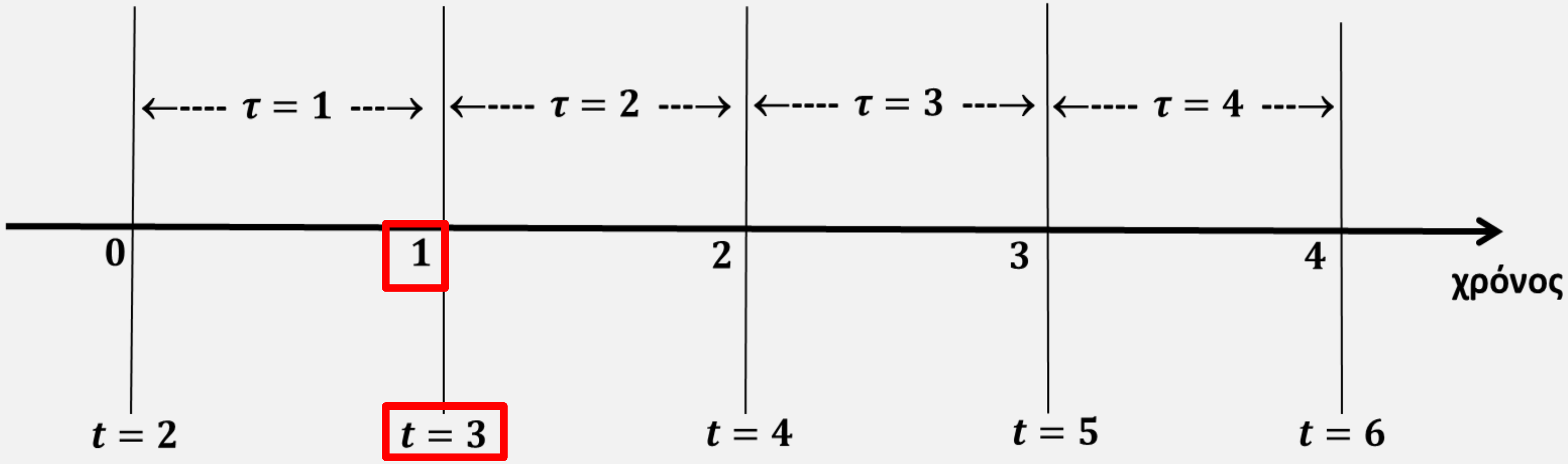
Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\underline{\boldsymbol{f(2,1)}} = \min\{A - a(2) + k(0) + f(1,2), k(2) + f(3,2)\} = \min(\mathbf{25}, 30) = \mathbf{25}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\boldsymbol{f(3,1)} = \min\{A - a(3) + k(0) + f(1,2), k(3) + f(4,2)\} = \min(\mathbf{35}, 45) = \mathbf{35}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

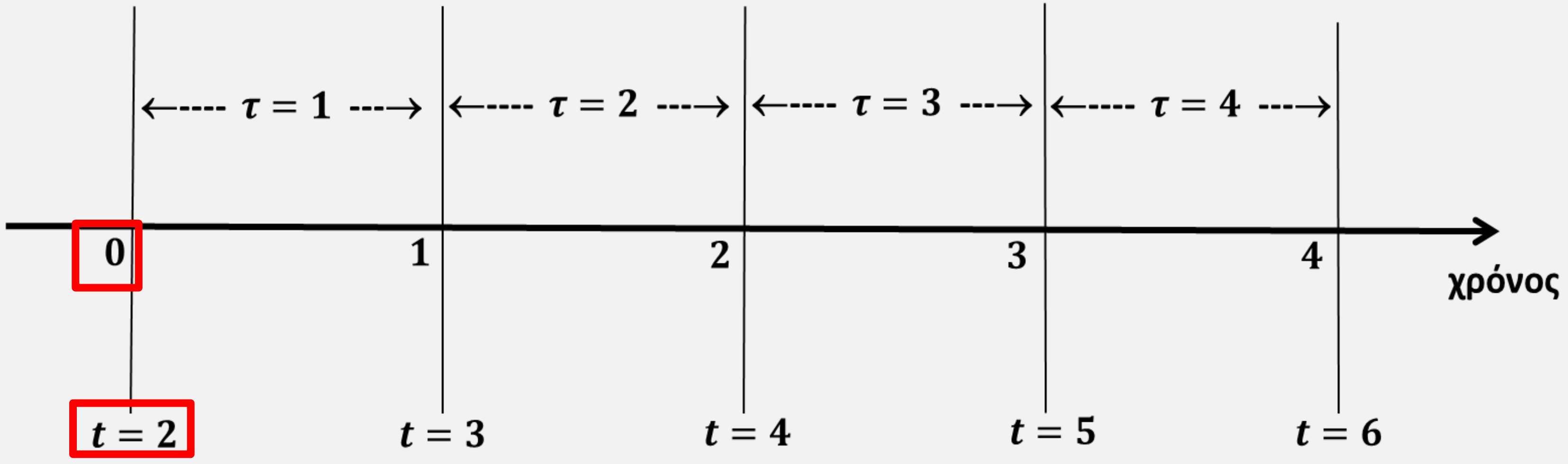


- Για $\boxed{\boldsymbol{\tau = 0}}$:

Αντικατάσταση εργαλείου — Κρατάμε το εργαλείο

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{2},\mathbf{0}) = \min\{A - a(2) + k(0) + f(1,1), k(2) + f(3,1)\} = \min(\mathbf{45}, 50) = \mathbf{45}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου



Το ελάχιστο κόστος είναι **45**.

Αρκεί να βρούμε τώρα και την **πολιτική** που το επιφέρει.

$$\boldsymbol{f(2,0)} = \min\{A - a(2) + k(0) + \boldsymbol{f(1,1)}, k(2) + f(3,1)\} = \min(\mathbf{45}, 50) = \mathbf{45}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\boldsymbol{f(1,1)} = \min\{A - a(1) + k(0) + \boldsymbol{f(1,2)}, k(1) + f(2,2)\} = \min(\mathbf{10}, 15) = \mathbf{10}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\boldsymbol{f(1,2)} = \min\{A - a(1) + k(0) + \boldsymbol{f(1,3)}, k(1) + f(2,3)\} = \min(\mathbf{-10}, -5) = \mathbf{-10}$$

Απόφαση: αγορά νέου εργαλείου

$$\boldsymbol{f(1,3)} = \min\{A - a(1) + k(0) + f(1,4), k(1) + \boldsymbol{f(2,4)}\} = \min(-25, \mathbf{-30}) = \mathbf{-30}$$

Απόφαση: κράτημα εργαλείου

Άρα η βέλτιστη πολιτική είναι:

Αγορά $\rightarrow$ αγορά $\rightarrow$ αγορά $\rightarrow$ κράτημα

Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.