Στοχαστικές Στρατηγικές

Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ

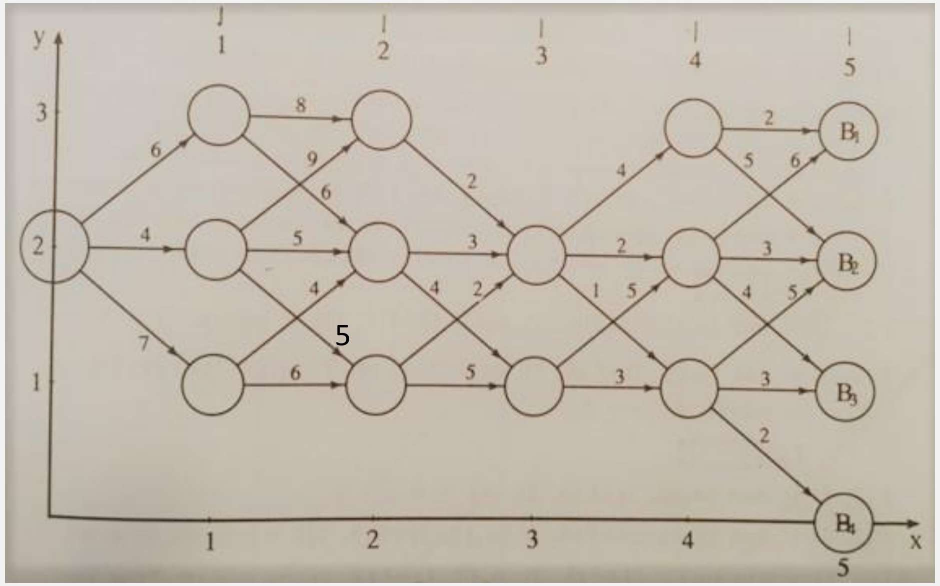
2η ενότητα: Στοιχειώδη προβλήματα διαδρομής - Ασκήσεις

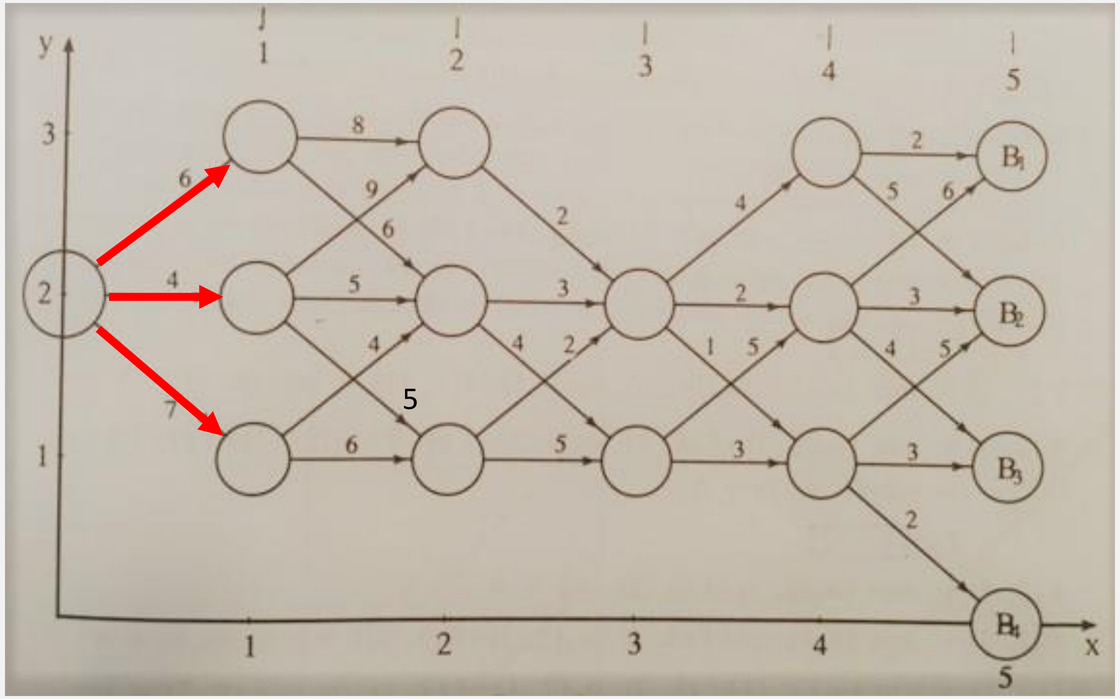
Παπάνα Αγγελική

Μεταδιδακτορική ερευνήτρια, ΑΠΘ & Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
E-mail: angeliki.papana@gmail.com, agpapana@auth.gr
Webpage: http://users.auth.gr/agpapana

Άσκηση

Έστω μια ηλεκτρική εταιρεία θέλει να περάσει μια ηλεκτρική γραμμή από ένα κεντρικό σημείο A, σε ένα από τα τέσσερα νησιά B_1, B_2, B_3, B_4. Η ηλεκτροδότηση των νησιών γίνεται ευκολότερα από κάποιο άλλο νησί. Το αντίστοιχο κόστος της ηλεκτρικής γραμμής αναγράφεται στα τόξα του σχήματος. Να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή μεταξύ του σημείου A και οποιοδήποτε νησιού από τα B_1, B_2, B_3, B_4, ώστε να επιτευχθεί η ηλεκτροδότηση των νησιών με το ελάχιστο κόστος.





Ορίζουμε:

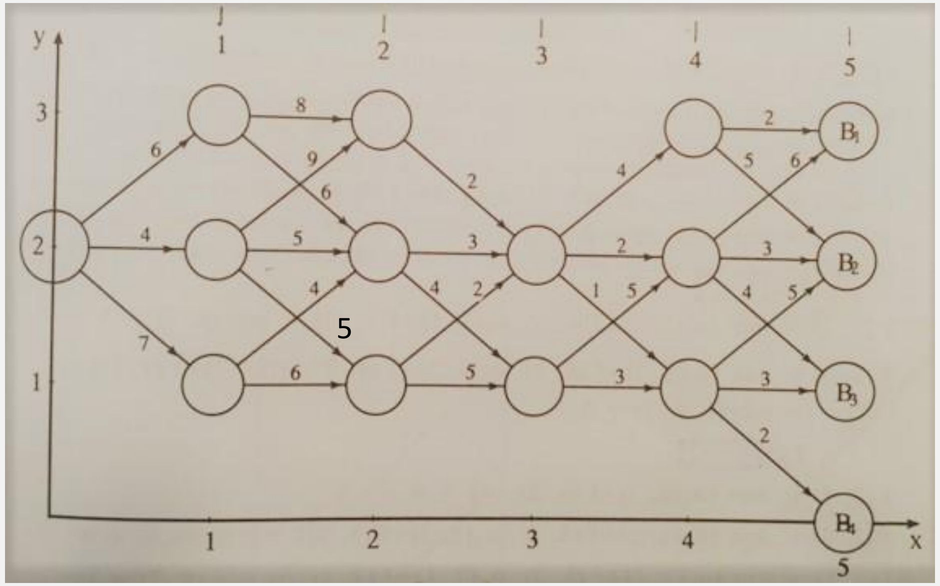
$\boldsymbol{a_1(x,y)}$: κόστος σύνδεσης μεταξύ κόμβου (x, y) και $(x+1, y+1)$

$\boldsymbol{a_2(x,y)}$: κόστος σύνδεσης μεταξύ κόμβου (x, y) και $(x+1, y)$

$\boldsymbol{a_3(x,y)}$: κόστος σύνδεσης μεταξύ κόμβου (x, y) και $(x+1, y-1)$

Βέλτιστη συνάρτηση

$f(x,y) \equiv$ {Η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του κόμβου (x,y) και οποιοδήποτε νησιού από τα B_1, B_2, B_3, B_4}



Όταν βρισκόμαστε στον κόμβο (x,y) έχουμε τρεις επιλογές:

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rightarrow (\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})$ με κόστος $\boldsymbol{a_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}+\mathbf{1})$

$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rightarrow (\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y})$ με κόστος $\boldsymbol{a_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y})$

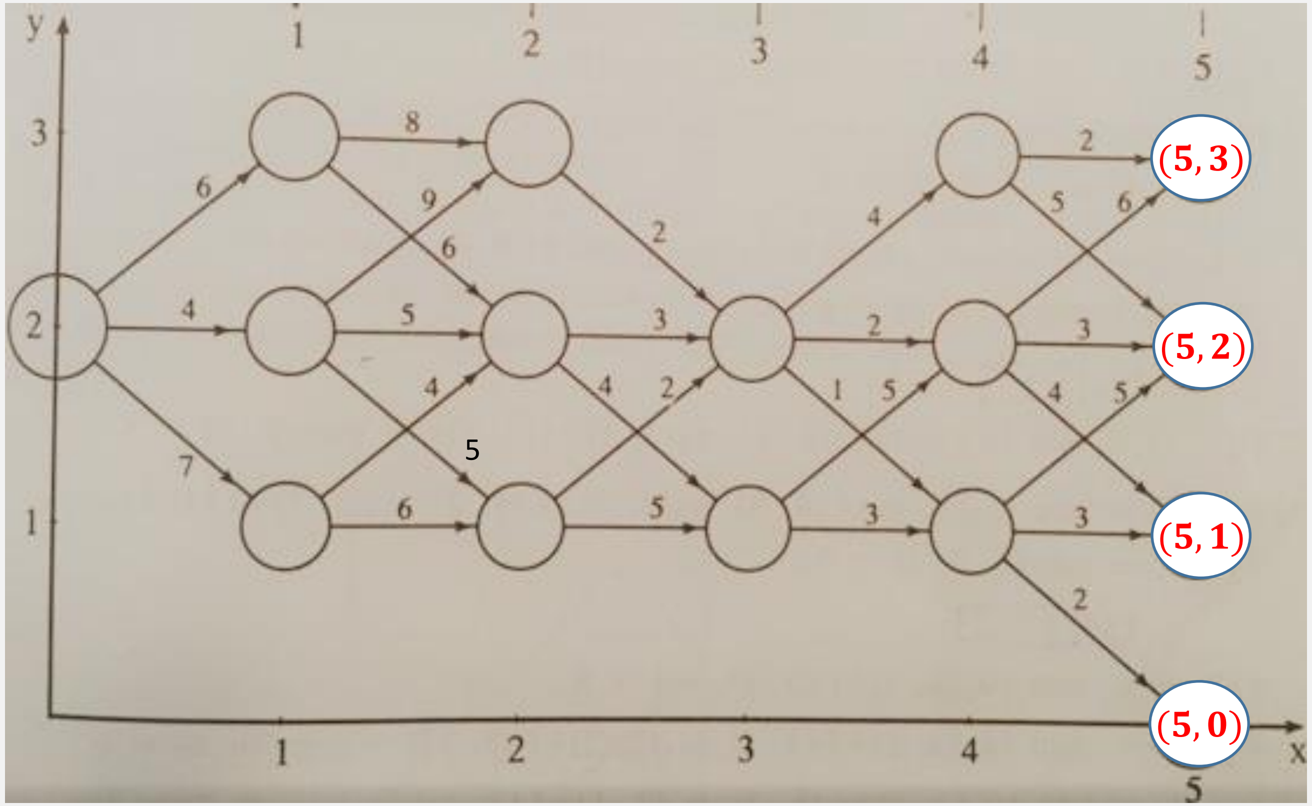
$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rightarrow (\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}-\mathbf{1})$ με κόστος $\boldsymbol{a_3}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1},\boldsymbol{y}-\mathbf{1})$

Επαναληπτική σχέση

$$f(x,y) = \min\left\{ \begin{array}{l} a_1(x,y) + f(x+1, y+1) \\ a_2(x,y) + f(x+1, y) \\ a_3(x,y) + f(x+1, y-1) \end{array} \right\}$$

Οριακές συνθήκες

$f(5,3) = 0$
$f(5,2) = 0$
$f(5,1) = 0$
$f(5,0) = 0$

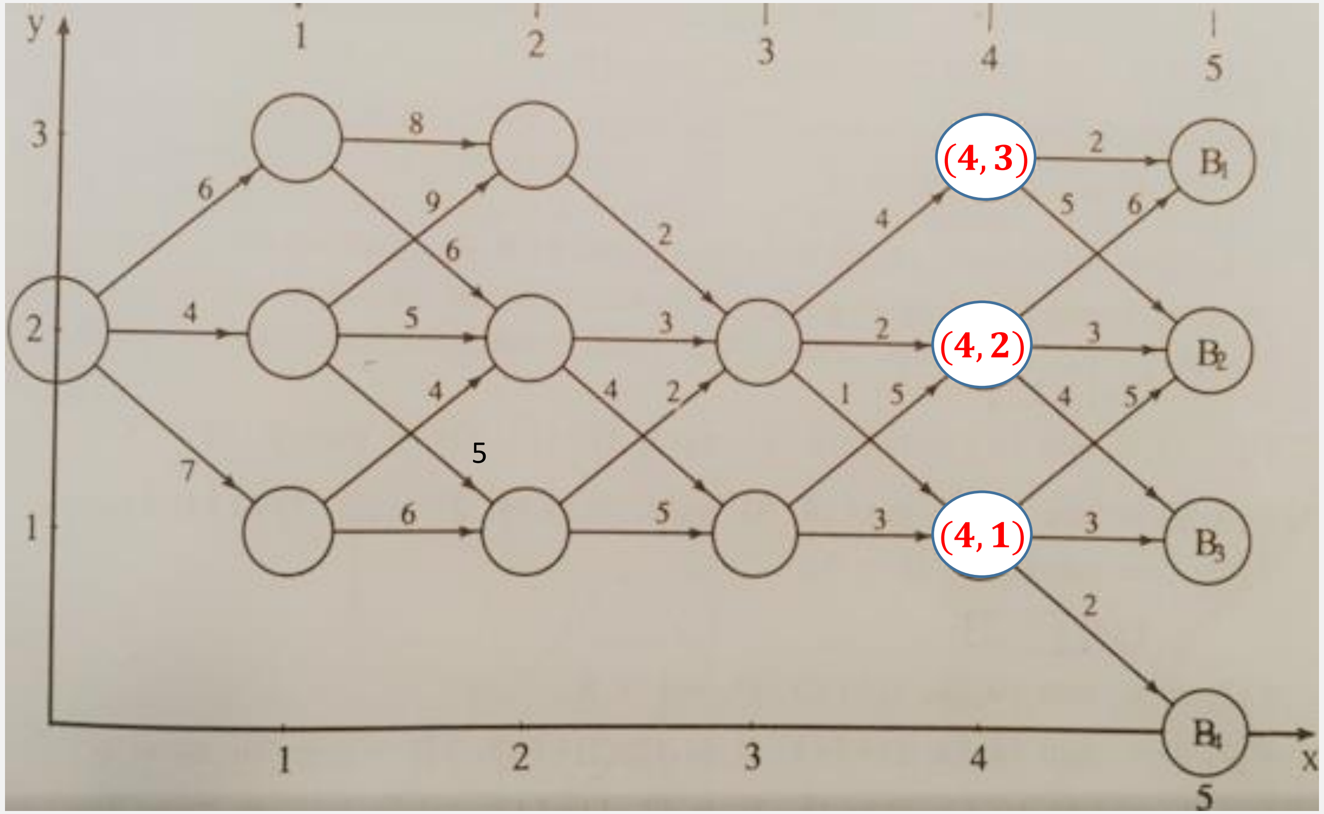


- **Για $x = 4$:**

$f(4,3) = min\{a_2(4,3) + f(5,3), a_3(4,3) + f(5,2)\} = min\{2,5\} = 2$

$f(4,2) = min\{a_1(4,2) + f(5,3), a_2(4,2) + f(5,2), a_3(4,2) + f(5,1)\} = min\{6,3,4\} = 3$

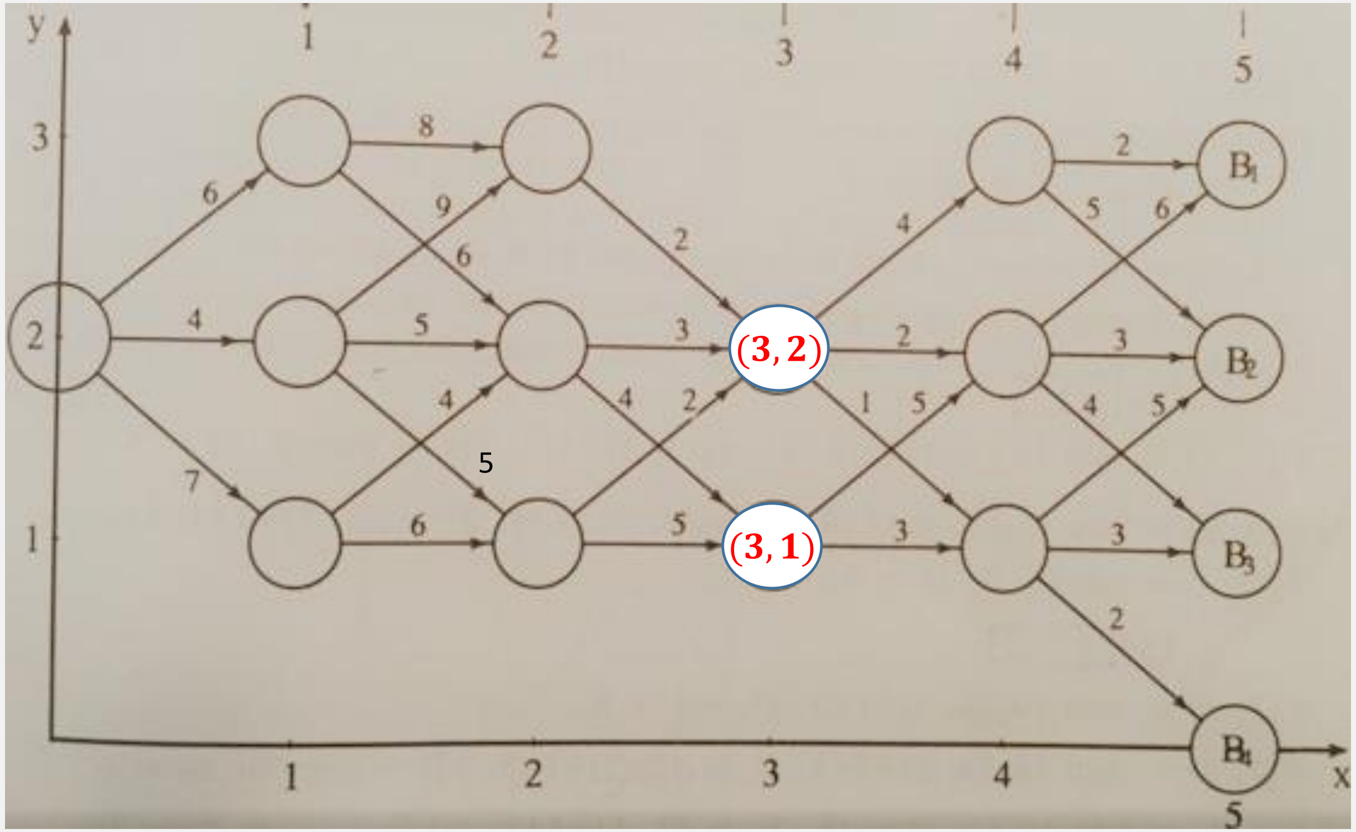
$f(4,1) = min\{a_1(4,1) + f(5,2), a_2(4,1) + f(5,1), a_3(4,1) + f(5,0)\} = min\{5,3,2\} = 2$



- **Για $x = 3$:**

$f(3,2) = min\{a_1(3,2) + f(4,3), a_2(3,2) + f(4,2), a_3(3,2) + f(4,1)\} = min\{6,5,3\} = 3$

$f(3,1) = min\{a_1(3,1) + f(4,2), a_2(3,1) + f(4,1)\} = min\{8,5\} = 5$

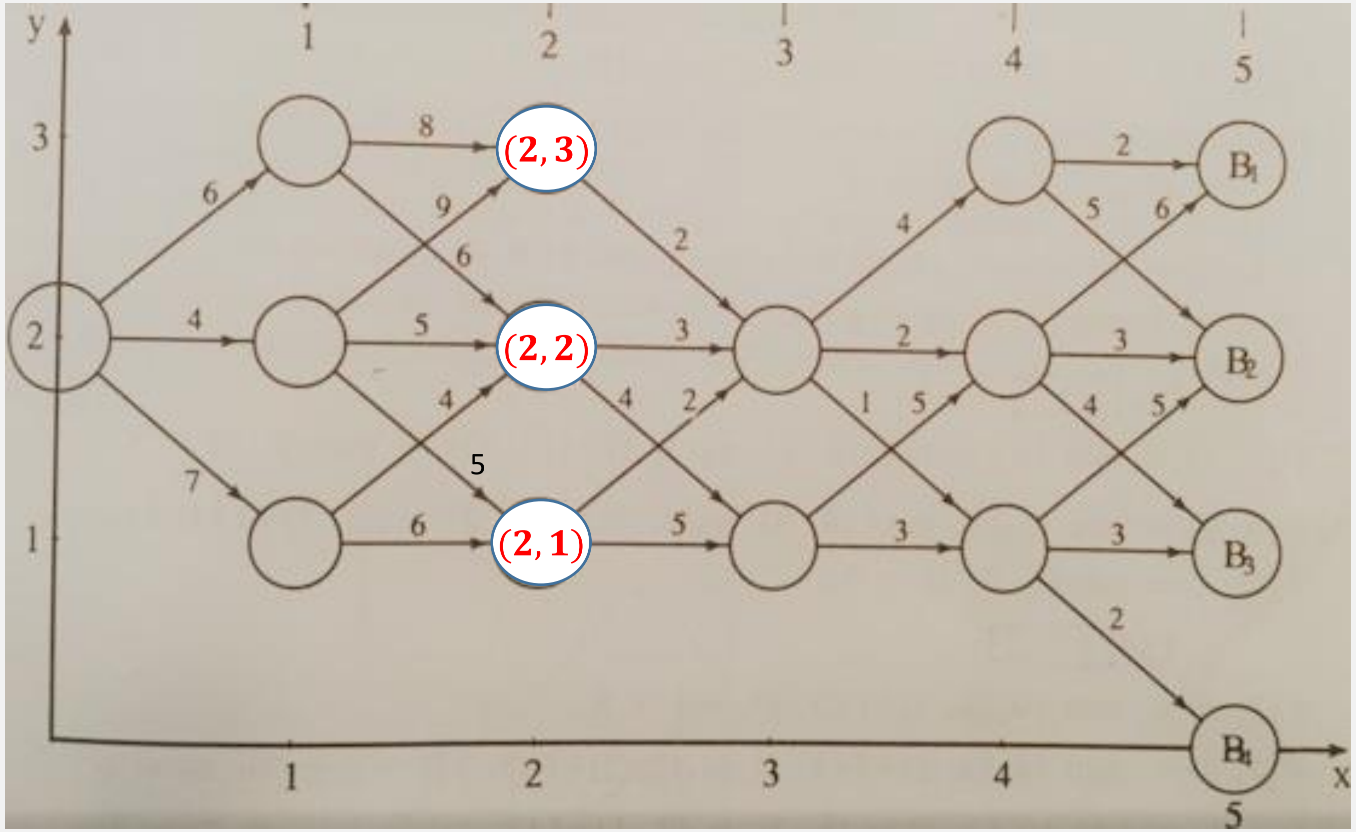


- **Για $x = 2$:**

$f(2{,}3) = a_3(2{,}3) + f(3{,}2) = 5$

$f(2{,}2) = min\{a_2(2{,}2) + f(3{,}2), a_3(2{,}2) + f(3{,}1)\} = min\{6{,}9\} = 6$

$f(2{,}1) = min\{a_1(2{,}1) + f(3{,}2), a_2(2{,}1) + f(3{,}1)\} = min\{5{,}10\} = 5$

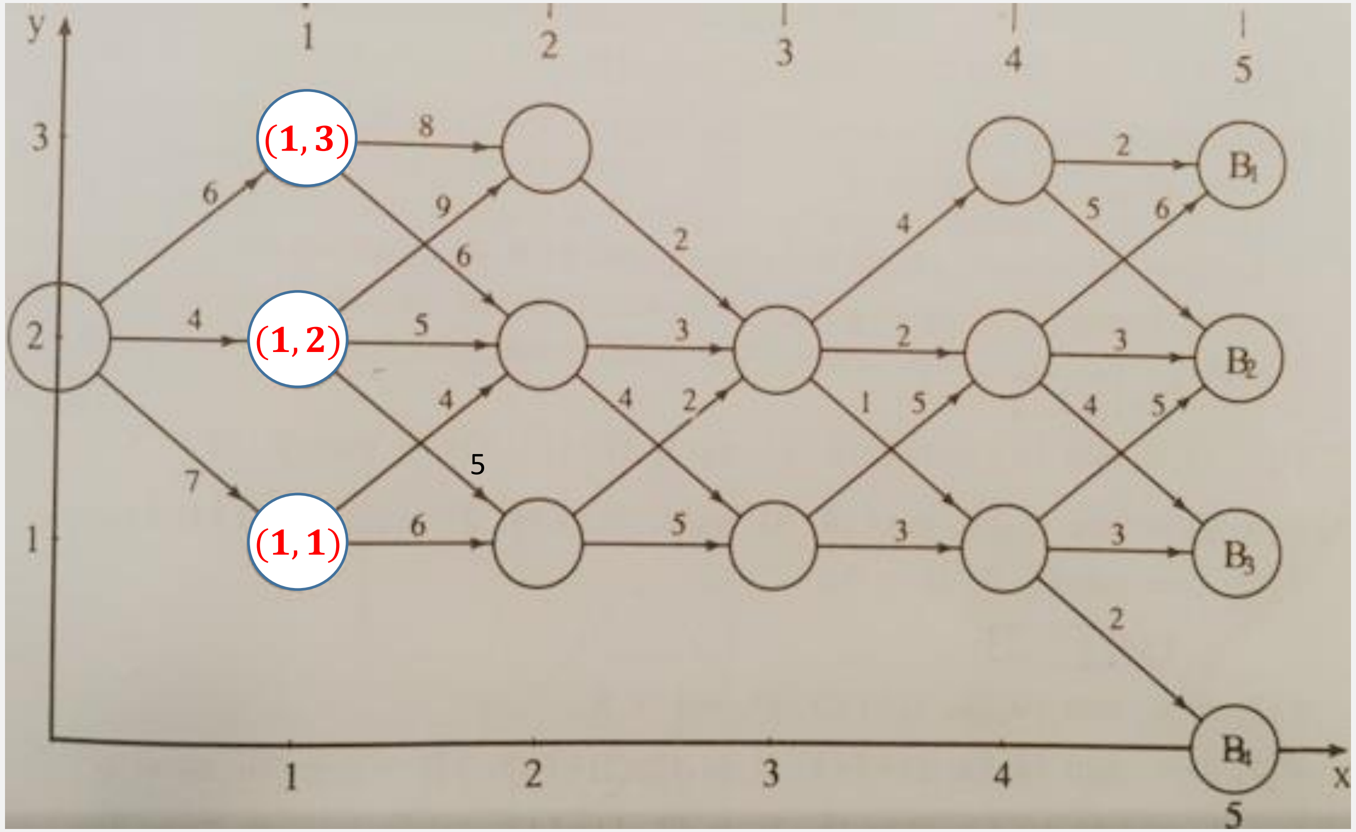


- **Για $x = 1$:**

$f(1,3) = min\{a_2(1,3) + f(2,3), a_3(1,3) + f(2,2)\} = min\{13,12\} = 12$

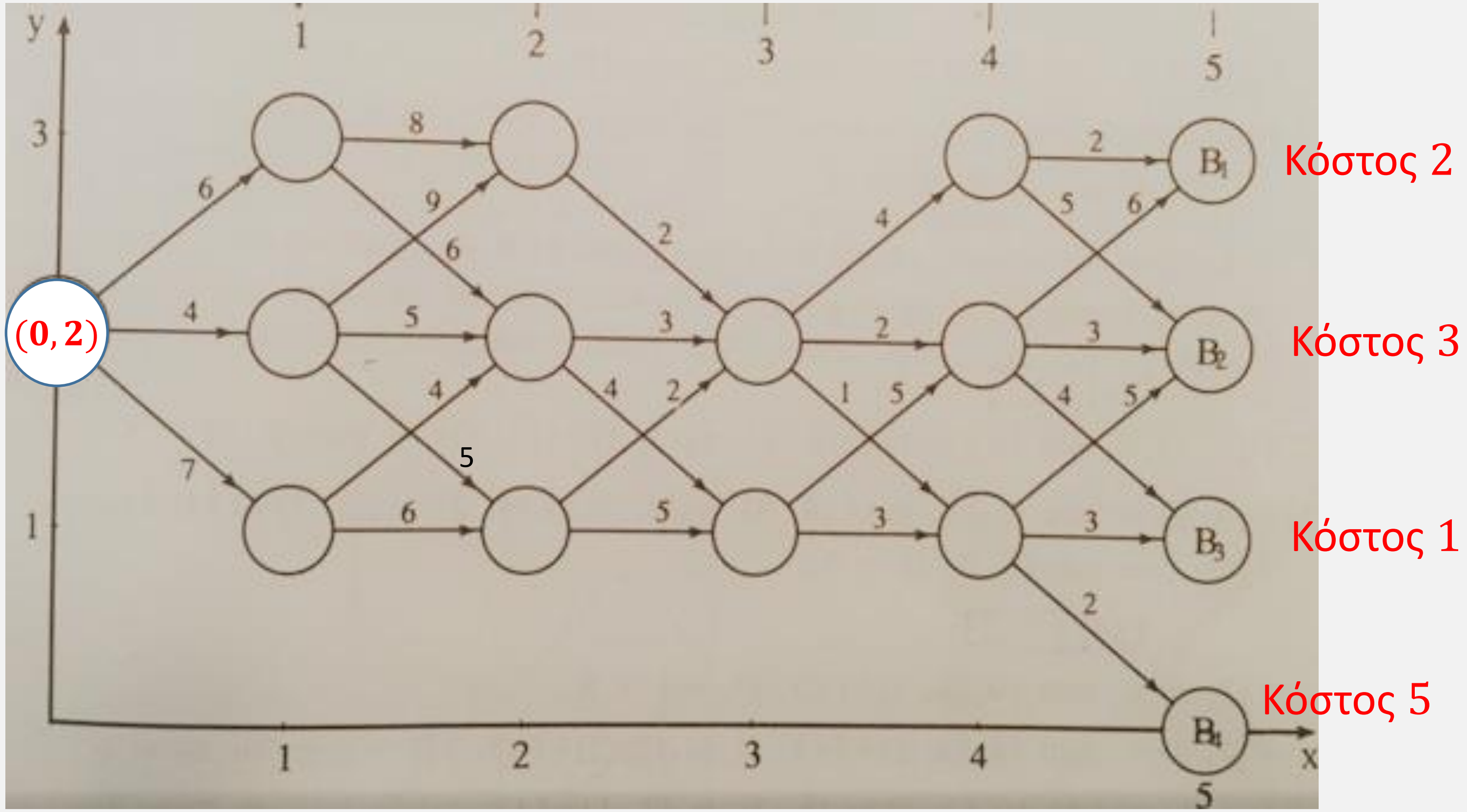
$f(1,2) = min\{a_1(1,2) + f(2,3), a_2(1,2) + f(2,2), a_3(1,2) + f(2,1)\} = min\{14,11,12\} = 11$

$f(1,1) = min\{a_1(1,1) + f(2,2), a_2(1,1) + f(2,1)\} = min\{10,13\} = 10$



- **Για $x = 0$:**

$$f(0,2) = min\{a_1(0,2) + f(1,3), a_2(0,2) + f(1,2), a_3(0,2) + f(1,1)\} = min\{18,16,17\} = 16$$



Οπότε:

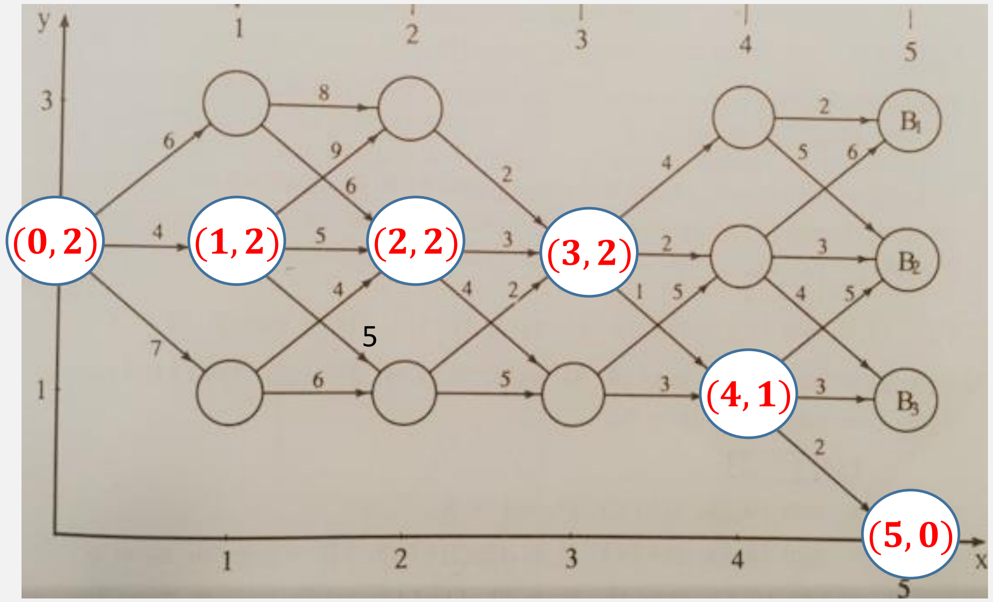
$$f(0,2) = \min\left\{\begin{matrix} a_1(0,2) + f(1,3) \\ \boldsymbol{a_2(0,2) + f(1,2)} \\ a_3(0,2) + f(1,1) \end{matrix}\right\} = 16$$

$$f(1,2) = \min\left\{\begin{matrix} a_1(1,2) + f(2,3) \\ \boldsymbol{a_2(1,2) + f(2,2)} \\ a_3(1,2) + f(2,1) \end{matrix}\right\} = 11$$

$$f(2,2) = min\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{a_2(2,2) + f(3,2)} \\ a_3(2,2) + f(3,1) \end{matrix}\right\} = 6$$

$$f(3,2) = min\left\{\begin{matrix} a_1(3,2) + f(4,3) \\ a_2(3,2) + f(4,2) \\ \boldsymbol{a_3(3,2) + f(4,1)} \end{matrix}\right\} = 3$$

$$f(4,1) = min\left\{\begin{matrix} a_1(4,1) + f(5,2) \\ a_2(4,1) + f(5,1) \\ \boldsymbol{a_3(4,1) + f(5,0)} \end{matrix}\right\} = 2$$



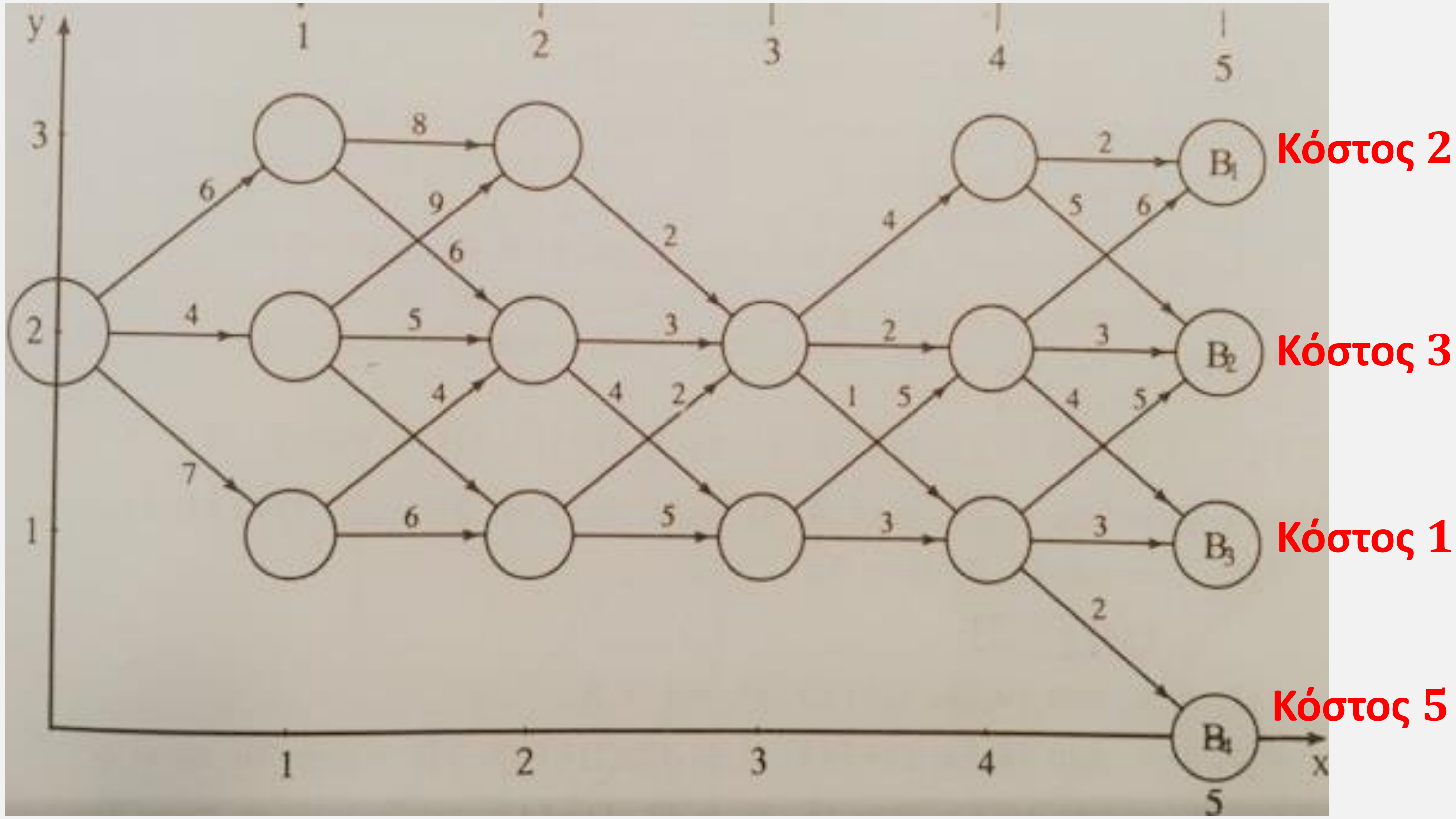
Επομένως η βέλτιστη διαδρομή είναι:

$$\boldsymbol{(0,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (4,1) \rightarrow (5,0)}$$

με συνολικό κόστος **16**.

Άσκηση

Να λυθεί το αρχικό προβλημα, αν θεωρήσουμε ότι ο κάθε τελικός κόμβος έχει ένα **κόστος**, όπως αναγράφετε στο σχήμα.

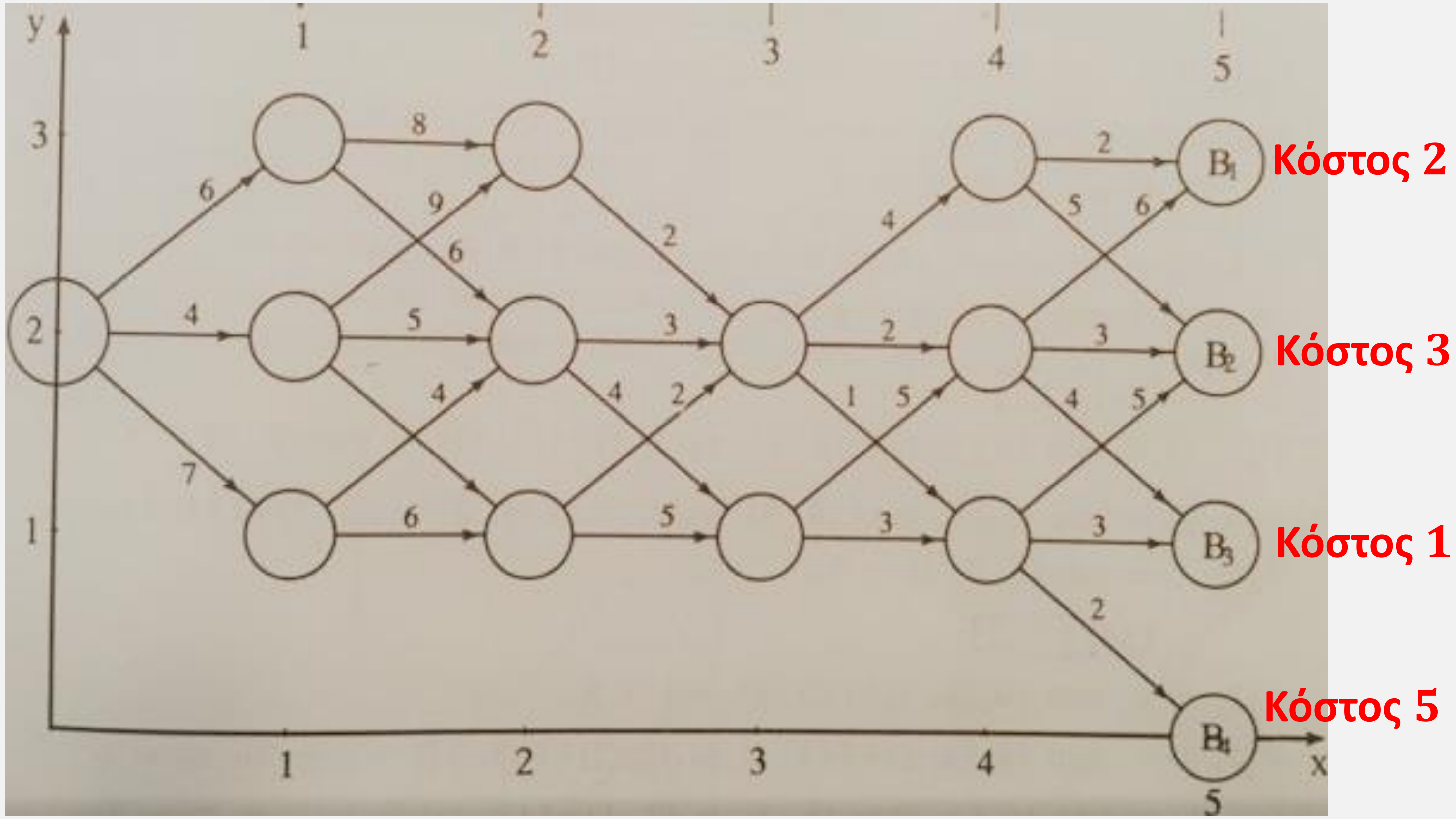


Λύση

Η μόνη αλλαγή στην λύση του προβλήματος είναι ότι αλλάζουν οι οριακές συνθήκες:

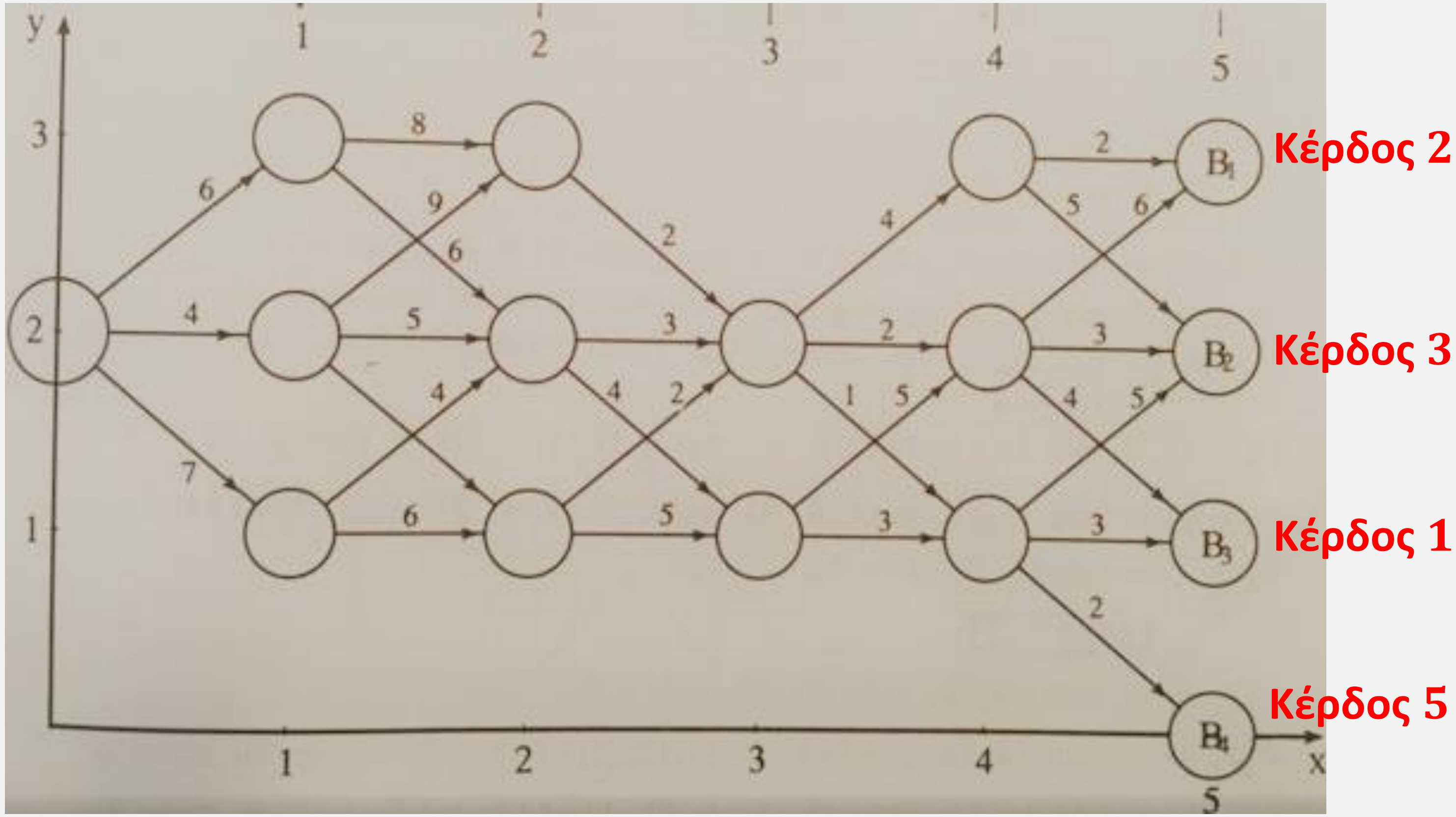
Οριακές συνθήκες

$f(5,3) = 2$
$f(5,2) = 3$
$f(5,1) = 1$
$f(5,0) = 5$



Άσκηση

Να λυθεί το αρχικό προβλημα, αν θεωρήσουμε ότι ο κάθε τελικός κόμβος έχει ένα **κέρδος**, όπως αναγράφετε στο σχήμα.

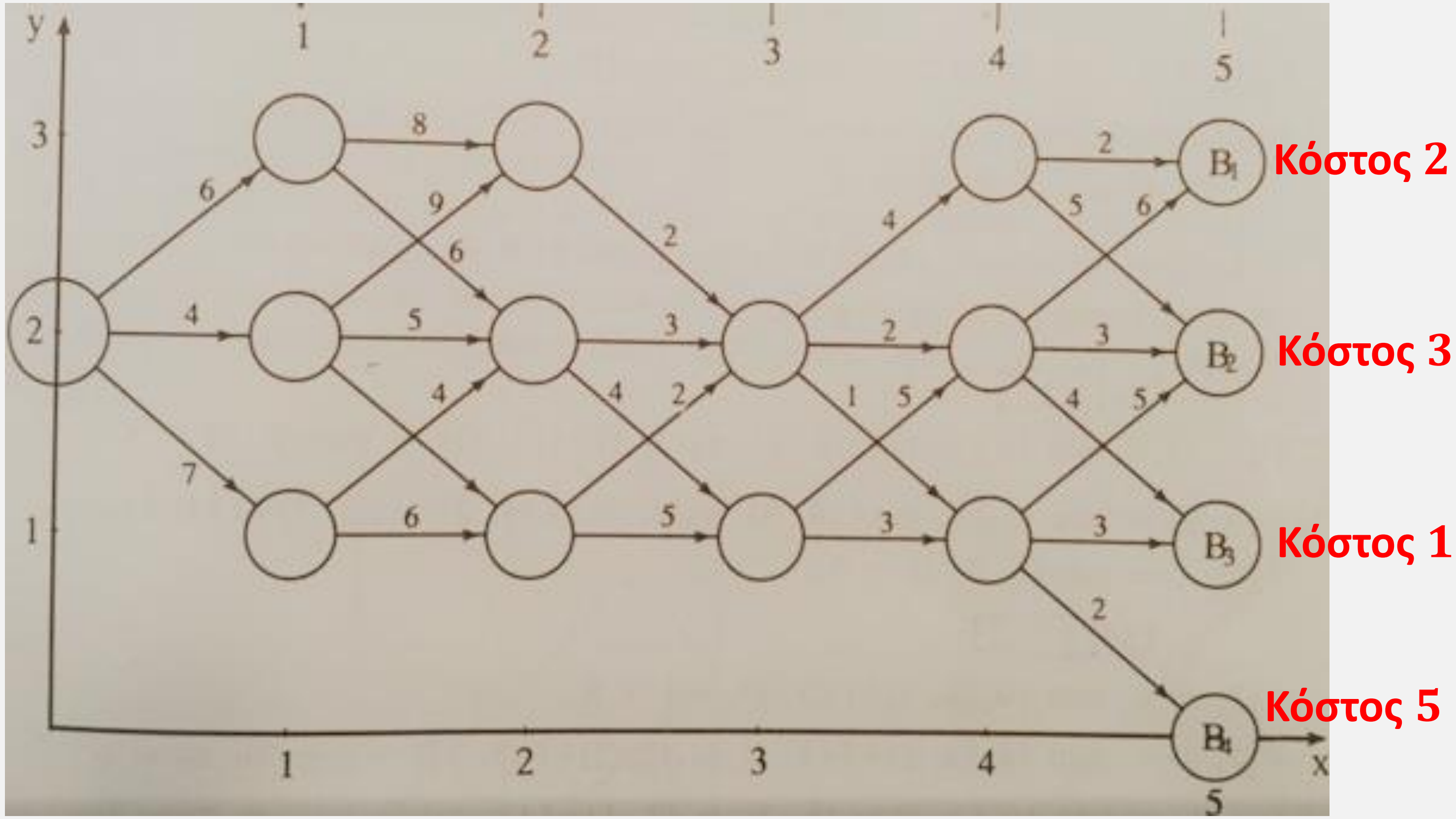


Λύση

Η μόνη αλλαγή στην λύση του προβλήματος είναι ότι αλλάζουν οι οριακές συνθήκες:

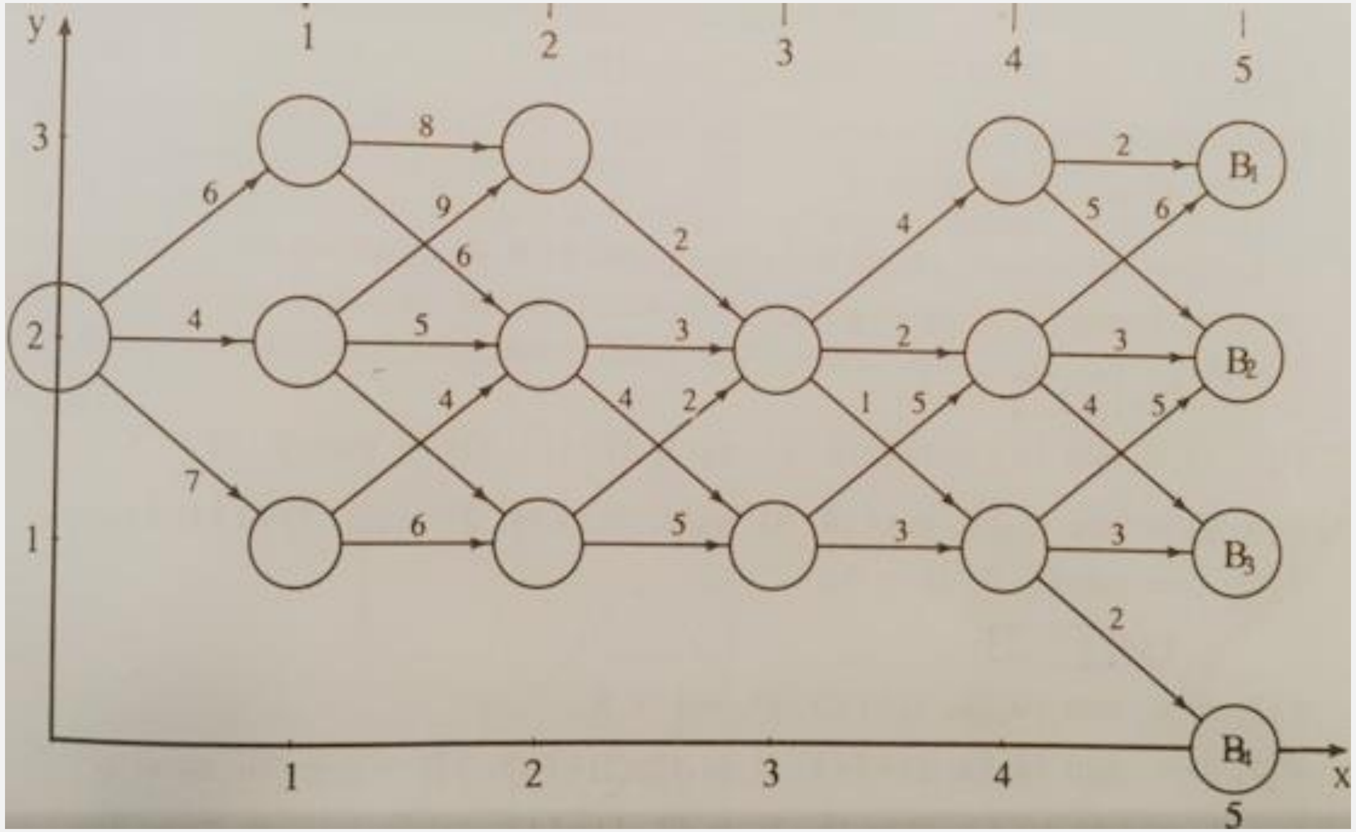
Οριακές συνθήκες

$$f(5,3) = -2$$
$$f(5,2) = -3$$
$$f(5,1) = -1$$
$$f(5,0) = -5$$



Άσκηση

Να λυθεί το αρχικό προβλημα, αν θεωρήσουμε ότι στα τόξα του σχήματος αναγράφονται **κέρδη** (αντί για κόστη) και θέλουμε να βρέβουμε **την διαδρομή μέγιστου κέρδους** από τον κόμβο (2,0) μέχρι κάποιον από τους κόμβους B1, B2, B3, B4.



Βιβλιογραφία

1) Π.-Χ. Βασιλείου (2001) Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Ζήτη.
2) Π.-Χ. Βασιλείου, Γ. Τσακλίδης, Ν. Τσάντας (1998) Ασκήσεις στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Εκδόσεις Ζήτη.
3) Γ. Βασιλειάδης (2012) Σημειώσεις Δυναμικού Προγραμματισμού. Τμήμα Μαθηματικών, ΑΠΘ.