Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

3η ενότητα: Εισαγωγή στα στοχαστικά προβλήματα διαδρομής

Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

Στοχαστικότητα

Η έννοια «**στοχαστικός**» αναφέρεται στο στοιχείο του **τυχαίου**.

Στοχαστικά προβλήματα

Όλα τα προβλήματα στα οποία υπάρχουν **τυχαίες μεταβλητές** λέγονται **στοχαστικά**.

Στοχαστικά προβλήματα διαδρομής

Τα **στοχαστικά προβλήματα διαδρομής** είναι μια επέκταση των <u>προβλημάτων στοιχειώδης διαδρομής</u> ώστε να είναι πιο <u>ρεαλιστικά</u>.

Είναι εξαιρετικά σημαντικό να τονίσουμε ότι <u>μόνο</u> οι μέθοδοι του Δυναμικού Προγραμματισμού μπορούν να προσαρμοστούν ώστε να εφαρμόζονται σε στοχαστικά προβλήματα.

Επανάληψη βασικών εννοιών πιθανοτήτων και στατιστικής

Πείραμα τύχης

Κάθε πείραμα στο οποίο δεν μπορούμε να προβλέψουμε το τελικό αποτέλεσμα.

Δειγματικός χώρος ή δειγματοχώρος (συμβολίζουμε Ω)

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.

Τυχαία μεταβλητή

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα δειγματικό χώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Παρατήρηση

Για έναν δεδομένο δειγματικό χώρο μπορούμε να ορίσουμε περισσότερες από μια τυχαίες μεταβλητές.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το **τυχαίο πείραμα** της ρίψης ενός νομίσματος.

Το πείραμα έχει δύο πιθανές εκβάσεις: **Κ = «κορώνα»**, **Γ =«γράμματα»**.

Θεωρούμε ότι οι δύο εκβάσεις του πειράματος είναι **ισοπίθανες**, δηλαδή το νόμισμα μπορεί να δώσει Κ ή Γ με την ίδια πιθανότητα.

Δειγματικός χώρος: $\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{K}, \boldsymbol{\Gamma}\}$

Ενδεχόμενο: κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

Απλό ενδεχόμενο: υποσύνολο του δειγματικού χώρου με ένα στοιχείο.

Απαριθμητός δειγματικός χώρος: Ο δειγματικός χώρος περιέχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος απλών ενδεχομένων.

Συνεχής δειγματικός χώρος: Ο δειγματικός χώρος περιέχει άπειρα μη αριθμήσιμα στο πλήθος απλά ενδεχόμενα.

Πιθανότητα ενδεχομένου $\mathbf{A}$:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\mathbf{A}) = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος συνολικών περιπτώσεων}}}$$

Πιθανότητα δειγματικού χώρου: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{1}$.

Ρίχνουμε το νόμισμα $\boldsymbol{N}$ **φορές** και μετράμε τα συνεχή αποτελέσματα ρίψης του νομίσματος και έστω ότι μετράμε N_K φορές κορόνα και N_Γ φορές γράμματα.

Για μεγάλο αριθμό $\boldsymbol{N}$ αναμένουμε: $\frac{N_K}{N} \approx 0.5$ και $\frac{N_\Gamma}{N} \approx 0.5$.

Πιθανότητα εμφάνισης K και Γ : $P(K) = 0.5$ και $P(\Gamma) = 0.5$.

Κατανομή πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Η πιθανότητα η διακριτή τυχαία μεταβλητή X να πάρει κάποια τιμή x_i, μπορεί να μεταβάλλεται στο σύνολο των διακεκριμένων τιμών και δίνεται ως συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X.

Για **διακριτή τυχαία μεταβλητή X** που παίρνει τις τιμές x_1, x_2,…, x_ν, η συνάρτηση αυτή λέγεται **συνάρτηση μάζας πιθανότητας** και ορίζεται ως:

$$\boxed{f(x_i) = f_X(x_i) = P(x = x_i)}$$

και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\boxed{f(x_i) \geq 0} \quad \text{και} \quad \boxed{\sum_{x_i} f(x_i) = 1}$$

Η κατανομή πιθανότητας της διακριτή τυχαία μεταβλητή X ορίζεται επίσης από την **αθροιστική συνάρτηση κατανομής**, που δηλώνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμές μικρότερες ή ίσες από κάποια τιμή x:

$$\boxed{F(x_i) = F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_i} f_x(x_i)}$$

Παράδειγμα

Έστω ρίχνουμε ένα κέρμα 2 φορές.

$\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{KK}, \mathbf{K\Gamma}, \mathbf{\Gamma K}, \mathbf{\Gamma\Gamma}\}$

Ορίζουμε την **τυχαία μεταβλητή** $\boldsymbol{X}$: το πλήθος των $\mathbf{K}$.

Οι τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X είναι $x = 0{,}1{,}2$:

Απλό ενδεχόμενο	x
ΚΚ	2
ΚΓ	1
ΓΚ	1
ΓΓ	0

Δηλαδή ορίσαμε μια αντιστοίχιση (συνάρτηση) των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω και ενός υποσυνόλου των πραγματικών αριθμών.

Συνάρτηση μάζας πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή X: το πλήθος των Κ.

x	$f(x) = P(X = x)$
0	0.25
1	0.5
2	0.25
Σύνολο	**1**

Δηλαδή ορίζουμε την συνάρτηση όπου κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής X αντιστοιχίζεται με την πιθανότητα εμφάνισης της.

Η **αθροιστική κατανομή πιθανοτήτων** της X είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ x < 0 \\ 0.25 & \alpha\nu\ 0 \le x < 1 \\ 0.75 & \alpha\nu\ 1 \le x < 2 \\ 1 & \alpha\nu\ x \ge 2 \end{cases}$$

Δηλαδή ορίζουμε την συνάρτηση όπου δηλώνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμές μικρότερες ή ίσες από κάποια τιμή x.

Κατανομή πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

Η πιθανότητα η **συνεχής τυχαία μεταβλητή X** να βρίσκεται σε ένα διάστημα τιμών d_x, μπορεί να μεταβάλλεται σε διαφορετικά διαστήματα και δίνεται ως συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X.

Για συνεχή τυχαία μεταβλητή X ορίζεται η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** $f(x) = f_X(x)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\boxed{f(x) \geq 0} \quad \text{και} \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας συνεχούς μεταβλητής X ορίζεται ως:

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

Παράμετροι κατανομής τυχαίων μεταβλητών

Η **κατανομή πιθανότητας** περιγράφει πλήρως τη **συμπεριφορά** μιας τυχαίας μεταβλητής, αλλά συνήθως στην πράξη δεν είναι γνωστή ή απαραίτητη.

Όταν μελετάμε μια τυχαία μεταβλητή μας ενδιαφέρει κυρίως να προσδιορίζουμε κάποια **βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής** της, όπως η **κεντρική τάση** και η **μεταβλητότητα** της τυχαίας μεταβλητής.

Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι οι **παράμετροι** της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής.

Μέση τιμή

- Αν X είναι μια **διακριτή τυχαία μεταβλητή** που παίρνει τις διακριτές τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, με **συνάρτηση πιθανότητας** $\mathrm{f}(x)$, τότε η **μέση τιμή** της X, που συμβολίζεται με $\mathrm{E}(X)$ δίνεται ως:

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \sum_i x_i P(x = x_i)}$$

- Αν X είναι μια **συνεχής τυχαία μεταβλητή**, με **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** $\mathrm{f}(x)$, τότε η **μέση τιμή** της X, που συμβολίζεται με $\mathrm{E}(X)$ δίνεται ως:

$$\boxed{\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}$$

Η **μέση τιμή** ονομάζεται και «**μαθηματική ελπίδα**» γιατί εκφράζει το αναμενόμενο κέρδος σε ένα τυχερό παιχνίδι, από όπου ξεκίνησε και ο ορισμός της έννοιας.

Ρουλέτα

Ο κυκλικός τροχός είναι διαιρεμένος σε 37 ίσα τόξα, τα οποία έχουν τους αριθμούς $0,1,\ldots,36$. Ο κυκλικός τροχός γυρίζει μαζί με μια σφαίρα μεταλλική.

Υποθέτουμε ότι αν η σφαίρα σταματήσει σε περιττό αριθμό, ο παίκτης κερδίζει ποσό ίσο με αυτό που κατέθεσε, έστω α, σε κάθε άλλη περίπτωση χάνει.

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που είναι ο αριθμός που σταματά η σφαίρα.

Η αναμενόμενη ζημία του παίχτη είναι:

$$\mathrm{E}(X) = a \cdot P\{X = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau ó\varsigma\} + (-a) \cdot P\{X = \mathbf{0}, 2, \dots, 36\}$$
$$= a \cdot \frac{18}{37} + (-a) \cdot \frac{19}{37} = -\frac{a}{37}$$

Το **0** καταχωρείται είτε ως <u>άρτιος</u> είτε ως <u>περιττός</u>, αναλόγως με το ποντάρισμα του παίχτη (πάντα αντίθετα από το ποντάρισμα του παίχτη).
Σε ένα δίκαιο παιχνίδι, η μαθηματική ελπίδα δηλαδή το αναμενόμενο κέρδος κάθε παίκτη είναι ίσο με μηδέν.

Παράδειγμα

Έστω ότι ένα αυτοκίνητο ασφαλίζεται εναντίον καταστροφών με το ποσό των **2000** ευρώ και ότι παθαίνει ολική καταστροφή με πιθανότητα **0.001**, καταστροφή κατά 50% με πιθανότητα **0.01** και καταστροφή κατά 25% με πιθανότητα **0.05**. Παραβλέποντας τη μερική καταστροφή κατά τους άλλους τρόπους, ποια πρέπει να είναι τα ασφάλιστρα ώστε το αναμενόμενο κέρδος της Ασφαλιστικής εταιρείας να είναι μηδέν.

Λύση

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τα ποσά που θα πληρώσει η Ασφαλιστική. Άρα η X λαμβάνει τις τιμές **2000** με **πιθανότητα 0.001**, **1000** με **πιθανότητα 0.01** και **500** με **πιθανότητα 0.05**.

x	$f(x) = P(X = x)$
2000	0.001
1000	0.01
500	0.05

Άρα ο μέσος όρος των πληρωμών της Ασφαλιστικής εταιρείας είναι:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) = 2000 \cdot 0.001 + 1000 \cdot 0.01 + 500 \cdot 0.05 = 37 \text{ ευρώ}$$

Δηλαδή τα ασφάλιστρα που πρέπει να ζητήσει η Ασφαλιστική εταιρεία για να έχει αναμενόμενο κέρδος 0 είναι 37 ευρώ.

Στοχαστικά προβλήματα διαδρομής

Ο **στοχαστικός γραμμικός προγραμματισμός** αποτελεί μια προσέγγιση σε πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό συνθήκες αβεβαιότητας.

Το **στοιχειώδες πρόβλημα διαδρομής** που αναφέραμε πριν μετατρέπεται σε **στοχαστικό πρόβλημα διαδρομής** αν εισάγουμε μια **τυχαία μεταβλητή**.

Στοχαστικά προβλήματα διαδρομής → **Λήψη αποφάσεων σχετικά με την διαδρομή και όχι βέλτιστη διαδρομή**

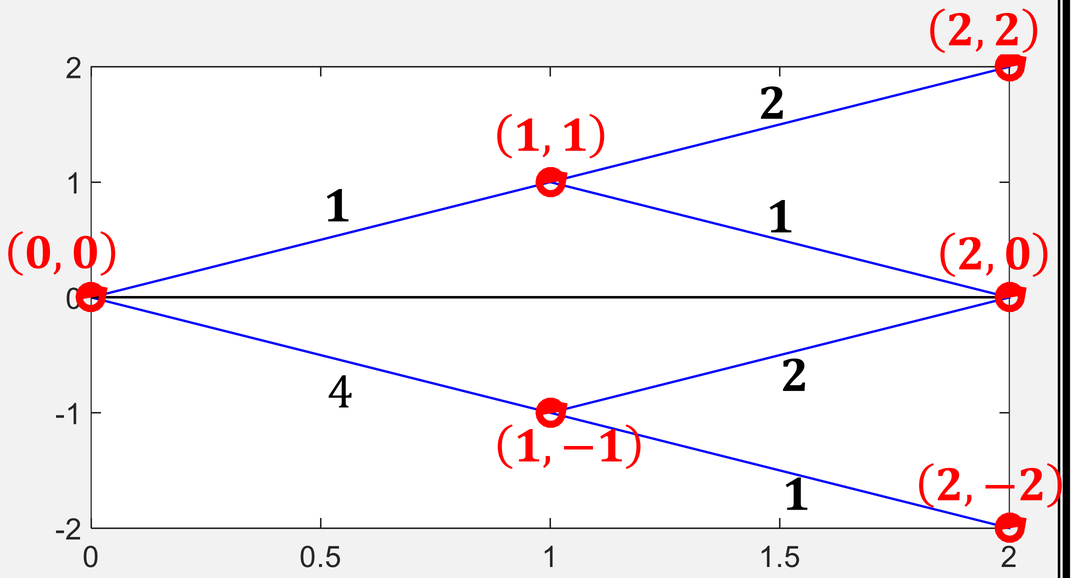
Παράδειγμα

Δίνουμε από ένα κέντρο διοίκησης εντολές σε ένα κινητό. Το κινητό εκτελεί σε έναν **κόμβο** (x, y) του δικτυωτού την εντολή για κίνηση προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά με **πιθανότητες:**

- $p(x, y)$: η εντολή γίνεται δεκτή στον κόμβο (x, y)
- $1 - p(x, y) = q(x, y)$: η εντολή δεν γίνεται δεκτή στον κόμβο(x, y)

Το πρόβλημα

Ζητούνται οι **βέλτιστες εντολές**, δηλαδή οι εντολές που θα οδηγήσουν στην **μικρότερη αναμενόμενη τιμή του κόστους** από την αρχή μέχρι το τέλος.

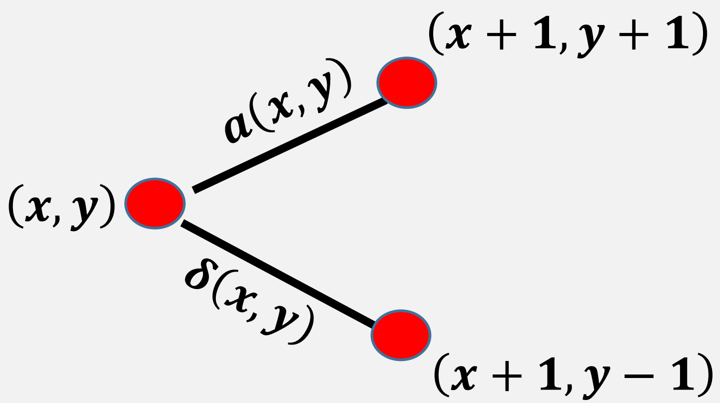


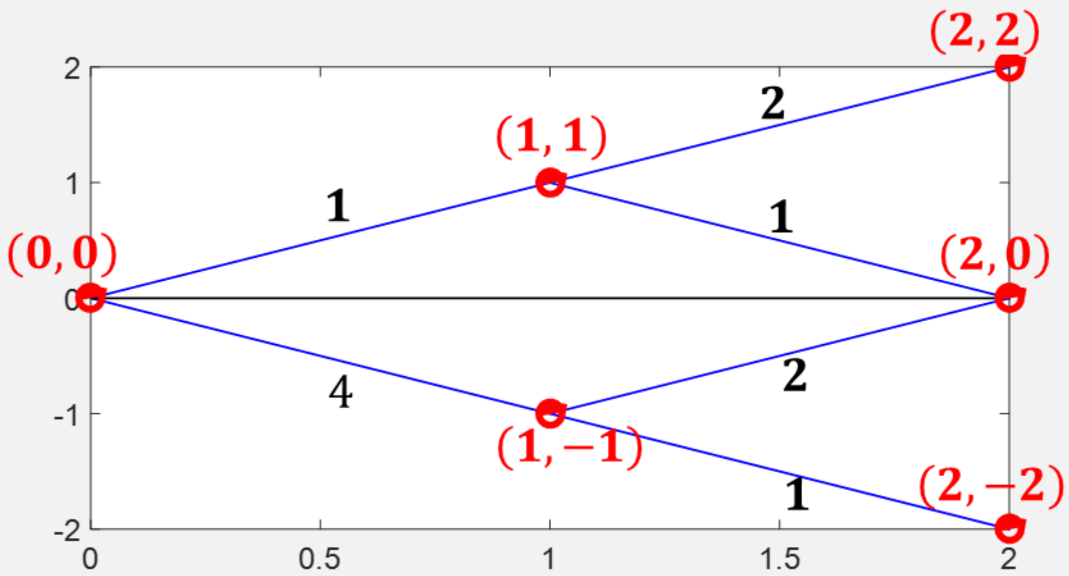
Βέλτιστη συνάρτηση

$f(x,y) = \{$η ελάχιστη αναμενόμενη τιμή με βάση τις εντολές μας για τη κίνηση του κινητού από τον κόμβο(x,y) ως το τέλος$\}$

ή ισοδύναμα

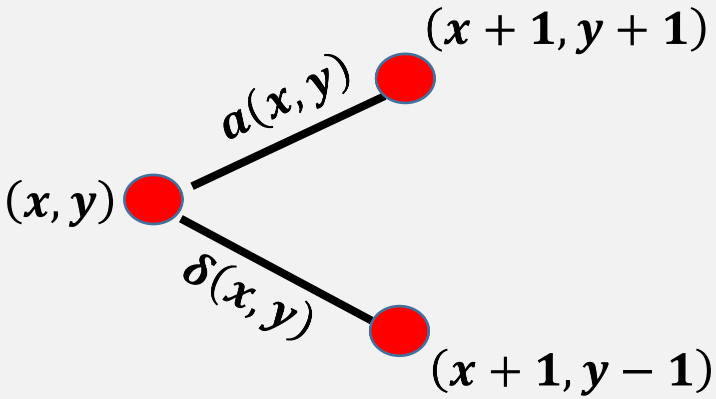
$$f(x,y) = \min\begin{cases}\text{αναμενόμενη τιμή για αριστερά}\\ \text{αναμενόμενη τιμή για δεξια}\end{cases}$$

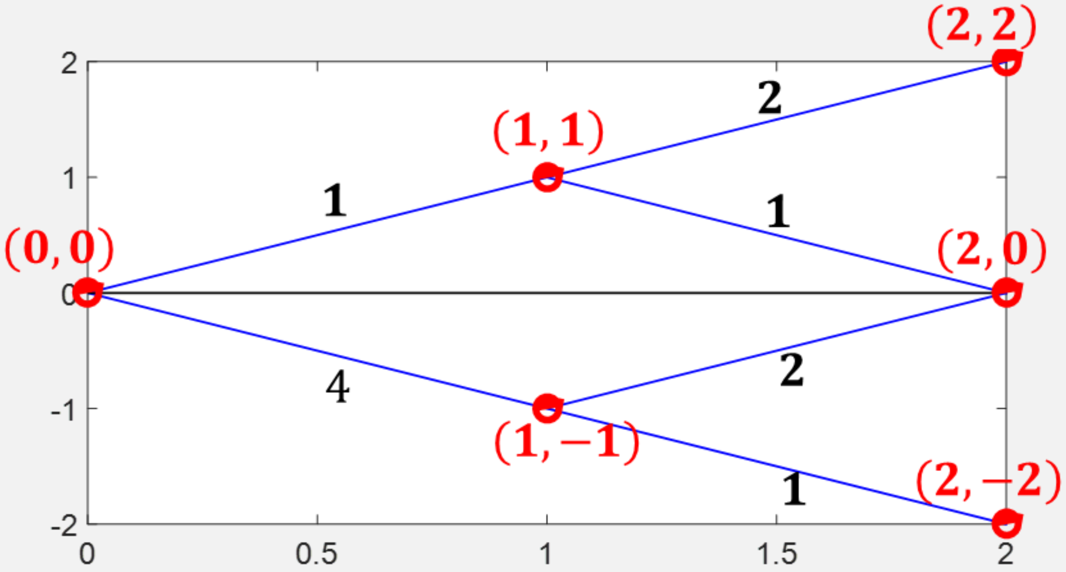




Βέλτιστη συνάρτηση

$$f(x,y) = \min\left\{\begin{array}{l}\overbrace{p(x,y)[a(x,y)+f(x+1,y+1)]+q(x,y)[\delta(x,y)+f(x+1,y-1)]}^{\text{δίνω εντολή για αριστερά}} \\ \underbrace{p(x,y)[\delta(x,y)+f(x+1,y-1)]+q(x,y)[a(x,y)+f(x+1,y+1)]}_{\text{δίνω εντολή για δεξιά}}\end{array}\right.$$





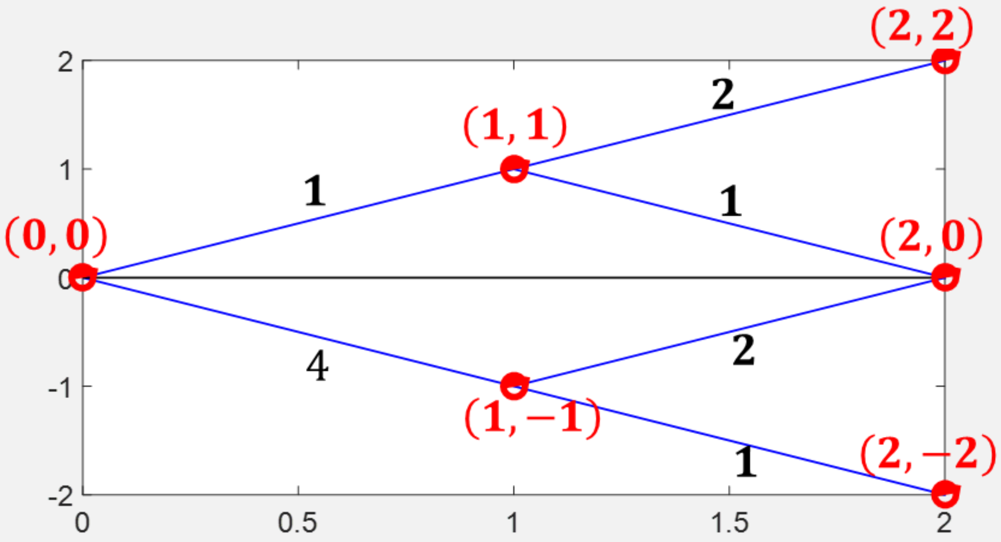
Οριακές συνθήκες

$f(2,2) = 0, f(2,0) = 0, f(2,-2) = 0$

Προς τα πίσω μέθοδος του ΔΠ

Έστω $p(x,y) = 0.6$ και άρα

$$q(x,y) = 0.4,\ \forall x,y$$



- Για $\underline{x = 1}$:

$$f(1,1) = \min\left\{\begin{matrix} p(1,1)[a(1,1) + f(2,2)] + q(1,1)[\delta(1,1) + f(2,0)] \\ p(1,1)[\delta(1,1) + f(2,0)] + q(1,1)[a(1,1) + f(2,2)] \end{matrix}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} 0.6[2+0] + 0.4[1+0] \\ 0.6[1+0] + 0.4[2+0] \end{matrix}\right\} = \min\begin{Bmatrix} 1.6 \\ 1.4 \end{Bmatrix} = 1.4$$

$$f(1,-1) = \min\left\{\begin{matrix} p(1,-1)[a(1,-1) + f(2,0)] + q(1,-1)[\delta(1,-1) + f(2,-2)] \\ p(1,-1)[\delta(1,-1) + f(2,-2)] + q(1,-1)[a(1,-1) + f(2,0)] \end{matrix}\right\}$$

$$= \min\left\{\begin{matrix} 0.6[2+0] + 0.4[1+0] \\ 0.6[1+0] + 0.4[2+0] \end{matrix}\right\} = \min\begin{Bmatrix} 1.6 \\ 1.4 \end{Bmatrix} = 1.4$$

- Για $\underline{x = 0}$:

$$f(0,0) = \min\begin{cases} p(0,0)[a(0,0) + f(1,1)] + q(0,0)[\delta(0,0) + f(1,-1)] \\ p(0,0)[\delta(0,0) + f(1,-1)] + q(0,0)[a(0,0) + f(1,1)] \end{cases}$$

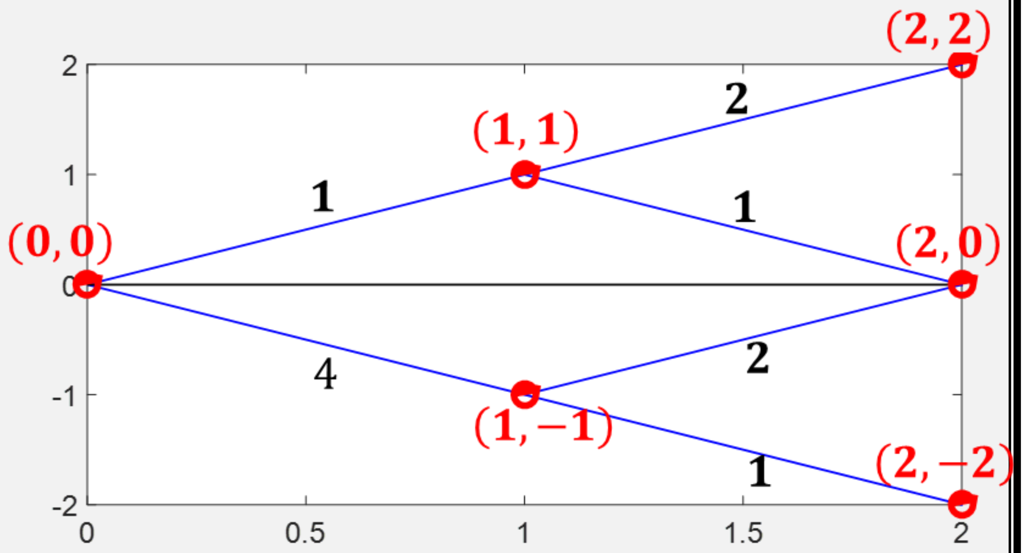
$$= \min\begin{cases} 0.6[1 + 1.4] + 0.4[4 + 1.4] \\ 0.6[4 + 1.4] + 0.4[1 + 1.4] \end{cases} = \min\begin{Bmatrix} 3.6 \\ 4.2 \end{Bmatrix} = \mathbf{3.6}$$

Βέλτιστες εντολές για όλους τους πιθανούς κόμβους

$(\mathbf{0,0})$ $\rightarrow$ κίνηση προς τα **αριστερά**

$(\mathbf{1,1})$ $\rightarrow$ κίνηση προς τα **δεξιά**

$(\mathbf{1,-1})$ $\rightarrow$ κίνηση προς τα **δεξιά**



Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.